

モノイド対象の表現

alg-d

https://alg-d.com/math/kan_extension/

2025 年 6 月 29 日

V を完備かつ余完備な対称モノイダル閉圏として $U := \text{Hom}_V(I, -): V \rightarrow \mathbf{Set}$ の左随伴を $\mathfrak{F}$ と書く. $\mathcal{C}$ を V -豊穡圏とする.

定義. $x \in V$ をモノイド対象とする. x の表現とは組 $\langle a, k \rangle$ であって次の条件を満たすものである.

- (1) $a \in \mathcal{C}$ は対象である.
- (2) $k: x \rightarrow \mathcal{C}(a, a)$ はモノイドの射である.

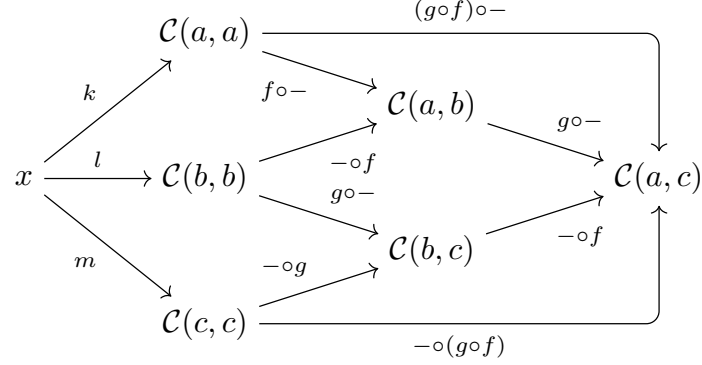
定義. $\langle a, k \rangle, \langle b, l \rangle$ を x の表現とするととき, その間の射 $f: \langle a, k \rangle \rightarrow \langle b, l \rangle$ とは, $\mathcal{C}$ の射 $f: a \rightarrow b$ であって次の図式が可換になるものをいう.

$$\begin{array}{ccc} x & \xrightarrow{k} & \mathcal{C}(a, a) \\ \downarrow l & & \downarrow f \circ - \\ \mathcal{C}(b, b) & \xrightarrow[-\circ f]{} & \mathcal{C}(a, b) \end{array}$$

命題 1. x の表現とその間の射は圏をなす (これを $\text{Rep}(x)$ で表す).

証明. $f: \langle a, k \rangle \rightarrow \langle b, l \rangle$ と $g: \langle b, k \rangle \rightarrow \langle c, m \rangle$ を x の表現の射とすると次の図式は可換で

ある (「豊穠圏」の PDF を参照).



よって $g \circ f: a \rightarrow c$ は表現の射 $g \circ f: \langle a, k \rangle \rightarrow \langle c, m \rangle$ を定める. これにより圏となる. $\square$

x の表現 $\langle a, k \rangle$ に対して $U_x \langle a, k \rangle := a$ と定めれば, これは関手 $U_x: \text{Rep}(x) \rightarrow UC$ を定める. これにより関手 $\text{Rep}: \text{Mon}(V) \rightarrow (\mathbf{CAT}/UC)^{\text{op}}$ が定まる.

次に D を圏, $F: D \rightarrow UC$ を関手とする. F から随伴 $\mathfrak{F} \dashv U$ により得られる V -関手を同じ記号 $F: \mathfrak{F}D \rightarrow C$ で表す. このとき $\mathcal{E}(F) := [\mathfrak{F}D, C](F, F) \in \widehat{V}$ と定める^{*1}. これは関手 $\mathcal{E}: (\mathbf{CAT}/UC)^{\text{op}} \rightarrow \text{Mon}(\widehat{V})$ を定める.

∴ S を次のような $\mathbf{CAT}/UC$ の射とする.

$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{S} & D' \\ & \searrow G \quad \swarrow F & \\ & UC & \end{array}$$

$\mathfrak{F}S: \mathfrak{F}D \rightarrow \mathfrak{F}D'$ は $\widehat{V}$ -関手である. よって $[\mathfrak{F}S, 1]: [\mathfrak{F}D', C] \rightarrow [\mathfrak{F}D, C]$ も $\widehat{V}$ -関手である. これにより $\widehat{V}$ の射 $\mathcal{E}(F) = [\mathfrak{F}D', C](F, F) \rightarrow [\mathfrak{F}D, C](FS, FS) = \mathcal{E}(G)$ が得られる. これが関手 $\mathcal{E}: (\mathbf{CAT}/UC)^{\text{op}} \rightarrow \text{Mon}(\widehat{V})$ を定める.

また先の $\text{Rep}: \text{Mon}(V) \rightarrow (\mathbf{CAT}/UC)^{\text{op}}$ は関手 $\text{Rep}: \text{Mon}(\widehat{V}) \rightarrow (\mathbf{CAT}/UC)^{\text{op}}$ にすることができる.

定理 2. 随伴 $\text{Rep} \dashv \mathcal{E}: \text{Mon}(\widehat{V}) \rightarrow (\mathbf{CAT}/UC)^{\text{op}}$ が成り立つ.

^{*1} D が大きい圏の場合, エンド $[\mathfrak{F}D, C](F, F)$ は V の中に存在するとは限らない. そこで V を含むような, 十分大きいモノイダル圏 $\widehat{V}$ を取り $[\mathfrak{F}D, C](F, F) \in \widehat{V}$ が存在するようにしておく. このような $\widehat{V}$ は取ることができる [2] ので, ここではそれを認めることにする.

証明. まず写像 $\varphi: \text{Hom}_{(\mathbf{CAT}/UC)^{\text{op}}}(\text{Rep}(x), F) \rightarrow \text{Hom}_{\text{Mon}(\widehat{V})}(x, \mathcal{E}(F))$ を定義する.
そこで K を次のような $\mathbf{CAT}/UC$ の射とする.

$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{K} & \text{Rep}(x) \\ & \searrow F \quad \swarrow U_x & \\ & UC & \end{array}$$

即ち $d \in D$ に対して Kd は x の表現である. $U_x K = F$ だから $Kd = \langle Fd, \theta_d \rangle$ と書くことができる (但し $\theta_d: x \rightarrow \mathcal{C}(Fd, Fd)$ である). この θ_d は $d \in \mathfrak{F}D$ について自然である.

∴) 対象 $d, d' \in D$ に対して次の図式が可換であることを示せばよい.

$$\begin{array}{ccc} & [\mathcal{C}(Fd, Fd), \mathcal{C}(Fd, Fd')] & \\ \mathcal{C}(Fd, F-) \nearrow & & \searrow [\theta_d, \text{id}] \\ \mathfrak{F}D(d, d') & & [x, \mathcal{C}(Fd, Fd')] \\ \mathcal{C}(F-, Fd') \searrow & & \nearrow [\theta_{d'}, \text{id}] \\ & [\mathcal{C}(Fd', Fd'), \mathcal{C}(Fd, Fd')] & \end{array}$$

これはつまり

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{F}D(d, d') & \xrightarrow{F} & \mathcal{C}(Fd, Fd') \\ \uparrow \text{id} & & \downarrow \mathcal{C}(Fd, -) \\ & & [\mathcal{C}(Fd, Fd), \mathcal{C}(Fd, Fd')] \\ & & \downarrow [\theta_d, \text{id}] \\ \mathfrak{F}D(d, d') & & [x, \mathcal{C}(Fd, Fd')] \\ \downarrow \text{id} & & \uparrow [\theta_{d'}, \text{id}] \\ & & [\mathcal{C}(Fd', Fd'), \mathcal{C}(Fd, Fd')] \\ & & \uparrow \mathcal{C}(-, Fd') \\ \mathfrak{F}D(d, d') & \xrightarrow{F} & \mathcal{C}(Fd, Fd') \end{array}$$

の可換性を示すということである．これは随伴 $\mathfrak{F} \dashv U$ により

$$\begin{array}{ccc}
 \mathrm{Hom}_D(d, d') & \xrightarrow{F} & \mathrm{Hom}_{UC}(Fd, Fd') \\
 \uparrow \mathrm{id} & & \downarrow U(\mathcal{C}(Fd, -)) \\
 & & \mathrm{Hom}_V(\mathcal{C}(Fd, Fd), \mathcal{C}(Fd, Fd')) \\
 & & \downarrow - \circ \theta_d \\
 \mathrm{Hom}_D(d, d') & & \mathrm{Hom}_V(x, \mathcal{C}(Fd, Fd')) \\
 \downarrow \mathrm{id} & & \uparrow - \circ \theta_{d'} \\
 & & \mathrm{Hom}_V(\mathcal{C}(Fd', Fd'), \mathcal{C}(Fd, Fd')) \\
 & & \uparrow U(\mathcal{C}(-, Fd')) \\
 \mathrm{Hom}_D(d, d') & \xrightarrow{F} & \mathrm{Hom}_{UC}(Fd, Fd')
 \end{array}$$

の可換性ということである．つまり任意の $f \in \mathrm{Hom}_D(d, d')$ に対して

$$\begin{array}{ccc}
 x & \xrightarrow{\theta_d} & \mathcal{C}(Fd, Fd) \\
 \theta_{d'} \downarrow & & \downarrow Ff \circ - \\
 \mathcal{C}(Fd', Fd') & \xrightarrow{- \circ Ff} & \mathcal{C}(Fd, Fd')
 \end{array}$$

が可換ということだが，今 $U_x K = F$ だから Ff は表現の射である．

従ってエンドの普遍性により $\hat{V}$ の射 $\varphi(K): x \rightarrow \int_{d \in \mathfrak{F}D} \mathcal{C}(Fd, Fd) = \mathcal{E}(F)$ が得られる． $\varphi(K)$ はモノイドの射である．

∴) まず $e: I \rightarrow x$ を x の単位元とする． $\varphi(K) \circ e$ が $\mathcal{E}(F)$ の単位元 ($= j_F$) であることを示す．そのために合成 $\theta_d \circ e$ を考えると， θ_d がモノイドの射だから

$$(I \xrightarrow{e} x \xrightarrow{\theta_d} \mathcal{C}(Fd, Fd)) = j_{Fd}$$

である．よってエンドの普遍性から $(I \xrightarrow{e} x \xrightarrow{\varphi(K)} \mathcal{E}(F)) = j_F$ となる．

後は $\varphi(K)$ が積と可換であることを示せばよい． x の積を $m: x \otimes x \rightarrow x$ とする．

次の図式の手前の四角が可換であることを示せばよい。

$$\begin{array}{ccc}
 & & \mathcal{C}(Fd, Fd) \otimes \mathcal{C}(Fd, Fd) \\
 & \nearrow \theta_d \otimes \theta_d & \\
 x \otimes x & \xrightarrow{\varphi(K) \otimes \varphi(K)} & \mathcal{E}(F) \otimes \mathcal{E}(F) \\
 \downarrow m & & \downarrow m \\
 x & \xrightarrow{\varphi(K)} & \mathcal{E}(F) \\
 & \nearrow \theta_d & \\
 & & \mathcal{C}(Fd, Fd)
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{ccc}
 & \nearrow \text{ev}_d \otimes \text{ev}_d & \\
 & & \downarrow m \\
 & & \mathcal{C}(Fd, Fd) \\
 & \nearrow \text{ev}_d & \\
 & & \mathcal{C}(Fd, Fd)
 \end{array}$$

それは他の部分は可換であるから、エンドの普遍性により分かる。

故に写像 $\varphi: \text{Hom}_{(\mathbf{CAT}/UC)^{\text{op}}}(\text{Rep}(x), F) \rightarrow \text{Hom}_{\text{Mon}(\widehat{V})}(x, \mathcal{E}(F))$ が得られた。エンドの普遍性から明らかに φ は単射である。

全射であることを示すため $f: x \rightarrow \mathcal{E}(F)$ を $\text{Mon}(\widehat{V})$ の射とする。 $d \in \mathfrak{F}D$ に対して $\text{ev}_d: \mathcal{E}(F) \rightarrow \mathcal{C}(Fd, Fd)$ は $\widehat{V}$ -関手である。 よって θ_d を合成

$$x \xrightarrow{f} \mathcal{E}(F) \xrightarrow{\text{ev}_d} \mathcal{C}(Fd, Fd)$$

とすれば、 θ_d は $\text{Mon}(\widehat{V})$ の射である。 即ち $\langle Fd, \theta_d \rangle \in \text{Rep}(x)$ である。 そこで $Kd := \langle Fd, \theta_d \rangle$ と定義すれば、これは関手 $K: D \rightarrow \text{Rep}(x)$ になる。

‘.’) $g: d \rightarrow d'$ を D の射とする。 θ_d が $d \in \mathfrak{F}D$ について自然だから、上でした議論により

$$\begin{array}{ccc}
 x & \xrightarrow{\theta_d} & \mathcal{C}(Fd, Fd) \\
 \theta_{d'} \downarrow & & \downarrow Fg \circ - \\
 \mathcal{C}(Fd', Fd') & \xrightarrow{- \circ Fg} & \mathcal{C}(Fd, Fd')
 \end{array}$$

は可換である。 即ち g は $\text{Rep}(x)$ の射 $Kg: Kd \rightarrow Kd'$ を定める。 これにより K は関手である。

このとき定義から明らかに $\varphi(K) = f$ である。 即ち φ は全射である。

後はこの φ が自然であることを示せばよい。 そこでまずは $f: x \rightarrow z$ を $\text{Mon}(\widehat{V})$ の射

として次の図式の可換性を示す.

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Hom}_{\mathbf{CAT}/UC}(F, \mathrm{Rep}(x)) & \xrightarrow{\varphi} & \mathrm{Hom}_{\mathrm{Mon}(\widehat{V})}(x, \mathcal{E}(F)) & \mathrm{Rep}(f) \circ K \xrightarrow{\varphi} \varphi(\mathrm{Rep}(f) \circ K) \\
\uparrow \mathrm{Rep}(f) \circ - & & \uparrow - \circ f & \uparrow \mathrm{Rep}(f) \circ - \quad \varphi(K) \circ f \\
\mathrm{Hom}_{\mathbf{CAT}/UC}(F, \mathrm{Rep}(z)) & \xrightarrow{\varphi} & \mathrm{Hom}_{\mathrm{Mon}(\widehat{V})}(z, \mathcal{E}(F)) & K \xrightarrow{\varphi} \varphi(K) \\
& & & \uparrow - \circ f
\end{array}$$

$\mathbf{CAT}/UC$ の射 $K: F \rightarrow \mathrm{Rep}(z)$ に対して $Kd = \langle Fd, \theta_d \rangle$ と書くと

$$(\mathrm{Rep}(f) \circ K)d = \langle Fd, \theta_d \circ f \rangle$$

$$\begin{array}{ccccc}
D & \xrightarrow{K} & \mathrm{Rep}(z) & \xrightarrow{\mathrm{Rep}(f)} & \mathrm{Rep}(x) \\
& \searrow F & \downarrow U_z & \swarrow U_x & \\
& & UC & &
\end{array}$$

である. よって普遍性により $\varphi(\mathrm{Rep}(f) \circ K) = \varphi(K) \circ f$ となり, φ は x について自然である.

$$\begin{array}{ccc}
& & \theta_d & \rightarrow & \mathcal{C}(Fd, Fd) \\
x & \xrightarrow{f} & z & \xrightarrow{\varphi(K)} & \mathcal{E}(F) \\
& & \nearrow \theta_d & \nearrow \mathrm{ev}_d & \\
& & & &
\end{array}
\quad
\begin{array}{ccc}
& & \theta_d \circ f & \rightarrow & \mathcal{C}(Fd, Fd) \\
x & \xrightarrow{\varphi(\mathrm{Rep}(f) \circ K)} & \mathcal{E}(F) & & \\
& & \nearrow \theta_d \circ f & \nearrow \mathrm{ev}_d & \\
& & & &
\end{array}$$

次に $S: F \rightarrow G$ を $(\mathbf{CAT}/UC)^{\mathrm{op}}$ の射として次の図式の可換性を示す.

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Hom}_{\mathbf{CAT}/UC}(F, \mathrm{Rep}(x)) & \xrightarrow{\varphi} & \mathrm{Hom}_{\mathrm{Mon}(\widehat{V})}(x, \mathcal{E}(F)) & K \xrightarrow{\varphi} \varphi(K) \\
\downarrow - \circ S & & \downarrow \mathcal{E}(S) \circ - & \downarrow - \circ S \quad \downarrow \mathcal{E}(S) \circ - \\
\mathrm{Hom}_{\mathbf{CAT}/UC}(G, \mathrm{Rep}(x)) & \xrightarrow{\varphi} & \mathrm{Hom}_{\mathrm{Mon}(\widehat{V})}(x, \mathcal{E}(G)) & KS \xrightarrow{\varphi} \varphi(KS) \\
& & & \uparrow \mathcal{E}(S) \circ \varphi(K)
\end{array}$$

$\mathbf{CAT}/UC$ の射 $K: F \rightarrow \mathrm{Rep}(x)$ に対して $Kd = \langle Fd, \theta_d \rangle$ と書くと $KSd = \langle FSd, \theta_{Sd} \rangle$ である.

$$\begin{array}{ccccc}
D' & \xrightarrow{S} & D & \xrightarrow{K} & \mathrm{Rep}(x) \\
& \searrow G & \downarrow F & \swarrow U_x & \\
& & UC & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
& \theta_{Sd} & \rightarrow \mathcal{C}(FSd, FSd) \\
x \xrightarrow{\varphi(K)} \mathcal{E}(G) & \xrightarrow{\mathcal{E}(S)} \mathcal{E}(F) & \nearrow \text{ev}_d \\
& \text{ev}_{Sd} & \\
& \nearrow &
\end{array}
\quad
\begin{array}{ccc}
& \theta_{Sd} & \rightarrow \mathcal{C}(FSd, FSd) \\
x \xrightarrow{\varphi(K \circ S)} \mathcal{E}(G) & & \nearrow \text{ev}_d \\
& &
\end{array}$$

よって普遍性により $\varphi(KS) = \mathcal{E}(S) \circ \varphi(K)$ となり, φ は S について自然である. $\square$

例 3. $V := \mathbf{CGWH}$ として有限次元複素線型空間の圏を $\mathbf{Vect}$ とする. 但し骨格を取り $\text{Ob}(\mathbf{Vect}) = \{\mathbb{C}^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ とみなすことにする. $\mathbf{Vect}$ は自然に V -豊穡圏になるからそのようにしておく, 定理より随伴

$$\text{Rep} \dashv \mathcal{E}: \text{Mon}(\widehat{V}) \rightarrow (\mathbf{CAT}/\mathbf{Vect})^{\text{op}}$$

が得られる. ここで $x \in \text{Mon}(\mathbf{CGWH})$ に対して $\text{Rep}(x)$ は小圏である. 従って随伴 $\text{Rep} \dashv \mathcal{E}: \text{Mon}(\mathbf{CGWH}) \rightarrow (\mathbf{Cat}/\mathbf{Vect})^{\text{op}}$ が得られる. $\square$

参考文献

- [1] Gabriel C. Drummond-Cole and Joseph Hirsh and Damien Lejay, Representations are adjoint to endomorphisms, <https://arxiv.org/abs/1904.06987>
- [2] G. M. Kelly, Basic Concepts of Enriched Category Theory, Cambridge University Press, Lecture Notes in Mathematics 64 (1982), <http://tac.mta.ca/tac/reprints/articles/10/tr10abs.html>