

米田構造

alg-d

https://alg-d.com/math/kan_extension/

2025 年 9 月 10 日

各点 Kan 拡張を定義する方法の 1 つが米田構造である。これは 2-category の中に米田埋込に相当する 1-morphism が存在するとしたものであり、この米田埋込を使って各点 Kan 拡張を定義する (これをここでは y -各点 Kan 拡張と呼ぶ)。

目次

1	復習	1
2	定義	2
3	y -各点左 Kan 拡張	8
4	weighted colimit	13
5	普遍随伴	15
6	y -忠実充満	17

1 復習

以下の命題については「2-category での随伴・Kan 拡張・忠実充満」の PDF を参照。

定理 1. $f: a \rightarrow b$, $g: a \rightarrow c$ で, 左 Kan 拡張 $\langle f^\dagger g, \eta \rangle$ が存在すると仮定する.

$$\begin{array}{ccc} & b & \\ f \uparrow & \searrow f^\dagger g & \\ a & \xrightarrow{g} & c \end{array}$$

$\eta \Uparrow$

このとき $h: b \rightarrow d$ に対して

左 Kan 拡張 $\langle (h \circ f)^\dagger g, \sigma \rangle$ が存在する $\iff$ 左 Kan 拡張 $\langle h^\dagger(f^\dagger g), \tau \rangle$ が存在する.

$$\begin{array}{ccc} d & & d \\ h \uparrow & \searrow (h \circ f)^\dagger g & \uparrow h^\dagger(f^\dagger g) \\ b & & b \\ f \uparrow & \Uparrow \sigma & \Uparrow \tau \\ a & \xrightarrow{g} & c \end{array}$$

$\Uparrow \eta$

更に, これらが存在するとき $(h \circ f)^\dagger g \cong h^\dagger(f^\dagger g)$, $\sigma = (\tau \bullet f) * \eta$ である. □

命題 2. $f: a \rightarrow b$ が忠実充満

$\iff f_\dagger f = \langle \text{id}_b, \text{id}_f \rangle$ で, これが絶対左 Kan リフトになる. □

命題 3. 随伴 $f \dashv u: a \rightarrow b$ の unit を η とするとき

f が忠実充満 $\iff \eta$ が同型.

□

2 定義

strict 2-category $\mathcal{C}$ の 1-morphism からなる集まり A で, 次の条件を満たすものを取り固定する.

$f: a \rightarrow b$, $g: b \rightarrow c$, $g \in A$ ならば $g \circ f \in A$ である.

A に含まれることを admissible であるという. また id_a が admissible なとき, 対象 $a \in \mathcal{C}$ は admissible であるという. 以下では, f が admissible であることを強調するために $\textcolor{red}{f}$ のように赤字で表すことがある.

1 つ注意しておく、 $f: a \rightarrow b$ で b が admissible とすると、 $f = \text{id}_b \circ f$ だから f も admissible である。

定義. admissible な対象 $a \in \mathcal{C}$ に対して、対象 $\hat{a} \in \mathcal{C}$ と admissible な $y_a: a \rightarrow \hat{a}$ が与えられ、以下の条件を満たすとき、これを米田構造 (yonedo structure) という。

- (1) $f: a \rightarrow b$ を 1-morphism として、 a, f が admissible とするとき、 $f^\dagger y_a$ が存在する。 $f^\dagger y_a = \langle b(f, 1), \chi^f \rangle$ と書く。

$$\begin{array}{ccc} & b & \\ f \uparrow & \searrow^{b(f,1)} & \\ a & \xrightarrow{y_a} & \hat{a} \\ & \uparrow \chi^f & \end{array}$$

- (2) 条件 (1) で得られた $\langle b(f, 1), \chi^f \rangle$ に対して $b(f, 1) \dagger y_a = \langle f, \chi^f \rangle$ であり、更にこれは絶対左 Kan リフトである。

$$\begin{array}{ccc} & b & \\ f \nearrow & \downarrow^{b(f,1)} & \\ a & \xrightarrow{y_a} & \hat{a} \\ & \uparrow \chi^f & \end{array}$$

- (3) admissible な対象 $a \in \mathcal{C}$ に対して $y_a^\dagger y_a = \langle \text{id}_{\hat{a}}, \text{id}_{y_a} \rangle$ である。

$$\begin{array}{ccc} & \hat{a} & \\ y_a \uparrow & \searrow^{\text{id}_{\hat{a}}} & \\ a & \xrightarrow{y_a} & \hat{a} \\ & \uparrow \text{id}_{y_a} & \end{array}$$

- (4) $f: a \rightarrow b$, $g: b \rightarrow c$ を 1-morphism として、 a, b, g が admissible とする。 y_b が admissible だから $y_b \circ f$ も admissible であり、よって $f^{-1} := \hat{b}(y_b \circ f, 1)$ が定まる。このとき、次の図式が $(g \circ f)^\dagger y_a$ を定める。よって $c(g \circ f, 1) \cong f^{-1} \circ c(g, 1)$ である。

$$\begin{array}{ccc} c & & \\ g \uparrow & \searrow^{c(g,1)} & \\ b & \xrightarrow{y_b} & \hat{b} \\ f \uparrow & \uparrow \chi^{y_b \circ f} & \downarrow f^{-1} := \hat{b}(y_b \circ f, 1) \\ a & \xrightarrow{y_a} & \hat{a} \end{array}$$

例 4. locally small とは限らない圏がなす 2-category において

- $F: C \rightarrow D$ が admissible
 $\iff$ 任意の $c \in C$, $d \in D$ に対して $\text{Hom}_D(Fc, d)$ が small
- admissible (即ち locally small) な圏 C に対して $\widehat{C} := \mathbf{Set}^{C^{\text{op}}}$.
- $y_C: C \rightarrow \widehat{C}$ を米田埋込とする.

と定めれば米田構造となる. この場合 admissible な関手 $F: C \rightarrow D$ に対して関手 $D(F, 1): D \rightarrow \widehat{C}$ は $D(F, 1)(\square) = \text{Hom}_D(F-, \square)$ で与えられる. $\square$

以下, 米田構造を 1 つ取って考える. $\text{id}_a^\dagger y_a \cong y_a$ だから $a(\text{id}_a, 1) = y_a$, $\chi^{\text{id}_a} = \text{id}_{y_a}$ としてよい.

$$\begin{array}{ccc}
 & a & \\
 \text{id}_a \uparrow & \searrow a(\text{id}_a, 1) = y_a & \\
 a & \xrightarrow{y_a} & \widehat{a}
 \end{array}$$

$f, g: a \rightarrow b$ で a, f, g を admissible とする. $\alpha: f \Rightarrow g$ を 2-morphism とするとき左 Kan 拡張の普遍性から 2-morphism $b(\alpha, 1): b(g, 1) \Rightarrow b(f, 1)$ が一意に定まる.

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{ccc}
 b & & \\
 \uparrow g & \searrow b(f, 1) & \\
 a & \xrightarrow{y_a} & \widehat{a}
 \end{array}
 & = &
 \begin{array}{ccc}
 b & & \\
 \uparrow g & \searrow b(f, 1) & \\
 a & \xrightarrow{y_a} & \widehat{a}
 \end{array}
 \end{array}$$

任意の $\beta: s \Rightarrow t: x \rightarrow b$ に対して $b(f, s) := b(f, 1) \circ s$, $b(\alpha, \beta) := b(\alpha, 1) \bullet \beta$ と定義する.

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{ccc}
 & b(f, s) & \\
 x & \searrow & \widehat{a} \\
 & \Downarrow b(\alpha, \beta) & \\
 & b(g, t) &
 \end{array}
 & := &
 \begin{array}{ccc}
 & s & \\
 x & \searrow & b \\
 & \Downarrow \beta & \\
 & t &
 \end{array}
 \begin{array}{ccc}
 & b(f, 1) & \\
 b & \searrow & \widehat{a} \\
 & \Downarrow b(\alpha, 1) & \\
 & b(g, 1) &
 \end{array}
 \end{array}$$

このとき $b(f, \text{id}_b) = b(f, 1)$, $b(\alpha, \text{id}_{\text{id}_b}) = b(\alpha, 1)$ だから, この記号に現れる「1」は id のことだと思ってよい. また条件 (3) より $\widehat{a}(y_a, 1) \cong \text{id}_{\widehat{a}}$ となるから $f: c \rightarrow \widehat{a}$ に対して $\widehat{a}(y_a, f) = \widehat{a}(y_a, 1) \circ f \cong f$ となり「米田の補題」が成り立つことが分かる.

a から b への admissible な 1-morphism 全体を $\text{Adm}(a, b)$ と書けば, $b(-, \square)$ は関手 $\text{Adm}(a, b)^{\text{op}} \times \mathcal{C}(x, b) \rightarrow \mathcal{C}(x, \widehat{a})$ を定める.

命題 5. $a \in \mathcal{C}$ を admissible とするとき, $y_a: a \rightarrow \widehat{a}$ は忠実充満である.

証明. $a(\text{id}_a, 1) = y_a$, $\chi^{\text{id}_a} = \text{id}_{y_a}$ だから, 条件 (2) より $(y_a)_\dagger y_a = \langle \text{id}_a, \text{id}_{y_a} \rangle$ は絶対左 Kan リフトである.

$$\begin{array}{ccc} & & a \\ & \nearrow \text{id}_a & \downarrow y_a \\ a & \xrightarrow{y_a} & \hat{a} \\ & \nwarrow \text{id}_{y_a} & \uparrow \end{array}$$

よって命題 2 より y_a は忠実充満である. □

ここで米田構造について次の条件を考える.

(5) $a \in \mathcal{C}$ と $f: a \rightarrow b$ が admissible で, 図式

$$\begin{array}{ccc} & & b \\ & \nearrow f & \downarrow g \\ a & \xrightarrow{y_a} & \hat{a} \\ & \nwarrow \eta & \uparrow \end{array}$$

が絶対左 Kan リフトであるとする. このとき $\langle g, \eta \rangle$ は f に沿った y_a の c -各点左 Kan 拡張である.

次の命題は米田構造において基本となる命題である.

命題 6. $f: a \rightarrow b$, $g: a \rightarrow c$, $l: b \rightarrow c$ で, a, f, g が admissible であるとする. 等式

$$\begin{array}{ccc} b & \xrightarrow{l} & c \\ \uparrow f & \nearrow \eta & \downarrow c(g,1) \\ a & \xrightarrow{y_a} & \hat{a} \\ & \nwarrow \chi^g & \uparrow \end{array} = \begin{array}{ccc} b & \xrightarrow{l} & c \\ \uparrow f & \nearrow b(f,1) & \downarrow c(g,1) \\ a & \xrightarrow{y_a} & \hat{a} \\ & \nwarrow \chi^f & \uparrow \end{array}$$

により, η と η' が 1 対 1 に対応する. (即ち, 任意の η に対して, 一意に η' が存在して等式が成立し, また任意の η' に対して一意に η が存在して等式が成り立つ.) 更に

- (1) η' が同型ならば $l_\dagger g = \langle f, \eta \rangle$ であり, これは絶対左 Kan リフトとなる.
- (2) 条件 (5) が成り立つならば (1) の逆も成り立つ. 即ち $\langle f, \eta \rangle$ が l に沿った g の絶対左 Kan リフトならば, η' は同型である.
- (3) $f^\dagger g = \langle l, \eta \rangle \iff c(g, 1)_\dagger b(f, 1) = \langle l, \eta' \rangle$

証明. 1 対 1 対応は $c(g, 1)_\dagger y_a = \langle g, \chi^g \rangle$ と $f^\dagger y_a = \langle b(f, 1), \chi^f \rangle$ の普遍性から得られる.

(1) η' が同型であるとする．このとき f は $c(g, 1) \circ l$ に沿った y_a の絶対左 Kan リフトである．故に命題 1 から, $l_{\dagger}g = \langle f, \eta \rangle$ で, これは絶対左 Kan リフトである．

(2) $l_{\dagger}g = \langle f, \eta \rangle$ が絶対左 Kan リフトだとすると, 米田構造の条件 (2) と定理 1 (の絶対左 Kan リフトバージョン) より $f_{\dagger}y_a = c(g, l)$ も絶対左 Kan リフトである．従って条件 (5) より $f^{\dagger}y_a = c(g, l)$ である．故に左 Kan 拡張の普遍性から η' は同型となる．

(3) 同様なので $\implies$ のみ示す． $f^{\dagger}g = \langle l, \eta \rangle$ とする．任意の 1-morphism $k: b \rightarrow c$ と 2-morphism $\theta': b(f, 1) \Rightarrow c(g, 1) \circ k$ を取り, 更に θ' に対応する θ を取る．

$$\begin{array}{ccc}
 & \xrightarrow{k} & \\
 b & \nearrow \theta \Uparrow g & c \\
 f \uparrow & \nearrow \chi^g \Uparrow & \downarrow c(g, 1) \\
 a & \xrightarrow{y_a} & \hat{a}
 \end{array}
 =
 \begin{array}{ccc}
 & \xrightarrow{k} & \\
 b & \nearrow b(f, 1) \theta' \Uparrow & c \\
 f \uparrow & \nearrow \chi^f \Uparrow & \downarrow c(g, 1) \\
 a & \xrightarrow{y_a} & \hat{a}
 \end{array}$$

$f^{\dagger}g = \langle l, \eta \rangle$ の普遍性により, 次の図式の σ が存在して等式が成り立つ．

$$\begin{array}{ccc}
 & \xrightarrow{k} & \\
 b & \xrightarrow{l \Uparrow \sigma} & c \\
 f \uparrow & \nearrow \eta \Uparrow g & \\
 a & &
 \end{array}
 =
 \begin{array}{ccc}
 & \xrightarrow{k} & \\
 b & \nearrow \theta \Uparrow & c \\
 f \uparrow & \nearrow g & \\
 a & &
 \end{array}$$

このとき

$$\begin{array}{ccc}
 & \xrightarrow{k} & \\
 b & \xrightarrow{l \Uparrow \sigma} & c \\
 f \uparrow & \nearrow b(f, 1) \eta' \Uparrow & \downarrow c(g, 1) \\
 a & \xrightarrow{y_a} & \hat{a}
 \end{array}
 =
 \begin{array}{ccc}
 & \xrightarrow{k} & \\
 b & \xrightarrow{l \Uparrow \sigma} & c \\
 f \uparrow & \nearrow \eta \Uparrow g & \downarrow c(g, 1) \\
 a & \xrightarrow{y_a} & \hat{a}
 \end{array}
 =
 \begin{array}{ccc}
 & \xrightarrow{k} & \\
 b & \nearrow \theta \Uparrow g & c \\
 f \uparrow & \nearrow \chi^g \Uparrow & \downarrow c(g, 1) \\
 a & \xrightarrow{y_a} & \hat{a}
 \end{array}
 =
 \begin{array}{ccc}
 & \xrightarrow{k} & \\
 b & \nearrow b(f, 1) \theta' \Uparrow & c \\
 f \uparrow & \nearrow \chi^f \Uparrow & \downarrow c(g, 1) \\
 a & \xrightarrow{y_a} & \hat{a}
 \end{array}$$

となるから、 $f^\dagger y_a = \langle b(f, 1), \chi^f \rangle$ の普遍性により次の等式が成り立つ。

$$\begin{array}{ccc}
 b & \xrightarrow{k} & c \\
 \downarrow b(f, 1) & \nearrow l \uparrow \sigma & \downarrow c(g, 1) \\
 & & \hat{a}
 \end{array}
 \quad \eta' \uparrow \uparrow \quad = \quad
 \begin{array}{ccc}
 b & \xrightarrow{k} & c \\
 \downarrow b(f, 1) & \nearrow \theta' \uparrow \uparrow & \downarrow c(g, 1) \\
 & & \hat{a}
 \end{array}$$

このような σ は一意だから $c(g, 1) \dagger b(f, 1) = \langle l, \eta' \rangle$ である。 $\square$

命題 7. $f: a \rightarrow b$, $u: b \rightarrow a$, $\eta: \text{id}_a \Rightarrow u \circ f$ で a, f が admissible だとする。このとき

$f \dashv u$ で、 η がこの随伴の unit $\iff$ 命題 6 で η に対応する η' が同型となる。

$$\begin{array}{ccc}
 b & \xrightarrow{u} & a \\
 \uparrow f & \nearrow \eta \uparrow \uparrow \text{id}_a & \downarrow y_a \\
 a & \xrightarrow{y_a} & \hat{a}
 \end{array}
 \quad \chi^{\text{id}_a} = \text{id}_{y_a} \uparrow \uparrow \quad = \quad
 \begin{array}{ccc}
 b & \xrightarrow{u} & a \\
 \uparrow f & \nearrow b(f, 1) \uparrow \uparrow \eta' \uparrow \uparrow & \downarrow y_a \\
 a & \xrightarrow{y_a} & \hat{a}
 \end{array}$$

証明. ($\implies$) $f \dashv u$ で η を unit とすれば $f^\dagger \text{id}_a = \langle u, \eta \rangle$ で、これは絶対左 Kan 拡張である。故に次の左辺の合成は左 Kan 拡張になる。

$$\begin{array}{ccc}
 b & \xrightarrow{u} & a \\
 \uparrow f & \nearrow \eta \uparrow \uparrow \text{id}_a & \downarrow y_a \\
 a & \xrightarrow{y_a} & \hat{a}
 \end{array}
 \quad \chi^{\text{id}_a} = \text{id}_{y_a} \uparrow \uparrow \quad = \quad
 \begin{array}{ccc}
 b & \xrightarrow{u} & a \\
 \uparrow f & \nearrow b(f, 1) \uparrow \uparrow \eta' \uparrow \uparrow & \downarrow y_a \\
 a & \xrightarrow{y_a} & \hat{a}
 \end{array}$$

よって右辺全体も左 Kan 拡張である。右辺の η' は左 Kan 拡張 $b(f, 1)$ の普遍性から得られていたから、 η' は同型である。

($\impliedby$) η' が同型だから命題 6 により $u \dagger \text{id}_a = \langle f, \eta \rangle$ は絶対左 Kan リフトであり、よって $f \dashv u$ となる。 $\square$

命題 8. $f: a \rightarrow b$, $u: b \rightarrow a$ で a, f が admissible のとき

$$f \dashv u \iff b(f, 1) \cong a(\text{id}, u).$$

証明. $y_a \circ u = a(\text{id}, 1) \circ u = a(\text{id}, u)$ だから前命題よりわかる。 $\square$

命題 9. $f \dashv u: a \rightarrow b$ とする。 $s: x \rightarrow a$, $t: x' \rightarrow b$ で x, a, f が admissible ならば、 $b(f \circ s, t) \cong a(s, u \circ t)$ が成り立つ。

証明. $f \dashv u: a \rightarrow b$ とすれば前命題より $b(f, 1) \cong a(\text{id}, u)$ である. 故に

$$\begin{aligned}
 b(f \circ s, t) &= b(f \circ s, 1) \circ t \\
 &\cong s^{-1} \circ b(f, 1) \circ t \\
 &\cong s^{-1} \circ a(\text{id}, u) \circ t \\
 &= s^{-1} \circ a(\text{id}, 1) \circ u \circ t \\
 &\cong a(s, 1) \circ u \circ t \\
 &= a(s, u \circ t)
 \end{aligned}$$

□

3 y-各点左 Kan 拡張

定義. 次の図式で, $a, b, g, l, b(f, 1)$ が admissible だとする.

$$\begin{array}{ccc}
 & b & \\
 f \uparrow & \nearrow l & \\
 a & \xrightarrow{g} & c
 \end{array}$$

$\eta \Uparrow$

命題 6 で η に対応する η' を取る.

$$\begin{array}{ccc}
 b & \xrightarrow{l} & c \\
 f \uparrow & \nearrow \eta \Uparrow g & \downarrow c(g, 1) \\
 a & \xrightarrow{y_a} & \hat{a}
 \end{array}
 \quad \chi^g \Uparrow \quad = \quad
 \begin{array}{ccc}
 b & \xrightarrow{l} & c \\
 f \uparrow & \nearrow b(f, 1) \Uparrow \eta' & \downarrow c(g, 1) \\
 a & \xrightarrow{y_a} & \hat{a}
 \end{array}
 \quad \chi^f \Uparrow$$

この η' に対して, 更に命題 6 で対応する η'' を取る.

$$\begin{array}{ccc}
 c & \xrightarrow{c(g, 1)} & \hat{a} \\
 l \uparrow & \nearrow \eta' \Uparrow b(f, 1) & \downarrow \hat{a}(b(f, 1), 1) \\
 b & \xrightarrow{y_b} & \hat{b}
 \end{array}
 \quad \chi^{b(f, 1)} \Uparrow \quad = \quad
 \begin{array}{ccc}
 c & \xrightarrow{c(g, 1)} & \hat{a} \\
 l \uparrow & \nearrow c(l, 1) \Uparrow \eta'' & \downarrow \hat{a}(b(f, 1), 1) \\
 b & \xrightarrow{y_b} & \hat{b}
 \end{array}
 \quad \chi^l \Uparrow$$

$\langle l, \eta \rangle$ が f に沿った g の y-各点左 Kan 拡張とは, $\eta'': c(l, 1) \Rightarrow \hat{a}(b(f, 1), c(g, 1))$ が同型になることをいう.

命題 10. y -各点左 Kan 拡張は左 Kan 拡張である.

証明. $\langle l, \eta \rangle$ が f に沿った g の y -各点左 Kan 拡張であるとする.

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{ccc}
 b & \xrightarrow{l} & c \\
 f \uparrow & \eta \Uparrow g & \nearrow \\
 a & \xrightarrow{y_a} & \hat{a} \\
 & \chi^g \Uparrow & \downarrow c(g,1)
 \end{array} & = & \begin{array}{ccc}
 b & \xrightarrow{l} & c \\
 f \uparrow & \chi^f \Uparrow & \nearrow b(f,1) \\
 a & \xrightarrow{y_a} & \hat{a} \\
 & & \downarrow c(g,1)
 \end{array} \\
 \\
 \begin{array}{ccc}
 c & \xrightarrow{c(g,1)} & \hat{a} \\
 l \uparrow \eta' \Uparrow b(f,1) & \nearrow & \downarrow \hat{a}(b(f,1),1) \\
 b & \xrightarrow{y_b} & \hat{b} \\
 & \chi^{b(f,1)} \Uparrow &
 \end{array} & = & \begin{array}{ccc}
 c & \xrightarrow{c(g,1)} & \hat{a} \\
 l \uparrow & \chi^l \Uparrow & \nearrow c(l,1) \\
 b & \xrightarrow{y_b} & \hat{b} \\
 & & \downarrow \hat{a}(b(f,1),1) \\
 & & \eta'' \Uparrow
 \end{array}
 \end{array}$$

定義より η'' が同型である. よって命題 6 の (1) により $c(g,1)_+ b(f,1) = \langle l, \eta' \rangle$ となる. このとき命題 6 の (3) により $f^\dagger g = \langle l, \eta \rangle$ である. $\square$

命題 11. 米田構造の条件 (5) を仮定する. 次の図式で, $a, b, g, l, b(f,1)$ が admissible だとする.

$$\begin{array}{ccc}
 & b & \\
 f \uparrow & \nearrow l & \\
 a & \xrightarrow{g} & c
 \end{array}$$

$\langle l, \eta \rangle$ が c -各点左 Kan 拡張ならば y -各点左 Kan 拡張である.

証明. 命題 6 の (2) より, y -各点左 Kan 拡張であることを示すには等式

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{ccc}
 b & \xrightarrow{l} & c \\
 f \uparrow & \eta \Uparrow g & \nearrow \\
 a & \xrightarrow{y_a} & \hat{a} \\
 & \chi^g \Uparrow & \downarrow c(g,1)
 \end{array} & = & \begin{array}{ccc}
 b & \xrightarrow{l} & c \\
 f \uparrow & \chi^f \Uparrow & \nearrow b(f,1) \\
 a & \xrightarrow{y_a} & \hat{a} \\
 & & \downarrow c(g,1)
 \end{array}
 \end{array}$$

において η' が絶対左 Kan リフトであることを示せばよい.

そのために任意の図式

$$\begin{array}{ccc}
 x & \xrightarrow{k} & c \\
 h \downarrow & \theta \Uparrow & \downarrow c(g,1) \\
 b & \xrightarrow{b(f,1)} & \hat{a}
 \end{array}$$

を取る. コンマ対象 $f \downarrow h$ を考える. $\langle g, \chi^g \rangle$ が絶対左 Kan リフトだから, 2-morphism τ が存在して等式

$$\begin{array}{ccc}
 & \xrightarrow{k} & \\
 x & \nearrow & c \\
 \uparrow & \tau \Uparrow & \\
 f \downarrow h & \longrightarrow & a \xrightarrow{y_a} \hat{a} \\
 & \chi^g \Uparrow & \downarrow c(g,1)
 \end{array}
 \quad \text{with red } g \text{ on } a \rightarrow \hat{a}
 \quad = \quad
 \begin{array}{ccc}
 & \xrightarrow{k} & \\
 x & \xrightarrow{h} b & \nearrow c \\
 \uparrow & \Uparrow & \theta \Uparrow \\
 f \downarrow h & \longrightarrow & a \xrightarrow{y_a} \hat{a} \\
 & \chi^f \Uparrow & \downarrow c(g,1)
 \end{array}
 \quad \text{with red } f \text{ on } a \rightarrow \hat{a} \text{ and } b(f,1) \text{ on } b \rightarrow \hat{a}$$

が成り立つ. $\langle l, \eta \rangle$ が c-各点 Kan 拡張であるから, 2-morphism ρ が存在して等式

$$\begin{array}{ccc}
 & \xrightarrow{k} & \\
 x & \xrightarrow{h} b & \xrightarrow{l} c \\
 \uparrow & \Uparrow & \rho \Uparrow \\
 f \downarrow h & \longrightarrow & a \xrightarrow{y_a} \hat{a} \\
 & \chi^f \Uparrow & \downarrow c(g,1)
 \end{array}
 \quad \text{with red } f \text{ on } a \rightarrow \hat{a} \text{ and } \eta \text{ on } b \rightarrow \hat{a}
 \quad = \quad
 \begin{array}{ccc}
 & \xrightarrow{k} & \\
 x & \nearrow & c \\
 \uparrow & \tau \Uparrow & \\
 f \downarrow h & \longrightarrow & a \xrightarrow{y_a} \hat{a} \\
 & \chi^g \Uparrow & \downarrow c(g,1)
 \end{array}
 \quad \text{with red } g \text{ on } a \rightarrow \hat{a}$$

が成り立つ. このとき

$$\begin{array}{ccc}
 & \xrightarrow{k} & \\
 x & \xrightarrow{h} b & \xrightarrow{l} c \\
 \uparrow & \Uparrow & \rho \Uparrow \\
 f \downarrow h & \longrightarrow & a \xrightarrow{y_a} \hat{a} \\
 & \chi^f \Uparrow & \downarrow c(g,1)
 \end{array}
 \quad \text{with red } f \text{ on } a \rightarrow \hat{a} \text{ and } \eta \text{ on } b \rightarrow \hat{a}
 \quad = \quad
 \begin{array}{ccc}
 & \xrightarrow{k} & \\
 x & \xrightarrow{h} b & \xrightarrow{l} c \\
 \uparrow & \Uparrow & \rho \Uparrow \\
 f \downarrow h & \longrightarrow & a \xrightarrow{y_a} \hat{a} \\
 & \chi^g \Uparrow & \downarrow c(g,1)
 \end{array}
 \quad \text{with red } g \text{ on } a \rightarrow \hat{a} \text{ and } \eta \text{ on } b \rightarrow \hat{a}$$

$$\begin{array}{ccc}
 & \xrightarrow{k} & \\
 x & \nearrow & c \\
 \uparrow & \tau \Uparrow & \\
 f \downarrow h & \longrightarrow & a \xrightarrow{y_a} \hat{a} \\
 & \chi^g \Uparrow & \downarrow c(g,1)
 \end{array}
 \quad \text{with red } g \text{ on } a \rightarrow \hat{a}$$

$$= \begin{array}{ccccc} & & k & & \\ & \nearrow & & \searrow & \\ x & \xrightarrow{h} & b & \xrightarrow{\theta} & c \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow f & \uparrow \chi^f & \downarrow c(g,1) \\ f \downarrow h & \longrightarrow & a & \xrightarrow{y_a} & \hat{a} \end{array}$$

となる. $\langle b(f, 1), \chi^f \rangle$ が c -各点 Kan 拡張だから

$$\begin{array}{ccccc} & & k & & \\ & \nearrow & & \searrow & \\ x & \xrightarrow{h} & b & \xrightarrow{\rho} & c \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow \rho & \uparrow l & \downarrow c(g,1) \\ f \downarrow h & \longrightarrow & a & \xrightarrow{y_a} & \hat{a} \end{array} = \begin{array}{ccccc} & & k & & \\ & \nearrow & & \searrow & \\ x & \xrightarrow{h} & b & \xrightarrow{\theta} & c \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow \theta & \uparrow b(f,1) & \downarrow c(g,1) \\ f \downarrow h & \longrightarrow & a & \xrightarrow{y_a} & \hat{a} \end{array}$$

が分かる. この ρ の一意性も容易に分かるから, η' が絶対左 Kan リフトであることが分かった. $\square$

定義. $a \in \mathcal{C}$ が small $\iff a$ と $\hat{a}$ が admissible.

命題 12. $f: a \rightarrow b$ で a が small であり, b が (従って f も) admissible だとする. このとき $f^\dagger y_a = \langle b(f, 1), \chi^f \rangle$ は y -各点左 Kan 拡張である. 特に $y_a^\dagger y_a$ は y -各点左 Kan 拡張である.

証明. 次の等式と y -各点左 Kan 拡張の定義より分かる.

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{ccc} b & \xrightarrow{b(f,1)} & \hat{a} \\ \uparrow f & \uparrow \chi^f & \uparrow y_a \\ a & \xrightarrow{y_a} & \hat{a} \end{array} & = & \begin{array}{ccc} b & \xrightarrow{b(f,1)} & \hat{a} \\ \uparrow f & \uparrow \chi^f & \uparrow y_a \\ a & \xrightarrow{y_a} & \hat{a} \end{array} \\ \begin{array}{ccc} \hat{a} & \xrightarrow{\text{id}} & \hat{a} \\ \uparrow \text{id} & \uparrow b(f,1) & \uparrow \hat{a}(b(f,1),1) \\ b & \xrightarrow{y_b} & \hat{b} \end{array} & = & \begin{array}{ccc} \hat{a} & \xrightarrow{\text{id}} & \hat{a} \\ \uparrow b(f,1) & \uparrow \chi^{b(f,1)} & \uparrow y_b \\ b & \xrightarrow{y_b} & \hat{b} \end{array} \end{array}$$

$\square$

定理 13. $f: a \rightarrow b$ で $a, b, b(f, 1)$ が admissible とするとき, $f^{-1}: \hat{b} \rightarrow \hat{a}$ は右随伴 $\forall f: \hat{a} \rightarrow \hat{b}$ を持つ.

証明. $\forall f := \hat{a}(b(f, 1), 1)$ とおく.

$$\begin{array}{ccc}
 \hat{b} & \xrightarrow{f^{-1}} & \hat{a} \\
 \uparrow y_a & \Uparrow b(f, 1) & \downarrow \forall f \\
 b & \xrightarrow{y_a} & \hat{b} \\
 & \nearrow \chi^{b(f, 1)} & \Uparrow
 \end{array}
 =
 \begin{array}{ccc}
 \hat{b} & \xrightarrow{f^{-1}} & \hat{a} \\
 \uparrow y_a & \Uparrow \text{id}_b & \downarrow \forall f \\
 b & \xrightarrow{y_a} & \hat{b} \\
 & \nearrow \text{id}_b & \Uparrow \eta
 \end{array}$$

$\forall f := \hat{a}(f^{-1} \circ y_b, 1)$ とおく. すると次の図式で $(f^{-1} \circ y_b)^\dagger y_b = \langle \forall f, \chi^{f^{-1} \circ y_b} \rangle$, $y_b^\dagger y_b = \langle \text{id}_b, \text{id}_{y_b} \rangle$ である.

$$\begin{array}{ccc}
 \hat{a} & & \hat{a} \\
 \uparrow f^{-1} & \searrow \forall f := \hat{a}(f^{-1} \circ y_b, 1) & \uparrow f^{-1} \\
 \hat{b} & & \hat{b} \\
 \uparrow y_b & \Uparrow \chi^{f^{-1} \circ y_b} & \uparrow y_b \\
 b & \xrightarrow{y_b} & \hat{b} \\
 & \nearrow \text{id}_b & \Uparrow \text{id}_{y_b}
 \end{array}$$

故に定理 1 から, ある η が存在して $(f^{-1})^\dagger \text{id}_b = \langle \forall f, \eta \rangle$ となり, この 2 つの図式は等しくなる. 故に次の等式が成り立つ.

$$\begin{array}{ccc}
 \hat{a} & & \hat{a} \\
 \uparrow f^{-1} & \searrow \forall f & \uparrow f^{-1} \\
 \hat{b} & & \hat{b} \\
 \uparrow y_b & \Uparrow \chi^{f^{-1} \circ y_b} & \uparrow y_b \\
 b & \xrightarrow{y_b} & \hat{b} \\
 \uparrow f & \Uparrow \chi^{y_b \circ f} & \uparrow f \\
 a & \xrightarrow{y_a} & \hat{a} \\
 & \nearrow \text{id}_b & \Uparrow \eta
 \end{array}
 =
 \begin{array}{ccc}
 \hat{a} & & \hat{a} \\
 \uparrow f^{-1} & \searrow \forall f & \uparrow f^{-1} \\
 \hat{b} & & \hat{b} \\
 \uparrow y_b & \Uparrow \text{id}_{y_b} & \uparrow y_b \\
 b & \xrightarrow{y_b} & \hat{b} \\
 \uparrow f & \Uparrow \chi^{y_b \circ f} & \uparrow f \\
 a & \xrightarrow{y_a} & \hat{a} \\
 & \nearrow \text{id}_b & \Uparrow \eta
 \end{array}$$

米田構造の条件 (4) より左辺全体と, 右辺の $(y_b \circ f)^\dagger y_b = f^{-1} \circ \text{id}_b$ は左 Kan 拡張になる. よって再び定理 1 により $(f^{-1})^\dagger (f^{-1} \circ \text{id}_b) = f^{-1} \circ \forall f$ が左 Kan 拡張になる. 即ち, 左 Kan 拡張 $(f^{-1})^\dagger \text{id}_b = \langle \forall f, \text{id}_b \rangle$ は f^{-1} と交換する. 故に $f^{-1} \dashv \forall f$ である. $\square$

$y_b = b(\text{id}, 1)$ だから $f^{-1} \circ y_b = b(f, 1)$ である。故に $\forall f \cong \hat{a}(b(f, 1), 1)$ となる。

系 14. $a \in \mathcal{C}$ が small のとき $y_a^{-1} \dashv y_{\hat{a}}: \hat{a} \rightarrow \hat{a}$.

証明. $y_a^{-1} \dashv \forall y_a$ で $\forall y_a \cong \hat{a}(\hat{a}(y_a, 1), 1) = \hat{a}(\text{id}_{\hat{a}}, 1) \cong y_{\hat{a}}$ となる。 $\square$

定理 15. $f: a \rightarrow b$ で a, b が admissible とする。 y -各点左 Kan 拡張 $y_a^\dagger(y_b \circ f)$ が存在するならば $f^{-1}: \hat{b} \rightarrow \hat{a}$ は左随伴 $\exists f: \hat{a} \rightarrow \hat{b}$ を持つ。

証明. $\exists f := y_a^\dagger(y_b \circ f)$ とすれば定理 22 より $\exists f \dashv \hat{b}(y_b \circ f, 1) = f^{-1}$ である。 $\square$

4 weighted colimit

定義. $s: a \rightarrow c$, $j: x \rightarrow \hat{a}$ を 1-morphism で^{*1}, a, x, s, j が admissible とする。 s の j -weighted colimit とは admissible な $\text{colim}^j s: x \rightarrow c$ で $c(\text{colim}^j s, 1) \cong \hat{a}(j, c(s, 1))$ となるものをいう (下記図式参照)。

$\text{colim}^j s$ が存在するとき、命題 6 で同型 $c(\text{colim}^j s, 1) \cong \hat{a}(j, c(s, 1))$ に対応する η を取れば $c(s, 1) \dagger j = \langle \text{colim}^j s, \eta \rangle$ は絶対左 Kan リフトである。

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{ccc}
 c & \xrightarrow{c(s, 1)} & \hat{a} \\
 \uparrow \text{colim}^j s & \nearrow \eta \uparrow j & \downarrow \hat{a}(j, 1) \\
 x & \xrightarrow{y_x} & \hat{x} \\
 & \nearrow \chi^j \uparrow &
 \end{array} & = &
 \begin{array}{ccc}
 c & \xrightarrow{c(s, 1)} & \hat{a} \\
 \uparrow \text{colim}^j s & \nearrow c(\text{colim}^j s, 1) & \downarrow \hat{a}(j, 1) \\
 x & \xrightarrow{y_x} & \hat{x} \\
 & \nearrow \chi^{\text{colim}^j s} \uparrow &
 \end{array}
 \end{array}$$

故に $\text{colim}^j s$ は同型を除いて一意である。

例 16. $s: a \rightarrow c$ を 1-morphism で a, s を admissible とする。このとき $\text{colim}^{y_a} s$ は存在して $\text{colim}^{y_a} s \cong s$ である。実際 s は admissible で $\hat{a}(y_a, c(s, 1)) \cong c(s, 1)$ となる。 $\square$

定理 17. 次の図式で, $a, b, g, l, b(f, 1)$ が admissible だとする。

$$\begin{array}{ccc}
 & b & \\
 f \uparrow & & \searrow l \\
 a & \xrightarrow{g} & c
 \end{array}$$

^{*1} j は $\hat{a}$ の generalized element だと思ふとよい

このとき

$$l \text{ が } f \text{ に沿った } g \text{ の } y\text{-各点左 Kan 拡張} \iff l \cong \operatorname{colim}^{b(f,1)} g$$

証明. l が f に沿った g の y -各点左 Kan 拡張 $\iff c(l, 1) \cong \widehat{a}(b(f, 1), c(g, 1))$ だから明らか. $\square$

例 18. small な a に対して $y_a^\dagger y_a = \langle \operatorname{id}_{\widehat{a}}, \operatorname{id}_{y_a} \rangle$ は y -各点左 Kan 拡張である (命題 12). 従って $\operatorname{colim}^{\operatorname{id}_{\widehat{a}}} y_a = \operatorname{id}_{\widehat{a}}$ である. $\square$

定義. $s: a \rightarrow c$, $j: x \rightarrow \widehat{a}$ で a, x, s, j が $\mathfrak{s}$ admissible として $\operatorname{colim}^j s: x \rightarrow c$ が存在するとする. 更に $f: c \rightarrow d$ として, $f \circ s$ と $f \circ \operatorname{colim}^j s$ が $\mathfrak{s}$ admissible とする. このとき

$$f \text{ が } \operatorname{colim}^j s \text{ と交換する} \iff f \circ \operatorname{colim}^j s \text{ が } f \circ s \text{ の } j\text{-weighted colimit となる.}$$

定理 19. 左随伴は weighted colimit と交換する.

証明. $s: a \rightarrow c$, $j: x \rightarrow \widehat{a}$ を 1-morphism で, a, x, s, j が $\mathfrak{s}$ admissible として, $\operatorname{colim}^j s$ が存在するとする. $f \dashv u: c \rightarrow d$ を随伴とするとき

$$\begin{aligned} \widehat{a}(j, d(f \circ s, 1)) &\cong \widehat{a}(j, c(s, u)) \\ &\cong \widehat{a}(j, c(s, 1) \circ u) \\ &\cong \widehat{a}(j, c(s, 1)) \circ u \\ &\cong c(\operatorname{colim}^j s, 1) \circ u \\ &\cong c(\operatorname{colim}^j s, u) \\ &\cong c(f \circ \operatorname{colim}^j s, 1) \end{aligned}$$

となるから, $f \circ \operatorname{colim}^j s \cong \operatorname{colim}^j (f \circ s)$ である. $\square$

命題 20. $s: a \rightarrow c$, $j: x \rightarrow \widehat{a}$, $i: x' \rightarrow \widehat{x}$ で a, x, x', s, j, i が $\mathfrak{s}$ admissible だとする. また $\operatorname{colim}^j s$ と $\operatorname{colim}^i j$ が存在するとする. このとき $\operatorname{colim}^i (\operatorname{colim}^j s) \cong \operatorname{colim}^{\operatorname{colim}^i j} s$ である. (但し, 等式はどちらか一方が存在すればもう一方も存在し同型となることを意味する.)

証明.

$$\begin{aligned}
\widehat{a}(\operatorname{colim}^i j, c(s, 1)) &= \widehat{a}(\operatorname{colim}^i j, 1) \circ c(s, 1) \\
&\cong \widehat{x}(i, \widehat{a}(j, 1)) \circ c(s, 1) \\
&= \widehat{x}(i, \widehat{a}(j, 1) \circ c(s, 1)) \\
&= \widehat{x}(i, \widehat{a}(j, c(s, 1))) \\
&\cong \widehat{x}(i, c(\operatorname{colim}^j s, 1)).
\end{aligned}$$

よって $\operatorname{colim}^i(\operatorname{colim}^j s) \cong \operatorname{colim}^{\operatorname{colim}^i j} s$ である. $\square$

定義. 対象 c が余完備

$\iff s: a \rightarrow c, j: x \rightarrow \widehat{a}$ として a が small で x, s, j が admissible のとき $\operatorname{colim}^j s: x \rightarrow c$ が存在する.

定理 21. 対象 c が余完備

$\iff f: a \rightarrow b, g: a \rightarrow c$ で a が small で $b, g, b(f, 1)$ が admissible のとき y -各点左 Kan 拡張 $f^\dagger g$ が存在する.

証明. ($\implies$) 余完備だから $\operatorname{colim}^{b(f, 1)} g$ が存在し, 故に定理 17 により y -各点左 Kan 拡張 $f^\dagger g$ が存在する.

($\impliedby$) $s: a \rightarrow c, j: x \rightarrow \widehat{a}$ として a が small で x, s, j が admissible とする. 仮定より y -各点左 Kan 拡張 $y_a^\dagger s$ が存在する. このとき

$$\begin{aligned}
c(y_a^\dagger s \circ j, 1) &\cong j^{-1} \circ c(y_a^\dagger s, 1) \\
&\cong j^{-1} \circ \widehat{a}(\widehat{a}(y_a, 1), c(s, 1)) \\
&\cong j^{-1} \circ \widehat{a}(\operatorname{id}, c(s, 1)) \\
&\cong \widehat{a}(j, c(s, 1))
\end{aligned}$$

だから $\operatorname{colim}^j s$ が存在して $\operatorname{colim}^j s \cong y_a^\dagger s \circ j$ である. $\square$

5 普遍随伴

定理 22. $f: a \rightarrow b$ で a を small, f を admissible とする. y -各点左 Kan 拡張 $y_a^\dagger f$ が存在するならば $y_a^\dagger f \dashv b(f, 1): \widehat{a} \rightarrow b$ である.

証明. y -各点左 Kan 拡張 $y_a^\dagger f$ が存在するから, 定義より次の図式の同型 η'' が存在する.

$$\begin{array}{ccc}
 b & \xrightarrow{b(f,1)} & \hat{a} \\
 \uparrow y_a^\dagger f & \nearrow \eta' & \uparrow \text{id}_{\hat{a}} \\
 \hat{a} & \xrightarrow{y_{\hat{a}}} & \hat{\hat{a}} \\
 & \searrow \chi^{\text{id}} & \downarrow \hat{a}(\text{id},1)
 \end{array}
 =
 \begin{array}{ccc}
 b & \xrightarrow{b(f,1)} & \hat{a} \\
 \uparrow y_a^\dagger f & \nearrow b(y_a^\dagger f, 1) & \uparrow \eta'' \\
 \hat{a} & \xrightarrow{y_{\hat{a}}} & \hat{\hat{a}} \\
 & \searrow \chi^{y_a^\dagger f} & \downarrow \hat{a}(\text{id},1)
 \end{array}$$

よって命題 7 より $y_a^\dagger f \dashv b(f, 1)$ となる. $\square$

定理 23. a が small で $l: \hat{a} \rightarrow b$ が admissible かつ余連続であるとする. このとき $f := l \circ y_a$ とすると y -各点 Kan 拡張 $y_a^\dagger f$ が存在して $l \cong y_a^\dagger f$ となる.

証明. l が $\text{colim}^{\text{id}_{\hat{a}}} y_a (= \text{id}_{\hat{a}})$ と交換するから同型 $\eta'': (l, 1) \Rightarrow \hat{a}(\text{id}_{\hat{a}}, b(f, 1))$ が存在する. 命題 6 により η'' に対応する η' を取り, 更に η' に対応する η を取れば, y -各点左 Kan 拡張 $y_a^\dagger f = \langle l, \eta \rangle$ を得る.

$$\begin{array}{ccc}
 b & \xrightarrow{b(f,1)} & \hat{a} \\
 \uparrow l & \nearrow \eta' & \uparrow \text{id}_{\hat{a}} \\
 \hat{a} & \xrightarrow{y_{\hat{a}}} & \hat{\hat{a}} \\
 & \searrow \text{id} & \downarrow \hat{a}(\text{id}_{\hat{a}}, 1)
 \end{array}
 =
 \begin{array}{ccc}
 b & \xrightarrow{b(f,1)} & \hat{a} \\
 \uparrow l & \nearrow b(l, 1) & \uparrow \eta'' \\
 \hat{a} & \xrightarrow{y_{\hat{a}}} & \hat{\hat{a}} \\
 & \searrow \chi^l & \downarrow \hat{a}(\text{id}_{\hat{a}}, 1)
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 \hat{a} & \xrightarrow{l} & b \\
 \uparrow y_a & \nearrow \eta & \uparrow f \\
 a & \xrightarrow{y_a} & \hat{a} \\
 & \searrow \text{id} & \downarrow b(f,1)
 \end{array}
 =
 \begin{array}{ccc}
 \hat{a} & \xrightarrow{l} & b \\
 \uparrow y_a & \nearrow \text{id} & \uparrow \eta' \\
 a & \xrightarrow{y_a} & \hat{a} \\
 & \searrow \text{id} & \downarrow b(f,1)
 \end{array}$$

$\square$

定理 24. a が small で $l \dashv r: \hat{a} \rightarrow b$ かつ l が admissible ならば, ある $f: a \rightarrow b$ が存在して $l \cong y_a^\dagger f$, $r \cong b(f, 1)$ となる.

証明. $l \dashv r: \hat{a} \rightarrow b$ とすると l は余連続だから定理 23 より, $f := l \circ y_a$ とすれば $l \cong y_a^\dagger f \dashv b(f, 1)$ となる. 右随伴の一意性から $r \cong b(f, 1)$ である. $\square$

定義. $f: a \rightarrow b$ が total

$\iff a, f$ が admissible で, $b(f, 1): b \rightarrow \hat{a}$ が admissible な左随伴を持つ.

定理 25. $s: a \rightarrow b$ が total で, $j: x \rightarrow \hat{a}$ を 1-morphism, a を small, x, s を admissible とする. このとき $\text{colim}^j s$ が存在して $\text{colim}^j s \cong y_a^\dagger s \circ j$ となる.

証明. $y_a^\dagger s \circ j$ は admissible なので $b(y_a^\dagger s \circ j, 1) \cong \widehat{a}(j, b(s, 1))$ を示せばよいが, それは

$$b(y_a^\dagger s \circ j, 1) \cong j^{-1} \circ b(y_a^\dagger s, 1) \cong j^{-1} \circ \widehat{a}(\text{id}_{\widehat{a}}, b(s, 1)) \cong \widehat{a}(j, b(s, 1))$$

となり成り立つ. $\square$

定理 26. a が small で $f: a \rightarrow b$ が total のとき, $b(f, 1)$ の admissible な左随伴 h_f は存在し, y_a に沿った f の y-各点左 Kan 拡張となる.

証明. $h_f \dashv b(f, 1): \widehat{a} \rightarrow b$ で h_f が admissible だとすると, $\widehat{a}(y_a, 1) \cong \text{id}_{\widehat{a}}$ だったから, 命題 8 より $b(h_f, 1) \cong \widehat{a}(\text{id}_{\widehat{a}}, b(f, 1)) \cong \widehat{a}(\widehat{a}(y_a, 1), b(f, 1))$ となり, h_f は y_a に沿った f の y-各点左 Kan 拡張である. $\square$

定理 27. a を small, b を admissible とする. $\text{Tot}(a, b) \subset \mathcal{C}(a, b)$ を total な 1-morphism からなる充満部分圏とする. このとき圏同値 $\text{Tot}(a, b)^{\text{op}} \simeq \text{Adj}(\widehat{a}, b)$ が成り立つ. この圏同値は $f \mapsto (y_a^\dagger f \dashv b(f, 1))$ で与えられる.

証明. $\text{Adj}(\widehat{a}, b) \subset \mathcal{C}(b, \widehat{a})$ とみなす. このとき $f \mapsto b(f, 1)$ は忠実充満である. 故に $b(-, 1)$ が本質的全射であればよいがそれは定理 26 から分かる. $\square$

6 y-忠実充満

定義. $f: a \rightarrow b$ で a, f が admissible とするとき f が y-忠実充満 $\iff \chi^f$ が同型.

$$\begin{array}{ccc} & b & \\ & \uparrow & \searrow b(f, 1) \\ f \uparrow & & \\ a & \xrightarrow{y_a} & \widehat{a} \end{array} \quad \chi^f \uparrow \uparrow$$

$a(\text{id}_a, 1) = y_a$ だったから, f が y-忠実充満ならば同型 $a(\text{id}_a, 1) \cong b(f, f)$ が得られる.

命題 28. $f: a \rightarrow b$ が y-忠実充満ならば忠実充満である. 米田構造の条件 (5) が成り立つならば逆も成り立つ.

証明. 等式

$$\begin{array}{ccc}
 a & \xrightarrow{f} & b \\
 \text{id}_a \uparrow & \text{id} \Downarrow f & \downarrow b(f,1) \\
 a & \xrightarrow{y_a} & \hat{a} \\
 & \chi^f \Downarrow & \\
 & & \hat{a}
 \end{array}
 =
 \begin{array}{ccc}
 a & \xrightarrow{f} & b \\
 \text{id}_a \uparrow & a(\text{id}_a, 1) \searrow & \downarrow b(f,1) \\
 a & \xrightarrow{y_a} & \hat{a} \\
 & \chi^f \Downarrow & \\
 & & \hat{a}
 \end{array}$$

と命題 2, 6 から分かる. □

f が左随伴であれば, y -忠実充満と忠実充満は一致する.

命題 29. $f \dashv u: a \rightarrow b$ を $\mathcal{B}$ における随伴として a, f, u が admissible とする. このとき, f が忠実充満ならば f は y -忠実充満である.

証明. $f \dashv u$ の unit を η とする. 命題 6 で η に対応する η' を取る.

$$\begin{array}{ccc}
 b & \xrightarrow{u} & a \\
 f \uparrow & \eta \Downarrow \text{id}_a & \downarrow a(\text{id}_a, 1) \\
 a & \xrightarrow{y_a} & \hat{a} \\
 & \chi^{\text{id}_a} \Downarrow & \\
 & & \hat{a}
 \end{array}
 =
 \begin{array}{ccc}
 b & \xrightarrow{u} & a \\
 f \uparrow & b(f, 1) \searrow & \downarrow a(\text{id}_a, 1) \\
 a & \xrightarrow{y_a} & \hat{a} \\
 & \chi^f \Downarrow & \\
 & & \hat{a}
 \end{array}$$

命題 7 より η' は同型である. 故に

$$\chi^f =
 \begin{array}{ccc}
 & & \hat{a} \\
 & b(f, 1) \nearrow & \uparrow a(\text{id}_a, 1) = y_a \\
 b & \xrightarrow{u} & a \\
 f \uparrow & \eta \Downarrow & \uparrow \eta'^{-1} \\
 a & \xrightarrow{\text{id}_a} & a
 \end{array}$$

となる. 命題 3 より η は同型だから χ^f も同型である. □

命題 30. 次の図式で, $a, b, g, l, b(f, 1)$ が admissible だとする.

$$\begin{array}{ccc}
 & b & \\
 f \uparrow & \eta \Downarrow l & \\
 a & \xrightarrow{g} & c
 \end{array}$$

$\langle l, \eta \rangle$ が y -各点左 Kan 拡張で, f が y -忠実充満ならば, η は同型である.

証明. $\langle l, \eta \rangle$ が y -各点左 Kan 拡張だから

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{ccc}
 b & \xrightarrow{l} & c \\
 \uparrow f & \nearrow \eta & \downarrow c(g,1) \\
 a & \xrightarrow{y_a} & \hat{a}
 \end{array}
 & = &
 \begin{array}{ccc}
 b & \xrightarrow{l} & c \\
 \uparrow f & \nearrow b(f,1) & \downarrow c(g,1) \\
 a & \xrightarrow{y_a} & \hat{a}
 \end{array}
 \end{array}$$

としたとき, $\langle l, \eta' \rangle$ は絶対左 Kan リフトである. 今 f が y -忠実充満だから χ^f は同型であり, よって右の四角全体は絶対左 Kan リフトとなる. 一方で左の $\langle g, \chi^g \rangle$ は絶対左 Kan リフトであるから η が同型となる. $\square$

参考文献

- [1] Ross Street and R.F.C. Walters, Yoneda Structures on 2-categories, J. Algebra 50 (1978), 350–379
- [2] Mark Weber, Yoneda structures from 2-toposes, Applied Categorical Structures, Vol. 15 (2007), 259–323, <https://sites.google.com/site/markwebersmaths/home/yoneda-structures-from-2-toposes>
- [3] R. Street and W. Tholen and M. Wischnewsky and H. Wolff, Semi-Topological Functors III: Lifting of Monads and Adjoint Functors, Journal of Pure and Applied Algebra 16 (1980), 299–314, [http://dx.doi.org/10.1016/0022-4049\(80\)90035-3](http://dx.doi.org/10.1016/0022-4049(80)90035-3)