proarrow equipment

alg-d
https://alg-d.com/math/kan_extension/

2026 年 1 月 14 日

各点 Kan 拡張を定義するもう 1 つの方法が proarrow equipment である．proarrow は profunctor の一般化であり，これを使って各点 Kan 拡張を定義する（これを p-各点 Kan 拡張と呼ぶ）．

目次

1 定義

定義. $\mathcal{B}$ を bicategory とする．$\mathcal{B}$ の **proarrow equipment** とは, bicategory $\mathcal{M}$ と pseudofunctor $(-)_* \colon \mathcal{B} \to \mathcal{M}$ であって以下の条件を満たすものをいう．

(p1) $\mathrm{Ob}(\mathcal{B}) = \mathrm{Ob}(\mathcal{M})$ であり，$(-)_*$ は対象について恒等写像である．

(p2) $(-)_*$ は局所忠実充満である．

(p3) 任意の 1-morphism $f \in \mathcal{B}$ に対して，$f_* \in \mathcal{M}$ は右随伴 f^* を持つ．（ここでは随伴 $f_* \dashv f^*$ の unit, counit を η_f, ε_f で表す．）

また $\mathcal{B}$ の 1-morphism を **map**，$\mathcal{M}$ の 1-morphism を **proarrow** と呼ぶ．

例 1．$\mathrm{id}_{\mathbb{1}} \colon \mathbb{1} \to \mathbb{1}$ は $\mathbb{1}$ の proarrow equipment である． □

例 2．bicategory $\mathcal{M}$ の局所充満部分 bicategory $\mathcal{B} \subset \mathcal{M}$ を

- $\mathrm{Ob}(\mathcal{B}) \coloneqq \mathrm{Ob}(\mathcal{M})$ とする．
- $\mathrm{Ob}(\mathcal{B}(a,b)) \coloneqq \{ f \colon a \to b \mid f \text{ は右随伴を持つ} \}$ とする．

により定める．このとき包含 $\mathcal{B} \to \mathcal{M}$ は $\mathcal{B}$ の proarrow equipment である． □

例 3．V を完備かつ余完備な対称モノイダル閉圏としたとき $(-)_* \colon V\text{-}\mathbf{Cat} \to V\text{-}\mathbf{Prof}$ を以下のように定める．

- $\mathcal{C} \in V\text{-}\mathbf{Cat}$ に対して $\mathcal{C}_* \coloneqq \mathcal{C}$ とする．
- $\mathcal{C}, \mathcal{D} \in V\text{-}\mathbf{Cat}$ に対して関手 $(-)_* \colon V\text{-}\mathbf{Cat}(\mathcal{C},\mathcal{D}) \to V\text{-}\mathbf{Prof}(\mathcal{C},\mathcal{D})$ を

$$V\text{-}\mathbf{Cat}(\mathcal{C},\mathcal{D}) \xrightarrow{y \bullet -} V\text{-}\mathbf{Cat}(\mathcal{C},\widehat{\mathcal{D}}) = V\text{-}\mathbf{Prof}(\mathcal{C},\mathcal{D})$$

  により定める．即ち V-関手 $F \colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ に対して $F_* \coloneqq y \circ F$ である．
- $F \colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$，$G \colon \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ に対して，合成の定義より

$$G_* \diamond F_* = y^{\dagger}(yG) \circ y \circ F \cong y \circ G \circ F = (GF)_*$$

$$\begin{tikzcd}
 & \widehat{\mathcal{B}} \arrow[r, "y^{\dagger}(yG)"] & \widehat{\mathcal{C}} \\
\mathcal{A} \arrow[ur, "F_*"] \arrow[r, "F"'] & \mathcal{B} \arrow[u, "y"] \arrow[r, "G"'] & \mathcal{C} \arrow[u, "y"']
\end{tikzcd}$$

  である．この同型を $\varphi_{GF} \colon G_* \diamond F_* \Rightarrow (GF)_*$ と書く．これは G, F について自然である．
- $\mathcal{C} \in V\text{-}\mathbf{Cat}$ に対して $(\mathrm{id}_{\mathcal{C}})_* = y$ である．
- このとき $V\text{-}\mathbf{Prof}$ における次の等式が成り立つ．

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{B} \arrow[rr, "G_*"] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow \varphi_{GF}"] & & \mathcal{C} \arrow[dr, "H_*"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow \varphi_{H,GF}"] & \\
\mathcal{A} \arrow[ur, "F_*"] \arrow[urrr, "(GF)_*"] \arrow[rrrr, "(HGF)_*"'] & & & {} & \mathcal{D}
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
 & \mathcal{B} \arrow[rr, "G_*"] \arrow[drrr, "(HG)_*"'] \arrow[d, phantom, "\Downarrow \varphi_{HG,F}"] & & \mathcal{C} \arrow[dr, "H_*"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow \varphi_{HG}"] & \\
\mathcal{A} \arrow[ur, "F_*"] \arrow[rrrr, "(HGF)_*"'] & {} & & {} & \mathcal{D}
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{D} \arrow[dr, "(\mathrm{id})_*" description] \arrow[dr, bend left=60, "\mathrm{id}"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\varphi_{\mathrm{id},F}"] & \\ \mathcal{C} \arrow[ur, "F_*"] \arrow[rr, "(\mathrm{id}_b\circ F)_*"] \arrow[rr, bend right, "F_*"'] && \mathcal{D} \end{tikzcd} = \begin{tikzcd} & \mathcal{D} \arrow[dr, bend left=60, "\mathrm{id}"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\lambda"] & \\ \mathcal{C} \arrow[ur, "F_*"] \arrow[rr, bend right, "F_*"'] && \mathcal{D} \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{C} \arrow[dr, "F_*"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\varphi_{F,\mathrm{id}}"] & \\ \mathcal{C} \arrow[ur, bend left=60, "\mathrm{id}"] \arrow[ur, "(\mathrm{id})_*" description] \arrow[rr, "(F\circ\mathrm{id})_*"] \arrow[rr, bend right, "F_*"'] && \mathcal{D} \end{tikzcd} = \begin{tikzcd} & \mathcal{C} \arrow[dr, "F_*"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\rho"] & \\ \mathcal{C} \arrow[ur, bend left=60, "\mathrm{id}"] \arrow[rr, bend right, "F_*"'] && \mathcal{D} \end{tikzcd}$$

- 以上により $(-)_*\colon V\text{-}\mathbf{Cat} \to V\text{-}\mathbf{Prof}$ は pseudofunctor である．
- $y\colon \mathcal{D} \to \widehat{\mathcal{D}}$ は V-$\mathbf{Cat}$ の 1-morphism として忠実充満である（「米田構造」の PDF を参照）．従って $(-)_*\colon V\text{-}\mathbf{Cat}(\mathcal{C},\mathcal{D}) \to V\text{-}\mathbf{Prof}(\mathcal{C},\mathcal{D})$ は忠実充満関手である．即ち $(-)_*$ は局所忠実充満である．
- V-関手 $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ に対して $F_* \dashv F^*\colon \mathcal{C} \nrightarrow \mathcal{D}$ である．
- 以上により $(-)_*\colon V\text{-}\mathbf{Cat} \to V\text{-}\mathbf{Prof}$ は proarrow equipment である． □

命題 4. $f \mapsto f^*$ は pseudofunctor $(-)^*\colon \mathcal{B}^{\mathrm{coop}} \to \mathcal{M}$ を与える．

証明. $\beta\colon f \Rightarrow g\colon a \to b$ を $\mathcal{B}$ の 2-morphism とすると，$g_* \dashv g^*$ より $g_*^\dagger\mathrm{id} = \langle g^*, \eta_g\rangle$ となるから，次の等式を満たす $\beta^*\colon g^* \Rightarrow f^*$ が一意に存在する．

$$\begin{tikzcd} & b \arrow[dr, bend left, "f^*"] \arrow[d, phantom, "\Uparrow\eta_f"] & \\ a \arrow[ur, bend left=50, "g_*"] \arrow[ur, bend right, "f_*"'] \arrow[ur, phantom, "\Leftarrow\beta_*"] \arrow[rr, "\mathrm{id}_a"'] && a \end{tikzcd} = \begin{tikzcd} & b \arrow[dr, bend left=50, "f^*"] \arrow[dr, bend right, "g^*"'] \arrow[dr, phantom, "\Rightarrow\beta^*"] \arrow[d, phantom, "\eta_g\Uparrow"] & \\ a \arrow[ur, bend left, "g_*"] \arrow[rr, "\mathrm{id}_a"'] && a \end{tikzcd}$$

これにより $(-)^*$ が pseudofunctor になることを示せばよい．

- 普遍性から明らかに $(-)^*\colon \mathcal{B}^{\mathrm{coop}}(a,b) \to \mathcal{M}(a,b)$ は関手である．
- $a \xrightarrow{f} b \xrightarrow{g} c$ とすると $f_* \dashv f^*$，$g_* \dashv g^*$ だから $g_* \circ f_* \dashv f^* \circ g^*$ である．この随伴

の unit を η'_{gf} として，次の等式により τ_{gf} を定める．（φ は $(-)_*$ の φ である．）

$$
\begin{tikzcd}
 & & c \arrow[dr, bend left, "g^*"] & \\
 & b \arrow[ur, bend right, "g_*"'] \arrow[u, phantom, "\Leftarrow\varphi_{gf}"] & \arrow[d, phantom, "\Uparrow\eta'_{gf}"] & b \arrow[d, bend left, "f^*"] \\
a \arrow[ur, bend right, "f_*"'] \arrow[uurr, bend left, "(g\circ f)_*"] \arrow[rrr, "\mathrm{id}_a"'] & & & a
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
 & & c \arrow[dr, bend left, "g^*"] \arrow[ddr, bend right, "(g\circ f)^*"'] & \\
 & \arrow[r, phantom, "\eta_{g\circ f}\Uparrow"] & \arrow[r, phantom, "\tau_{gf}\Nearrow"] & b \arrow[d, bend left, "f^*"] \\
a \arrow[uurr, bend left, "(g\circ f)_*"] \arrow[rrr, "\mathrm{id}_a"'] & & & a
\end{tikzcd}
$$

φ_{gf} が同型だから τ_{gf} も同型になる．そこで $\varphi'_{gf} \coloneqq \tau_{gf}^{-1}$ と定める．

- φ'_{gf} は自然同型

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathcal{B}^{\mathrm{coop}}(b,c)\times\mathcal{B}^{\mathrm{coop}}(a,b) \arrow[dl, "(-)^*\times(-)^*"'] \arrow[dr, "M"] & \\
\mathcal{M}(b,c)\times\mathcal{M}(a,b) \arrow[dr, "M"'] & \overset{\sim}{\underset{\varphi'}{\Longrightarrow}} & \mathcal{B}^{\mathrm{coop}}(a,c) \arrow[dl, "(-)^*"] \\
 & \mathcal{M}(a,c) &
\end{tikzcd}
$$

を定めることが普遍性から分かる．

- $a \in \mathcal{B}$ に対して ψ'_a を次の等式で定める．

$$
\begin{tikzcd}
 & a \arrow[dr, bend left, "\mathrm{id}"] & \\
a \arrow[ur, bend left, "\mathrm{id}_*"] \arrow[ur, bend right, "\mathrm{id}"'] \arrow[rr, "\mathrm{id}"'] & \arrow[u, phantom, "\Leftarrow\psi_a \quad \Uparrow\rho"] & a
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
 & a \arrow[dr, bend left, "f^*"] \arrow[dr, bend right, "\mathrm{id}^*"'] & \\
a \arrow[ur, bend left, "\mathrm{id}_*"] \arrow[rr, "\mathrm{id}"'] & \arrow[u, phantom, "\eta_{\mathrm{id}}\Uparrow \quad \psi'_a\Nearrow"] & a
\end{tikzcd}
$$

- このとき次の図式は可換であることが分かる．

$$
\begin{tikzcd}
f^*\circ(g^*\circ h^*) \arrow[r, "f^*\bullet\varphi'_{hg}"] \arrow[d, "\alpha_{f^*g^*h^*}"'] & f^*\circ(h\circ g)^* \arrow[r, "\varphi'_{h\circ g,f}"] & ((h\circ g)\circ f)^* \arrow[d, "F(\alpha_{hgf})"] \\
(f^*\circ g^*)\circ h^* \arrow[r, "\varphi'_{gf}\bullet h^*"'] & (g\circ f)^*\circ h^* \arrow[r, "\varphi'_{h,g\circ f}"'] & (h\circ(g\circ f))^*
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
f^*\circ\mathrm{id} \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "f^*\bullet\psi'"'] & f^* \\
f^*\circ\mathrm{id}^* \arrow[r, "\varphi'_{\mathrm{id}_b,f}"'] & (\mathrm{id}\circ f)^* \arrow[u, "\lambda^*"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathrm{id}_{Fa}\circ f^* \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "\psi'\bullet f^*"'] & f^* \\
\mathrm{id}^*\circ f^* \arrow[r, "\varphi'_{f,\mathrm{id}_a}"'] & (f\circ\mathrm{id})^* \arrow[u, "\rho^*"']
\end{tikzcd}
$$

以上により $(-)^*$ は pseudofunctor である． □

この $(-)^*\colon \mathcal{B}^{\mathrm{coop}} \to \mathcal{M}$ は明らかに局所忠実充満である．

命題 5. $f\colon a \to b,\ u\colon b \to a$ を map とするとき

$$\mathcal{B} \text{ において } f \dashv u \text{ である} \iff \mathcal{M} \text{ において } f^* \cong u_* \text{ である．}$$

証明. $(\Longrightarrow)$ $f \dashv u$ とすると $(-)_*$ が pseudofunctor だから $f_* \dashv u_*$ である．よって右随伴の一意性により $f^* \cong u_*$ である．

$(\Longleftarrow)$ $f^* \cong u_*$ とすると $f_* \dashv f^*$ だから $f_* \dashv u_*$ である．$(-)_*$ が局所忠実充満だから $f \dashv u$ である．（「2-category」の PDF を参照.） □

2　p-各点 Kan 拡張

定義. $\mathcal{B}$ の図式

$$\begin{tikzcd} b \arrow[rd, "l"] & \\ a \arrow[u, "f"] \arrow[r, "g"'] \arrow[ru, phantom, "\eta\Uparrow"] & c \end{tikzcd}$$

を考える．$\langle l, \eta \rangle$ が f に沿った g の **p-各点左 Kan 拡張**とは，$(-)^*$ を適用して得られる $\mathcal{M}$ の図式

$$\begin{tikzcd} b \arrow[d, "f^*"'] & \\ a \arrow[ru, phantom, "\eta^*\Downarrow"] & c \arrow[lu, "l^*"'] \arrow[l, "g^*"] \end{tikzcd}$$

が右 Kan リフトを与えることをいう．

> ※ ここで η^* は厳密には $(l \circ f)^* \Rightarrow g^*$ という 2-morphism であるが，これを pseudofunctor による同型 $(l \circ f)^* \cong f^* \circ l^*$ を使って $\eta^*\colon f^* \circ l^* \Rightarrow g^*$ とみなしてこのような図式を描いている．詳しくは「2-category」の PDF の pasting theorem を参照.

例 6. proarrow equipment $(-)_*\colon V\text{-}\mathbf{Cat} \to V\text{-}\mathbf{Prof}$（例 3）において p-各点左 Kan

拡張

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{D} \arrow[dr, "L"] & \\
\mathcal{C} \arrow[u, "F"] \arrow[r, "E"'] \arrow[ur, phantom, "\eta\Uparrow"] & \mathcal{M}
\end{tikzcd}
$$

を考える．即ち

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{D} \arrow[d, "F^*"', "\circ" marking] \arrow[dr, phantom, "\eta^*\Downarrow"] & \\
\mathcal{C} & \mathcal{M} \arrow[ul, "L^*"', "\circ" marking] \arrow[l, "E^*", "\circ" marking]
\end{tikzcd}
$$

が V-**Prof** での右 Kan リフトということだが，右 Kan リフト $(F^*)_{\ddagger}E^*$ は

$$(F^*)_{\ddagger}E^*(d,m) \cong \widehat{\mathcal{C}}(F^*d, E^*m) \cong \widehat{\mathcal{C}}(\mathcal{D}(F-,d), \mathcal{M}(E-,m))$$

で与えられる．即ち $d \in \mathcal{D}$ と $m \in \mathcal{M}$ について自然に

$$\mathcal{M}(Ld,m) \cong \widehat{\mathcal{C}}(\mathcal{D}(F-,d), \mathcal{M}(E-,m))$$

となり，L は V-関手の意味での各点左 Kan 拡張である（この L の unit が元の η と一致していることは以下の議論から分かる）．

逆に L が V-関手の各点左 Kan 拡張であるとする．即ち $d \in \mathcal{D}$ と $m \in \mathcal{M}$ について自然な同型

$$\sigma_{dm} \colon \mathcal{M}(Ld,m) \to \widehat{\mathcal{C}}(\mathcal{D}(F-,d), \mathcal{M}(E-,m))$$

が存在したとする．$\widehat{\mathcal{C}}(\mathcal{D}(F-,d), \mathcal{M}(E-,m))$ が定める V-profunctor を $R \colon \mathcal{M} \nrightarrow \mathcal{D}$ とすると $\sigma \colon L^* \Rightarrow R$ は V-**Prof** の 2-morphism である．そこで

$$
\theta \quad := \quad
\begin{tikzcd}
\mathcal{D} \arrow[d, "F^*"', "\circ" marking] \arrow[dr, phantom, "\varepsilon\Downarrow"] & \\
\mathcal{C} & \mathcal{M} \arrow[ul, "R"', "\circ" marking] \arrow[ul, bend right=50, "L^*"', "\circ" marking] \arrow[l, "E^*", "\circ" marking] \arrow[ul, phantom, bend right=25, "\Swarrow\sigma"]
\end{tikzcd}
$$

と定める（但し ε は右 Kan リフト R の counit である）．合成

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{M}(Ld,m) \otimes \mathcal{D}(Fc,d) \\
&\xrightarrow{\sigma_{dm} \otimes \mathrm{id}} \widehat{\mathcal{C}}(\mathcal{D}(F-,d), \mathcal{M}(E-,m)) \otimes \mathcal{D}(Fc,d) \\
&\xrightarrow{\mathrm{ev}_c \otimes \mathrm{id}} [\mathcal{D}(Fc,d), \mathcal{M}(Ec,m)] \otimes \mathcal{D}(Fc,d) \\
&\xrightarrow{\mathrm{ev}} \mathcal{M}(Ec,m)
\end{aligned}
$$

は d について自然であり，そこからコエンドの普遍性で得られる射

$$\int^{d\in\mathcal{D}} \mathcal{M}(Ld,m)\otimes\mathcal{D}(Fc,d)\to\mathcal{M}(Ec,m)$$

が θ_{cm} である．これは余米田の補題により

$$\theta_{cm}\colon \mathcal{M}(LFc,m)\to\mathcal{M}(Ec,m)$$

とみなすことができる．ここで $\theta_{cm}\colon \mathcal{M}(LFc,m)\to\mathcal{M}(Ec,m)$ は m について自然だから，米田の補題により $\mathcal{M}$ の射 $\eta_c\colon Ec\nrightarrow LFc$ を使って $\theta_{cm}=(-\circ\eta_c)$ と書ける．つまり余米田の補題の証明によれば次の図式が可換である．（但し ζ_d は $\mathcal{M}(L-,m)$ の随伴射である．）

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{M}(Ld,m)\otimes\mathcal{D}(Fc,d) \arrow[r, "\zeta_d"] \arrow[d, "\sigma_{dm}\otimes\mathrm{id}"'] & \mathcal{M}(LFc,m) \arrow[dd, "\theta_{cm}=(-\circ\eta_c)"] \\
\widehat{\mathcal{C}}(\mathcal{D}(F-,d),\mathcal{M}(E-,m))\otimes\mathcal{D}(Fc,d) \arrow[d, "\mathrm{ev}_c\otimes\mathrm{id}"'] & \\
{[\mathcal{D}(Fc,d),\mathcal{M}(Ec,m)]}\otimes\mathcal{D}(Fc,d) \arrow[r, "\mathrm{ev}"'] & \mathcal{M}(Ec,m)
\end{tikzcd}$$

よって随伴により次の可換図式を得る．（ζ'_d は随伴射である．）

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{M}(Ld,m) \arrow[r, "\zeta'_d"] \arrow[d, "\sigma_{dm}"'] & {[\mathcal{D}(Fc,d),\mathcal{M}(LFc,m)]} \arrow[dd, "{[\mathrm{id},-\circ\eta_c]}"] \\
\widehat{\mathcal{C}}(\mathcal{D}(F-,d),\mathcal{M}(E-,m)) \arrow[d, "\mathrm{ev}_c"'] & \\
{[\mathcal{D}(Fc,d),\mathcal{M}(Ec,m)]} \arrow[r, "\mathrm{id}"'] & {[\mathcal{D}(Fc,d),\mathcal{M}(Ec,m)]}
\end{tikzcd} \tag{7}$$

このとき

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{M}(LFc,m) \arrow[r, "\zeta'_{Fc}"] & {[\mathcal{D}(Fc,Fc),\mathcal{M}(LFc,m)]} \arrow[d, "{[j_{Fc},\mathrm{id}]}"] \\
\mathcal{M}(LFc,m) \arrow[u, "\mathrm{id}"] \arrow[r, "i"'] \arrow[ur, phantom, "(*)"] & {[I,\mathcal{M}(LFc,m)]}
\end{tikzcd} \quad \text{が可換}$$

$$\iff \quad \begin{tikzcd}
\mathcal{M}(LFc,m)\otimes\mathcal{D}(Fc,Fc) \arrow[r, "\zeta_{Fc}"] & \mathcal{M}(LFc,m) \arrow[d, "\mathrm{id}"] \\
\mathcal{M}(LFc,m)\otimes I \arrow[u, "\mathrm{id}\otimes j_{Fc}"] \arrow[r, "\rho"'] & \mathcal{M}(LFc,m)
\end{tikzcd} \quad \text{が可換}$$

$$
\iff \quad
\begin{tikzcd}
\mathcal{D}(Fc, Fc) \arrow[r, "\mathcal{M}(L-, m)"] & {[\mathcal{M}(LFc, m), \mathcal{M}(LFc, m)]} \arrow[d, "\mathrm{id}"] \\
I \arrow[u, "j_{Fc}"] \arrow[r, "j_{\mathcal{M}(LFc, m)}"'] & {[\mathcal{M}(LFc, m), \mathcal{M}(LFc, m)]}
\end{tikzcd}
\quad \text{が可換}
$$

となり，最後の図式は可換であるから $(*)$ も可換である．そこで合成

$$
[\mathcal{D}(Fc, Fc), \mathcal{M}(m, LFc)] \xrightarrow{[j_{Fc}, \mathrm{id}]} [I, \mathcal{M}(m, LFc)] \xrightarrow{i^{-1}} \mathcal{M}(m, LFc)
$$

を ξ_m と書けば，次の可換図式が得られる．

$$
\begin{tikzcd}
I \arrow[d, "\mathrm{id}_{LFc}"'] & & \\
\mathcal{M}(LFc, LFc) \arrow[r, "\zeta'_{Fc}"] \arrow[d, "\sigma_{Fc, LFc}"'] \arrow[rr, bend left=40, "\mathrm{id}"] & {[\mathcal{D}(Fc, Fc), \mathcal{M}(LFc, LFc)]} \arrow[r, "\xi_{LFc}"] \arrow[dd, "{[\mathrm{id}, -\circ\eta_c]}"] \arrow[u, phantom, "(*)"] & \mathcal{M}(LFc, LFc) \arrow[dd, "-\circ\eta_c"] \\
\widehat{\mathcal{C}}(\mathcal{D}(F-, Fc), \mathcal{M}(E-, LFc)) \arrow[d, "\mathrm{ev}_c"'] \arrow[r, phantom, "(7)"] & \arrow[r, phantom, "(\xi)"] & \\
{[\mathcal{D}(Fc, Fc), \mathcal{M}(Ec, LFc)]} \arrow[r, "\mathrm{id}"'] & {[\mathcal{D}(Fc, Fc), \mathcal{M}(Ec, LFc)]} \arrow[r, "\xi_{Ec}"'] & \mathcal{M}(Ec, LFc)
\end{tikzcd}
$$

この図式の右回りの合成が η_c だから，η_c は左回りの合成

$$
\begin{aligned}
I &\xrightarrow{j_{TFc}} \mathcal{M}(TFc, TFc) \cong \widehat{\mathcal{C}}(\mathcal{D}(F-, Fc), \mathcal{M}(E-, TFc)) \\
&\xrightarrow{\mathrm{ev}_c} [\mathcal{D}(Fc, Fc), \mathcal{M}(Ec, TFc)] \xrightarrow{[j_{Fc}, \mathrm{id}]} [I, \mathcal{M}(Ec, TFc)] \\
&\xrightarrow{i^{-1}} \mathcal{M}(Ec, TFc)
\end{aligned}
$$

と一致することが分かり，これは各点左 Kan 拡張 L の unit と一致する（「豊穣圏」の PDF を参照）．更に η の取り方から $\eta^* = \theta$ となり

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{D} \arrow[d, "F^*"'] & \\
\mathcal{C} \arrow[r, phantom, "\Uparrow"] & \mathcal{M} \arrow[ul, "L^*"'] \arrow[l, "E^*"] \arrow[ul, phantom, "\eta^*\Downarrow", near end, shift right=3]
\end{tikzcd}
$$

は右 Kan リフトである．故に $\langle L, \eta \rangle$ は p-各点左 Kan 拡張である．

以上によりこの場合の p-各点左 Kan 拡張は豊穣圏論における各点左 Kan 拡張と一致する． $\square$

y-各点左 Kan 拡張のときと同様に，p-各点左 Kan 拡張が「各点左 Kan 拡張」としての性質を持っていることを見ていく．

命題 8．p-各点左 Kan 拡張は左 Kan 拡張である．

証明． $\mathcal{B}$ の図式

$$\begin{tikzcd} b \arrow[dr, "l"] & \\ a \arrow[u, "f"] \arrow[r, "g"'] \arrow[ur, phantom, "\eta\Uparrow"] & c \end{tikzcd}$$

を p-各点左 Kan 拡張とする．これが左 Kan 拡張であることを示すため，図式

$$\begin{tikzcd} b \arrow[dr, "k"] & \\ a \arrow[u, "f"] \arrow[r, "g"'] \arrow[ur, phantom, "\theta\Uparrow"] & c \end{tikzcd}$$

を考える．これに $(-)^*$ を適用すれば，次の右辺が得られるから，p-各点左 Kan 拡張の定義より左辺の τ が得られる．

$$\begin{tikzcd} b \arrow[d, "f^*"'] \arrow[dr, phantom, "\eta^*\Downarrow"] & \\ a & c \arrow[l, "g^*"] \arrow[ul, "l^*"] \arrow[ul, bend right=40, "k^*"', ""{name=K}] \arrow[ul, phantom, bend right=20, "\Swarrow\tau"] \end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd} b \arrow[d, "f^*"'] \arrow[dr, phantom, "\theta^*\Downarrow"] & \\ a & c \arrow[l, "g^*"] \arrow[ul, bend right=40, "k^*"'] \end{tikzcd}$$

$(-)^*$ は局所忠実充満だから，この τ は $\tau\colon l \Rightarrow k$ を使って τ^* と書ける．このとき再び局所忠実充満性より

$$\begin{tikzcd} b \arrow[dr, "l"] \arrow[dr, bend left=40, "k"] \arrow[dr, phantom, bend left=20, "\Nearrow\tau"] & \\ a \arrow[u, "f"] \arrow[r, "g"'] \arrow[ur, phantom, "\eta\Uparrow"] & c \end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd} b \arrow[dr, bend left=40, "k"] & \\ a \arrow[u, "f"] \arrow[r, "g"'] \arrow[ur, phantom, "\theta\Uparrow"] & c \end{tikzcd}$$

となる．このような τ は明らかに一意だから $\langle l, \eta\rangle$ が左 Kan 拡張であることが分かった． □

定義．$s\colon a \to b$ を map，$\Phi\colon x \to a$ を proarrow とする．s の Φ-**weighted colimit** とは

map $\mathrm{colim}^{\Phi}s\colon x \to b$ であって $\Phi_{\ddagger}s^* \cong (\mathrm{colim}^{\Phi}s)^*$ となるものをいう.

$$\begin{tikzcd} x \arrow[d, "\Phi"'] & \\ a \arrow[ur, phantom, "\Downarrow"] & b \arrow[l, "s^*"] \arrow[ul, "(\mathrm{colim}^{\Phi}s)^*"'] \end{tikzcd}$$

例 9. map $s\colon a \to b$ に対して $\mathrm{colim}^{\mathrm{id}_a}s \cong s$ である. □

例 10. l が f に沿った g の p-各点左 Kan 拡張ならば, $l \cong \mathrm{colim}^{f^*}g$ である. □

定義. $s\colon a \to b$ を map, $\Phi\colon x \to a$ を proarrow として $\mathrm{colim}^{\Phi}s\colon x \to b$ が存在するとする. このとき map $f\colon b \to c$ が $\mathrm{colim}^{\Phi}s$ と**交換する**
$\iff$ f^* が右 Kan リフト $\mathrm{colim}^{\Phi}s$ と交換する.

命題 11. $f\colon a \to b$, $g\colon a \to c$ を map として p-各点左 Kan 拡張 $\langle f^{\dagger}g, \eta\rangle$ が存在するとする（このとき例 10 より $\mathrm{colim}^{f^*}g$ も存在する）. $k\colon c \to d$ が $\mathrm{colim}^{f^*}g$ と交換するとする. このとき k は $f^{\dagger}g$ と交換する.

証明. κ を

$$\kappa \quad := \quad \begin{tikzcd} b \arrow[dr, "f^{\dagger}g"] & & \\ a \arrow[u, "f"] \arrow[r, "g"'] \arrow[ur, phantom, "\eta\Uparrow"] & c \arrow[r, "k"'] & d \end{tikzcd}$$

と定義すると, k が $\mathrm{colim}^{f^*}g$ と交換するから

$$\begin{tikzcd} b \arrow[d, "f^*"'] & \\ a \arrow[ur, phantom, "\kappa^*\Downarrow"] & c \arrow[l, "(k\circ g)^*"] \arrow[ul, "(k\circ f^{\dagger}g)^*"'] \end{tikzcd} \quad = \quad \begin{tikzcd} b \arrow[d, "f^*"'] & & \\ a \arrow[ur, phantom, "\eta^*\Downarrow"] & a \arrow[l, "g^*"] \arrow[ul, "(f^{\dagger}g)^*"'] & c \arrow[l, "k^*"] \end{tikzcd}$$

が右 Kan リフトとなる. □

命題 12. map $f\colon b \to c$ が左随伴のとき, f は任意の weighted colimit と交換する.

証明. $\mathcal{B}$ において $f \dashv u$ とすると $\mathcal{M}$ において $f^* \dashv u^*$ である. 故に f^* は右 Kan リフトと交換する. □

命題 13. $s\colon a \to b$ を map, $\Phi\colon x \to a$ と $\Psi\colon u \to x$ を proarrow として $\mathrm{colim}^{\Phi}s$ が存在

するとする．このとき

$$\mathrm{colim}^{\Psi}\mathrm{colim}^{\Phi}s \cong \mathrm{colim}^{\Phi\circ\Psi}s$$

である（但しこの式は，片方が存在するならばもう片方も存在して同型となることを表す）．

証明. 右 Kan リフトの性質から明らか（「2-category での随伴・Kan 拡張・忠実充満」の PDF を参照）．

$$\begin{tikzcd}
u \arrow[d, "\Psi"'] & \\
x \arrow[d, "\Phi"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow"] & \\
a \arrow[r, phantom, "\Downarrow"] & b \arrow[l, "s^*"] \arrow[ul, "\mathrm{colim}^{\Phi}s"'] \arrow[uul, "\mathrm{colim}^{\Psi}\mathrm{colim}^{\Phi}s \cong \mathrm{colim}^{\Phi\circ\Psi}s"']
\end{tikzcd}$$

□

命題 14. $f\colon a \to b$, $g\colon a \to c$ を map とする．f が右随伴を持つとするとすると左 Kan 拡張 $f^{\dagger}g$ が存在するが，この左 Kan 拡張は p-各点左 Kan 拡張である．

証明. $f \dashv u$ として，これの unit を η とする．$f^{\dagger}g$ の unit は

$$\kappa \quad \coloneqq \quad \begin{tikzcd}
b \arrow[dr, "u"] & & \\
a \arrow[u, "f"] \arrow[r, "\mathrm{id}_a"'] \arrow[ur, phantom, "\eta\Uparrow"] & a \arrow[r, "g"'] & c
\end{tikzcd}$$

で定義される κ である．一方で $f^* \dashv u^*$ であり，η^* が counit となる．従って $(f^*)_{\ddagger}\mathrm{id} = \langle u^*, \eta^* \rangle$ は絶対右 Kan リフトとなり，

$$\begin{tikzcd}
b \arrow[d, "f^*"'] & \\
a \arrow[r, phantom, "\kappa^*\Downarrow"] & c \arrow[l, "g^*"] \arrow[ul, "u^*"']
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
b \arrow[d, "f^*"'] & & \\
a \arrow[r, phantom, "\eta^*\Downarrow"] & a \arrow[l, "(\mathrm{id}_a)^*"] \arrow[ul, "u^*"'] & c \arrow[l, "g^*"]
\end{tikzcd}$$

も右 Kan リフトとなる． □

3 p-忠実充満

定義. map $f\colon a \to b$ が **p-忠実充満** $\iff$ η_f が同型である．

例 15. 例 3 の proarrow equipment $(-)_*\colon V\text{-}\mathbf{Cat} \to V\text{-}\mathbf{Prof}$ では p-忠実充満とは V-忠実充満のことである． $\square$

次の定理の通り p-忠実充満は p-各点左 Kan 拡張に付随した「忠実充満」である．

定理 16. $\mathcal{B}$ の図式

$$\begin{tikzcd}
b \arrow[dr, "l"] & \\
a \arrow[u, "f"] \arrow[r, "g"'] \arrow[ur, phantom, "\eta\Uparrow"] & c
\end{tikzcd}$$

が p-各点左 Kan 拡張で，f が p-忠実充満ならば，η は同型である．

証明. $\langle l, \eta\rangle$ が p-各点左 Kan 拡張だから

$$\begin{tikzcd}
b \arrow[d, "f^*"'] & \\
a \arrow[ur, phantom, "\eta^*\Downarrow"] & c \arrow[l, "g^*"] \arrow[ul, "l^*"']
\end{tikzcd}$$

が右 Kan リフトである．次に $f_* \dashv f^*$ より合成

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[d, "f_*"'] & & \\
b \arrow[ur, phantom, "\varepsilon_f\Downarrow"] & b \arrow[l, "\mathrm{id}_b"] \arrow[ul, "f^*"'] & c \arrow[l, "l^*"']
\end{tikzcd}$$

も右 Kan リフトである．故にそれらを合成した

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[d, "f_*"'] & \\
b \arrow[d, "f^*"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\varepsilon_f\bullet l^*"] & \\
a \arrow[r, phantom, "\Uparrow"{opacity=0}] \arrow[ur, phantom, "\Downarrow\eta^*"] & c \arrow[l, "g^*"] \arrow[ul, "l^*"'] \arrow[uul, bend right, "f^*\circ l^*"']
\end{tikzcd}$$

も右 Kan リフトである．今，f が p-忠実充満だから η_f が同型であり，合成

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[d, "f_*"'] \arrow[dd, bend right=60, "\mathrm{id}_a"'] \arrow[dd, phantom, shift right=4ex, "\overset{\eta_f}{\Rightarrow}"] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\varepsilon_f\bullet l^*"] & \\
b \arrow[d, "f^*"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\eta^*"] & \\
a & c \arrow[l, "g^*"] \arrow[ul, "l^*"'] \arrow[uul, bend right, "f^*\circ l^*"']
\end{tikzcd}$$

も右 Kan リフトとなる．即ちこの合成は同型である．一方で η_f と ε_f は $f_* \dashv f^*$ の unit, counit だったから

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[d, "f_*"'] \arrow[dd, bend right=60, "\mathrm{id}_a"'] \arrow[dd, phantom, shift right=4ex, "\overset{\eta_f}{\Rightarrow}"] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\varepsilon_f\bullet l^*"] & \\
b \arrow[d, "f^*"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\eta^*"] & \\
a & c \arrow[l, "g^*"] \arrow[ul, "l^*"'] \arrow[uul, bend right, "f^*\circ l^*"']
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
b \arrow[d, "f^*"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\eta^*"] & \\
a & c \arrow[l, "g^*"] \arrow[ul, "l^*"']
\end{tikzcd}$$

となり η^* も同型である．$(-)^*$ は局所忠実充満だったから η も同型である．$\square$

命題 17. map $f\colon a \to b$ が p-忠実充満である $\iff (f^*)^\ddagger f^* = \langle \mathrm{id}_a, \mathrm{id}_{f^*} \rangle$ となる．

証明. $f_* \dashv f^*$ より $(f^*)_\ddagger \mathrm{id}_b = \langle f_*, \varepsilon_f \rangle$ は絶対右 Kan 拡張である．また等式

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[dr, "f_*"] \arrow[drr, bend left, "\mathrm{id}_a"] \arrow[d, phantom, shift left=3ex, "\varepsilon_f\Downarrow"] & \arrow[d, phantom, "\Downarrow\eta_f"] & \\
b \arrow[u, "f^*"] \arrow[r, "\mathrm{id}_b"'] & b \arrow[r, "f^*"'] & a
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
a \arrow[r, bend left, "\mathrm{id}_a"] \arrow[r, phantom, "\mathrm{id}_{f^*}\Downarrow"] & a \\
b \arrow[u, "f^*"] \arrow[ur, "f^*"'] &
\end{tikzcd}$$

が成り立つ．

($\Longrightarrow$) f が p-忠実充満であるから η_f が同型であり，従って上記等式より $(f^*)^\ddagger f^* = \langle \mathrm{id}_a, \mathrm{id}_{f^*} \rangle$ が分かる．

($\Longleftarrow$) $(f^*)^\ddagger f^* = \langle \mathrm{id}_a, \mathrm{id}_{f^*} \rangle$ だとすると，上記等式と右 Kan 拡張の普遍性により η_f は同型となる．$\square$

補題 18. $\mathcal{B}$ の図式

$$\begin{tikzcd} b \arrow[d, "f"'] & \\ a & c \arrow[l, "g"] \arrow[ul, "l"'] \arrow[l, phantom, shift left=3, "\eta\Uparrow"] \end{tikzcd} \tag{19}$$

に $(-)^*$ を適用して得られる $\mathcal{M}$ の図式

$$\begin{tikzcd} b \arrow[dr, "l^*"] & \\ a \arrow[u, "f^*"] \arrow[r, "g^*"'] \arrow[r, phantom, shift left=3, "\eta^*\Downarrow"] & c \end{tikzcd}$$

が右 Kan 拡張を与えるならば，(19) は絶対左 Kan リフトである．

証明. (19) が絶対左 Kan リフトであることを示すため，$\mathcal{B}$ の図式

$$\begin{tikzcd} b \arrow[d, "f"'] & x \arrow[l, "j"'] \arrow[d, "k"] \\ a & c \arrow[l, "g"] \arrow[ul, phantom, "\theta\Uparrow"] \end{tikzcd}$$

を考える．$k_* \dashv k^*$ の unit ε_k と合わせて $\mathcal{M}$ の図式

$$\begin{tikzcd} b \arrow[r, "j^*"] & x \arrow[dr, "k_*"] & \\ a \arrow[u, "f^*"] \arrow[r, "g^*"'] \arrow[ur, phantom, "\theta^*\Downarrow"] & c \arrow[u, "k^*"'] \arrow[r, "\mathrm{id}"'] \arrow[r, phantom, shift left=3, "\Downarrow\varepsilon_k"] & c \end{tikzcd}$$

を得る．$\mathcal{M}$ において $l^* = (f^*)^{\ddagger} g^*$ だから τ が一意に存在して

$$\begin{tikzcd} b \arrow[dr, "l^*"'] \arrow[dr, bend left=40, "k^* \circ j_*"] \arrow[dr, phantom, shift left=2, "\Downarrow\tau"] & \\ a \arrow[u, "f^*"] \arrow[r, "g^*"'] \arrow[r, phantom, shift left=3, "\eta^*\Downarrow"] & c \end{tikzcd}$$

$$
\begin{tikzcd}
b \arrow[r, "j^*"] \arrow[dr, "l^*"] & x \arrow[dr, "k_*"] & \\
a \arrow[u, "f^*"] \arrow[r, "g^*"'] \arrow[u, phantom, shift left=3ex, "\eta^*\Downarrow"] & c \arrow[r, "\mathrm{id}"'] \arrow[u, phantom, "\tau\Downarrow"] & x
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
b \arrow[r, "j^*"] & x \arrow[dr, "k_*"] & \\
a \arrow[u, "f^*"] \arrow[r, "g^*"'] \arrow[ur, phantom, "\theta^*\Downarrow"] & c \arrow[u, "k^*"] \arrow[r, "\mathrm{id}"'] \arrow[ur, phantom, "\Downarrow\varepsilon_k"] & c
\end{tikzcd}
$$

となる．ε_k が絶対右 Kan リフトだから，ある ξ が存在して

$$
\begin{tikzcd}
b \arrow[r, "j^*"] \arrow[dr, "l^*"'] \arrow[dr, phantom, shift left=3ex, "\Downarrow\xi"] & x \arrow[dr, "k_*"] & \\
& c \arrow[u, "k^*"] \arrow[r, "\mathrm{id}"'] \arrow[ur, phantom, "\varepsilon_k\Downarrow"] & c
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
b \arrow[r, "j{\ast}"] \arrow[dr, "l^*"'] & x \arrow[dr, "k^*"] & \\
& c \arrow[r, "\mathrm{id}"'] \arrow[u, phantom, "\tau\Downarrow"] & c
\end{tikzcd}
$$

となる．このとき絶対右 Kan リフトの普遍性から

$$
\begin{tikzcd}
b \arrow[r, "j^*"] \arrow[dr, "l^*"] \arrow[dr, phantom, shift left=3ex, "\Downarrow\xi"] & x \\
a \arrow[u, "f^*"] \arrow[r, "g^*"'] \arrow[u, phantom, shift left=3ex, "\eta^*\Downarrow"] & c \arrow[u, "k^*"']
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
b \arrow[r, "j^*"] & x \\
a \arrow[u, "f^*"] \arrow[r, "g^*"'] \arrow[ur, phantom, "\theta^*\Downarrow"] & c \arrow[u, "k^*"']
\end{tikzcd}
$$

である． □

補題 20． $g \dashv u\colon c \to a$ とする．$\mathcal{B}$ の図式

$$
\begin{tikzcd}
b \arrow[d, "f"'] & \\
a \arrow[ur, phantom, "\eta\Uparrow"] & c \arrow[l, "g"] \arrow[ul, "l"']
\end{tikzcd}
$$

が絶対左 Kan リフトを与える $\Longleftrightarrow$ $(-)^*$ を適用して得られる $\mathcal{M}$ の図式

$$
\begin{tikzcd}
b \arrow[dr, "l^*"] & \\
a \arrow[u, "f^*"] \arrow[r, "g^*"'] \arrow[ur, phantom, "\eta^*\Downarrow"] & c
\end{tikzcd}
$$

が右 Kan 拡張を与える．

証明. $\Longleftarrow$ は補題 18 であるから $\Longrightarrow$ を示せばよい．

$g \dashv u$ の unit を β とする．仮定より $f_\dagger g = \langle l, \eta \rangle$ が絶対左 Kan リフトで，$g \dashv u$ だから，合成

$$\begin{tikzcd}
b \arrow[d, "f"'] & \\
a \arrow[d, "u"'] \arrow[r, phantom, "\Uparrow\eta"] & \\
c \arrow[r, phantom, "\Uparrow\beta"] & c \arrow[l, "\mathrm{id}_c"] \arrow[ul, "g"'] \arrow[uul, "l"']
\end{tikzcd}$$

も絶対左 Kan リフトである．故に $l \dashv u \circ f$ となる．従って命題 5 より $l^* \cong (u \circ f)_* \cong u_* \circ f_* \cong g^* \circ f_*$ となる．$\square$

命題 21．map $f\colon a \to b$ が p-忠実充満ならば f は忠実充満である．

証明. f が p-忠実充満とすると命題 17 より $(f^*)^\ddagger f^* = \langle \mathrm{id}_a, \mathrm{id}_{f^*} \rangle$ である．故に補題 18 より絶対左 Kan リフト $f_\dagger f = \langle \mathrm{id}, \mathrm{id} \rangle$ が成り立つ．よって f は忠実充満である．$\square$

命題 22．$f \dashv u\colon a \to b$ を $\mathcal{B}$ における随伴とする．このとき，f が忠実充満ならば f は p-忠実充満である．

証明. f が忠実充満とすると絶対左 Kan リフト $f_\dagger f = \langle \mathrm{id}_a, \mathrm{id}_f \rangle$ が成り立つ．故に補題 20 により $(f^*)^\ddagger f^* = \langle \mathrm{id}, \mathrm{id} \rangle$ である．従って命題 17 より f は p-忠実充満である．$\square$

命題 23．$f\colon a \to b$, $g\colon b \to c$ を map とする．g が p-忠実充満のとき

$$f \text{ が p-忠実充満である} \Longleftrightarrow g \circ f \text{ が p-忠実充満である．}$$

証明. $\eta_f, \eta_g, \eta_{g\circ f}$ には次のような関係がある．

$$\begin{tikzcd}
 & & c \arrow[dr, "g^*"] \arrow[ddrr, bend left, "(g\circ f)^*"'] & & \\
 & \Uparrow\eta_{g\circ f} & & b \arrow[dr, "f^*"] & \\
a \arrow[uurr, bend left, "(g\circ f)_*"] \arrow[rrrr, "\mathrm{id}_a"'] & & & & a
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
 & & c \arrow[dr, "g^*"] & & \\
 & b \arrow[ur, "g_*"] \arrow[rr, "\mathrm{id}_b"'] \arrow[r, phantom, "\Uparrow\eta_g"] \arrow[d, phantom, "\cong"] & & b \arrow[dr, "f^*"] & \\
a \arrow[uurr, bend left, "(g\circ f)_*"] \arrow[ur, "f_*"] \arrow[rr, "\mathrm{id}_a"'] & & a \arrow[ur, "f_*"] \arrow[r, phantom, "\Uparrow\eta_f"] \arrow[rr, "\mathrm{id}_a"'] & & a
\end{tikzcd}$$

今 g が p-忠実充満だから η_g が同型である．従って

$$\eta_f \text{ が同型} \Longleftrightarrow \eta_{g\circ f} \text{ が同型}$$

となる. $\square$

4 c-各点左 Kan 拡張との関係

p-各点左 Kan 拡張は次のようにして c-各点左 Kan 拡張と関係がある.

定義. $\mathcal{B}$ の図式

$$\begin{tikzcd} t \arrow[r, "q"] & b \\ s \arrow[u, "j"] \arrow[r, "p"'] \arrow[ur, phantom, "\Nwarrow\kappa"] & a \arrow[u, "f"'] \end{tikzcd}$$

に対して $\mathcal{M}$ の図式

$$\begin{tikzcd} t \arrow[r, "q_*"] \arrow[d, "j^*"'] \arrow[dr, phantom, "\overline{\kappa}\Nearrow"] & b \arrow[d, "f^*"] \\ s \arrow[r, "p_*"'] & a \end{tikzcd} \quad := \quad \begin{tikzcd} t \arrow[d, "\mathrm{id}"'] \arrow[dr, "q_*"] \arrow[d, phantom, shift left=4, "\overset{\eta_q}{\Rightarrow}"] & \\ t \arrow[d, "j^*"'] & b \arrow[l, "q^*"'] \arrow[d, "f^*"] \arrow[dl, phantom, "\Searrow\kappa^*"] \\ s \arrow[dr, "p_*"'] & a \arrow[l, "p^*"] \arrow[d, "\mathrm{id}"] \arrow[dl, phantom, "\underset{\varepsilon_p}{\Rightarrow}"] \\ & a \end{tikzcd}$$

を κ の **mate** という. このとき κ が **Beck-Chevalley 条件**を満たすとは $\overline{\kappa}$ が同型になることをいう.

命題 24. $\mathcal{B}$ の図式

$$\begin{tikzcd} t \arrow[r, "q"] & b \arrow[dr, "l"] & \\ s \arrow[u, "j"] \arrow[r, "p"'] \arrow[ur, phantom, "\Nwarrow\kappa"] & a \arrow[u, "f"'] \arrow[r, "g"'] \arrow[ur, phantom, "\eta\Uparrow"] & c \end{tikzcd}$$

において $\langle l, \eta\rangle$ は p-各点左 Kan 拡張で, κ は Beck-Chevalley 条件を満たすとする. このとき全体は左 Kan 拡張である(即ち $j^\dagger(g\circ p) = \langle l\circ q, (l\bullet\kappa) * (\eta\bullet p)\rangle$ である).

証明. 左 Kan 拡張であることを示すため，次の $\mathcal{B}$ の図式を考える.

$$
\begin{tikzcd}
t \arrow[drr, bend left, "h"] & & \\
s \arrow[u, "j"] \arrow[r, "p"'] & a \arrow[r, "g"'] \arrow[u, phantom, "\theta\Uparrow"] & c
\end{tikzcd}
$$

θ' を次のように定義する.

$$
\theta' \quad \coloneqq \quad
\begin{tikzcd}
t \arrow[d, "j^*"'] & & \\
s \arrow[dr, "p_*"'] & a \arrow[l, "p^*"'] \arrow[d, "\mathrm{id}"] \arrow[u, phantom, "\theta^*\Downarrow"] \arrow[dl, phantom, "\overset{\Rightarrow}{\varepsilon_p}"] & c \arrow[l, "g^*"] \arrow[ull, bend right, "h^*"'] \\
& a &
\end{tikzcd}
$$

κ が Beck-Chevalley 条件を満たすから，$\sigma \coloneqq (\overline{\kappa}^{-1} \bullet h^*) * \bar{\theta}$ とすれば次の等式が得られる.

$$
\begin{tikzcd}
t \arrow[r, "q_*"] \arrow[d, "j^*"'] \arrow[dr, phantom, "\overline{\kappa}\Nearrow"] & b \arrow[d, "f^*"] \arrow[dr, phantom, "\sigma\Searrow"] & \\
s \arrow[r, "p_*"'] & a & c \arrow[l, "g^*"] \arrow[ull, bend right, "h^*"']
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
t \arrow[d, "j^*"'] & & \\
s \arrow[r, "p_*"'] & a \arrow[u, phantom, "\theta'\Searrow"] & c \arrow[l, "g^*"] \arrow[ull, bend right, "h^*"']
\end{tikzcd}
$$

$\langle l, \eta \rangle$ が p-各点左 Kan 拡張だから，次の $\tau \colon q_* \circ h^* \Rightarrow l^*$ が得られる.

$$
\begin{tikzcd}
t \arrow[r, "q_*"] & b \arrow[d, "f^*"'] \arrow[r, phantom, "\tau\Searrow"] & \\
& a \arrow[u, phantom, "\eta^*\Downarrow"] & c \arrow[l, "g^*"] \arrow[ul, "l^*"'] \arrow[ull, bend right, "h^*"']
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
t \arrow[r, "q_*"] & b \arrow[d, "f^*"'] \arrow[dr, phantom, "\sigma\Downarrow"] & \\
& a & c \arrow[l, "g^*"] \arrow[ull, bend right, "h^*"']
\end{tikzcd}
$$

このとき

$$
\begin{tikzcd}
t \arrow[d, "\mathrm{id}"'] \arrow[dr, "q_*"] \arrow[d, phantom, shift left=4ex, "\overset{\eta_q}{\Rightarrow}"] & & \\
t \arrow[d, "j^*"'] & b \arrow[l, "q^*"] \arrow[d, "f^*"] \arrow[r, phantom, "\tau\Downarrow"] \arrow[dl, phantom, "\Downarrow\kappa^*"] & \\
s \arrow[d, "\mathrm{id}"'] \arrow[dr, "p_*"] \arrow[d, phantom, shift left=4ex, "\overset{\eta_p}{\Rightarrow}"] & a \arrow[l, "p^*"'] \arrow[d, "\mathrm{id}"] \arrow[dl, phantom, "\overset{\Rightarrow}{\varepsilon_p}"] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\eta^*"] & \\
s & a \arrow[l, "p^*"] & c \arrow[l, "g^*"] \arrow[uul, bend right, "l^*"'] \arrow[uuull, rounded corners, to path={|- ([yshift=3ex]\tikztotarget.north) \tikztonodes -- (\tikztotarget)}, "h^*"']
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
t \arrow[r, "q_*"] \arrow[d, "j^*"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\bar\kappa}{\Uparrow}"] & b \arrow[d, "f^*"] \arrow[r, phantom, "\tau\Downarrow"] \arrow[dr, phantom, "\eta^*\Downarrow"] & \\
s \arrow[r, "p_*"] \arrow[d, "\mathrm{id}"'] \arrow[d, phantom, shift left=4ex, "\overset{\eta_p}{\Rightarrow}"] & a \arrow[dl, "p^*"] & c \arrow[l, "g^*"] \arrow[ul, "l^*"'] \arrow[ull, rounded corners, to path={|- ([yshift=3ex]\tikztotarget.north) \tikztonodes -- (\tikztotarget)}, "h^*"'] \\
s & &
\end{tikzcd}
$$

$$
= \quad
\begin{tikzcd}
t \arrow[d, "j^*"'] \arrow[dr, phantom, "\theta'\Downarrow"] & & \\
s \arrow[r, "p_*"] \arrow[d, "\mathrm{id}"'] \arrow[d, phantom, shift left=4ex, "\overset{\eta_p}{\Rightarrow}"] & a \arrow[dl, "p^*"] & c \arrow[l, "g^*"] \arrow[ull, rounded corners, to path={|- ([yshift=3ex]\tikztotarget.north) \tikztonodes -- (\tikztotarget)}, "h^*"'] \\
s & &
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
t \arrow[d, "j^*"'] \arrow[dr, phantom, "\theta^*\Downarrow"] & & \\
s \arrow[d, "\mathrm{id}"'] \arrow[dr, "p_*"] \arrow[d, phantom, shift left=4ex, "\overset{\eta_p}{\Rightarrow}"] & a \arrow[l, "p^*"'] \arrow[d, "\mathrm{id}"] \arrow[dl, phantom, "\overset{\Rightarrow}{\varepsilon_p}"] & c \arrow[l, "g^*"] \arrow[ull, rounded corners, to path={|- ([yshift=3ex]\tikztotarget.north) \tikztonodes -- (\tikztotarget)}, "h^*"'] \\
s & a \arrow[l, "p^*"] &
\end{tikzcd}
\quad = \quad \theta^*
$$

となるから，$\xi\colon l \circ q \Rightarrow h$ を

$$
\xi^* \quad = \quad
\begin{tikzcd}
t \arrow[d, "\mathrm{id}"'] \arrow[dr, "q_*"] \arrow[d, phantom, shift left=4ex, "\overset{\eta_q}{\Rightarrow}"] & & \\
t & b \arrow[l, "q^*"] \arrow[r, phantom, "\tau\Downarrow"] & \\
& & c \arrow[ul, bend right, "l^*"'] \arrow[uull, rounded corners, to path={|- ([yshift=3ex]\tikztotarget.north) \tikztonodes -- (\tikztotarget)}, "h^*"']
\end{tikzcd}
$$

となるように取れば

$$
\begin{tikzcd}
t \arrow[r, "q"] \arrow[rr, bend left=60, "h", to path={|- ([yshift=4ex]\tikztotarget.north) \tikztonodes -| (\tikztotarget)}] & b \arrow[dr, "l"] \arrow[r, phantom, "\xi\Uparrow"] & {} \\
s \arrow[u, "j"] \arrow[r, "p"'] \arrow[ur, phantom, "\Nwarrow\kappa"] & a \arrow[u, "f"'] \arrow[r, "g"'] \arrow[ur, phantom, "\eta\Uparrow"] & c
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
t \arrow[rr, bend left=60, "h"] \arrow[drr, phantom, "\theta\Uparrow"] & & {} \\
s \arrow[u, "j"] \arrow[r, "p"'] & a \arrow[r, "g"'] & c
\end{tikzcd}
$$

である．このような ξ は一意だから左 Kan 拡張であることが分かった． $\square$

例 25. 例 3 の proarrow equipment で $V = \mathbf{Set}$ の場合，即ち $(-)_*\colon \mathbf{Cat} \to \mathbf{Prof}$ を考える．この場合コンマ圏から得られる

$$
\begin{tikzcd}
C_1 \arrow[r, "G"] & D \\
F\downarrow G \arrow[u, "Q"] \arrow[r, "P"'] \arrow[ur, phantom, "\Nwarrow\kappa"] & C_0 \arrow[u, "F"']
\end{tikzcd}
$$

は Beck-Chevalley 条件を満たす．

$\because$) この場合 $\overline{\kappa}$ の定義

$$
\begin{tikzcd}
C_1 \arrow[r, "G_*"] \arrow[d, "Q^*"'] \arrow[dr, phantom, "\overline{\kappa}\Nearrow"] & D \arrow[d, "F^*"] \\
F\downarrow G \arrow[r, "P_*"'] & C_0
\end{tikzcd}
:=
\begin{tikzcd}
C_1 \arrow[d, "\mathrm{id}"'] \arrow[dr, "G_*"] \arrow[dr, phantom, "\overset{\eta_G}{\Rightarrow}"'] & \\
C_1 \arrow[d, "Q^*"'] & D \arrow[l, "G^*"] \arrow[d, "F^*"] \arrow[dl, phantom, "\kappa^*\Searrow"] \\
F\downarrow G \arrow[dr, "P_*"'] & C_0 \arrow[l, "P^*"'] \arrow[d, "\mathrm{id}"] \arrow[dl, phantom, "\underset{\varepsilon_P}{\Rightarrow}"] \\
& C_0
\end{tikzcd}
$$

に出てくるそれぞれの自然変換の成分は

- $c_1 \in C_1$ に対して $(\eta_G)_{c_1} = G\colon \mathrm{Hom}_{C_1}(-, c_1) \to \mathrm{Hom}_D(G-, Gc_1)$.
- $d \in D$ に対して $\kappa^*_d = - \circ \kappa\colon \mathrm{Hom}_{F\downarrow G}(GQ-, d) \to \mathrm{Hom}_{F\downarrow G}(FP-, d)$.

- $c_0 \in C_0$ に対して

$$(\varepsilon_P)_{c_0} \colon \int^{x \in F\downarrow G} \mathrm{Hom}_{C_0}(Px, c_0) \times \mathrm{Hom}_{C_0}(-, Px) \to \mathrm{Hom}_{C_0}(-, c_0)$$

  は $\mathrm{Hom}(Px, c_0) \times \mathrm{Hom}(a, Px) \ni \langle g, f\rangle \mapsto g \circ f \in \mathrm{Hom}(a, c_0)$ からコエンドの普遍性で得られる射である．

となるから $c_0 \in C_0$ と $c_1 \in C_1$ に対して $\overline{\kappa}_{c_0c_1}$ は合成

$$\begin{aligned}
&\int^{x \in F\downarrow G} \mathrm{Hom}_{C_1}(Qx, c_1) \times \mathrm{Hom}_{C_0}(c_0, Px) \\
&\cong \int^{a \in C_1} \int^{x \in F\downarrow G} \mathrm{Hom}_{C_1}(a, c_1) \times \mathrm{Hom}_{C_1}(Qx, a) \times \mathrm{Hom}_{C_0}(c_0, Px) \\
&\xrightarrow{\int\int(G\times\mathrm{id})} \int^{a \in C_1} \int^{x \in F\downarrow G} \mathrm{Hom}_D(Ga, Gc_1) \times \mathrm{Hom}_{C_1}(Qx, a) \times \mathrm{Hom}_{C_0}(c_0, Px) \\
&\cong \int^{x \in F\downarrow G} \mathrm{Hom}_D(GQx, Gc_1) \times \mathrm{Hom}_{C_0}(c_0, Px) \\
&\xrightarrow{\int(-\circ\kappa_x)\times\mathrm{id}} \int^{x \in F\downarrow G} \mathrm{Hom}_D(FPx, Gc_1) \times \mathrm{Hom}_{C_0}(c_0, Px) \\
&\cong \int^{a \in C_0} \int^{x \in F\downarrow G} \mathrm{Hom}_D(Fa, Gc_1) \times \mathrm{Hom}_{C_0}(Px, a) \times \mathrm{Hom}_{C_0}(c_0, Px) \\
&\xrightarrow{\int(\mathrm{id}\times\varepsilon)} \int^{a \in C_0} \mathrm{Hom}_D(Fa, Gc_1) \times \mathrm{Hom}_{C_0}(c_0, a) \\
&\cong \mathrm{Hom}_D(Fc_0, Gc_1)
\end{aligned}$$

となる．そこでコエンド $\int^{x \in F\downarrow G} \mathrm{Hom}_{C_1}(Qx, c_1) \times \mathrm{Hom}_{C_0}(c_0, Px)$ の unit と $\overline{\kappa}_{c_0c_1}$ の合成を σ とすると，σ による $\langle g, f\rangle \in \mathrm{Hom}_{C_1}(Qx, c_1) \times \mathrm{Hom}_{C_0}(c_0, Px)$ の行き先は（コエンドの構成で使う同値類を $[\ ]$ で表すと）

$$\begin{aligned}
\langle g, f\rangle &\xmapsto{\mathrm{unit}} [g, f] \cong [\mathrm{id}_{c_1}, g, f] \\
&\xmapsto{\int\int(G\times\mathrm{id})} [\mathrm{id}_{Gc_1}, g, f] \cong [Gg, f] \\
&\xmapsto{\int(-\circ\kappa_x)\times\mathrm{id}} [Gg \circ \kappa_x, f] \cong [Gg \circ \kappa_x, \mathrm{id}_{Px}, f] \\
&\xmapsto{\int(\mathrm{id}\times\varepsilon)} [Gg \circ \kappa_x, f] \cong Gg \circ \kappa_x \circ Ff
\end{aligned}$$

となる．この σ がコエンドを与えることを示せば $\overline{\kappa}_{c_0c_1}$ が同型と分かる．そこで x について自然な写像 $\theta_x \colon \mathrm{Hom}_{C_1}(Qx, c_1) \times \mathrm{Hom}_{C_0}(c_0, Px) \to S$ を取る．次の図式を

可換にするような点線の写像 h が一意に存在することを示せばよい．

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{C_1}(Qx, c_1) \times \mathrm{Hom}_{C_0}(c_0, Px) \arrow[dr, "\sigma_x"'] \arrow[drr, "\theta_x"] & & \\
& \mathrm{Hom}_D(Fc_0, Gc_1) \arrow[r, dashed, "h"'] & S
\end{tikzcd}$$

そこで $k \in \mathrm{Hom}_D(Fc_0, Gc_1)$ とすると $x_k \coloneqq \langle c_0, c_1, k\rangle \in F\downarrow G$ である．これを使って $h(k) \coloneqq \theta_{x_k}(\langle \mathrm{id}_{c_1}, \mathrm{id}_{c_0}\rangle)$ と定める．このとき明らかに上の図式は可換である．このような h は明らかに一意である．

従ってこの場合，命題 24 より p-各点左 Kan 拡張ならば c-各点左 Kan 拡張であり，これは第 2 章「Kan 拡張」の PDF で示した事実である． □

5 y-各点 Kan 拡張との関係

この節ではある程度の条件の下で，y-各点 Kan 拡張と p-各点 Kan 拡張が同じものであることを示す（定理 28）．以下，この節では strict 2-category $\mathcal{C}$ の米田構造が更に次の条件を満たしているとする．

(y6) $a \in \mathcal{C}$ が small ならば $\widehat{a}$ は余完備である．

充満部分 2-category $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}$ の任意の対象が small であるとする．このとき $a \mapsto \widehat{a}$ は pseudofunctor $\mathcal{A} \to \mathcal{C}$ を定めることが分かる．これは relative pseudomonad と呼ばれるモナド（を一般化したもの）になる．ここから Kleisli 圏に相当するものを構成することができる[*1]が，この場合それは bicategory となる．これは以下により定まる bicategory $\mathcal{M}$ であることが分かる．ここでは relative pseudomonad の一般論には立ち入らず，$\mathcal{M}$ の構成だけを述べる．

- $\mathrm{Ob}(\mathcal{M}) \coloneqq \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ とする．
- $a, b \in \mathcal{A}$ に対して $\mathcal{M}(a, b) \coloneqq \mathcal{C}(a, \widehat{b})$ とする．
- $a, b \in \mathcal{A}$ とすると，条件 (y6) より $\widehat{b}$ が余完備なので，任意の $f\colon a \to \widehat{b}$ に対して y-各点左 Kan 拡張 $y_a^\dagger f$ が存在する．これにより関手 $y_a^\dagger\colon \mathcal{C}(a, \widehat{b}) \to \mathcal{C}(\widehat{a}, \widehat{b})$ が得られる．

*1 詳しくは [4] を参照.

- $a, b, c \in \mathcal{A}$ に対して関手 $\diamond\colon \mathcal{M}(b,c) \times \mathcal{M}(a,b) \to \mathcal{M}(a,c)$ を合成

$$\mathcal{C}(b,\widehat{c}) \times \mathcal{C}(a,\widehat{b}) \xrightarrow{y_b^\dagger \times \mathrm{id}} \mathcal{C}(\widehat{b},\widehat{c}) \times \mathcal{C}(a,\widehat{b}) \xrightarrow{\bullet} \mathcal{C}(a,\widehat{c})$$

で定める．

- $a \xrightarrow{f} b \xrightarrow{g} c$ を $\mathcal{M}$ の 1-morphism とする．

$$\begin{tikzcd}
\widehat{a} \arrow[r, "y_a^\dagger f"] \arrow[rr, bend left, "y_a^\dagger((y_b^\dagger g)\circ f)"] & \widehat{b} \arrow[r, "y_b^\dagger g"] & \widehat{c} \\
a \arrow[u, "y_a"] \arrow[ur, "f"'] & b \arrow[u, "y_b"] \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

$y_b^\dagger g$ が y-各点左 Kan 拡張なので普遍随伴により $y_b^\dagger g \dashv \widehat{c}(g,1)$ となる．従って $y_b^\dagger g$ は $y_a^\dagger f$ と交換するので同型

$$\alpha'_{gf}\colon y_a^\dagger((y_b^\dagger g) \circ f) \Rightarrow y_b^\dagger g \circ y_a^\dagger f$$

が存在する．これは自然変換

$$\begin{tikzcd}
& \mathcal{C}(b,\widehat{c}) \times \mathcal{C}(a,\widehat{b}) \arrow[dl, "y_b^\dagger \times \mathrm{id}"'] \arrow[dr, "y_b^\dagger \times \mathrm{id}"] & \\
\mathcal{C}(\widehat{b},\widehat{c}) \times \mathcal{C}(a,\widehat{b}) \arrow[d, "\bullet"'] & \overset{\alpha'}{\Longrightarrow} & \mathcal{C}(b,\widehat{c}) \times \mathcal{C}(\widehat{a},\widehat{b}) \arrow[d, "\mathrm{id}\times y_a^\dagger"] \\
\mathcal{C}(a,\widehat{c}) \arrow[dr, "y_a^\dagger"'] & & \mathcal{C}(\widehat{b},\widehat{c}) \times \mathcal{C}(\widehat{a},\widehat{b}) \arrow[dl, "\bullet"] \\
& \mathcal{C}(\widehat{a},\widehat{c}) &
\end{tikzcd}$$

を定める．このとき α を合成

$$
\begin{tikzcd}
 & & \mathcal{C}(c,\widehat{d})\times\mathcal{C}(b,\widehat{c})\times\mathcal{C}(a,\widehat{b}) \arrow[dl, "y^{\dagger}\times\mathrm{id}\times\mathrm{id}"'] \arrow[dr, "\mathrm{id}\times y^{\dagger}\times\mathrm{id}"] & & \\
 & \mathcal{C}(\widehat{c},\widehat{d})\times\mathcal{C}(b,\widehat{c})\times\mathcal{C}(a,\widehat{b}) \arrow[dl, "\bullet\times\mathrm{id}"'] & & \mathcal{C}(c,\widehat{d})\times\mathcal{C}(\widehat{b},\widehat{c})\times\mathcal{C}(a,\widehat{b}) \arrow[dl, "y^{\dagger}\times\mathrm{id}\times\mathrm{id}"'] \arrow[dr, "\mathrm{id}\times\bullet"] & \\
\mathcal{C}(b,\widehat{d})\times\mathcal{C}(a,\widehat{b}) \arrow[dr, "y^{\dagger}\times\mathrm{id}"'] \arrow[rr, phantom, "\overset{\alpha'\times\mathrm{id}}{\Longrightarrow}"] & & \mathcal{C}(\widehat{c},\widehat{d})\times\mathcal{C}(\widehat{b},\widehat{c})\times\mathcal{C}(a,\widehat{b}) \arrow[dl, "\bullet\times\mathrm{id}"'] \arrow[dr, "\mathrm{id}\times\bullet"] \arrow[rr, phantom, "="] & & \mathcal{C}(c,\widehat{d})\times\mathcal{C}(a,\widehat{c}) \arrow[dl, "y^{\dagger}\times\mathrm{id}"] \\
 & \mathcal{C}(\widehat{b},\widehat{d})\times\mathcal{C}(a,\widehat{b}) \arrow[dr, "\bullet"'] \arrow[rr, phantom, "\overset{\sim}{\Longrightarrow}"] & & \mathcal{C}(\widehat{c},\widehat{d})\times\mathcal{C}(a,\widehat{c}) \arrow[dl, "\bullet"] & \\
 & & \mathcal{C}(a,\widehat{d}) & &
\end{tikzcd}
$$

により定める．

- $a\in\mathcal{A}$ に対して $\mathrm{id}_a\coloneqq y_a\colon a\to\widehat{a}$ とする．
- $f\colon a\to b$ を $\mathcal{M}$ の 1-morphism とする．即ち $\mathcal{C}$ の 1-morphism $f\colon a\to\widehat{b}$ である．$y_b^{\dagger}y_b=\mathrm{id}$ だから $\mathrm{id}_b\diamond f=(y_b^{\dagger}y_b)\circ f=f$ である．また y_a が y-忠実充満だから，$y_a^{\dagger}f$ の unit（ρ_f で表す）は同型である．これにより

$$f\diamond\mathrm{id}_a=(y_a^{\dagger}f)\circ y_a\cong f$$

となる．
- このとき次の図式が可換である．

$$
\begin{tikzcd}
 & ((k\diamond h)\diamond g)\diamond f \arrow[dl, "\alpha_{khg}\bullet f"'] \arrow[dr, "\alpha_{k\diamond h,g,f}"] & \\
(k\diamond(h\diamond g))\diamond f \arrow[d, "\alpha_{k,h\diamond g,f}"'] & & (k\diamond h)\diamond(g\diamond f) \arrow[d, "\alpha_{k,h,g\diamond f}"] \\
k\diamond((h\diamond g)\diamond f) \arrow[rr, "k\bullet\alpha_{hgf}"'] & & k\diamond(h\diamond(g\diamond f))
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
(g\diamond\mathrm{id}_b)\diamond f \arrow[rr, "\alpha_{g,\mathrm{id}_b,f}"] \arrow[dr, "\rho_g\bullet f"'] & & g\diamond(\mathrm{id}_b\diamond f) \arrow[dl, "\mathrm{id}"] \\
 & g\diamond f &
\end{tikzcd}
$$

- 以上により $\mathcal{M}$ は bicategory である．

このとき pseudofunctor $(-)_*\colon \mathcal{A} \to \mathcal{M}$ を以下により定める．

- $a \in \mathcal{A}$ に対して $a_* \coloneqq a$ とする．
- $a, b \in \mathcal{A}$ に対して $(-)_*\colon \mathcal{A}(a,b) \to \mathcal{M}(a,b)$ を $y_b \bullet -\colon \mathcal{C}(a,b) \to \mathcal{C}(a,\widehat{b})$ により定める．
- $\mathcal{A}$ の 1-morphism $a \xrightarrow{f} b \xrightarrow{g} c$ に対して，合成の定義より

$$g_* \diamond f_* = y_b^\dagger(y_c \circ g) \circ y_b \circ f \cong y_c \circ g \circ f = (g \circ f)_*$$

$$\begin{tikzcd}
 & \widehat{b} \arrow[r, "y_b^\dagger(y_c \circ g)"] & \widehat{c} \\
a \arrow[ur, "f_*"] \arrow[r, "f"'] & b \arrow[u, "y_b"] \arrow[r, "g"'] & c \arrow[u, "y_c"']
\end{tikzcd}$$

  である．この同型を $\varphi_{gf}\colon g_* \diamond f_* \Rightarrow (g \circ f)_*$ と書く．これは g, f について自然である．
- $a \in \mathcal{A}$ に対して $(\mathrm{id}_a)_* = y_a$ である．
- このとき $\mathcal{M}$ における次の等式が成り立つ．

$$\begin{tikzcd}
 & b \arrow[r, "g_*"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\varphi_{gf}"] & c \arrow[dr, "h_*"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\varphi_{h,g\circ f}"] & \\
a \arrow[ur, "f_*"] \arrow[urr, "(g\circ f)_*"'] \arrow[rrr, "(h\circ g\circ f)_*"'] & & & d
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
 & b \arrow[r, "g_*"] \arrow[drr, "(h\circ g)_*"'] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\varphi_{hg,f}"] & c \arrow[dr, "h_*"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\varphi_{hg}"] & \\
a \arrow[ur, "f_*"] \arrow[rrr, "(h\circ g\circ f)_*"'] & & & d
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
 & b \arrow[dr, bend left, "\mathrm{id}"] \arrow[dr, "(\mathrm{id})_*"'] \arrow[dr, phantom, bend left=20, "/\!/"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\varphi_{\mathrm{id},f}"] & \\
a \arrow[ur, "f_*"] \arrow[rr, "(\mathrm{id}_b\circ f)_*"] \arrow[rr, bend right, "f_*"'] \arrow[rr, phantom, bend right=20, "\|"] & & b
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
 & b \arrow[dr, bend left, "\mathrm{id}"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\mathrm{id}"] & \\
a \arrow[ur, "f_*"] \arrow[rr, bend right, "f_*"'] & & b
\end{tikzcd}$$

$$
\begin{tikzcd}[column sep=large, row sep=large]
& a \arrow[dr, "f_*"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow \varphi_{f,\mathrm{id}}"] & \\
a \arrow[ur, bend left=60, "\mathrm{id}"] \arrow[ur, "(\mathrm{id})_*"'] \arrow[ur, phantom, bend left=30, "="] \arrow[rr, "(f\circ\mathrm{id})_*"] \arrow[rr, bend right=40, "f_*"'] \arrow[rr, phantom, bend right=20, "="] & & b
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}[column sep=large, row sep=large]
& a \arrow[dr, "f_*"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow \rho"] & \\
a \arrow[ur, bend left=60, "\mathrm{id}"] \arrow[rr, bend right=40, "f_*"'] & & b
\end{tikzcd}
$$

- 以上により $(-)_*\colon \mathcal{A} \to \mathcal{M}$ は pseudofunctor になる.

命題 26. 上のように定義した $(-)_*\colon \mathcal{A} \to \mathcal{M}$ は proarrow equipment である.

証明. y_b は忠実充満である. よって $(-)_* = y_b \bullet -\colon \mathcal{C}(a,b) \to \mathcal{C}(a,\widehat{b})$ は忠実充満関手である. 故に任意の map $f\colon a \to b$ に対して f_* が右随伴を持つことを示せばよい.

※ そこで仮に $\mathcal{M}$ における随伴 $f_* \dashv f^*\colon a \to b$ が成り立ったとする. 即ち $\mathcal{M}$ の 2-morphism $\eta\colon \mathrm{id} \Rightarrow f^* \diamond f_*$ と $\varepsilon\colon f_* \diamond f^* \Rightarrow \mathrm{id}$ で

$$
\begin{tikzcd}
& b \arrow[r, "\mathrm{id}_b"] \arrow[dr, "f^*"] \arrow[d, phantom, "\Uparrow\eta"] & b \arrow[d, phantom, "\Uparrow\varepsilon"] \\
a \arrow[ur, "f_*"] \arrow[r, "\mathrm{id}_a"'] & a \arrow[ur, "f_*"'] &
\end{tikzcd}
\quad = \quad \mathrm{id}_{f_*}
$$

$$
\begin{tikzcd}
b \arrow[r, "\mathrm{id}_b"] \arrow[dr, "f^*"'] & b \arrow[dr, "f^*"] \arrow[d, phantom, "\Uparrow\varepsilon"] & \\
& a \arrow[u, phantom, ""] \arrow[ur, "f_*"] \arrow[r, "\mathrm{id}_a"'] & a \arrow[ul, phantom, "\Uparrow\eta"]
\end{tikzcd}
\quad = \quad \mathrm{id}_{f^*}
$$

となるものが存在する. これは $\mathcal{M}$ の定義によれば, $\mathcal{C}$ における等式

$$
\begin{tikzcd}
& & \widehat{b} \arrow[rr, "\mathrm{id}"] \arrow[dr, "y_b^\dagger f^*"] & & \widehat{b} \arrow[dl, phantom, "\Uparrow y_b^\dagger\varepsilon"] \\
& b \arrow[ur, "y_b"] \arrow[r, phantom, "\Uparrow\eta"] & & \widehat{a} \arrow[ur, "y_a^\dagger(y_b\circ f)"'] & \\
a \arrow[ur, "f"] \arrow[urrr, "y_a"'] & & & &
\end{tikzcd}
\quad = \quad \rho^{-1}_{y_b\circ f}
$$

$$
\begin{tikzcd}
b \arrow[rr, "y_b"] \arrow[dr, "f^*"'] & \arrow[d, phantom, "\Uparrow\varepsilon"] & \widehat{b} \arrow[dr, "y_b^\dagger f^*"] & \\
& \widehat{a} \arrow[ur, "y_a^\dagger(y_b\circ f)" description] \arrow[rr, "\mathrm{id}"'] & \arrow[u, phantom, "\Uparrow y_a^\dagger\eta"] & \widehat{a}
\end{tikzcd}
\quad = \quad \rho_{f^*}
$$

を意味している.

そこで $f^* := b(f,1)$ と定める. $f^{-1} := \widehat{b}(y_b\circ f,1)$ と書くと $y_b^\dagger(f^*) = f^{-1}$ である. $y_b^\dagger(f^*)$ の unit を β^f と書く. 即ち $\beta^f = \rho^{b(f,1)}$ であり, これは同型である.

$$
\begin{tikzcd}
\widehat{b} \arrow[ddr, bend left, "f^{-1}"] & \\
b \arrow[u, "y_b"] \arrow[r, phantom, "\Uparrow\chi^{y_b\circ f}"] & \\
a \arrow[u, "f"] \arrow[r, "y_a"'] & \widehat{a}
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
\widehat{b} \arrow[ddr, bend left, "y_b^\dagger(\widehat{b}(f,1))"] & \\
b \arrow[u, "y_b"] \arrow[dr, "b(f,1)"] \arrow[u, phantom, shift left=4, "\Uparrow\beta^f"] & \\
a \arrow[u, "f"] \arrow[r, "y_a"'] \arrow[u, phantom, shift left=4, "\Uparrow\chi^f"] & \widehat{a}
\end{tikzcd}
\tag{27}
$$

普遍随伴により $y_a^\dagger(y_b\circ f) \dashv f^{-1}$ となるので, この随伴の unit, counit を η', ε' とする. すなわち

$$
\begin{tikzcd}
& \widehat{b} \arrow[rr, "\mathrm{id}"] \arrow[dr, "f^{-1}" description] \arrow[d, phantom, "\Uparrow\eta'"] & \arrow[d, phantom, "\Uparrow\varepsilon'"] & \widehat{b} \\
\widehat{a} \arrow[ur, "y_a^\dagger(y_b\circ f)"] \arrow[rr, "\mathrm{id}"'] & & \widehat{a} \arrow[ur, "y_a^\dagger(y_b\circ f)"'] &
\end{tikzcd}
\quad = \quad \mathrm{id}_{y_a^\dagger(y_b\circ f)}
$$

$$
\begin{tikzcd}
\widehat{b} \arrow[rr, "\mathrm{id}"] \arrow[dr, "f^{-1}"'] & \arrow[d, phantom, "\Uparrow\varepsilon'"] & \widehat{b} \arrow[dr, "f^{-1}"] & \\
& \widehat{a} \arrow[ur, "y_a^\dagger(y_b\circ f)" description] \arrow[rr, "\mathrm{id}"'] & \arrow[u, phantom, "\Uparrow\eta'"] & \widehat{a}
\end{tikzcd}
\quad = \quad \mathrm{id}_{f^{-1}}
$$

である. このとき

$$
\eta \quad := \quad
\begin{tikzcd}
& \widehat{b} \arrow[dr, "f^{-1}"] \arrow[d, phantom, "\Uparrow\eta'"] & \\
\widehat{a} \arrow[ur, "y_a^\dagger(y_b\circ f)"] \arrow[rr, "\mathrm{id}"] \arrow[r, phantom, shift right=3, "\Uparrow\mathrm{id}"] & & \widehat{a} \\
a \arrow[u, "y_a"] \arrow[urr, "y_a"'] \arrow[uur, bend left=80, "y_a\circ f"] \arrow[u, phantom, shift left=6, "\Leftarrow \rho^{-1}_{y_b\circ f}"] & &
\end{tikzcd}
$$

$$
\varepsilon \quad := \quad
\begin{tikzcd}
 & \widehat{b} \arrow[rr, "\mathrm{id}"] \arrow[dr, "f^{-1}"] \arrow[dr, phantom, shift left=4ex, "\Uparrow \varepsilon'"] & & \widehat{b} \\
b \arrow[ur, "y_b"] \arrow[rr, "b(f,1)"'] \arrow[r, phantom, shift left=3ex, "\Uparrow \beta^f"] & & \widehat{a} \arrow[ur, "y_a^\dagger(y_b\circ f)"'] &
\end{tikzcd}
$$

と定義すれば $y_a^\dagger\eta=\eta'$ かつ $y_b^\dagger\varepsilon=\varepsilon'$ であり

$$
\rho^{-1}_{y_b\circ f} \quad = \quad
\begin{tikzcd}
 & \widehat{b} \arrow[rr, "\mathrm{id}"] \arrow[dr, "f^{-1}"] & \Uparrow \varepsilon' & \widehat{b} \\
\widehat{a} \arrow[ur, "y_a^\dagger(y_b\circ f)"] \arrow[rr, "\mathrm{id}"] \arrow[r, phantom, shift left=4ex, "\Uparrow \eta'"] & & \widehat{a} \arrow[ur, "y_a^\dagger(y_b\circ f)"'] & \\
a \arrow[u, "y_a"] \arrow[urr, "y_a"'] \arrow[r, phantom, shift left=3ex, "\Uparrow \mathrm{id}"] \arrow[uur, bend left=60, "y_a\circ f"] \arrow[u, phantom, shift left=6ex, "\Leftarrow \rho^{-1}_{y_b\circ f}"] & & &
\end{tikzcd}
$$

$$
= \quad
\begin{tikzcd}
 & \widehat{b} \arrow[rr, "\mathrm{id}"] \arrow[dr, "f^{-1}"] & \Uparrow y_b^\dagger\varepsilon & \widehat{b} \\
 & \Uparrow \eta & \widehat{a} \arrow[ur, "y_a^\dagger(y_b\circ f)"'] & \\
a \arrow[uur, "y_b\circ f"] \arrow[urr, "y_a"'] & & &
\end{tikzcd}
$$

であり，また

$$
\begin{tikzcd}
\widehat{b} \arrow[dr, "f^{-1}"] & \\
b \arrow[u, "y_b"] \arrow[r, "b(f,1)"] \arrow[u, phantom, shift left=4ex, "\Uparrow \beta^f"] & \widehat{a} \\
a \arrow[u, "f"] \arrow[ur, "y_a"'] \arrow[u, phantom, shift left=4ex, "\Uparrow \chi^f"] &
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
\widehat{b} \arrow[rr, "\mathrm{id}"] \arrow[dr, "f^{-1}"] & \Uparrow \varepsilon' & \widehat{b} \arrow[dr, "f^{-1}"] & \\
b \arrow[u, "y_b"] \arrow[r, "b(f,1)"] \arrow[u, phantom, shift left=4ex, "\Uparrow \beta^f"] & \widehat{a} \arrow[ur, "y_a^\dagger(y_b\circ f)"] \arrow[rr, "\mathrm{id}"'] & \Uparrow \eta' & \widehat{a} \\
a \arrow[u, "f"] \arrow[ur, "y_a"'] \arrow[u, phantom, shift left=4ex, "\Uparrow \chi^f"] \arrow[rrr, phantom, shift left=3ex, "\Uparrow \mathrm{id}"] \arrow[rrr, rounded corners, to path={-- ([xshift=0ex]\tikztotarget.south |- \tikztostart.east) \tikztonodes -- (\tikztotarget)}, "y_a"'] & & &
\end{tikzcd}
$$

$$
= \quad
\begin{tikzcd}
\widehat{b} \arrow[rr, "\mathrm{id}"] \arrow[dr, "f^{-1}"] & \Uparrow \varepsilon' & \widehat{b} \arrow[dr, "f^{-1}"] & \\
b \arrow[u, "y_b"] \arrow[r, "b(f,1)"] \arrow[u, phantom, shift left=4ex, "\Uparrow \beta^f"] & \widehat{a} \arrow[ur, "y_a^\dagger(y_b\circ f)"] \arrow[r, phantom, "\Uparrow \rho_{y_b\circ f}"] & \arrow[r, phantom, "\Uparrow \eta"] & \widehat{a} \\
a \arrow[u, "f"] \arrow[ur, "y_a"'] \arrow[u, phantom, shift left=4ex, "\Uparrow \chi^f"] \arrow[uurr, rounded corners, "\mathrm{id}"'] \arrow[rrr, rounded corners, to path={-- ([xshift=0ex]\tikztotarget.south |- \tikztostart.east) \tikztonodes -- (\tikztotarget)}, "y_a"'] & & &
\end{tikzcd}
$$

$$
=\quad
\begin{tikzcd}
\widehat{b} \arrow[rr, "\mathrm{id}"] \arrow[dr, phantom, "\Uparrow\varepsilon"] & & \widehat{b} \arrow[dr, "f^{-1}"] \arrow[d, phantom, "\Uparrow y_a^{\dagger}\eta"] & \\
b \arrow[u, "y_b"] \arrow[r, "b(f,1)"] \arrow[dr, phantom, "\Uparrow\chi^{f}"] & \widehat{a} \arrow[ur, "y_a^{\dagger}(y_b\circ f)"] \arrow[rr, "\mathrm{id}"'] \arrow[drr, phantom, "\Uparrow\mathrm{id}"] & & \widehat{a} \\
a \arrow[u, "f"] \arrow[ur, "y_a"'] \arrow[rrru, bend right, "y_a"'] & & &
\end{tikzcd}
$$

となるから左 Kan 拡張の普遍性により

$$
\begin{tikzcd}
\widehat{b} \arrow[rr, "\mathrm{id}"] \arrow[dr, phantom, "\Uparrow\varepsilon"] & & \widehat{b} \arrow[dr, "f^{-1}"] \arrow[d, phantom, "\Uparrow y_a^{\dagger}\eta"] & \\
b \arrow[u, "y_b"] \arrow[r, "b(f,1)"] & \widehat{a} \arrow[ur, "y_a^{\dagger}(y_b\circ f)"] \arrow[rr, "\mathrm{id}"'] & & \widehat{a}
\end{tikzcd}
\quad = \quad \beta^{f} \quad = \quad \rho_{b(f,1)}
$$

である．よって $f_* \dashv f^*$ が分かった． $\square$

定理 28. 上述の proarrow equipment $(-)_*\colon \mathcal{A} \to \mathcal{M}$ を取り $\mathcal{A}$ の図式

$$
\begin{tikzcd}
b \arrow[dr, "l"] \arrow[d, phantom, "\eta\Uparrow"] & \\
a \arrow[u, "f"] \arrow[r, "g"'] & c
\end{tikzcd}
$$

を考える．更に $b(f,1)$ は admissible であるとする．このとき

$$\langle l, \eta\rangle \text{ が y-各点左 Kan 拡張である} \iff \langle l, \eta\rangle \text{ が p-各点 Kan 拡張である.}$$

証明. まず準備として，η に対して η', η'' を $\mathcal{C}$ において

$$
\begin{tikzcd}
b \arrow[r, "l"] \arrow[d, phantom, "\eta\Uparrow"] & c \arrow[d, "c(g,1)"] \arrow[dl, phantom, "\chi^{g}\Uparrow"] \\
a \arrow[u, "f"] \arrow[ur, "g"] \arrow[r, "y_a"'] & \widehat{a}
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
b \arrow[r, "l"] \arrow[dr, "b(f,1)"] \arrow[d, phantom, "\chi^{f}\Uparrow"] & c \arrow[d, "c(g,1)"] \arrow[dl, phantom, "\eta'\Uparrow"] \\
a \arrow[u, "f"] \arrow[r, "y_a"'] & \widehat{a}
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
c \arrow[r, "c(g,1)"] \arrow[d, phantom, "\eta'\Uparrow"] & \widehat{a} \arrow[d, "\hat{a}(b(f,1),1)"] \arrow[dl, phantom, "\chi^{b(f,1)}\Uparrow"] \\
b \arrow[u, "l"] \arrow[ur, "b(f,1)"] \arrow[r, "y_b"'] & \widehat{b}
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
c \arrow[r, "c(g,1)"] \arrow[dr, "c(l,1)"] \arrow[d, phantom, "\chi^{l}\Uparrow"] & \widehat{a} \arrow[d, "\hat{a}(b(f,1),1)"] \arrow[dl, phantom, "\Uparrow\eta''"] \\
b \arrow[u, "l"] \arrow[r, "y_b"'] & \widehat{b}
\end{tikzcd}
$$

となるように取る．次に $(-)^*$ の定義（命題 4）より $\eta^* = c(\eta, 1)$ は $\mathcal{M}$ における次の図式によって与えられる．

$$
\begin{tikzcd}
 & c \arrow[dr, bend left, "g^*"] \arrow[d, phantom, "\Uparrow\eta_g"] & \\
a \arrow[ur, bend left, "(l\circ f)_*"] \arrow[ur, "g_*"'] \arrow[ur, phantom, "\Leftarrow\eta_*"] \arrow[rr, "\mathrm{id}_a"'] & \, & a
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
 & c \arrow[dr, bend left, "g^*"] \arrow[dr, "(l\circ f)^*"'] \arrow[dr, phantom, "\Leftarrow\eta^*"] & \\
a \arrow[ur, bend left, "(l\circ f)_*"] \arrow[ur, phantom, "\Uparrow\eta_{l\circ f}"'] \arrow[rr, "\mathrm{id}_a"'] & & a
\end{tikzcd}
$$

これは proarrow equipment $(-)_*\colon \mathcal{A} \to \mathcal{M}$ の定義によれば $\mathcal{C}$ における次の等式になる．

$$
\begin{tikzcd}
b \arrow[r, "l"] & c \arrow[r, "y_c"] & \widehat{c} \arrow[d, "g^{-1}"] \\
a \arrow[u, "f"] \arrow[ur, "g"'] \arrow[u, phantom, "\eta\Uparrow"'] \arrow[rr, "y_a"'] & \arrow[u, phantom, "\chi^{y_c\circ g}\Uparrow"] & \widehat{a}
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
b \arrow[r, "l"] & c \arrow[r, "y_c"] & \widehat{c} \arrow[d, "(l\circ f)^{-1}"'] \arrow[d, bend left=60, "g^{-1}"] \arrow[d, phantom, "\overset{y_c^\dagger\eta^*}{\Rightarrow}"] \\
a \arrow[u, "f"] \arrow[rr, "y_a"'] & \arrow[u, phantom, "\chi^{y_c\circ l\circ f}\Uparrow"] & \widehat{a}
\end{tikzcd}
$$

これは (27) を使うと次のようになる．

$$
\begin{tikzcd}
b \arrow[r, "l"] & c \arrow[r, "y_c"] \arrow[dr, "c(g,1)"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\beta^g}{\Rightarrow}"] & \widehat{c} \arrow[d, "g^{-1}"] \\
a \arrow[u, "f"] \arrow[ur, "g"'] \arrow[u, phantom, "\eta\Uparrow"'] \arrow[rr, "y_a"'] & \arrow[u, phantom, "\chi^g\Uparrow"] & \widehat{a}
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
b \arrow[r, "l"] & c \arrow[r, "y_c"] \arrow[dr, bend right, "c(l\circ f,1)"'] \arrow[dr, phantom, "\beta^{l\circ f}\Rightarrow"] & \widehat{c} \arrow[d, "(l\circ f)^{-1}"'] \arrow[d, bend left=60, "g^{-1}"] \arrow[d, phantom, "\overset{y_c^\dagger\eta^*}{\Rightarrow}"] \\
a \arrow[u, "f"] \arrow[rr, "y_a"'] & \arrow[u, phantom, "\chi^{l\circ f}\Uparrow"] & \widehat{a}
\end{tikzcd}
$$

$y_c^\dagger\eta^*$ の定義より次の等式が成り立つ．

$$
\begin{tikzcd}
c \arrow[r, "y_c"] \arrow[dr, bend right, "c(l\circ f,1)"'] \arrow[dr, phantom, "\beta^{l\circ f}\Rightarrow"] & \widehat{c} \arrow[d, "(l\circ f)^{-1}"'] \arrow[d, bend left=60, "g^{-1}"] \arrow[d, phantom, "\overset{y_c^\dagger\eta^*}{\Rightarrow}"] \\
 & \widehat{a}
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
c \arrow[r, "y_c"] \arrow[dr, bend right=50, "c(l\circ f,1)"'] \arrow[dr, "c(g,1)"] \arrow[dr, phantom, "\eta^*\Rightarrow"] & \widehat{c} \arrow[d, bend left=60, "g^{-1}"] \arrow[d, phantom, "\overset{\beta^g}{\Longrightarrow}"] \\
 & \widehat{a}
\end{tikzcd}
$$

β^g は同型だったから

$$
\begin{tikzcd}
b \arrow[r, "l"] & c \arrow[dr, "c(g,1)"] & \\
a \arrow[u, "f"] \arrow[ur, "g"'] \arrow[u, phantom, "\eta\Uparrow"'] \arrow[rr, "y_a"'] & \arrow[u, phantom, "\chi^g\Uparrow"] & \widehat{a}
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
b \arrow[r, "l"] & c \arrow[dr, bend left, "c(g,1)"] \arrow[dr, bend right, "c(l\circ f,1)"'] \arrow[dr, phantom, "\eta^*\Rightarrow"] & \\
a \arrow[u, "f"] \arrow[rr, "y_a"'] & \arrow[u, phantom, "\chi^{l\circ f}\Uparrow"] & \widehat{a}
\end{tikzcd}
$$

を得る．ここで

$$
\begin{tikzcd}
b \arrow[r, "l"] & c \arrow[d, bend right=60, "c(l\circ f,1)"'] \\
a \arrow[u, "f"] \arrow[r, "y_a"'] \arrow[ur, phantom, "\chi^{l\circ f}\Uparrow"] & \widehat{a}
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
b \arrow[rr, "l"] \arrow[dr, "y_b"] \arrow[ddrr, bend right, "b(f,1)"'] \arrow[r, phantom, "\Uparrow\chi^{l}", shift right=3ex] & & c \arrow[dl, "c(l,1)"] \\
& \widehat{b} \arrow[dr, "f^{-1}"] \arrow[l, phantom, "\Uparrow\beta^{f}"] & \\
a \arrow[uu, "f"] \arrow[rr, "y_a"'] \arrow[u, phantom, "\chi^{f}\Uparrow"] & & \widehat{a}
\end{tikzcd}
$$

であるから，$\langle b(f,1),\chi^f\rangle$ の普遍性により

$$
\begin{tikzcd}
b \arrow[r, "l"] \arrow[dr, bend right, "b(f,1)"'] \arrow[dr, phantom, "\Uparrow\eta'", shift left=3ex] & c \arrow[d, "c(g,1)"] \\
& \widehat{a}
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
b \arrow[rr, "l"] \arrow[dr, "y_b"] \arrow[ddrr, bend right, "b(f,1)"'] \arrow[r, phantom, "\Uparrow\chi^{l}", shift right=3ex] & & c \arrow[dl] \arrow[dd, "c(g,1)"] \\
& \widehat{b} \arrow[dr, "f^{-1}"] \arrow[l, phantom, "\Uparrow\beta^{f}"] \arrow[r, phantom, "\overset{\eta^*}{\Rightarrow}"] & \\
& & \widehat{a}
\end{tikzcd}
$$

が分かる．従って

$$
\begin{tikzcd}
c \arrow[r, "c(g,1)"] \arrow[dr, "c(l,1)"] \arrow[dr, phantom, "\Uparrow\eta''", shift left=3ex] & \widehat{a} \arrow[d, "\hat{a}(b(f,1),1)"] \\
b \arrow[u, "l"] \arrow[r, "y_b"'] \arrow[ur, phantom, "\chi^{l}\Uparrow", shift right=3ex] & \widehat{b}
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
c \arrow[r, "c(g,1)"] & \widehat{a} \arrow[d, "\hat{a}(b(f,1),1)"] \\
b \arrow[u, "l"] \arrow[r, "y_b"'] \arrow[ur, "b(f,1)"] \arrow[ur, phantom, "\eta'\Uparrow", shift left=3ex] \arrow[ur, phantom, "\chi^{b(f,1)}\Uparrow", shift right=3ex] & \widehat{b}
\end{tikzcd}
$$

$$
= \quad
\begin{tikzcd}
c \arrow[rr, "c(g,1)"] \arrow[dr] \arrow[rr, phantom, "\eta^*\Uparrow", shift right=3ex] & & \widehat{a} \arrow[dd, "\hat{a}(b(f,1),1)"] \\
\arrow[r, phantom, "\chi^{l}\Uparrow"] & \widehat{b} \arrow[ur, "f^{-1}"] \arrow[d, phantom, "\Uparrow\beta^{f}"] & \\
b \arrow[uu, "l"] \arrow[ur, "y_b"] \arrow[uurr, bend right, "b(f,1)"'] \arrow[rr, "y_b"'] \arrow[rr, phantom, "\chi^{b(f,1)}\Uparrow", shift left=3ex] & & \widehat{b}
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
c \arrow[rr, "c(g,1)"] \arrow[dr] \arrow[rr, phantom, "\eta^*\Uparrow", shift right=3ex] & & \widehat{a} \arrow[dd, "\hat{a}(b(f,1),1)"] \\
\arrow[r, phantom, "\chi^{l}\Uparrow"] & \widehat{b} \arrow[ur, "f^{-1}"] \arrow[dr, "\mathrm{id}"] \arrow[r, phantom, "\gamma\Uparrow"] & {} \\
b \arrow[uu, "l"] \arrow[ur, "y_b"] \arrow[rr, "y_b"'] \arrow[rr, phantom, "\mathrm{id}\Uparrow", shift left=3ex] & & \widehat{b}
\end{tikzcd}
$$

となる（但し最後は $y_b^{\dagger}y_b=\mathrm{id}$ の普遍性により γ を取った）．このとき米田構造の一般論

により γ は $f^{-1} \dashv \mathrm{ran}_f \cong \widehat{a}(b(f,1),1)$ の unit である．また χ^l の普遍性により

$$
\begin{tikzcd}
c \arrow[rr, "c(g{,}1)"] \arrow[ddrr, "c(l{,}1)"'] & & \widehat{a} \arrow[dd, "\mathrm{ran}_f"] \arrow[dl, phantom, "\eta''\Uparrow"] \\
& & \\
& & \widehat{b}
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
c \arrow[rr, "c(g{,}1)"] \arrow[dr, "c(l{,}1)"'] & \arrow[d, phantom, "\eta^*\Uparrow"] & \widehat{a} \arrow[dd, "\mathrm{ran}_f"] \\
& \widehat{b} \arrow[ur, "f^{-1}"'] \arrow[dr, "\mathrm{id}"'] \arrow[r, phantom, "\gamma\Uparrow"] & \\
& & \widehat{b}
\end{tikzcd}
$$

となる．

（y-各点 Kan 拡張 $\Longrightarrow$ p-各点 Kan 拡張）η'' が同型であるとする．$\mathcal{M}$ の図式

$$
\begin{tikzcd}
b \arrow[d, "f^*"'] & \\
a \arrow[ur, phantom, "\eta^*\Downarrow"] & c \arrow[ul, "l^*"'] \arrow[l, "g^*"]
\end{tikzcd}
$$

が右 Kan リフトであることを示すため，$\mathcal{M}$ の図式

$$
\begin{tikzcd}
b \arrow[d, "f^*"'] & \\
a \arrow[ur, phantom, "\theta\Downarrow"] & c \arrow[ul, "\Phi"'] \arrow[l, "g^*"]
\end{tikzcd}
$$

を考える．$\mathcal{M}$ における合成 $f^* \diamond \Phi$ とは $\mathcal{C}$ における合成 $(y_b^\dagger f^*) \circ \Phi$ であるが，ここで $y_b^\dagger f^* \cong f^{-1}$ である．

$$
\begin{tikzcd}
& \widehat{b} \arrow[r, "f^{-1}"] & \widehat{a} \\
c \arrow[ur, "\Phi"] & b \arrow[u, "y_b"] \arrow[ur, "f^*"'] &
\end{tikzcd}
$$

従って $\mathcal{M}$ の 2-morphism θ とは $\mathcal{C}$ の 2-morphism $\theta\colon f^{-1} \circ \Phi \Rightarrow g^*$ のことである．そこ

で $\mathcal{C}$ の 2-morphism τ を

$$\tau \quad := \quad \begin{tikzcd}
c \arrow[r, "c(g{,}1)"] \arrow[dr, "\Phi"'] \arrow[drr, bend left=50, "c(l{,}1)"] \arrow[dr, phantom, shift left=3, "\theta\Uparrow"] & \widehat{a} \arrow[dr, bend left, "\mathrm{ran}_f"] \arrow[r, phantom, shift left=3, "(\eta'')^{-1}\Uparrow"] & \\
& \widehat{b} \arrow[u, "f^{-1}"'] \arrow[r, "\mathrm{id}"'] \arrow[ur, phantom, "\gamma\Uparrow"] & \widehat{b}
\end{tikzcd}$$

で定義する．即ち τ は $\mathcal{M}$ の 2-morphism $\tau\colon \Phi \Rightarrow l^*$ である．このとき $\mathcal{M}$ における等式

$$\begin{tikzcd}
c \arrow[r, "g^*"] \arrow[dr, "l^*"] \arrow[dr, bend right=40, "\Phi"'] \arrow[dr, phantom, shift right=3, "\tau\Nearrow"] & a \arrow[dl, phantom, "\Uparrow\eta^*"] \\
& b \arrow[u, "f^*"']
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
c \arrow[r, "g^*"] \arrow[dr, bend right=40, "\Phi"'] \arrow[dr, phantom, "\Uparrow\theta"] & a \\
& b \arrow[u, "f^*"']
\end{tikzcd}$$

が成り立つことを示そう．つまり，$\mathcal{C}$ における等式

$$\begin{tikzcd}
c \arrow[r, "c(g{,}1)"] \arrow[dr, "c(l{,}1)"] \arrow[dr, bend right=40, "\Phi"'] \arrow[dr, phantom, shift right=3, "\tau\Nearrow"] & \widehat{a} \arrow[dl, phantom, "\Uparrow\eta^*"] \\
& \widehat{b} \arrow[u, "f^{-1}"']
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
c \arrow[r, "c(g{,}1)"] \arrow[dr, bend right=40, "\Phi"'] \arrow[dr, phantom, "\Uparrow\theta"] & \widehat{a} \\
& \widehat{b} \arrow[u, "f^{-1}"']
\end{tikzcd}$$

を示す．そのためには $\langle f^{-1}, \gamma\rangle$ の普遍性により

$$\begin{tikzcd}
c \arrow[r, "c(g{,}1)"] \arrow[dr, "c(l{,}1)"] \arrow[dr, bend right=40, "\Phi"'] \arrow[dr, phantom, shift right=3, "\tau\Nearrow"] & \widehat{a} \arrow[dl, phantom, "\Uparrow\eta^*"] \arrow[dr, bend left, "\mathrm{ran}_f"] & \\
& \widehat{b} \arrow[u, "f^{-1}"'] \arrow[r, "\mathrm{id}"'] \arrow[ur, phantom, "\gamma\Uparrow"] & \widehat{b}
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
c \arrow[r, "c(g{,}1)"] \arrow[dr, bend right=40, "\Phi"'] \arrow[dr, phantom, "\Uparrow\theta"] & \widehat{a} \arrow[dr, bend left, "\mathrm{ran}_f"] & \\
& \widehat{b} \arrow[u, "f^{-1}"'] \arrow[r, "\mathrm{id}"'] \arrow[ur, phantom, "\gamma\Uparrow"] & \widehat{b}
\end{tikzcd}$$

を示せばよい．それは

$$\begin{tikzcd}
c \arrow[r, "c(g{,}1)"] \arrow[dr, "c(l{,}1)"] \arrow[dr, bend right=40, "\Phi"'] \arrow[dr, phantom, shift right=3, "\tau\Nearrow"] & \widehat{a} \arrow[dl, phantom, "\Uparrow\eta^*"] \arrow[dr, bend left, "\mathrm{ran}_f"] & \\
& \widehat{b} \arrow[u, "f^{-1}"'] \arrow[r, "\mathrm{id}"'] \arrow[ur, phantom, "\gamma\Uparrow"] & \widehat{b}
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
c \arrow[r, "c(g{,}1)"] \arrow[dr, "c(l{,}1)"] \arrow[dr, bend right=40, "\Phi"'] \arrow[dr, phantom, shift right=3, "\tau\Nearrow"] & \widehat{a} \arrow[dr, bend left, "\mathrm{ran}_f"] \arrow[d, phantom, "\Uparrow\eta''"] & \\
& \widehat{b} \arrow[r, "\mathrm{id}"'] & \widehat{b}
\end{tikzcd}$$

$$=\quad \begin{tikzcd}
c \arrow[r, "c(g{,}1)"] \arrow[dr, bend right=40, "\Phi"'] \arrow[dr, phantom, "\Uparrow\theta"] & \widehat{a} \arrow[dr, bend left, "\mathrm{ran}_f"] & \\
& \widehat{b} \arrow[u, "f^{-1}"'] \arrow[r, "\mathrm{id}"'] \arrow[ur, phantom, "\gamma\Uparrow"] & \widehat{b}
\end{tikzcd}$$

により成り立つ．

（p-各点 Kan 拡張 $\Longrightarrow$ y-各点 Kan 拡張）$\mathcal{C}$ において随伴 $f^{-1} \dashv \mathrm{ran}_f$ が成り立つから，これの counit を ε とすると

$$
\begin{tikzcd}
c \arrow[r, "c(g,1)"] \arrow[dr, "\mathrm{ran}_f \circ c(g,1)"'] & \widehat{a} \arrow[d, phantom, "\Uparrow \varepsilon'" left] \\
 & \widehat{b} \arrow[u, "f^{-1}"']
\end{tikzcd}
:=
\begin{tikzcd}
c \arrow[r, "c(g,1)"] & \widehat{a} \arrow[r, "\mathrm{id}"] \arrow[dr, bend right, "\mathrm{ran}_f"'] & \widehat{a} \arrow[d, phantom, "\Uparrow \varepsilon" left] \\
 & & \widehat{b} \arrow[u, "f^{-1}"']
\end{tikzcd}
$$

は右 Kan リフトである．故に普遍性からある θ が存在して

$$
\begin{tikzcd}
c \arrow[r, "c(g,1)"] \arrow[dr] \arrow[dr, bend right=40, "c(l,1)"'] \arrow[dr, phantom, bend right=20, "\Uparrow \theta"] & \widehat{a} \arrow[d, phantom, "\Uparrow \varepsilon'" left] \\
 & \widehat{b} \arrow[u, "f^{-1}"']
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
c \arrow[r, "c(g,1)"] \arrow[dr, bend right=40, "c(l,1)"'] & \widehat{a} \arrow[d, phantom, "\Uparrow \eta^*" left] \\
 & \widehat{b} \arrow[u, "f^{-1}"']
\end{tikzcd}
$$

となる．今仮定より $(f^{-1})_{\ddagger} c(g,1) = \langle c(l,1), \eta^* \rangle$ だから θ は同型である．一方

$$
\begin{tikzcd}
c \arrow[r, "c(g,1)"] \arrow[dr] \arrow[dr, bend right=40, "c(l,1)"'] \arrow[dr, phantom, bend right=20, "\Uparrow \eta''"] & \widehat{a} \arrow[d, phantom, "\Uparrow \varepsilon'" left] \\
 & \widehat{b} \arrow[u, "f^{-1}"']
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
c \arrow[r, "c(g,1)"] \arrow[d, "c(l,1)"'] \arrow[dr, phantom, "\Uparrow \eta''"] & \widehat{a} \arrow[r, "\mathrm{id}"] \arrow[dr, bend right, "\mathrm{ran}_f"'] & \widehat{a} \arrow[d, phantom, "\Uparrow \varepsilon" left] \\
\widehat{b} \arrow[rr, "\mathrm{id}"'] & & \widehat{b} \arrow[u, "f^{-1}"']
\end{tikzcd}
$$

$$
=
\begin{tikzcd}
c \arrow[r, "c(g,1)"] \arrow[d, "c(l,1)"'] \arrow[r, phantom, shift right=4, "\Uparrow \eta^*"] & \widehat{a} \arrow[r, "\mathrm{id}"] \arrow[dr, bend right, "\mathrm{ran}_f"'] \arrow[d, phantom, "\Uparrow \gamma"] & \widehat{a} \arrow[d, phantom, "\Uparrow \varepsilon" left] \\
\widehat{b} \arrow[ur, "f^{-1}"'] \arrow[rr, "\mathrm{id}"'] & & \widehat{b} \arrow[u, "f^{-1}"']
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
c \arrow[r, "c(g,1)"] \arrow[d, "c(l,1)"'] \arrow[r, phantom, shift right=4, "\Uparrow \eta^*"] & \widehat{a} \arrow[r, "\mathrm{id}"] \arrow[dr, phantom, "\Uparrow \mathrm{id}"] & \widehat{a} \\
\widehat{b} \arrow[ur, "f^{-1}"'] \arrow[rr, "\mathrm{id}"'] & & \widehat{b} \arrow[u, "f^{-1}"']
\end{tikzcd}
$$

となるから $\theta = \eta''$ であり，故に η'' は同型である． □

例 29．V'-**CAT** の米田構造において小 V-豊穣圏は small である．また小 V-豊穣圏 $\mathcal{C}$ に対して $\widehat{\mathcal{C}}$ は V-余完備である．よってここから V-**Cat** の proarrow equipment を得ることができ，それは例 3 の proarrow equipment である． □

参考文献

[1] R. J. Wood, Abstract proarrow I, Cahiers de Topologie et Géométrie Différentielle Catégoriques, Volume 23 (1982) no. 3, 279–290, http://www.numdam.org/item/?id=CTGDC_1982__23_3_279_0

[2] R. J. Wood, Proarrows II, Cahiers de Topologie et Géométrie Différentielle Catégoriques, Volume 26 (1985) no. 2, 135–168, http://www.numdam.org/item?id=CTGDC_1985__26_2_135_0

[3] R. Rosebrugh and R. J. Wood, Proarrows and cofibrations, Journal of Pure and Applied Algebra Volume 53 (1988) Issue 3, 271–296, DOI: 10.1016/0022-4049(88)90128-4

[4] Ivan Di Liberti and Fosco Loregian, on the unicity of Formal Category Theories, arXiv: 1901.01594

[5] A. Carboni and S. Johnson and R. Street and D. Verity, Modulated bicategories, Journal of Pure and Applied Algebra Volume 94, Issue 3 (1994), 229–282, DOI: 10.1016/0022-4049(94)90009-4

[6] R. Street, Pointwise extensions and sketches in bicategories, arXiv: 1409.6427