

例: 位相空間上の層 その2

alg-d

https://alg-d.com/math/kan_extension/

2025年1月20日

この PDF では Kan 拡張を使って位相空間上の層について述べる. 層の基本的なことについては前の PDF 「例: 位相空間上の層」も参照.

目次

1	前提知識	1
2	位相空間上の層	2

1 前提知識

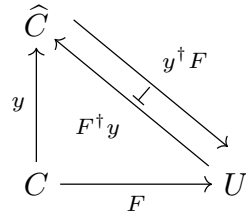
まず復習しておくとして Kan 拡張については以下のような定理が成り立っていた. (証明は「Kan 拡張」の PDF を参照.)

定理 1. $F: C \rightarrow D$, $E: C \rightarrow U$ で各点左 Kan 拡張 $F^\dagger E$ が存在し, 関手 $K: U \rightarrow V$ は余極限と交換するとする. このとき K は $F^\dagger E$ と交換する. \square

定理 2. $\langle F^\dagger E, \eta \rangle$ が各点左 Kan 拡張で F が忠実充満とする. このとき $\eta: E \Rightarrow F^\dagger E \circ F$ は同型である. \square

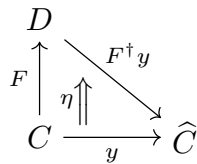
定理 3. C を小圏, U を圏, $F: C \rightarrow U$ を関手として各点左 Kan 拡張 $y^\dagger F$ が存在する

とする. このとき随伴 $y^\dagger F \dashv F^\dagger y$ が成り立つ.



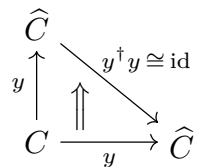
□

系 4. $F: C \rightarrow D$ が関手で C が小圏のとき $F^\dagger y(d) \cong \text{Hom}_D(F-, d)$ である.



□

系 5. 小圏 C に対して $y^\dagger y \cong \text{id}$ である.



系 6. 任意の $P \in \widehat{C}$ に対して, ある $T: J \rightarrow C$ が存在して $P \cong \text{colim}(J \xrightarrow{T} C \xrightarrow{y} \widehat{C})$ となる. □

2 位相空間上の層

X を位相空間としたとき X の開集合全体がなす順序集合 \mathcal{O}_X を圏とみなす. このとき $\widehat{\mathcal{O}}_X = \mathbf{Set}^{\mathcal{O}_X^{\text{op}}}$ が X 上の前層がなす圏である.

「Kan 拡張」の PDF でも述べた通り, 位相空間の間の連続写像 $f: X \rightarrow Y$ に対して, f の逆像と呼ばれる関手 $f^*: \widehat{\mathcal{O}}_Y \rightarrow \widehat{\mathcal{O}}_X$ が左 Kan 拡張により得られる. 即ち $P \in \widehat{\mathcal{O}}_Y$ に対して $f^*P \in \widehat{\mathcal{O}}_X$ であるが, これは各点左 Kan 拡張によれば $U \in \mathcal{O}_X$ に対して

$$f^*P(U) \cong \text{colim}_{V \supset f(U)} P(V) \quad (7)$$

となることが分かる. つまり $Q \mapsto Q(U)$ で定まる関手を $\text{ev}_U: \widehat{\mathcal{O}}_X \rightarrow \mathbf{Set}$ とすれば

$$\text{ev}_U(f^*P) \cong \text{colim}_{V \supset f(U)} P(V)$$

である. ここで点 $x \in X$ を取り f として包含写像 $i_x: \{x\} \rightarrow X$ を考えれば, i_x の逆像として関手 $i_x^*: \widehat{\mathcal{O}}_X \rightarrow \widehat{\mathcal{O}}_{\{x\}}$ が得られる. 前層 $P \in \widehat{\mathcal{O}}_X$ に対して集合 $P_x := \text{ev}_{\{x\}}(i_x^*P)$ を P の x における茎 (stalk) という. この P_x は同型 (7) を使えば $P_x \cong \text{colim}_{U \ni x} P(U)$ と書けることが分かる. 即ち, 集合 $\coprod_{U \ni x} P(U)$ における同値関係 \sim を $u \in P(U), v \in P(V)$ に対して

$$u \sim v \iff \text{ある開集合 } W \subset U \cap V \text{ が存在して } u|_W = v|_W$$

と定めたとき $P_x \cong \left(\coprod_{U \ni x} P(U) \right) / \sim$ である. この同値関係における $u \in P(U)$ の同値類を u の x における芽 (germ) といい u_x と書く.

例 8. $P \in \widehat{\mathcal{O}}_X$ を「実数値連続関数となす前層」とする. $x \in X$ を取り $U, V \ni x$ を開近傍とする. このとき $u \in P(U), v \in P(V)$ に対して $u \sim v$ となるのは

$$\text{ある開集合 } W \subset U \cap V \text{ が存在して, 任意の } a \in W \text{ に対して } u(a) = v(a)$$

となるときである. 従って, x の近傍で定義された2つの関数 u, v に対して $u_x = v_x$ となるのは, u と v が x の十分小さい近傍上で一致しているときである. \square

例 9. 開集合 $O \in \mathcal{O}_X$ を取り $P := y(O)$ とする. $x \in X$ に対して P_x を計算しよう.

まず $x \notin O$ の場合は, 任意の開近傍 $U \ni x$ に対して $P(U) = \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(U, O) = \emptyset$ だから

$$P_x \cong \text{colim}_{U \ni x} P(U) = \text{colim}_{U \ni x} \emptyset \cong \emptyset$$

である. 次に $x \in O$ とする. この場合は開近傍 $U \ni x$ に対して

$$P(U) \cong \begin{cases} 1 & (U \subset O) \\ \emptyset & (U \not\subset O) \end{cases}$$

であるから $P_x \cong 1$ が分かる. \square

次に開集合 $U \in \mathcal{O}_X$ に対して $F(U)$ で包含写像 $U \rightarrow X$ を表すことにする. この F は

関手 $F: \mathcal{O}_X \rightarrow \mathbf{Top}/X$ を定める. 普遍随伴 (定理 3) により

$$\begin{array}{ccc}
 \widehat{\mathcal{O}}_X & & \\
 \uparrow y & \swarrow y^\dagger F & \\
 \mathcal{O}_X & \xrightarrow{F} & \mathbf{Top}/X
 \end{array}$$

を得る. この随伴により「 X 上の前層」は「コドメインが X となる連続写像」と大きな関係がある (定理 17). このことを示すために $F^\dagger y$ と $y^\dagger F$ を計算する.

まず $f: Y \rightarrow X$ に対して系 4 より $F^\dagger y(f) \cong \text{Hom}_{\mathbf{Top}/X}(F-, f)$ だから $U \in \mathcal{O}_X$ に対して

$$\begin{aligned}
 F^\dagger y(f)(U) &\cong \text{Hom}_{\mathbf{Top}/X}(F(U), f) \\
 &= \{s \in \text{Hom}_{\mathbf{Top}}(U, Y) \mid f \circ s = F(U)\}
 \end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{array}{ccc}
 U & \xrightarrow{s} & Y \\
 & \searrow F(U) & \swarrow f \\
 & & X
 \end{array}$$

となる. $f \circ s = F(U)$ を満たす連続写像 $s: U \rightarrow Y$ は f の U 上の切断 (section) と呼ばれる. この言葉を使えば $F^\dagger y(f)$ は「 f の切断がなす前層」と言うことができる*¹.

次に $P \in \widehat{\mathcal{O}}_X$ とすると系 6 の証明より

$$P \cong \text{colim}(y \downarrow P \rightarrow \mathcal{O}_X \xrightarrow{y} \widehat{\mathcal{O}}_X) \tag{11}$$

と書いて, 更に

$$\begin{aligned}
 y^\dagger F(P) &\cong \text{colim}_{\langle U, u \rangle \in y \downarrow P} y^\dagger F(y(U)) && \text{(左随伴は余極限と交換する)} \\
 &\cong \text{colim}_{\langle U, u \rangle \in y \downarrow P} F(U) && \text{(命題 2)}
 \end{aligned} \tag{12}$$

となる. この余極限の余極限余錐がどうなっているか考えよう. まず

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathbb{1} & \xrightarrow{P} & \widehat{\mathcal{O}}_X & & \\
 \uparrow P_1 & \swarrow \sigma & \uparrow y & \searrow \text{id} & \\
 y \downarrow P & \xrightarrow{P_0} & \mathcal{O}_X & \xrightarrow{y} & \widehat{\mathcal{O}}_X
 \end{array}$$

*¹ $F^\dagger y(f)$ は実は層になる (命題 18). よってより正確に言えば $F^\dagger y(f)$ は「 f の切断がなす層」である.

は左 Kan 拡張である.

命題 13. $\text{ev}_{\{x\}} \circ i_x^* \cong T_x \circ y^\dagger F$ である.

証明. 例 9 を使えば容易に $G_x \cong T_x \circ F$ が分かる. よって左 Kan 拡張の普遍性により $\text{ev}_{\{x\}} \circ i_x^* \cong T_x \circ y^\dagger F$ が分かる. \square

従って

$$P_x = \text{ev}_{\{x\}}(i_x^* P) \cong T_x(y^\dagger F(P)) \cong T_x(\Lambda_P \xrightarrow{p} X) = p^{-1}(x)$$

である. 故に Λ_P は集合 $E := \coprod_{x \in X} P_x$ に位相を入れた空間になる. 写像 $q: E \rightarrow X$ を, $a \in P_x$ に対して $q(a) := x$ で定めておく. $\langle U, u \rangle \in y \downarrow P$ に対して写像 $\nu_{\langle U, u \rangle}: U \rightarrow E$ を $\nu_{\langle U, u \rangle}(z) := u_z$ で定める. 更に E の位相を

$$\{\nu_{\langle U, u \rangle}(V) \mid \langle U, u \rangle \in y \downarrow P, V \in \mathcal{O}_X, V \subset U\}$$

で生成される位相とする.

命題 14. $\langle E, \nu \rangle$ は余極限 $\text{colim}_{\langle U, u \rangle \in y \downarrow P} F(U)$ を与える.

証明. $f \in \mathbf{Top}/X$ として $\theta_{\langle U, u \rangle}: F(U) \rightarrow f$ を $\langle U, u \rangle \in y \downarrow P$ について自然な \mathbf{Top}/X の射とする. 従って $\theta_{\langle U, u \rangle}$ は次の図式を可換にする連続写像である.

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\theta_{\langle U, u \rangle}} & Y \\ & \searrow & \swarrow \\ & F(U) & f \\ & & \searrow \\ & & X \end{array}$$

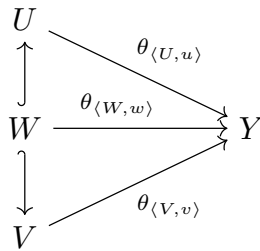
このとき連続写像 $h: E \rightarrow Y$ が一意に存在して

$$\begin{array}{ccccc} U & & \theta_{\langle U, u \rangle} & & Y \\ & \searrow & & \nearrow & \\ \nu_{\langle U, u \rangle} & & E & \xrightarrow{h} & Y \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & q & & f \\ & & & & X \end{array}$$

が可換となることを示せばよい.

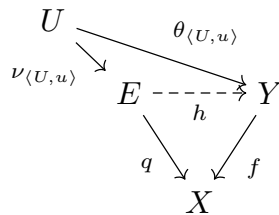
まず h の存在を示す. h を定義するため, 任意の $e \in E$ を取る. $x := q(e)$ とすればある開近傍 $U \ni x$ と $u \in P(U)$ が存在して $e = u_x$ と書ける. このとき $h(e) := \theta_{\langle U, u \rangle}(x)$ と定義する. これは well-defined である.

∴) 別の $v \in P(V)$ により $e = u_x = v_x$ と書けたとする. このとき定義よりある開近傍 $x \in W \subset U \cap V$ が存在して $u|_W = v|_W$ である. よって $w := u|_W$ とすれば $y \downarrow P$ の射 $\langle W, w \rangle \rightarrow \langle U, u \rangle$, $\langle W, w \rangle \rightarrow \langle V, v \rangle$ が存在する. このとき $\theta_{\langle U, u \rangle}$ の自然性から



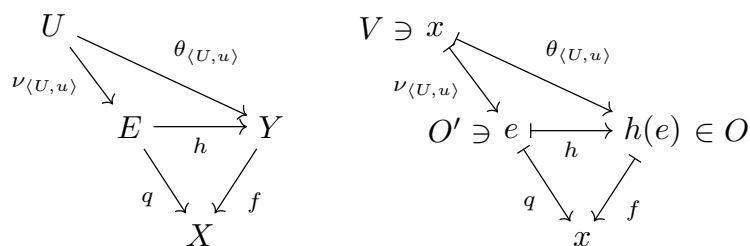
が可換であり, 従って $\theta_{\langle U, u \rangle}(x) = \theta_{\langle W, w \rangle}(x) = \theta_{\langle V, v \rangle}(x)$ である.

h の定義から明らかに



は可換である. 次に h は連続である.

∴) 任意の $e \in E$ と開近傍 $h(e) \in O \subset Y$ を取る. 上記のように $e = u_x$ と書けば $h(e) = \theta_{\langle U, u \rangle}(x)$ である. このとき $\theta_{\langle U, u \rangle}: U \rightarrow Y$ の連続性より $V := \theta_{\langle U, u \rangle}^{-1}(O) \subset U$ は x の開近傍である. また $O' := \nu_{\langle U, u \rangle}(V) \subset E$ は e の開近傍である.



このとき h の定義から明らかに $h(O') = \theta_{\langle U, u \rangle}(V) \subset O$ となる. 故に h は連続である.

最後に h の一意性を示せばよいが, それは h の定義から容易に分かる. □

従って余極限の普遍性から同相写像 $\Lambda_P \rightarrow E$ であって

$$\begin{array}{ccc}
 & U & \\
 \mu_{\langle U, u \rangle} \swarrow & & \searrow \nu_{\langle U, u \rangle} \\
 \Lambda_P & \xrightarrow{\sim} & E = \coprod_{x \in X} P_x \\
 p \searrow & & \swarrow q \\
 & X &
 \end{array}$$

が可換となるものが存在する．そこで以下これにより $\Lambda_P = \coprod_{x \in X} P_x$ とみなす．この同一視によれば $U \in \mathcal{O}_X$, $u \in P(U)$, $x \in U$ に対して $\mu_{\langle U, u \rangle}(x) = u_x$ であり, また $a \in P_x$ に対して $p(a) = x$ である．

さて, 随伴 $y^\dagger F \dashv F^\dagger y$ の unit を η とする． η_P は自然変換 $P \Rightarrow F^\dagger y(y^\dagger F(P))$ だから, $U \in \mathcal{O}_X$ に対して $(\eta_P)_U: P(U) \rightarrow F^\dagger y(y^\dagger F(P))(U)$ となるが (10) により

$$F^\dagger y(y^\dagger F(P))(U) \cong \{s \in \text{Hom}_{\mathbf{Top}}(U, \Lambda_P) \mid p \circ s = F(U)\}$$

となるから, $u \in P(U)$ に対して $(\eta_P)_U(u): U \rightarrow \Lambda_P$ となる．

命題 15. $(\eta_P)_U(u) = \mu_{\langle U, u \rangle}$ である．

証明. $\eta: \text{id} \Rightarrow F^\dagger y \circ y^\dagger F$ が自然変換だから

$$\begin{array}{ccc}
 y(U) & \xrightarrow{\eta_{y(U)}} & F^\dagger y(y^\dagger F(y(U))) \\
 u \downarrow & & \downarrow F^\dagger y(y^\dagger F(u)) \\
 P & \xrightarrow{\eta_P} & F^\dagger y(y^\dagger F(P))
 \end{array}$$

が可換である．ここで $y^\dagger F \circ y \cong F$ と μ の定義を使えば

$$\begin{array}{ccc}
 y(U) & \longrightarrow & F^\dagger y(F(U)) \\
 u \downarrow & & \downarrow F^\dagger y(\mu_{\langle U, u \rangle}) \\
 P & \xrightarrow{\eta_P} & F^\dagger y(y^\dagger F(P))
 \end{array}$$

を得る．この可換図式の U 成分を考えれば

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(U, U) & \longrightarrow & \{s \in \text{Hom}_{\mathbf{Top}}(U, U) \mid F(U) \circ s = F(U)\} \\
 u_U \downarrow & & \downarrow \mu_{\langle U, u \rangle} \circ - \\
 P(U) & \xrightarrow{(\eta_P)_U} & \{s \in \text{Hom}_{\mathbf{Top}}(U, \Lambda_P) \mid p \circ s = F(U)\}
 \end{array}$$

が可換となる. ここで $F(U) \circ s = F(U)$ となる $s \in \text{Hom}_{\text{Top}}(U, U)$ は $s = \text{id}_U$ しか存在しないから, 次の可換図式を得る.

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(U, U) & \longrightarrow & \{\text{id}_U\} \\ u_U \downarrow & & \downarrow \mu_{\langle U, u \rangle} \circ - \\ P(U) & \xrightarrow{(\eta_P)_U} & \{k \in \text{Hom}_{\text{Top}}(U, \Lambda_P) \mid p \circ k = F(U)\} \end{array}$$

よって $\text{id}_U \in \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(U, U)$ の行き先を考えれば $(\eta_P)_U(u) = \mu_{\langle U, u \rangle}$ である. □

従って特に $x \in U$ に対して $(\eta_P)_U(u)(x) = u_x$ となる.

この η を使うと, 層の条件を次のように言い換えることができる.

命題 16. 前層 $P \in \widehat{\mathcal{O}_X}$ に対して

$$P \text{ が層} \iff \eta_P: P \rightarrow F^\dagger y(y^\dagger F(P)) \text{ が同型.}$$

証明. (\implies) P を層, $U \in \mathcal{O}_X$ としてまず $(\eta_P)_U$ が単射であることを示す. そのために $u, v \in P(U)$ に対して $(\eta_P)_U(u) = (\eta_P)_U(v)$ とする. 即ち $x \in U$ とすると $u_x = v_x$ である. これは各 $x \in U$ に対して開近傍 $U^x \ni x$ を上手くとると $u|_{U^x} = v|_{U^x}$ となることを意味する. この $\{U^x\}_{x \in U}$ は U の開被覆であり, P が層だから $u = v$ である.

次に $(\eta_P)_U$ が全射であることを示す. そのために $s \in \text{Hom}_{\text{Top}}(U, \Lambda_P)$ が $p \circ s = F(U)$ を満たすとする. $x \in U$ とすると $s(x) \in P_x$ だから, ある開近傍 $U^x \ni x$ と $u^x \in P(U^x)$ が存在して $s(x) = (u^x)_x$ と書ける. このとき $\mu_{\langle U^x, u^x \rangle}(U^x) \subset \Lambda_P$ が開集合だから s の連続性により $V^x := s^{-1}(\mu_{\langle U^x, u^x \rangle}(U^x)) \subset U$ は x の開近傍である. よって $\{V^x\}_{x \in U}$ は U の開被覆であるが, これは $x, x' \in U$ に対して $u^x|_{V^x \cap V^{x'}} = u^{x'}|_{V^x \cap V^{x'}}$ を満たす.

\therefore まず $z \in V^x$ とする. 定義より $s(z) \in \mu_{\langle U^x, u^x \rangle}(U^x)$ である. よって $w \in U^x$ が存在して $\mu_{\langle U^x, u^x \rangle}(w) = s(z)$ と書ける. ここで $p \circ s = F(U)$, $p \circ \mu_{\langle U^x, u^x \rangle} = F(U^x)$ だったから $w = z$ が分かる. よって $s(z) = \mu_{\langle U^x, u^x \rangle}(z) = (u^x)_z$ である.

$$\begin{array}{ccc} & U^x & \\ & \downarrow \mu_{\langle U^x, u^x \rangle} & \\ F(U^x) & \searrow & \\ U & \xrightarrow{s} & \Lambda_P \\ & \downarrow & \uparrow p \\ & X & \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} & w & \\ & \downarrow \mu_{\langle U^x, u^x \rangle} & \\ F(U^x) & \searrow & \\ z & \xrightarrow{s} & s(z) \\ & \downarrow & \uparrow p \\ & z & \end{array}$$

従って任意の $z \in V^x \cap V^{x'}$ に対して $(u^x)_z = s(z) = (u^{x'})_z$ となるから、上の単射性の議論を使えば $u^x|_{V^x \cap V^{x'}} = u^{x'}|_{V^x \cap V^{x'}}$ が分かる。

今 P が層だから、 $u \in P(U)$ が存在して任意の $x \in U$ に対して $u|_{V^x} = u^x|_{V^x}$ である。このとき $x \in U$ に対して $(\eta_P)_U(u)(x) = u_x = (u^x)_x = s(x)$ となるから $(\eta_P)_U(u) = s$ である。

(\Leftarrow) 上記と同様の議論により、 $(\eta_P)_U$ の全単射性から層の条件が従う。 \square

従って $y^\dagger F \dashv F^\dagger y$ の counit を ε としたとき

$f \in \mathbf{Top}/X$ がエタール束 (etale bundle) $\iff \varepsilon_f: y^\dagger F(F^\dagger y(f)) \rightarrow f$ が同型

と定義して、 $\text{Sh}(X) \subset \widehat{\mathcal{O}_X}$ を層がなす充満部分圏、 $\text{Etale}(X) \subset \mathbf{Top}/X$ をエタール束がなす充満部分圏とすれば、随伴関手の一般論より次の定理が得られる。

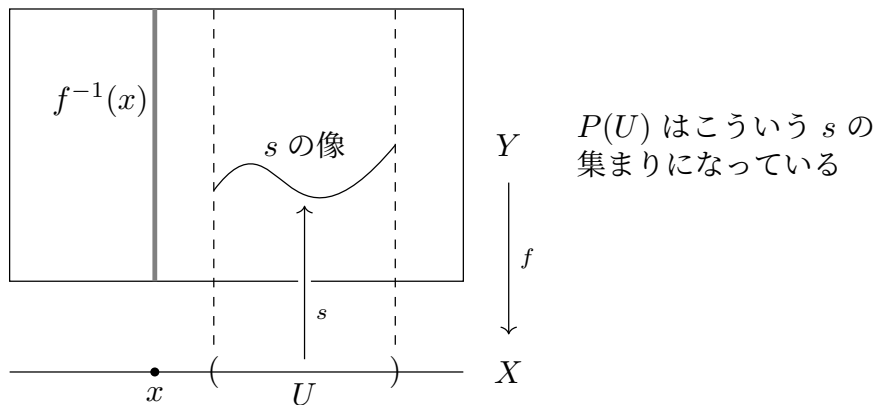
定理 17. 圏同値 $\text{Sh}(X) \simeq \text{Etale}(X)$ が成り立つ。 \square

こうして X 上の層とはエタール束 (つまり特別な連続写像 $Y \rightarrow X$) のことであると理解することができる。

※ この圏同値で X 上の層 P に対応するエタール束 $f: Y \rightarrow X$ を取ると、これは $P \cong F^\dagger y(f)$ となるが (10) で見たように

$$P(U) \cong \{s \in \text{Hom}_{\mathbf{Top}}(U, Y) \mid f \circ s = F(U)\}$$

である。つまり絵で描くと次のようになっており、層というのはまさに「層」をなしていると言える。



命題 18. $f \in \mathbf{Top}/X$ に対して $F^\dagger y(f) \in \widehat{\mathcal{O}_X}$ は X 上の層である.

証明. (10) により $F^\dagger y(f)$ が層の条件を満たすことが容易に分かる. \square

故に命題 16 より $\eta_{F^\dagger y}$ は自然同型である. 即ち随伴 $y^\dagger F \dashv F^\dagger y$ は冪等随伴である (「随伴関手」の PDF を参照). 従って包含関手 $\mathbf{Sh}(X) \rightarrow \widehat{\mathcal{O}_X}$ は左随伴 L を持つ. これは $L := F^\dagger y \circ y^\dagger F$ で与えられる. この L を層化関手 (sheafification functor) といい, 前層 $P \in \widehat{\mathcal{O}_X}$ に対して LP を P の層化 (sheafification) という. 言い換えると, P の層化とは $Q \in \mathbf{Sh}(X)$ について自然な全単射 $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Sh}(X)}(LP, Q) \cong \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathcal{O}_X}}(P, Q)$ が存在するような層 LP のことである. 随伴関手の一般論によれば LP は次のような普遍性を持つ.

命題 19. $P \in \widehat{\mathcal{O}_X}$, $Q \in \mathbf{Sh}(X)$ として $\theta: P \Rightarrow Q$ を自然変換とする. このとき自然変換 $\tau: LP \Rightarrow Q$ が一意に存在して $\tau \circ \eta_P = \theta$ となる.

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\eta_P} & LP \\ & \searrow \theta & \downarrow \tau \\ & & Q \end{array}$$

\square

例 20. X を位相空間, A を集合として, P を A に値を取る定数関数がなす前層とする. 即ち $U \in \mathcal{O}_X$ に対して

$$P(U) := \{s: U \rightarrow A \mid s \text{ は定数関数}\} \cong A$$

と定める (これが一般に層とは限らないことは前の PDF 「例: 位相空間上の層」で述べた). この前層 P の層化 $LP = F^\dagger y(y^\dagger F(P))$ を定数層 (constant sheaf) という. これを計算しよう.

まず上で計算した通り, $U \in \mathcal{O}_X$ に対して

$$LP(U) \cong \{s \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(U, \Lambda_P) \mid p \circ s = F(U)\}$$

である. ここで $\Lambda_P = \coprod_{x \in X} P_x$ であるが, $x \in X$ に対して

$$P_x \cong \mathrm{colim}_{U \ni x} P(U) \cong \mathrm{colim}_{U \ni x} A \cong A$$

となる. ここでこの同型は $P_x \ni s_x \mapsto s \in A$ で与えられる. 故に $\Lambda_P \cong A \times X$ である. そこで $\Lambda_P = A \times X$ と見なしたとき, Λ_P の位相は $\{\{a\} \times U \mid a \in A, U \in \mathcal{O}_X\}$ で生

成されるものとなる。即ち A に離散位相を入れれば、位相空間として $\Lambda_P \cong A \times X$ である。また $p: \Lambda_P \rightarrow X$ は標準射影 $\pi_X: A \times X \rightarrow X$ となる。故に

$$LP(U) \cong \{s \in \text{Hom}_{\mathbf{Top}}(U, A \times X) \mid \pi_X \circ s = F(U)\}$$

となる。 $s \in LP(U)$ に対して $k := \pi_A \circ s: U \rightarrow A$ と定める。この k は次の条件を満たす。

任意の $x \in U$ に対してある開近傍 $x \in V \subset U$ が存在して k は V 上定数関数 (21)

∴ $a := k(x) \in A$ に対して $V := k^{-1}(\{a\}) \subset U$ と定める。定義より $k: U \rightarrow A$ は連続である。故に V は開集合である。

逆に写像 $k: U \rightarrow A$ が条件 (21) を満たすとする。このとき $x \in U$ に対して $s(x) := \langle k(x), x \rangle \in A \times X$ と定めれば $s \in LP(U)$ である。

∴ 条件 (21) より $k: U \rightarrow A$ は連続である。故に $s: U \rightarrow A \times X$ は直積の普遍性から得られる \mathbf{Top} の射であり、従って $s \in \text{Hom}_{\mathbf{Top}}(U, A \times X)$ である。定義から明らかに $\pi_X \circ s = F(U)$ となるので $s \in LP(U)$ である。

従って LP は「局所的に定数となっている関数」がなす層になっていると言える。 □

命題 22. 層化は茎を保つ。即ち $P \in \widehat{\mathcal{O}}_X$, $x \in X$ に対して $P_x \cong (LP)_x$ である。

証明. 自然変換 $(\text{ev}_{\{x\}} \circ i_x^*)\eta: \text{ev}_{\{x\}} \circ i_x^* \Rightarrow \text{ev}_{\{x\}} \circ i_x^* \circ L$ を考える。これの $P \in \widehat{\mathcal{O}}_X$ 成分は $P_x \rightarrow (LP)_x$ である。故にこの $(\text{ev}_{\{x\}} \circ i_x^*)\eta$ が自然同型であることを示せばよい。そのためには命題 13 より $T_x \circ y^\dagger F \cong \text{ev}_{\{x\}} \circ i_x^*$ だったから $(y^\dagger F)\eta$ が自然同型であることを示せばよいが、それは $y^\dagger F \dashv F^\dagger y$ が冪等随伴であることから分かる。 □

命題 23. 連続写像 $f: Y \rightarrow X$ に対して次の条件は同値である。

- (1) f はエタール束である。
- (2) ある $P \in \widehat{\mathcal{O}}_X$ が存在して $y^\dagger F(P) \cong f$ となる。
- (3) 任意の $a \in Y$ に対してある開近傍 $O \ni a$ が存在して、 $f(O) \subset X$ が開集合かつ $f|_O: O \rightarrow f(O)$ が同相となる*2。

証明. (1 \implies 2) $P := F^\dagger y(f)$ とすればよい。

*2 通常エタール束はこの条件により定義される。

(2 \implies 3) 条件 (2) よりある $P \in \widehat{\mathcal{O}_X}$ が存在して $f \cong y^\dagger F(P)$ と書ける. 即ち同相写像 $h: Y \rightarrow \Lambda_P$ が存在して

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{h} & \Lambda_P \\ & \searrow f & \swarrow p \\ & & X \end{array}$$

が可換となる.

条件 (3) を示すため任意の $a \in Y$ を取る. $h(a) \in \Lambda_P = \coprod_{x \in X} P_x$ だから $x := f(a)$ とすれば, ある $U \ni x$ と $u \in P(U)$ が存在して $h(a) = u_x$ と書ける. このとき $O' := \mu_{\langle U, u \rangle}(U)$ は $h(a)$ の開近傍である. また $p(O') = U$ であり $p|_{O'}: O' \rightarrow U$ は同相となる. よって $O := h^{-1}(O')$ は a の開近傍であり $f|_O: O \rightarrow f(O)$ は同相である.

(3 \implies 1) f が条件 (3) を満たすとして $\varepsilon_f: y^\dagger F(F^\dagger y(f)) \rightarrow f$ が同型であることを示す.

まず準備のため, \mathbf{Top}/X の射 $s: F(U) \rightarrow f$ を取る. F は明らかに忠実充満だから定理 2 より $F^\dagger y(F(U)) \cong y(U)$ である. これと $F^\dagger y(s): F^\dagger y(F(U)) \Rightarrow F^\dagger y(f)$ を組み合わせて得られる自然変換を $\theta: y(U) \Rightarrow F^\dagger y(f)$ とする. 即ち θ_U は合成

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(U, U) \xrightarrow{F} \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}/X}(F(U), F(U)) \xrightarrow{s \circ -} \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}/X}(F(U), f)$$

で与えられる射である. よって θ は米田の補題により s に対応する自然変換である. そこで以下 θ と s を同一視してどちらも s で表す. このとき次の図式を考える.

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathrm{id}_{F(U)} & & \\ & & \downarrow & & \\ & & (*) & & \\ & & \downarrow & & \\ F(U) & \xrightarrow{\cong} & y^\dagger F(y(U)) & \xrightarrow{\cong} & y^\dagger F(F^\dagger y(F(U))) & \xrightarrow{\varepsilon_{F(U)}} & F(U) \\ \mu_{\langle U, s \rangle} \downarrow & & (\mu) \downarrow y^\dagger F(s) & & (\theta) \downarrow y^\dagger F(F^\dagger y(s)) & & (\varepsilon) \downarrow s \\ & & & & y^\dagger F(F^\dagger y(f)) & \xrightarrow{\varepsilon_f} & f \end{array}$$

\mathbf{Top}/X の射 $F(U) \rightarrow F(U)$ は id しかないから $(*)$ は可換である. (μ) は μ の定義より可換である. (θ) は $\theta = s$ の定義より可換である. (ε) は ε が自然変換であるから可換で

ある. 従って $s: F(U) \rightarrow f$ に対して

$$\begin{array}{ccc}
 & & s \\
 & \swarrow & \searrow \\
 U & \xrightarrow{\mu_{\langle U, s \rangle}} & \Lambda_{F^\dagger y(f)} \xrightarrow{\varepsilon_f} Y \\
 & \searrow & \swarrow \\
 & F(U) & f \\
 & & X
 \end{array} \tag{24}$$

が可換となる. 故に $x \in U$ に対して $s(x) = \varepsilon_f(s_x)$ である.

さて, ε_f が同型であることを示そう. まず ε_f は単射である.

$\therefore e, e' \in \Lambda_{F^\dagger y(f)}$ が $\varepsilon_f(e) = \varepsilon_f(e')$ を満たすとする.

$$p(e) = f \circ \varepsilon_f(e) = f \circ \varepsilon_f(e') = p(e')$$

だから, $x := p(e)$ とすればある開近傍 $U, V \ni x$ と $s \in F^\dagger y(f)(U)$, $t \in F^\dagger y(f)(V)$ により $e = s_x = \mu_{\langle U, s \rangle}(x)$, $e' = t_x = \mu_{\langle V, t \rangle}(x)$ と書ける. このとき (24) の直後に述べたことから $x \in U \cap V$ に対して $s(x) = \varepsilon_f(s_x) = \varepsilon_f(t_x) = t(x)$ である. 即ち $s|_{U \cap V} = t|_{U \cap V}$ だから $e = s_x = t_x = e'$ となる.

ε_f は全射である.

\therefore 任意の $a \in Y$ を取る. このとき条件 (3) を満たす開近傍 $O \ni a$ が存在する. $f|_O$ が同相だから $s := (f|_O)^{-1}: f(O) \rightarrow Y$ が定まる. このとき $x := f(a)$ と定めれば (24) より $\varepsilon_f(\mu_{\langle U, u \rangle}(x)) = s(x) = (f|_O)^{-1}(x) = a$ である.

$h: Y \rightarrow \Lambda_P$ は開写像である.

$\therefore U, V \in \mathcal{O}_X$, $V \subset U$, $s \in F^\dagger y(f)(U)$ を取る. $\varepsilon_f(\mu_{\langle U, s \rangle}(V)) = s(V)$ が Y の開集合であることを示せばよい. まず s は

$$\begin{array}{ccc}
 U & \xrightarrow{s} & Y \\
 & \searrow & \swarrow \\
 & F(U) & f \\
 & & X
 \end{array}$$

を可換にする射である. 任意の $a \in s(V)$ を取る. このとき条件 3 を満たす開近傍 $O \ni a$ が存在する. このとき $O' := O \cap f^{-1}(V)$ とすれば $a \in O' \subset s(V)$ は Y の開集合である.

以上により ε_f は同型である. □

参考文献

- [1] S. Mac Lane and I. Moerdijk, Sheaves in Geometry and Logic, Springer (1992),
第 II 章