最新の圏論に追いつこう!

((augmented) virtual) double category 入門（入門枠ではない）

alg-d

この講演は youtube でも配信されます
（youtube 上に alg-d 以外の声は入りません）
このスライドは概要欄か $\downarrow\rightarrow$ で DL 可
https://alg-d.com/math/kan_extension/online9.pdf

導入

入門枠ではないので，皆さんは既に様々な数学的「対象」を考えていると思います． $\rightarrow$ 実際は更に「射」も考える．

- 群 $\rightarrow$ 群準同型
- 環 $\rightarrow$ 環準同型
- 体 $\rightarrow$ 体準同型（中への同型）
- 位相空間 $\rightarrow$ 連続写像
- 距離空間 $\rightarrow$ 連続写像
- $\cdots$

そこでこれらを一般化したのが圏であり，圏は色々なことに応用できることが広く知られている．

導入

ところが圏だけでは扱えないような状況も数学ではよくある．

【例】

k 上の線型代数を圏論的に考える場合，次の圏を考えることが多い．

- 対象は k-線型空間とする．
- 射は k-線型写像とする．

ところがこの圏には線型写像しか含まれないので
例えば双線型写像 $V_0 \times V_1 \to W$ のようなものは扱えない．

このような「多変数の射」を扱えるように，圏を一般化した
multicategoryというものがある．

【例】

先の例では multicategory は使わず，代わりにテンソル積 $\otimes_k$ を考えることが多い．テンソル積は対象同士の「積」である．このような「積」を一般的に扱うために**モノイダル圏**というものが考えられている． $\square$

【例】

対象を小圏，射を関手とすると圏 $\mathbf{Cat}$ が定まる．

ところが，圏論では自然変換というものもよく考える．
$\mathbf{Cat}$ にはこの自然変換は含まれていない．

自然変換を扱うには関手圏というものを考えることも多い．
つまり C, D が小圏のとき

- 対象は関手 $F\colon C \to D$ とする．
- 射は自然変換 $\theta\colon F \Rightarrow G\colon C \to D$ とする．

とすれば小圏となるからこれを考える．ところがこれは固定された C, D に対する自然変換しか考えることができない．

導入

【例】

これを解決するために圏を一般化した<u>**2-category**</u>というものを考えることが多い. □

- multicategory
- モノイダル圏
- 2-category

このような，より発展的な「圏」は色々ある.

ここでは<u>**double category**</u>というものを考えることにする.

$\to$ 何が double か？

何が double か？

具体的な圏を考えるとき，何を射とするかは定番のものがある場合が多い．

- 集合 $\to$ 写像
- 環 $\to$ 環準同型
- 圏 $\to$ 関手

ところが，これ以外のものを射としたい場面も存在する．

【例】

集合の射としては，写像ではなく 2 項関係を考えることもできる．（他にも部分写像を使うなど，色々考えられる） $\square$

何が double か？

【例】

環の射 $R \to S$ としては，環準同型ではなく加群を考えることもできる．つまり左 S 右 R 加群 M を射 $M \colon R \to S$ とみなす．
これはテンソル積を合成と思えば圏になる（ならない）．つまり

- $R \xrightarrow{M} S \xrightarrow{N} T$ のとき $N \circ M \coloneqq N \otimes_S M$ は
  左 T 右 R 加群だから $N \otimes_S M \colon R \to T$ になる．
- $R \xrightarrow{M} S \xrightarrow{N} T \xrightarrow{P} U$ のとき
  $$(P \otimes_T N) \otimes_S M \cong P \otimes_T (N \otimes_S M)$$
  だから結合律が（同型を除いて）成り立つ．
- $R \xrightarrow{M} S$ のとき
  $$M \otimes_R R \cong M, \quad S \otimes_S M \cong M$$
  だから $R \colon R \to R$ は id_R の役割をする． □

何が double か？

別の射を考えたいなら別の圏を考えればいいのでは？

【例】

対象は集合，射は写像とした圏を $\mathbf{Set}$，
対象は集合，射は 2 項関係とした圏を $\mathbf{Rel}$ と書くことにする．
場合に応じて $\mathbf{Set}$ と $\mathbf{Rel}$ を使い分ければいい？

写像と 2 項関係の間には関係(日常用語)がある．
写像は 2 項関係とみなせるからである．
これは言い換えると関手 $\mathbf{Set} \to \mathbf{Rel}$ があるということ． $\square$

何が double か？

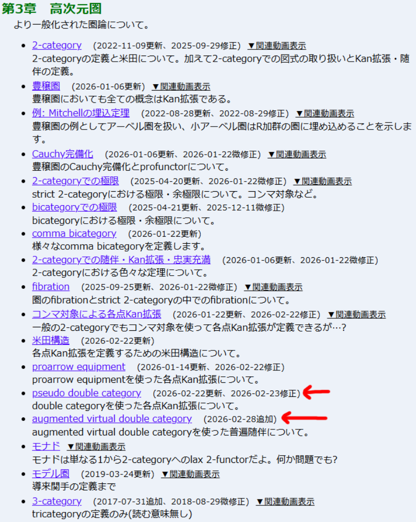
【例】

対象は環，射は環準同型とした圏を $\mathbf{Ring}$，
対象は環，射は加群とした圏（ではない）を $\mathbf{Mod}$ と書くことにする．

環準同型 $f\colon R \to S$ は左 S 右 R 加群 S を定める．
言い換えると関手 $\mathbf{Ring} \to \mathbf{Mod}$ があるということ． $\square$

このように 1 種類の対象に対して 2 種類の射が考えられて，更にそれらが関係（日常用語）しているような状況が数学にはある．
これを抽象化したのが double category である．
（double = 射が 2 種類）

参考文献



第3章　高次元圏

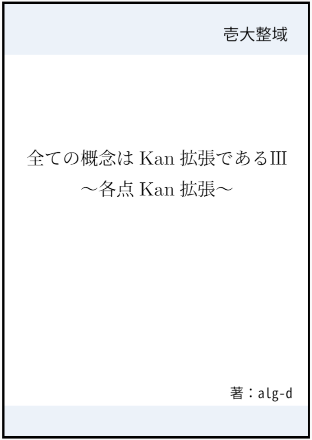
より一般化された圏論について。

- 2-category　(2022-11-09更新、2025-09-29修正)　▼関連動画表示
  2-categoryの定義と米田について。加えて2-categoryでの図式の取り扱いとKan拡張・随伴の定義。
- 豊穣圏　(2026-01-06更新)　▼関連動画表示
  豊穣圏においても全ての概念はKan拡張である。
- 例: Mitchellの埋込定理　(2022-08-28更新、2022-08-29修正)　▼関連動画表示
  豊穣圏の例としてアーベル圏を扱い、小アーベル圏はR加群の圏に埋め込めることを示します。
- Cauchy完備化　(2026-01-06更新、2026-01-22微修正)　▼関連動画表示
  豊穣圏のCauchy完備化とprofunctorについて。
- 2-categoryでの極限　(2025-04-20更新、2026-01-22微修正)　▼関連動画表示
  strict 2-categoryにおける極限・余極限について。コンマ対象など。
- bicategoryでの極限　(2025-04-21更新、2025-12-11微修正)
  bicategoryにおける極限・余極限について。
- comma bicategory　(2026-01-22更新)
  様々なcomma bicategoryを定義します。
- 2-categoryでの随伴・Kan拡張・忠実充満　(2026-01-06更新、2026-01-22微修正)
  2-categoryにおける色々な定理について。
- fibration　(2025-09-25更新、2026-01-22微修正)　▼関連動画表示
  圏のfibrationとstrict 2-categoryの中でのfibrationについて。
- コンマ対象による各点Kan拡張　(2026-01-22更新、2026-02-22修正)　▼関連動画表示
  一般の2-categoryでもコンマ対象を使って各点Kan拡張が定義できるが…?
- 米田構造　(2026-02-22更新)
  各点Kan拡張を定義するための米田構造について。
- proarrow equipment　(2026-01-14更新、2026-02-22修正)
  proarrow equipmentを使った各点Kan拡張について。
- pseudo double category　(2026-02-22更新、2026-02-23修正)
  double categoryを使った各点Kan拡張について。
- augmented virtual double category　(2026-02-28追加)
  augmented virtual double categoryを使った普遍随伴について。
- モナド　▼関連動画表示
  モナドは単なる1から2-categoryへのlax 2-functorだよ。何か問題でも?
- モデル圏　(2019-03-24更新)　▼関連動画表示
  導来関手の定義まで
- 3-category　(2017-07-31追加、2018-08-29微修正)　▼関連動画表示
  tricategoryの定義のみ(読む意味無し)

alg-d.com

今回の話は「pseudo double category」「augmented virtual double category」

参考文献



をまとめた本
『全ての概念は Kan 拡張である III』
近日発売！

参考文献

- S. R. Koudenburg, Formal category theory in augmented virtual double categories, Theory and Applications of Categories, Vol. 41 No. 10 (2024), 288–413, `http://www.tac.mta.ca/tac/volumes/41/10/41-10abs.html`
- S. R. Koudenburg, Augmented virtual double categories, Theory and Applications of Categories, Vol. 35 No. 10 (2020), 261–325, `http://www.tac.mta.ca/tac/volumes/35/10/35-10abs.html`

基本的には新しい方（上）を読めばよいが，上の中で下が度々参照されるので結局両方読むことになる．

double category

流儀の説明

この定義は (6) まで

ここでは圏の定義を以下のように書く．

【定義】

圏 C は以下で与えられる．

(1) 対象 a

(2) 射 $a \xrightarrow{f} b$（a, b は対象）

(3) $a \xrightarrow{f} b$ と $b \xrightarrow{g} c$ に対して合成　$a \xrightarrow{g \circ f} c \quad = \quad a \xrightarrow{f} b \xrightarrow{g} c$

(4) $a \xrightarrow{f} b$ と $b \xrightarrow{g} c$ と $c \xrightarrow{h} d$ に対して結合律

$$a \xrightarrow{g \circ f} c \xrightarrow{h} d \quad = \quad a \xrightarrow{f} b \xrightarrow{h \circ g} d$$

流儀の説明

【定義】

(5) 対象 a に対して $a \xrightarrow{\mathrm{id}_a} a$

(6) 単位元 $a \xrightarrow{f} b \xrightarrow{\mathrm{id}_b} b \quad = \quad a \xrightarrow{f} b \quad = \quad a \xrightarrow{\mathrm{id}_a} a \xrightarrow{f} b$

これは定義を説明したいのではなく「定義をこのように書く」という流儀の説明である．
（スライドのスペースの都合でこうしている）

流儀の説明

以下も流儀の説明である．

【定義】

順序集合 $\langle X, \leq \rangle$ に対して圏を以下で定めることができる．

- 対象は X の元とする．
- 射 $a \xrightarrow{f} b$ が存在 $\iff a \leq b$
（厳密でないが，今回は簡単のためこう書く．以降も同じ）

流儀の説明

以下は「今回こういう説明の仕方もする」という例である．

【定義】

対象が唯 1 つ $*$ のみの圏をモノイドという．

【定義】

射が id_a のみの小圏を集合という．

圏は多くの構造を持つが，そのうちの一部をこのように“潰した”ものが別のものと一致するということがよくある．

流儀の説明

これはもしかしたら不要かもしれない気持ちの説明

【定義】

環 R とは 2 つの演算 $+, \times$ があって（以下略）

環の定義で重要なのは分配法則 $x \times (y+z) = (x \times y) + (x \times z)$

もしこれがなければ，アーベル群 $\langle R, + \rangle$ とモノイド $\langle R, \times \rangle$ を別々に考えれば話が済んでしまう．分配法則により $+$ と $\times$ の間に関係（日常用語）があるからこそ，環論が生まれる（例えば単位的可換環には極大イデアルが存在する）．

この定義は (13) まで

【定義】

double category $\mathbb{D}$ は以下で与えられる．

(1) 対象 a

(2) 垂直射 $a \xrightarrow{f} b$（a, b は対象）これは圏をなす

(3) 水平射 $a \overset{J}{\nrightarrow} b$（$a, b$ は対象）これは圏をなす

(4) cell
$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "J", "\shortmid"{marking}] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\beta"] & u \arrow[d, "g"] \\ b \arrow[r, "K"', "\shortmid"{marking}] & v \end{tikzcd}$$
（f, g は垂直射，J, K は水平射）

※ cell は垂直射と水平射に関係(日常用語)を与えるもの

【定義】

この定義は (13) まで

(5) cell β, γ に対する垂直合成 $\gamma \circ \beta$

$$
\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "J", "|" marking] \arrow[dd, "h \circ f"'] \arrow[ddr, phantom, "\Downarrow \gamma \circ \beta"] & u \arrow[dd, "k \circ g"] \\
& \\
c \arrow[r, "M"', "|" marking] & w
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "J", "|" marking] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow \beta"] & u \arrow[d, "g"] \\
b \arrow[r, "K"', "|" marking] \arrow[d, "h"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow \gamma"] & v \arrow[d, "k"] \\
c \arrow[r, "M"', "|" marking] & w
\end{tikzcd}
$$

(6) 垂直合成の結合律

double category

【定義】

この定義は (13) まで

(8) 垂直合成の単位元

$$
\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "J", "\shortmid"{marking}] \arrow[d, "\mathrm{id}_a"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow \mathrm{id}_J"] & u \arrow[d, "\mathrm{id}_u"] \\
a \arrow[r, "J"', "\shortmid"{marking}] & u
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "J", "\shortmid"{marking}] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow \beta"] & u \arrow[d, "g"] \\
b \arrow[r, "K", "\shortmid"{marking}] \arrow[d, "\mathrm{id}_b"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow \mathrm{id}_K"] & v \arrow[d, "\mathrm{id}_v"] \\
b \arrow[r, "K"', "\shortmid"{marking}] & v
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "J", "\shortmid"{marking}] \arrow[dd, "f"'] \arrow[ddr, phantom, "\Downarrow \beta"] & u \arrow[dd, "g"] \\
& \\
b \arrow[r, "K"', "\shortmid"{marking}] & v
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "J", "\shortmid"{marking}] \arrow[d, "\mathrm{id}_a"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow \mathrm{id}_J"] & u \arrow[d, "\mathrm{id}_u"] \\
a \arrow[r, "J", "\shortmid"{marking}] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow \beta"] & u \arrow[d, "g"] \\
b \arrow[r, "K"', "\shortmid"{marking}] & v
\end{tikzcd}
$$

【定義】

この定義は (13) まで

(9) cell β, γ に対する水平合成 $\beta \odot \gamma$

$$
\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "J\odot M", "|"{marking}] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\beta\odot\gamma"] & s \arrow[d, "h"] \\
b \arrow[r, "K\odot N"', "|"{marking}] & t
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "J", "|"{marking}] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\beta"] & u \arrow[r, "M", "|"{marking}] \arrow[d, "g"] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\gamma"] & s \arrow[d, "h"] \\
b \arrow[r, "K"', "|"{marking}] & v \arrow[r, "N"', "|"{marking}] & t
\end{tikzcd}
$$

(10) 水平合成の結合律

(11) 水平合成の単位元
$$
\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "Ua", "|"{marking}] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow Uf"] & a \arrow[d, "f"] \\
b \arrow[r, "Ub"', "|"{marking}] & b
\end{tikzcd}
$$

※横方向の id は U で表す
ここでは U は
常にこの意味で使う

【定義】

この定義は (13) まで

(12) interchange law

$$
\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "J", "\shortmid"{marking}] \arrow[dd, "h\circ f"'] \arrow[ddr, phantom, "\Downarrow\gamma\circ\beta"] & u \arrow[r, "N", "\shortmid"{marking}] \arrow[dd, "k\circ g"] \arrow[ddr, phantom, "\Downarrow\tau\circ\sigma"] & s \arrow[dd, "q\circ p"] \\
\\
c \arrow[r, "M"', "\shortmid"{marking}] & w \arrow[r, "Q"', "\shortmid"{marking}] & x
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "J\odot N", "\shortmid"{marking}] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\beta\odot\sigma"] & s \arrow[d, "p"] \\
b \arrow[r, "K\odot P"', "\shortmid"{marking}] \arrow[d, "h"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\gamma\odot\tau"] & t \arrow[d, "q"] \\
c \arrow[r, "M\odot Q"', "\shortmid"{marking}] & x
\end{tikzcd}
$$

double category

【定義】

(13) id と U についての条件

$$
\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "J", "\shortmid"{marking}] \arrow[d, "\mathrm{id}_a"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\mathrm{id}_J"] & b \arrow[r, "K", "\shortmid"{marking}] \arrow[d, "\mathrm{id}_b"] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\mathrm{id}_K"] & c \arrow[d, "\mathrm{id}_c"] \\
a \arrow[r, "J"', "\shortmid"{marking}] & b \arrow[r, "K"', "\shortmid"{marking}] & c
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "J\odot K", "\shortmid"{marking}] \arrow[d, "\mathrm{id}_a"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\mathrm{id}_{J\odot K}"] & c \arrow[d, "\mathrm{id}_c"] \\
a \arrow[r, "J\odot K"', "\shortmid"{marking}] & c
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "Ua", "\shortmid"{marking}] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow Uf"] & a \arrow[d, "f"] \\
b \arrow[r, "Ub", "\shortmid"{marking}] \arrow[d, "g"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow Ug"] & b \arrow[d, "g"] \\
c \arrow[r, "Uc"', "\shortmid"{marking}] & c
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "Ua", "\shortmid"{marking}] \arrow[d, "g\circ f"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow U(g\circ f)"] & a \arrow[d, "g\circ f"] \\
c \arrow[r, "Uc"', "\shortmid"{marking}] & c
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "Ua", "\shortmid"{marking}] \arrow[d, "\mathrm{id}_a"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow U\mathrm{id}_a"] & a \arrow[d, "\mathrm{id}_a"] \\
a \arrow[r, "Ua"', "\shortmid"{marking}] & a
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "Ua", "\shortmid"{marking}] \arrow[d, "\mathrm{id}_a"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow \mathrm{id}_{Ua}"] & a \arrow[d, "\mathrm{id}_a"] \\
a \arrow[r, "Ua"', "\shortmid"{marking}] & a
\end{tikzcd}
$$

【例】

圏 C は double category とみなせる．

これは自明な「関係」しかないという例

- 対象は C の対象とする．
- 垂直射は C の射とする．
- 水平射は Ua $(a \in C)$ のみとする．
- cell は $\begin{tikzcd} a \arrow[r, "Ua", "\shortmid"{marking}] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow Uf"] & a \arrow[d, "f"] \\ b \arrow[r, "Ua"', "\shortmid"{marking}] & b \end{tikzcd}$ のみとする．(f は C の射)
- 垂直合成は C の合成とする．
- 水平合成は $Uf \odot Uf = Uf$ で定める．

$\square$

【例】

特に圏 **Rel** は double category となるが，ここに cell として「2 項関係の間の包含関係」を入れた double category を作れる．

- 対象は集合とする．
- 垂直射は写像とする．
- 水平射は UX（X は集合）のみとする．
- cell $\begin{array}{ccc} X & \overset{UX}{\rightarrow\!\!\!\!\!+} & X \\ {\scriptstyle S}\downarrow & \Downarrow\beta & \downarrow{\scriptstyle R} \\ Y & \underset{UY}{\rightarrow\!\!\!\!\!+} & Y \end{array}$ が存在 $\Longleftrightarrow R \subset S$．

（順序集合を圏とみなすときのやり方） □

これは「関係」が 2 項関係な例．
さっきの例とは違い cell が Uf 以外もありえる．

【例】

小圏の圏 $\mathbf{Cat}$ は double category となるが，「関手の関係」として自然変換の情報を入れることができる．

- 対象は小圏とする．
- 垂直射は関手とする．
- 水平射は UC（C は小圏）のみとする．
- cell $\begin{tikzcd} C \arrow[r, "UC", "\shortmid"{marking}] \arrow[d, "G"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\theta"] & C \arrow[d, "F"] \\ D \arrow[r, "UD"', "\shortmid"{marking}] & D \end{tikzcd}$ とは自然変換 $\theta\colon F \Rightarrow G$ のこととする．
- 垂直合成と水平合成は自然変換の合成で定義する． $\square$

【定義】

水平射が Ua のみの double category を strict 2-category という．

ここまでの例は全て strict 2-category である．

【例】

圏 C は strict 2-category とみなせる．
逆に言えば圏とは，水平射は Ua のみで cell は Uf のみの double category とも言える． $\square$

【例】

小圏，関手，自然変換は strict 2-category をなす．
（以下ここではこれを $\mathbf{Cat}_2$ と書く．） $\square$

【例】

モノイド M は圏だから double category になる．
これは次のようになる．

- 対象は $*$ のみ，垂直射は M の元，水平射は $U*$ のみ．
- cell は
$$\begin{tikzcd} * \arrow[r, "U*", "\shortmid"{marking}] \arrow[d, "m"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow Um"] & * \arrow[d, "m"] \\ * \arrow[r, "U*"', "\shortmid"{marking}] & * \end{tikzcd}$$
のみとする．(m は M の元)
- 垂直合成は M の演算とする．
- 水平合成は $Um \odot Um = Um$ とする．

double category

【定義】

対象が $*$ のみ，水平射が $U*$ のみの double category を strict モノイダル圏という．

【定義】

圏とは水平射が Ua のみ，cell は Uf のみの double category．

【定義】

モノイドとは対象が $*$ のみ，水平射が $U*$ のみ，cell は Um のみの double category のこと．

【定義】

strict 2-category とは水平射が Ua のみの double category．

モノイド

対象: $*$ のみ

水平射: $U*$ のみ

cell: Um のみ

圏

水平射: Ua のみ

cell: Uf のみ

strict モノイダル圏

対象: $*$ のみ

水平射: $U*$ のみ

strict 2-category

水平射: Ua のみ

（矢印は一般化を表す）

double category

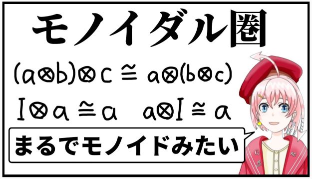
strict モノイダル圏
対象 $*$ のみ，水平射 $U*$ のみ

【例】

対象は $*$ のみ，水平射は $U*$ のみ，垂直射はアーベル群，

垂直合成はテンソル積，cell $\begin{tikzcd} * \arrow[r, "U*"] \arrow[d, "B"'] \arrow[rd, phantom, "\Downarrow f"] & * \arrow[d, "A"] \\ * \arrow[r, "U*"'] & * \end{tikzcd}$ は準同型 $f \colon A \to B$

とすると，これは strict モノイダル圏（にならない）． $\square$



https://www.youtube.com/watch?v=PgAul_hDhv0

【例】

double category $\mathbb{R}\mathrm{el}$ を以下により定める．

- 対象は集合とする．
- 垂直射は写像とする．
- 水平射 $R\colon X \nrightarrow Y$ とは 2 項関係 $R \subset X \times Y$ とする．
- cell $\begin{tikzcd} X \arrow[r, "R", "\shortmid"{marking}] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\beta"] & Z \arrow[d, "g"] \\ Y \arrow[r, "S"', "\shortmid"{marking}] & W \end{tikzcd}$ が存在 $\Longleftrightarrow$ xRz ならば $f(x)Sg(z)$
- 垂直合成は簡単

【例】

- $R \colon X \nrightarrow Y$ と $S \colon Y \nrightarrow Z$ の水平合成 $R \odot S \colon X \nrightarrow Z$ を
$$x(R \odot S)z \iff \exists y \in Y(xRy \wedge ySz)$$
- cell の水平合成もできる．
- $UX \colon X \nrightarrow X$ は $=$ が定める 2 項関係とする．

【定義】

double category の定義で，水平合成の結合律と単位元は「同型を除いて成立」していればよい，としたものを pseudo double category という．

正確な定義は第 4 回関東すうがく徒のつどいを参照
（ここではざっくり理解でよい）

~~第4回関東すうがく徒のつどい~~

関東すうがく徒の
つどわない

https://www.youtube.com/watch?v=kEGdYXyW2u4

【例】

pseudo double category $\mathbb{M}\mathrm{od}$ を以下により定める．

- 対象は環とする．
- 垂直射は環準同型とする．
- 水平射 $M\colon R \nrightarrow S$ とは左 R 右 S 加群 M のこととする．
- cell $\begin{tikzcd} R \arrow[r, "M", "|"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\theta"] & S \arrow[d, "g"] \\ R' \arrow[r, "N"', "|"] & S' \end{tikzcd}$ とは準同型写像 $\theta\colon M \to N(f,g)$ のこと

  但し $N(f,g)$ は次で定まる左 R 右 S 加群

  $rn := f(r)n$，$ns := ng(s)$

【例】

- $UR\colon R \nrightarrow R$ は R を左 R 右 R 加群とみなしたものとする．
- 垂直射の合成は環準同型の合成とする．
- cell の垂直合成は準同型の合成とする．
- 水平合成はテンソル積により定める． $\square$

水平合成の結合律や単位元が同型を除いてしか成り立たないので厳密には double category ではないものの，実質 double category のようなもの（なのでこういうのを pseudo double category と呼ぶ）

【例】

pseudo double category $\mathbb{P}\mathrm{rof}$ を以下により定める.

- 対象は小圏とする.
- 垂直射は関手とする.
- 水平射 $\Phi\colon C \nrightarrow D$ は関手 $\Phi\colon D^{\mathrm{op}} \times C \to \mathbf{Set}$ のこととする.（これを C から D への profunctor という.）
- $$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\Phi", "\shortmid"{marking}] \arrow[d, "G"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\beta"] & C \arrow[d, "F"] \\ B \arrow[r, "\Psi"', "\shortmid"{marking}] & D \end{tikzcd}$$ は自然変換 $\beta\colon \Phi(-,\square) \Rightarrow \Psi(F-, G\square)$ のこと.
- 垂直合成は関手・自然変換の合成.

【例】

- UC は $\mathrm{Hom}_C \colon C^{\mathrm{op}} \times C \to \mathbf{Set}$ とする．
- $$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "UC", "\shortmid"{marking}] \arrow[d, "F"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow UF"] & C \arrow[d, "F"] \\ D \arrow[r, "UD"', "\shortmid"{marking}] & D \end{tikzcd}$$ は $F \colon \mathrm{Hom}_C(-, \square) \Rightarrow \mathrm{Hom}_D(F-, F\square)$
- 水平合成は profunctor の合成で定める．

$$P \odot Q \coloneqq y^{\dagger}Q \circ P$$

$$\begin{tikzcd} & \widehat{B} \arrow[r, "y^{\dagger}Q"] & \widehat{C} \\ A \arrow[ur, "P"] & B \arrow[u, "y"] \arrow[ur, "Q"'] & \end{tikzcd}$$

【定義】

水平射が Ua のみの double category を strict 2-category という．

【定義】

$\mathbb{D}$ が (pseudo) double category のとき

水平射は Ua のみ，合成はそのまま使う，
cell は使えるものは全て使う（充満部分圏的な感じ）

とすると strict 2-category になる．これを vertical 2-category といい $\mathcal{V}(\mathbb{D})$ と書く．

【例】

$\mathcal{V}(\mathbb{R}\mathrm{el})$ を考える．cell は
$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "UX", "\shortmid"{marking}] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\beta"] & X \arrow[d, "g"] \\ Y \arrow[r, "UY"', "\shortmid"{marking}] & Y \end{tikzcd}$$
という形のみだが

これが存在する必要十分条件は

$$xUXz \text{ ならば } f(x)UYg(z).$$

$xUXz \iff x = z$ だから，β が存在 $\iff f = g$ となる．つまり $\mathcal{V}(\mathbb{R}\mathrm{el})$ の cell は Uf のみとなり，$\mathcal{V}(\mathbb{R}\mathrm{el})$ はさっきの意味で圏である．実は $\mathcal{V}(\mathbb{R}\mathrm{el}) \cong \mathbf{Set}$ となる．つまり $\mathbb{R}\mathrm{el}$ は $\mathbf{Set}$ に 2 項関係の情報を追加したものになっている． □

【例】

$\mathcal{V}(\mathbb{P}\mathrm{rof})$ を考える．これの cell は
$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "UC", "|" marking] \arrow[d, "G"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\beta"] & C \arrow[d, "F"] \\ D \arrow[r, "UD"', "|" marking] & D \end{tikzcd}$$
という形の cell

である．$UC = \mathrm{Hom}_C$ だから β は自然変換

$$\beta\colon \mathrm{Hom}_C(-, \square) \Rightarrow \mathrm{Hom}_D(F-, G\square)$$

となる．言い換えると $c \in C$ について自然な射

$$\beta_c\colon \mathrm{Hom}_C(-, c) \Rightarrow \mathrm{Hom}_D(F-, Gc)$$

である．米田の補題より $\beta_c \in \mathrm{Hom}_D(Fc, Gc)$ と同一視できる．

【例】

$\beta_c \in \mathrm{Hom}_D(Fc, Gc)$ とは即ち $\beta_c \colon Fc \to Gc$ である．

これは自然変換 $\beta \colon F \Rightarrow G$ となる．

まとめると $\mathcal{V}(\mathbb{P}\mathrm{rof})$ とは

対象: 小圏，垂直射: 関手，水平射: UC のみ，cell: 自然変換

これにより $\mathcal{V}(\mathbb{P}\mathrm{rof}) \cong \mathbf{Cat}_2$ が分かる．

つまり $\mathbb{P}\mathrm{rof}$ は $\mathbf{Cat}_2$ の情報は全て含みつつ，更に profunctor という情報が追加されている． □

まとめ

- double category は圏，モノイダル圏，2-category など色々なものの一般化になっている．
- double category により，普通の圏よりも多くの情報を扱うことができる．

double category

圏論では (余) 極限によって様々な構成をする.

double category における (余) 極限として基本となるのが (op)cartesian cell である.

【定義】

次の左辺内のような cell β が cartesian $\iff$ 右辺の cell θ に対して，左辺の cell θ' が一意に存在して次の等式が成り立つ.

$$
\begin{tikzcd}
s \arrow[r, "M", "\shortmid"{marking}] \arrow[d, "h"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\theta'"] & t \arrow[d, "k"] \\
a \arrow[r, "J"', "\shortmid"{marking}] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\beta"] & c \arrow[d, "g"] \\
b \arrow[r, "K"', "\shortmid"{marking}] & d
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
s \arrow[r, "M", "\shortmid"{marking}] \arrow[d, "h"'] & t \arrow[d, "k"] \\
a \arrow[d, "f"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\theta"] & c \arrow[d, "g"] \\
b \arrow[r, "K"', "\shortmid"{marking}] & d
\end{tikzcd}
$$

【命題】

β が cartesian のとき

$$\gamma \text{ が cartesian である} \iff \text{次の合成が cartesian である.}$$

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "J", "\shortmid"{marking}] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\gamma"] & u \arrow[d, "g"] \\
b \arrow[r, "K"', "\shortmid"{marking}] \arrow[d, "h"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\beta"] & v \arrow[d, "k"] \\
c \arrow[r, "M"', "\shortmid"{marking}] & w
\end{tikzcd}$$

double category

証明.

$(\Longrightarrow)$ $\beta\circ\gamma$ が cartesian であることを示す．任意の θ を取る．β が cartesian だから次の θ' が存在する．γ が cartesian だから，θ' に対して θ'' が取れる．このとき

$$
\begin{tikzcd}
d \arrow[r, "N", "|" marking] \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\theta''"] & x \arrow[d, "q"] \\
a \arrow[r, "J"', "|" marking] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\gamma"] & u \arrow[d, "g"] \\
b \arrow[r, "K"', "|" marking] \arrow[d, "h"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\beta"] & v \arrow[d, "k"] \\
c \arrow[r, "M"', "|" marking] & w
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
d \arrow[r, "N", "|" marking] \arrow[d, "p"'] & x \arrow[d, "q"] \\
a \arrow[d, "f"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\theta'"] & u \arrow[d, "g"] \\
b \arrow[r, "K"', "|" marking] \arrow[d, "h"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\beta"] & v \arrow[d, "k"] \\
c \arrow[r, "M"', "|" marking] & w
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
d \arrow[r, "N", "|" marking] \arrow[d, "p"'] & x \arrow[d, "q"] \\
a \arrow[d, "f"'] & u \arrow[d, "g"] \\
b \arrow[d, "h"'] & v \arrow[d, "k"] \\
c \arrow[r, "M"', "|" marking] & w
\arrow[from=2-1, to=3-2, phantom, "\Downarrow\theta"]
\end{tikzcd}
$$

となるから，あとはこの θ'' の一意性を示せばよい．

証明.

示したいこと: τ の一意性

そこで τ が次を満たしたとする．

$$
\begin{tikzcd}
d \arrow[r, "N", "\shortmid"{marking}] \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\tau"] & x \arrow[d, "q"] \\
a \arrow[r, "J"', "\shortmid"{marking}] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\gamma"] & u \arrow[d, "g"] \\
b \arrow[r, "K"', "\shortmid"{marking}] \arrow[d, "h"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\beta"] & v \arrow[d, "k"] \\
c \arrow[r, "M"', "\shortmid"{marking}] & w
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
d \arrow[r, "N", "\shortmid"{marking}] \arrow[d, "p"'] & x \arrow[d, "q"] \\
a \arrow[d, "f"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\theta"] & u \arrow[d, "g"] \\
b \arrow[d, "h"'] & v \arrow[d, "k"] \\
c \arrow[r, "M"', "\shortmid"{marking}] & w
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
d \arrow[r, "N", "\shortmid"{marking}] \arrow[d, "p"'] & x \arrow[d, "q"] \\
a \arrow[d, "f"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\theta'"] & u \arrow[d, "g"] \\
b \arrow[r, "K"', "\shortmid"{marking}] \arrow[d, "h"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\beta"] & v \arrow[d, "k"] \\
c \arrow[r, "M"', "\shortmid"{marking}] & w
\end{tikzcd}
$$

β が cartesian だから

証明.

示したいこと: τ の一意性

$$
\begin{tikzcd}
d \arrow[r, "N", "\shortmid"{marking}] \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\tau"] & x \arrow[d, "q"] \\
a \arrow[r, "J"', "\shortmid"{marking}] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\gamma"] & u \arrow[d, "g"] \\
b \arrow[r, "K"', "\shortmid"{marking}] & v
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
d \arrow[r, "N", "\shortmid"{marking}] \arrow[d, "p"'] & x \arrow[d, "q"] \\
a \arrow[r, phantom, "\Downarrow\theta'"] \arrow[d, "f"'] & u \arrow[d, "g"] \\
b \arrow[r, "K"', "\shortmid"{marking}] & v
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
d \arrow[r, "N", "\shortmid"{marking}] \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\theta''"] & x \arrow[d, "q"] \\
a \arrow[r, "J"', "\shortmid"{marking}] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\gamma"] & u \arrow[d, "g"] \\
b \arrow[r, "K"', "\shortmid"{marking}] & v
\end{tikzcd}
$$

となる．β が cartesian だから $\tau = \theta''$ である．
即ちこのような τ は一意である．

($\Longleftarrow$) 同様． $\square$

double category

【定義】

ここからは id_a, Ua は等号で表す

$f\colon a \to b$ の conjoint とは，次を満たす 3 つ組 $\langle f^\star, \eta_f, \varepsilon_f \rangle$．

$$
\begin{tikzcd}
b \arrow[r, "f^\star", "|" marking] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\varepsilon_f"] & a \arrow[r, equal] \arrow[d, "f"] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\eta_f"] & a \arrow[d, equal] \\
b \arrow[r, equal] & b \arrow[r, "f^\star"', "|" marking] & a
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
b \arrow[r, "f^\star", "|" marking] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\mathrm{id}"] & a \arrow[d, equal] \\
b \arrow[r, "f^\star"', "|" marking] & a
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
a \arrow[r, equal] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\eta_f"] & a \arrow[d, equal] \\
b \arrow[r, "f^\star"', "|" marking] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\varepsilon_f"] & a \arrow[d, "f"] \\
b \arrow[r, equal] & b
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
a \arrow[r, equal] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow Uf"] & a \arrow[d, "f"] \\
b \arrow[r, equal] & b
\end{tikzcd}
$$

double category

【定義】

ここからは id_a, Ua は等号で表す

$f\colon a \to b$ の companion とは，次を満たす 3 つ組 $\langle f_\star, {}_f\eta, {}_f\varepsilon \rangle$．

$$
\begin{tikzcd}
a \arrow[r, equal] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow{}_f\eta"] & a \arrow[r, "f_\star", "\shortmid" marking] \arrow[d, "f"] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow{}_f\varepsilon"] & b \arrow[d, equal] \\
a \arrow[r, "f_\star"', "\shortmid" marking] & b \arrow[r, equal] & b
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "f_\star", "\shortmid" marking] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\mathrm{id}"] & b \arrow[d, equal] \\
a \arrow[r, "f_\star"', "\shortmid" marking] & b
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
a \arrow[r, equal] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow{}_f\eta"] & a \arrow[d, "f"] \\
a \arrow[r, "f_\star"', "\shortmid" marking] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow{}_f\varepsilon"] & b \arrow[d, equal] \\
b \arrow[r, equal] & b
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
a \arrow[r, equal] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow Uf"] & a \arrow[d, "f"] \\
b \arrow[r, equal] & b
\end{tikzcd}
$$

double category

【命題】

$f\colon a \to b$ の conjoint が存在するとき，ε_f は cartesian である．
（同様に考えれば companion の ${}_f\varepsilon$ も cartesian である．）

証明.

cartesian を示すため，右辺の cell θ を任意に取る．
左辺の θ' が一意に存在することを示す．

$$
\begin{tikzcd}
s \arrow[r, "H", "\shortmid"{marking}] \arrow[d, "h"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\theta'"] & t \arrow[d, "k"] \\
b \arrow[r, "f^\star"', "\shortmid"{marking}] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow f^\star"] & a \arrow[d, "f"] \\
b \arrow[r, equal] & b
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
s \arrow[r, "H", "\shortmid"{marking}] \arrow[d, "h"'] & t \arrow[d, "k"] \\
b \arrow[d, equal] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\theta"] & a \arrow[d, "f"] \\
b \arrow[r, equal] & b
\end{tikzcd}
$$

証明.

$$\theta' \quad := \quad \begin{tikzcd}
s \arrow[r, "H", "|" marking] \arrow[dd, "h"'] \arrow[ddr, phantom, "\Downarrow\theta"] & t \arrow[r, equal] \arrow[d, "k"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow Uk"] & t \arrow[d, "k"] \\
 & a \arrow[r, equal] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\eta_f"] & a \arrow[d, equal] \\
b \arrow[r, equal] & b \arrow[r, "f^\star"', "|" marking] & a
\end{tikzcd}$$ と定義すると

double category

証明.

$$
\begin{tikzcd}
s \arrow[r, "H", "\shortmid"{marking}] \arrow[dd, "h"'] \arrow[ddr, phantom, "\Downarrow\theta'"] & t \arrow[dd, "k"] \\
\\
b \arrow[r, "f^\star", "\shortmid"{marking}] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\varepsilon_f"] & a \arrow[d, "f"] \\
b \arrow[r, equal] & b
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
s \arrow[r, "H", "\shortmid"{marking}] \arrow[dd, "h"'] \arrow[ddr, phantom, "\Downarrow\theta"] & t \arrow[r, equal] \arrow[d, "k"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow Uk"] & t \arrow[d, "k"] \\
 & a \arrow[r, equal] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\eta_f"] & a \arrow[d, equal] \\
b \arrow[r, equal] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\mathrm{id}"] & b \arrow[r, "f^\star"', "\shortmid"{marking}] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\varepsilon_f"] & a \arrow[d, "f"] \\
b \arrow[r, equal] & b \arrow[r, equal] & b
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
s \arrow[r, "H", "\shortmid"{marking}] \arrow[dd, "h"'] \arrow[ddr, phantom, "\Downarrow\theta"] & t \arrow[r, equal] \arrow[d, "k"] & t \arrow[d, "k"] \\
 & a \arrow[d, "f"] \arrow[r, phantom, "\Downarrow"] & a \arrow[d, "f"] \\
b \arrow[r, equal] & b \arrow[r, equal] & b
\end{tikzcd}
$$

$U(f\circ h)$

$$= \quad \theta.$$

証明.

一意性を示すため，ψ が

$$\begin{tikzcd} s \arrow[r, "H", "\shortmid"{marking}] \arrow[d, "h"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\psi"] & t \arrow[d, "k"] \\ b \arrow[r, "f^\star", "\shortmid"{marking}] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\varepsilon_f"] & a \arrow[d, "f"] \\ b \arrow[r, equal] & b \end{tikzcd} = \begin{tikzcd} s \arrow[r, "H", "\shortmid"{marking}] \arrow[d, "h"'] & t \arrow[d, "k"] \\ b \arrow[d, equal] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\theta"] & a \arrow[d, "f"] \\ b \arrow[r, equal] & b \end{tikzcd}$$

を満たしたとすると

証明.

$$\theta' \quad = \quad \begin{tikzcd}
s \arrow[r, "H", "\shortmid"{marking}] \arrow[dd, "h"'] & t \arrow[r, equal] \arrow[d, "k"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow Uk"] & t \arrow[d, "k"] \\
{} \arrow[r, phantom, "\Downarrow\theta"] & a \arrow[r, equal] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\eta_f"] & a \arrow[d, equal] \\
b \arrow[r, equal] & b \arrow[r, "f^\star"', "\shortmid"{marking}] & a
\end{tikzcd} \quad = \quad \begin{tikzcd}
s \arrow[r, "H", "\shortmid"{marking}] \arrow[d, "h"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\psi"] & t \arrow[r, equal] \arrow[d, "k"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow Uk"] & t \arrow[d, "k"] \\
b \arrow[r, "f^\star", "\shortmid"{marking}] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\varepsilon_f"] & a \arrow[r, equal] \arrow[d, "f"] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\eta_f"] & a \arrow[d, equal] \\
b \arrow[r, equal] & b \arrow[r, "f^\star"', "\shortmid"{marking}] & a
\end{tikzcd}$$

$$= \quad \begin{tikzcd}
s \arrow[r, "H", "\shortmid"{marking}] \arrow[d, "h"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\psi"] & t \arrow[r, equal] \arrow[d, "k"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow Uk"] & t \arrow[d, "k"] \\
b \arrow[r, "f^\star"', "\shortmid"{marking}] \arrow[d, equal] & a \arrow[r, equal] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\mathrm{id}_{f^\star}"] & a \arrow[d, equal] \\
b \arrow[rr, "f^\star"', "\shortmid"{marking}] & & a
\end{tikzcd} \quad = \quad \psi.$$

□

【命題】

$\mathbb{D}$ の cell $\begin{tikzcd} b \arrow[r, "J", "|" marking] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\beta"] & a \arrow[d, "f"] \\ b \arrow[r, equal] & b \end{tikzcd}$ が cartesian ならば

ある $\begin{tikzcd} a \arrow[r, equal] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\gamma"] & a \arrow[d, equal] \\ b \arrow[r, "J"', "|" marking] & a \end{tikzcd}$ が存在して $\langle J, \gamma, \beta \rangle$ が f の conjoint となる.

証明.

β が cartesian だから，ある γ が存在して

$$
\begin{tikzcd}
a \arrow[r, equal] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\gamma"] & a \arrow[d, equal] \\
b \arrow[r, "J"', "\shortmid" marking] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\beta"] & a \arrow[d, "f"] \\
b \arrow[r, equal] & b
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
a \arrow[r, equal] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow Uf"] & a \arrow[d, "f"] \\
b \arrow[r, equal] & b
\end{tikzcd}
$$

とできる．すると

証明.

$$
\begin{tikzcd}
b \arrow[r, "J", "|" marking] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\beta"] & a \arrow[r, equal] \arrow[d, "f"] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\gamma"] & a \arrow[d, equal] \\
b \arrow[r, equal] \arrow[d, equal] \arrow[drr, phantom, "\Downarrow\beta"] & b \arrow[r, "|" marking, "J"'] & a \arrow[d, "f"] \\
b \arrow[rr, equal] & & b
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
b \arrow[r, "J", "|" marking] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\beta"] & a \arrow[r, equal] \arrow[d, "f"] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\gamma"] & a \arrow[d, equal] \\
b \arrow[r, equal] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\mathrm{id}"] & b \arrow[r, "|" marking, "J"'] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\beta"] & a \arrow[d, "f"] \\
b \arrow[r, equal] & b \arrow[r, equal] & b
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
b \arrow[r, "J", "|" marking] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\beta"] & a \arrow[r, equal] \arrow[d, "f"] & a \arrow[d, equal] \\
b \arrow[r, equal] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\mathrm{id}"] & b \arrow[d, equal] \arrow[r, phantom, "\Downarrow Uf"] & a \arrow[d, "f"] \\
b \arrow[r, equal] & b \arrow[r, equal] & b
\end{tikzcd}
$$

$$
= \quad \beta \quad =
\begin{tikzcd}
b \arrow[r, "J", "|" marking] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\mathrm{id}_J"] & a \arrow[d, equal] \\
b \arrow[r, "J", "|" marking] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\beta"] & a \arrow[d, "f"] \\
b \arrow[r, equal] & b
\end{tikzcd}
$$

□

double category

【演習問題】

$f\colon a \to b$ の companion と $g\colon c \to d$ の conjoint が存在するとき $J\colon b \nrightarrow d$ に対して次の合成は cartesian である．

$$
\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "f_\star", "|" marking] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow{}_f\varepsilon"] & b \arrow[r, "J", "|" marking] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\mathrm{id}_J"] & d \arrow[r, "g^\star", "|" marking] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\varepsilon_g"] & c \arrow[d, "g"] \\
b \arrow[r, equal] & b \arrow[r, "J"', "|" marking] & d \arrow[r, equal] & d
\end{tikzcd}
$$

【演習問題】

β が cartesian で γ が opcartesian なら $\beta \odot \gamma$ も opcartesian．

$$
\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "J", "|" marking] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\beta"] & b \arrow[r, "M", "|" marking] \arrow[d, "f"] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\gamma"] & u \arrow[d, "f"] \\
a \arrow[r, "K"', "|" marking] & c \arrow[r, "N"', "|" marking] & v
\end{tikzcd}
$$

【定義】

$J\colon a \nrightarrow b$ に沿った $g\colon b \to c$ の左 Kan 拡張 $\langle l, \eta \rangle$ とは

(1) $l\colon a \to c$ は垂直射で η は cell
$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "J", "\shortmid"{marking}] \arrow[d, "l"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\eta"] & b \arrow[d, "g"] \\ c \arrow[r, equal] & c \end{tikzcd}$$
である．

(2) 次の右辺の cell θ に対して，左辺の cell τ が一意に存在して，次の等式が成り立つ．

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, equal] \arrow[d, "k"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\tau"] & a \arrow[r, "J", "\shortmid"{marking}] \arrow[d, "l"] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\eta"] & b \arrow[d, "g"] \\ c \arrow[r, equal] & c \arrow[r, equal] & c \end{tikzcd} = \begin{tikzcd} a \arrow[r, "J", "\shortmid"{marking}] \arrow[d, "k"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\theta"] & b \arrow[d, "g"] \\ c \arrow[r, equal] & c \end{tikzcd}$$

【命題】

次の図式において η が左 Kan 拡張のとき

$$\sigma \text{ が左 Kan 拡張である} \iff \text{全体が左 Kan 拡張である.}$$

$$\begin{tikzcd}
d \arrow[r, "K", "|" marking] \arrow[d, "k"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\sigma"] & a \arrow[r, "J", "|" marking] \arrow[d, "l"] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\eta"] & b \arrow[d, "g"] \\
c \arrow[r, equal] & c \arrow[r, equal] & c
\end{tikzcd}$$

□

【命題】

次の γ が opcartesian のとき

$$\eta \text{ が左 Kan 拡張である} \iff \text{全体が左 Kan 拡張である.}$$

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "K", "\shortmid"{marking}] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\gamma"] & u \arrow[d, "f"] \\
a \arrow[r, "J", "\shortmid"{marking}] \arrow[d, "l"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\eta"] & b \arrow[d, "g"] \\
c \arrow[r, equal] & c
\end{tikzcd}$$

証明.

$\Longrightarrow$ のみ示す．全体が左 Kan 拡張であることを示すため右辺の θ を取る．γ が opcartesian だから θ' が取れる．η が左 Kan 拡張だから次の τ が取れる．

このとき

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, equal] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\mathrm{id}"] & a \arrow[r, "K", "\shortmid"{marking}] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\gamma"] & u \arrow[d, "f"] & & a \arrow[r, "K", "\shortmid"{marking}] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\gamma"] & u \arrow[d, "f"] & & a \arrow[r, "K", "\shortmid"{marking}] \arrow[dd, "k"'] & u \arrow[d, "f"] \\
a \arrow[r, equal] \arrow[d, "k"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\tau"] & a \arrow[r, "J", "\shortmid"{marking}] \arrow[d, "l"] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\eta"] & b \arrow[d, "g"] & = & a \arrow[r, "J", "\shortmid"{marking}] \arrow[d, "k"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\theta'"] & b \arrow[d, "g"] & = & {} \arrow[r, phantom, "\Downarrow\theta"] & b \arrow[d, "g"] \\
c \arrow[r, equal] & c \arrow[r, equal] & c & & c \arrow[r, equal] & c & & c \arrow[r, equal] & c
\end{tikzcd}$$

この τ の一意性も分かり全体が左 Kan 拡張である．

virtual double category

水平射の合成は考えるのが難しい．

- 加群の合成（テンソル積）や profunctor の合成は，結合律が同型を除いてしか成り立たない．
- profunctor $F\colon A \mathrel{\circ\!\!\!\rightarrow} B$，$G\colon B \mathrel{\circ\!\!\!\rightarrow} C$ の合成は B が小さくないと定義できない．（つまり **Prof** では小圏しか考えられない）

$$
\begin{tikzcd}
 & \widehat{B} \arrow[r, "y^{\dagger}Q"] & \widehat{C} \\
A \arrow[ur, "P"] & B \arrow[u, "y"] \arrow[ur, "Q"'] &
\end{tikzcd}
$$

$\to$ 合成は考えなければいいのでは？

X を集合（積が定義されていない）とする．

でも X で積を考えたい．どうする？

$\to X$ で生成される自由群を考える．

つまり $FX :=$ (X の元の有限列全体) として

$$(x_1 \cdots x_n)(y_1 \cdots y_m) \coloneqq x_1 \cdots x_n y_1 \cdots y_m$$

【定義】

この定義は (9) まで

virtual double category は以下で与えられる．

(1) 対象 a

(2) 垂直射 $a \xrightarrow{f} b$（a, b は対象）これは圏をなす

(3) 水平射 $a \overset{J}{\nrightarrow} b$（$a, b$ は対象）

(4) cell
$$
\begin{tikzcd}
a_0 \arrow[r, "J_1", "\shortmid"{marking}] \arrow[d, "f"'] & a_1 \arrow[r, "J_2", "\shortmid"{marking}] & \cdots \arrow[r, "J_{n-1}", "\shortmid"{marking}] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\beta"] & a_{n-1} \arrow[r, "J_n", "\shortmid"{marking}] & a_n \arrow[d, "g"] \\
b \arrow[rrrr, "K"', "\shortmid"{marking}] & & & & c
\end{tikzcd}
$$

（$n \geq 0$，a_i, b, c は対象，f, g は垂直射，J_i, K は水平射）

virtual double category

以下，水平射の列 $a_0 \overset{J_1}{\nrightarrow} a_1 \overset{J_2}{\nrightarrow} \cdots \overset{J_{n-1}}{\nrightarrow} a_{n-1} \overset{J_n}{\nrightarrow} a_n$ を

スペースを省略するため $a_0 \overset{\vec{J}}{\not\nrightarrow} a_n$ とも書く．つまり cell は

$$
\begin{tikzcd}
a_0 \arrow[r, "\vec{J}", "\shortmid\shortmid"{marking}] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\beta"] & a_n \arrow[d, "g"] \\
b \arrow[r, "K"', "\shortmid"{marking}] & c
\end{tikzcd}
$$

のようになる．また $a_0 \overset{\vec{J}_1}{\not\nrightarrow} a_1 \overset{\vec{J}_2}{\not\nrightarrow} \cdots \overset{\vec{J}_{n-1}}{\not\nrightarrow} a_{n-1} \overset{\vec{J}_n}{\not\nrightarrow} a_n$ のとき

これを結合して得られる列を $a_0 \xrightarrow{\vec{J}_1{}^\frown \cdots {}^\frown \vec{J}_n} a_n$ と書く．

virtual double category

この定義で cell

$$
\begin{tikzcd}
a_0 \arrow[r, "J_1", "\shortmid"{marking}] \arrow[d, "f"'] & a_1 \arrow[r, "J_2", "\shortmid"{marking}] & \cdots \arrow[r, "J_{n-1}", "\shortmid"{marking}] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\beta"] & a_{n-1} \arrow[r, "J_n", "\shortmid"{marking}] & a_n \arrow[d, "g"] \\
b \arrow[rrrr, "K"', "\shortmid"{marking}] & & & & c
\end{tikzcd}
$$

は

$n = 0$ でもよい．これを

$$
\begin{tikzcd}
a_0 \arrow[r, dashed, no head] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\beta"] & a_0 \arrow[d, "g"] \\
b \arrow[r, "K"', "\shortmid"{marking}] & c
\end{tikzcd}
$$

と書くことにする．（空列を a --- a で表す）

n を $\vec{J}$ の長さといい $|\vec{J}|$ で表す．

【定義】

この定義は (9) まで

(5) cell
$$\begin{tikzcd} a_0 \arrow[r, "\vec{J}_1"] \arrow[d, "f_0"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\beta_1"] & a_1 \arrow[d, "f_1"] \\ b_0 \arrow[r, "K_1"'] & b_1 \end{tikzcd}, \quad \cdots \quad, \quad \begin{tikzcd} a_{n-1} \arrow[r, "\vec{J}_n"] \arrow[d, "f_{n-1}"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\beta_n"] & a_n \arrow[d, "f_n"] \\ b_{n-1} \arrow[r, "K_n"'] & b_n \end{tikzcd}$$

と
$$\begin{tikzcd} b_0 \arrow[r, "\vec{K}"] \arrow[d, "g"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\gamma"] & b_n \arrow[d, "h"] \\ c \arrow[r, "H"'] & d \end{tikzcd}$$
に対して合成
$$\begin{tikzcd} a_0 \arrow[r, "\vec{J}_1{}^\frown\cdots{}^\frown\vec{J}_n"] \arrow[d, "g\circ f_0"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\frac{\beta_1\cdots\beta_n}{\gamma}"] & a_n \arrow[d, "h\circ f_n"] \\ c \arrow[r, "H"'] & d \end{tikzcd}$$
が与えられている．

【定義】

この定義は (9) まで

つまり次のような状況のとき，合成ができる．

$$
\begin{tikzcd}
a_0 \arrow[r, "\vec{J}_1", "\shortmid"{marking}] \arrow[d, "f_0"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\beta_1"] & a_1 \arrow[r, "\vec{J}_2", "\shortmid"{marking}] \arrow[d, "f_1"] & \cdots \arrow[r, "\vec{J}_{n-1}", "\shortmid"{marking}] & a_{n-1} \arrow[r, "\vec{J}_n", "\shortmid"{marking}] \arrow[d, "f_{n-1}"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\beta_n"] & a_n \arrow[d, "f_n"] \\
b_0 \arrow[r, "K_1"', "\shortmid"{marking}] \arrow[d, "g"'] & b_1 \arrow[r, "K_2"', "\shortmid"{marking}] & \cdots \arrow[r, "K_{n-1}"', "\shortmid"{marking}] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\gamma"] & b_{n-1} \arrow[r, "K_n"', "\shortmid"{marking}] & b_n \arrow[d, "h"] \\
c \arrow[rrrr, "H"', "\shortmid"{marking}] & & & & d
\end{tikzcd}
$$

virtual double category

【定義】

この定義は (9) まで

(6)　「結合律」が成り立つ．

$$
\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r, "\shortmid\shortmid" marking] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\beta^1_1"] & \bullet \arrow[r, "\shortmid\shortmid" marking] \arrow[d] & \cdots \arrow[r, "\shortmid\shortmid" marking] \arrow[d, phantom, "\cdots"] & \bullet \arrow[r, "\shortmid\shortmid" marking] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\beta^1_{n^1}"] & \bullet \arrow[r, "\shortmid\shortmid" marking] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\beta^2_1"] & \bullet \arrow[r, "\shortmid\shortmid" marking] \arrow[d] & \cdots & \cdots \arrow[r, "\shortmid\shortmid" marking] & \bullet \arrow[r, "\shortmid\shortmid" marking] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\beta^n_{n^n}"] & \bullet \arrow[d] \\
\bullet \arrow[r, "\shortmid" marking] \arrow[d] & \bullet \arrow[r, "\shortmid" marking] & \cdots \arrow[r, "\shortmid" marking] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\gamma^1"] & \bullet \arrow[r, "\shortmid" marking] & \bullet \arrow[r, "\shortmid" marking] \arrow[d] & \bullet \arrow[r, "\shortmid" marking] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\gamma^2"] & \cdots & \cdots \arrow[r, "\shortmid" marking] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\gamma^n"] & \bullet \arrow[r, "\shortmid" marking] & \bullet \arrow[d] \\
\bullet \arrow[rrrr, "\shortmid" marking] \arrow[d] & & & & \bullet \arrow[rr, "\shortmid" marking] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\sigma"] & & \cdots & \cdots \arrow[rr, "\shortmid" marking] & & \bullet \arrow[d] \\
\bullet \arrow[rrrrrrrrr, "\shortmid" marking] & & & & & & & & & \bullet
\end{tikzcd}
$$

$$
\frac{\dfrac{\beta^1_1\cdots\beta^1_{n^1}}{\gamma^1}\cdots\dfrac{\beta^n_1\cdots\beta^n_{n^n}}{\gamma^n}}{\sigma} = \frac{\dfrac{\beta^1_1\cdots\beta^n_{n^n}}{\gamma^1\cdots\gamma^n}}{\sigma}
$$

この定義は (9) まで

【定義】

(7) 任意の水平射 $J\colon a \nrightarrow b$ に対して
$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "J", "\shortmid"{marking}] \arrow[d, "\mathrm{id}_a"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\mathrm{id}_J"] & b \arrow[d, "\mathrm{id}_b"] \\ a \arrow[r, "J"', "\shortmid"{marking}] & b \end{tikzcd}$$
が与えられている．

【定義】

この定義は (9) まで

(8) 次の図式のような cell β に対して，次の等式が成り立つ．

$$
\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "\vec{J}", "\shortmid\shortmid"{marking}] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\beta"] & u \arrow[d, "g"] \\
b \arrow[r, "K", "\shortmid"{marking}] \arrow[d, "\mathrm{id}_b"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\mathrm{id}_K"] & v \arrow[d, "\mathrm{id}_v"] \\
b \arrow[r, "K"', "\shortmid"{marking}] & v
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "\vec{J}", "\shortmid\shortmid"{marking}] \arrow[dd, "f"'] \arrow[ddr, phantom, "\Downarrow\beta"] & u \arrow[dd, "g"] \\
& \\
b \arrow[r, "K"', "\shortmid"{marking}] & v
\end{tikzcd}
$$

【定義】

(9) 次の図式のような cell β $(n \geq 1)$ に対して，次の等式が成り立つ．

$$
\begin{tikzcd}
a_0 \arrow[r, "J_1", "|" marking] \arrow[d, "\mathrm{id}_{a_0}"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow \mathrm{id}_{J_1}"] & a_1 \arrow[r, "J_2", "|" marking] \arrow[d, "\mathrm{id}_{a_1}"] & \cdots \arrow[r, "J_{n-1}", "|" marking] \arrow[d, phantom, "\cdots"] & a_{n-1} \arrow[r, "J_n", "|" marking] \arrow[d, "\mathrm{id}_{a_{n-1}}"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow \mathrm{id}_{J_n}"] & a_n \arrow[d, "\mathrm{id}_{a_n}"] \\
a_0 \arrow[r, "J_1"', "|" marking] \arrow[d, "g"'] & a_1 \arrow[r, "J_2"', "|" marking] & \cdots \arrow[r, "J_{n-1}"', "|" marking] \arrow[d, phantom, "\Downarrow \beta"] & a_{n-1} \arrow[r, "J_n"', "|" marking] & a_n \arrow[d, "h"] \\
b \arrow[rrrr, "\vec{K}"', "|" marking] & & & & v
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
a_0 \arrow[r, "J_1 ^\frown \cdots ^\frown J_n", "|" marking] \arrow[d, "g"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow \beta"] & a_n \arrow[d, "h"] \\
b \arrow[r, "\vec{K}"', "|" marking] & v
\end{tikzcd}
$$

（virtual double category には U は含まれない）

【例】

多重線型写像を使って virtual double category を作れる．

- 対象は $*$ のみとする．
- 垂直射は id_* のみとする．
- 水平射は k-線型空間とする．
- cell
$$
\begin{tikzcd}
* \arrow[r, "V_1", "\shortmid"{marking}] \arrow[d, equal] & * \arrow[r, "V_2", "\shortmid"{marking}] & \cdots \arrow[r, "V_{n-1}", "\shortmid"{marking}] \arrow[d, phantom, "\Downarrow f"] & * \arrow[r, "V_n", "\shortmid"{marking}] & * \arrow[d, equal] \\
* \arrow[rrrr, "W"', "\shortmid"{marking}] & & & & *
\end{tikzcd}
$$
は

  多重線型写像 $f\colon V_1 \times \cdots \times V_n \to W$ とする．
- 合成は多重線型写像の合成とする． □

【定義】

対象が $*$ のみ，垂直射が id_* のみの virtual double category を multicategory という．

https://www.youtube.com/watch?v=J0QYcWe_0xo

【定義】

対象が $*$ のみ，垂直射が id_*，水平射が U_* のみの virtual double category を non-symmetric operad というらしい？

【例】

pseudo double category $\mathbb{D}$ は virtual double category になる.

- 対象，垂直射，水平射は $\mathbb{D}$ のものを使う.
- cell
$$\begin{tikzcd} a_0 \arrow[r, "J_1", "\shortmid"{marking}] \arrow[d, "f"'] & a_1 \arrow[r, "J_2", "\shortmid"{marking}] & \cdots \arrow[r, "J_{n-1}", "\shortmid"{marking}] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\beta"] & a_{n-1} \arrow[r, "J_n", "\shortmid"{marking}] & a_n \arrow[d, "g"] \\ b_0 \arrow[rrrr, "K"', "\shortmid"{marking}] & & & & b_n \end{tikzcd}$$
は

$\mathbb{D}$ の cell
$$\begin{tikzcd} a_0 \arrow[r, "J_1 \odot \cdots \odot J_n", "\shortmid"{marking}] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\beta"] & a_n \arrow[d, "g"] \\ b_0 \arrow[r, "K"', "\shortmid"{marking}] & b_n \end{tikzcd}$$
を使う.

【例】

特に次のようにすると virtual double category になる.

- 対象は環とする.
- 垂直射は環準同型とする.
- 水平射は左 S 右 R 加群とする.
- cell $$\begin{tikzcd} R_0 \arrow[r, "M_1", "\shortmid"{marking}] \arrow[d, "f"'] & \cdots \arrow[r, "M_n", "\shortmid"{marking}] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\beta"] & R_n \arrow[d, "g"] \\ S_0 \arrow[rr, "N"', "\shortmid"{marking}] & & S_n \end{tikzcd}$$ とは

  多重線型写像 $\beta\colon M_1 \times \cdots \times M_n \to N(f, g)$ のこと
  (つまり準同型 $\beta\colon M_1 \otimes \cdots \otimes M_n \to N(f, g)$ と同じ)

【例】

virtual double category $\mathbb{P}\mathrm{ROF}$ を以下により定める.

- 対象は圏とする.（大きい圏も含む）
- 垂直射は関手とする.
- 水平射 $\Phi\colon C \nrightarrow D$ は関手 $\Phi\colon D^{\mathrm{op}} \times C \to \mathbf{Set}$ とする.
- $$\begin{tikzcd} C_0 \arrow[r, "\Phi_1", "\shortmid"{marking}] \arrow[d, "G"'] & C_1 \arrow[r, "\Phi_2", "\shortmid"{marking}] & \cdots \arrow[r, "\Phi_{n-1}", "\shortmid"{marking}] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\beta"] & C_{n-1} \arrow[r, "\Phi_n", "\shortmid"{marking}] & C_n \arrow[d, "F"] \\ D_0 \arrow[rrrr, "\Psi"', "\shortmid"{marking}] & & & & D_1 \end{tikzcd}$$ は自然な写像

$$\beta_{\vec{a}}\colon \Phi_1(a_1, a_0) \times \cdots \times \Phi_n(a_n, a_{n-1}) \to \Psi(Fa_n, Ga_0)$$

【例】

$$
\begin{tikzcd}
C_0 \arrow[r, "\Phi_1", "\shortmid"{marking}] \arrow[d, "G"'] & C_1 \arrow[r, "\Phi_2", "\shortmid"{marking}] & \cdots \arrow[r, "\Phi_{n-1}", "\shortmid"{marking}] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\beta"] & C_{n-1} \arrow[r, "\Phi_n", "\shortmid"{marking}] & C_n \arrow[d, "F"] \\
D_0 \arrow[rrrr, "\Psi"', "\shortmid"{marking}] & & & & D_1
\end{tikzcd}
$$

profunctor の合成 $\Phi_1 \odot \cdots \odot \Phi_n$ が可能な場合は

- 自然変換 $(\Phi_1 \odot \cdots \odot \Phi_n)(-, \square) \Rightarrow \Psi(F-, G\square)$
- 自然な $\beta_{\vec{a}} \colon \Phi_1(a_1, a_0) \times \cdots \times \Phi_n(a_n, a_{n-1}) \to \Psi(Fa_n, Ga_0)$

は 1 対 1 に対応する．これにより，profunctor の合成ができなくても実質 double category と同じ事ができる，というのが virtual double category $\mathbb{P}\mathrm{ROF}$ である．

【例】

$\mathbb{P}\mathrm{ROF}$ は大きい圏も扱えるが，これは大きい圏のなす 2-category $\mathbf{CAT}_2$ の情報を完全には含んでいない．

何故かというとまず double category のときと同様に

cell
$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\mathrm{Hom}_C", "\shortmid" marking] \arrow[d, "G"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\beta"] & C \arrow[d, "F"] \\ D \arrow[r, "\mathrm{Hom}_D"', "\shortmid" marking] & D \end{tikzcd}$$
は自然変換 $\beta\colon F \Rightarrow G$ になるが，

これは C, D が小圏でなければ考えることができない．
（C が小圏でないと $\mathrm{Hom}_C\colon C^{\mathrm{op}} \times C \to \mathbf{Set}$ にならない．） $\square$

一般に virtual double category $\mathbb{D}$ では vertical 2-category $\mathcal{V}(\mathbb{D})$ が定義できない．

virtual double category の定義には（縦方向の単位元 id はあるが）横方向の単位元 Ua が含まれていないからである．
（そもそも合成を考えないが）

virtual double category の横の合成＝列の合成

列の合成の単位元 $=$ 空列

augmented virtual double category

augmented virtual double category

【定義】

この定義は (14) まで

augmented virtual double category は以下で与えられる．

(1) 対象 a

(2) 垂直射 $a \xrightarrow{f} b$（a, b は対象）これは圏をなす

(3) 水平射 $a \overset{J}{\nrightarrow} b$（$a, b$ は対象）

(4) cell は
$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "\vec{J}", "\shortmid\shortmid"{marking}] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\beta"] & u \arrow[d, "g"] \\ b \arrow[r, "K"', "\shortmid"{marking}] & v \end{tikzcd}$$
と
$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "\vec{J}", "\shortmid\shortmid"{marking}] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\beta"] & u \arrow[d, "g"] \\ b \arrow[r, dashed, no head] & b \end{tikzcd}$$
の 2 種類

（この 2 種類をまとめて
$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "\vec{J}", "\shortmid\shortmid"{marking}] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\beta"] & u \arrow[d, "g"] \\ b \arrow[r, "\vec{K}"', "\shortmid\shortmid"{marking}] & v \end{tikzcd}$$
で表す）

$(|\vec{K}| = 0 \text{ or } 1)$

augmented virtual double category

【定義】

この定義は (14) まで

(5) 次の図式は合成できる.

$$
\begin{tikzcd}
a_0 \arrow[r, "\vec{J}_1", "\shortmid\shortmid" marking] \arrow[d, "f_0"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\beta_1"] & a_1 \arrow[r, "\vec{J}_2", "\shortmid\shortmid" marking] \arrow[d, "f_1"] & \cdots \arrow[r, "\vec{J}_{n-1}", "\shortmid\shortmid" marking] & a_{n-1} \arrow[r, "\vec{J}_n", "\shortmid\shortmid" marking] \arrow[d, "f_{n-1}"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\beta_n"] & a_n \arrow[d, "f_n"] \\
b_0 \arrow[r, "\vec{K}_1"', "\shortmid\shortmid" marking] \arrow[d, "g"'] & b_1 \arrow[r, "\vec{K}_2"', "\shortmid\shortmid" marking] & \cdots \arrow[r, "\vec{K}_{n-1}"', "\shortmid\shortmid" marking] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\gamma"] & b_{n-1} \arrow[r, "\vec{K}_n"', "\shortmid\shortmid" marking] & b_n \arrow[d, "h"] \\
c \arrow[rrrr, "\vec{L}"', "\shortmid\shortmid" marking] & & & & d
\end{tikzcd}
$$

(6) 結合律が成り立つ.

【定義】

この定義は (14) まで

(7) 任意の水平射 $J\colon a \nrightarrow b$ に対して
$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "J", "|" marking] \arrow[d, "\mathrm{id}_a"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\mathrm{id}_J"] & b \arrow[d, "\mathrm{id}_b"] \\ a \arrow[r, "J"', "|" marking] & b \end{tikzcd}$$

(8) 任意の垂直射 $f\colon a \to b$ に対して，
$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, dashed, no head] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow Uf"] & a \arrow[d, "f"] \\ b \arrow[r, dashed, no head] & b \end{tikzcd}$$

（つまり augmented virtual double category は U がある）

【定義】

この定義は (14) まで

(9) 次の図式のような cell β に対して，次の等式が成り立つ．

$$
\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "\vec{J}", "\shortmid\shortmid"{marking}] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\beta"] & u \arrow[d, "g"] \\
b \arrow[r, dash, dashed] \arrow[d, "\mathrm{id}_b"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow U\mathrm{id}_b"] & b \arrow[d, "\mathrm{id}_b"] \\
b \arrow[r, dash, dashed] & b
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "\vec{J}", "\shortmid\shortmid"{marking}] \arrow[dd, "f"'] \arrow[ddr, phantom, "\Downarrow\beta"] & u \arrow[dd, "g"] \\
& \\
b \arrow[r, dash, dashed] & b
\end{tikzcd}
$$

この定義は (14) まで

【定義】

(10) 次の図式のような cell β に対して，次の等式が成り立つ．

$$
\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "\vec{J}", "\shortmid\shortmid" marking] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\beta"] & u \arrow[d, "g"] \\
b \arrow[r, "K", "\shortmid" marking] \arrow[d, "\mathrm{id}_b"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\mathrm{id}_K"] & v \arrow[d, "\mathrm{id}_v"] \\
b \arrow[r, "K"', "\shortmid" marking] & v
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "\vec{J}", "\shortmid\shortmid" marking] \arrow[dd, "f"'] \arrow[ddr, phantom, "\Downarrow\beta"] & u \arrow[dd, "g"] \\
 & \\
b \arrow[r, "K"', "\shortmid" marking] & v
\end{tikzcd}
$$

【定義】

この定義は (14) まで

(11) 次の図式のような cell β に対して，次の等式が成り立つ．

$$
\begin{tikzcd}
a \arrow[r, dashed, no head] \arrow[d, "\mathrm{id}_a"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow U\mathrm{id}_a"] & a \arrow[d, "\mathrm{id}_a"] \\
a \arrow[r, dashed, no head] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\beta"] & a \arrow[d, "g"] \\
b \arrow[r, "|", "\vec{K}"'] & v
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
a \arrow[r, dashed, no head] \arrow[dd, "f"'] \arrow[ddr, phantom, "\Downarrow\beta"] & a \arrow[dd, "g"] \\
& \\
b \arrow[r, "|", "\vec{K}"'] & v
\end{tikzcd}
$$

【定義】

この定義は (14) まで

(12) 次の図式のような cell β $(n \geq 1)$ に対して，次の等式が成り立つ．

$$
\begin{tikzcd}
a_0 \arrow[r, "J_1", "\shortmid"{marking}] \arrow[d, "\mathrm{id}_{a_0}"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\mathrm{id}_{J_1}"] & a_1 \arrow[r, "J_2", "\shortmid"{marking}] \arrow[d, "\mathrm{id}_{a_1}"] & \cdots \arrow[r, "J_{n-1}", "\shortmid"{marking}] & a_{n-1} \arrow[r, "J_n", "\shortmid"{marking}] \arrow[d, "\mathrm{id}_{a_{n-1}}"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\mathrm{id}_{J_n}"] & a_n \arrow[d, "\mathrm{id}_{a_n}"] \\
a_0 \arrow[r, "J_1"', "\shortmid"{marking}] \arrow[d, "g"'] & a_1 \arrow[r, "J_2"', "\shortmid"{marking}] & \cdots \arrow[r, "J_{n-1}"', "\shortmid"{marking}] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\beta"] & a_{n-1} \arrow[r, "J_n"', "\shortmid"{marking}] & a_n \arrow[d, "h"] \\
b \arrow[rrrr, "\vec{K}"', "\shortparallel"{marking}] & & & & v
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
a_0 \arrow[r, "J_1{}^\frown\cdots{}^\frown J_n", "\shortmid"{marking}] \arrow[d, "g"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\beta"] & a_n \arrow[d, "h"] \\
b \arrow[r, "\vec{K}"', "\shortparallel"{marking}] & v
\end{tikzcd}
$$

augmented virtual double category

【定義】

この定義は (14) まで

(13) 次の図式のような cell $\beta_1, \cdots, \beta_n$ と γ に対して，次が成立．

$$
\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r, "|" marking] \arrow[d] \arrow[r, phantom, shift right=5ex, "\Downarrow\beta_1"] & \bullet \arrow[r, "|" marking] \arrow[d] & \cdots \arrow[r, "|" marking] & \bullet \arrow[r, "|" marking] \arrow[d] \arrow[r, phantom, shift right=5ex, "\Downarrow\beta_i"] & \bullet \arrow[r, dashed] \arrow[d] \arrow[r, phantom, shift right=5ex, "\Downarrow Uf"] & \bullet \arrow[r, "|" marking] \arrow[d] \arrow[r, phantom, shift right=5ex, "\Downarrow\beta_{i+1}"] & \bullet \arrow[r, "|" marking] \arrow[d] & \cdots \arrow[r, "|" marking] & \bullet \arrow[r, "|" marking] \arrow[d] \arrow[r, phantom, shift right=5ex, "\Downarrow\beta_n"] & \bullet \arrow[d] \\
\bullet \arrow[r, "|" marking] \arrow[d] & \bullet \arrow[r, "|" marking] & \cdots \arrow[r, "|" marking] & \bullet \arrow[r, "|" marking] & \bullet \arrow[r, dashed] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\gamma"] & \bullet \arrow[r, "|" marking] & \bullet \arrow[r, "|" marking] & \cdots \arrow[r, "|" marking] & \bullet \arrow[r, "|" marking] & \bullet \arrow[d] \\
\bullet \arrow[rrrrrrrrr, "|" marking] & & & & & & & & & \bullet
\end{tikzcd}
$$

$$
=
\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r, "|" marking] \arrow[d] \arrow[r, phantom, shift right=5ex, "\Downarrow\beta_1"] & \bullet \arrow[r, "|" marking] \arrow[d] & \cdots \arrow[r, "|" marking] & \bullet \arrow[r, "|" marking] \arrow[d] \arrow[r, phantom, shift right=5ex, "\Downarrow\beta_n"] & \bullet \arrow[d] \\
\bullet \arrow[r, "|" marking] \arrow[d] & \bullet \arrow[r, "|" marking] & \cdots \arrow[r, "|" marking] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\gamma"] & \bullet \arrow[r, "|" marking] & \bullet \arrow[d] \\
\bullet \arrow[rrrr, "|" marking] & & & & \bullet
\end{tikzcd}
$$

【定義】

(14) 垂直射 $a \xrightarrow{f} b \xrightarrow{g} c$ に対して

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, dashed, no head] \arrow[d, "f"'] & a \arrow[d, "f"] \\ b \arrow[r, dashed, no head] \arrow[d, "g"'] \arrow[ur, phantom, "\Downarrow Uf"] & b \arrow[d, "g"] \\ c \arrow[r, dashed, no head] \arrow[ur, phantom, "\Downarrow Ug"] & c \end{tikzcd} = \begin{tikzcd} a \arrow[rr, dashed, no head] \arrow[d, "f"'] & & a \arrow[d, "f"] \\ b \arrow[d, "g"'] \arrow[rr, phantom, "\Downarrow U(g \circ f)"] & & b \arrow[d, "g"] \\ c \arrow[rr, dashed, no head] & & c \end{tikzcd}$$

が成り立つ．

augmented virtual double category $\mathbb{D}$ の場合は

- 対象，垂直射はそのまま
- 水平射は無し
- cell は $\begin{tikzcd} a \arrow[r, dashed, no head] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow Uf"] & a \arrow[d, "f"] \\ b \arrow[r, dashed, no head] & b \end{tikzcd}$ のみ

により vertical 2-category $\mathcal{V}(\mathbb{D})$ が定義できる．
（空列が Ua の役割をしている）

【例】

augmented virtual double category $\mathbb{P}\mathrm{ROF}$ を以下により定める.

- 対象は圏とする.(大きい圏も含む)
- 垂直射は関手とする.
- 水平射 $\Phi\colon C \nrightarrow D$ は関手 $\Phi\colon D^{\mathrm{op}} \times C \to \mathbf{Set}$ とする.

【例】

- cell $\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\vec{\Phi}", "|" marking] \arrow[d, "G"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\beta"] & C \arrow[d, "F"] \\ B \arrow[r, "\vec{\Psi}"', "|" marking] & D \end{tikzcd}$ は自然な写像

  $\beta_{a_0 \cdots a_n} \colon \Phi_1(a_1, a_0) \times \cdots \times \Phi_n(a_n, a_{n-1}) \to \vec{\Psi}(Fa_n, Ga_0)$.
  但し
  - $\vec{\Psi} = \Psi$ のときは $\vec{\Psi}(Fa_n, Ga_0) = \Psi(Fa_n Ga_0)$
  - $\vec{\Psi} =$ 空 のときは $\vec{\Psi}(Fa_n, Ga_0) = \mathrm{Hom}_B(Fa_n Ga_0)$

$\mathcal{V}(\mathbb{P}\mathrm{ROF}) = \mathbf{CAT}_2$ である. □

augmented virtual double category でも double category と同様の定義（や証明）ができるのでそれを見ていく.

【定義】

$f\colon a \to b$ の conjoint とは，次を満たす 3 つ組 $\langle f^\star, \eta_f, \varepsilon_f \rangle$．

$$
\begin{tikzcd}
b \arrow[r, "f^\star", "\shortmid"{marking}] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\varepsilon_f"] & a \arrow[r, dashed, no head] \arrow[d, "f"] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\eta_f"] & a \arrow[d, equal] \\
b \arrow[r, dashed, no head] & b \arrow[r, "f^\star"', "\shortmid"{marking}] & a
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
b \arrow[r, "f^\star", "\shortmid"{marking}] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\mathrm{id}"] & a \arrow[d, equal] \\
b \arrow[r, "f^\star"', "\shortmid"{marking}] & a
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
a \arrow[r, dashed, no head] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\eta_f"] & a \arrow[d, equal] \\
b \arrow[r, "f^\star"', "\shortmid"{marking}] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\varepsilon_f"] & a \arrow[d, "f"] \\
b \arrow[r, dashed, no head] & b
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
a \arrow[r, dashed, no head] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow Uf"] & a \arrow[d, "f"] \\
b \arrow[r, dashed, no head] & b
\end{tikzcd}
$$

augmented virtual double category

【定義】

次の左辺内のような cell β が cartesian $\iff |\vec{J}| \leq 1$ で，かつ右辺の θ に対して左辺の θ' が一意に存在して次の等式が成立．

$$
\begin{tikzcd}
s \arrow[r, "\vec{M}", "|"{marking}] \arrow[d, "h"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\theta'"] & t \arrow[d, "k"] & & s \arrow[r, "\vec{M}", "|"{marking}] \arrow[d, "h"'] & t \arrow[d, "k"] \\
a \arrow[r, "\vec{J}"', "|"{marking}] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\beta"] & c \arrow[d, "g"] & = & a \arrow[r, phantom, "\Downarrow\theta"] \arrow[d, "f"'] & c \arrow[d, "g"] \\
b \arrow[r, "\vec{K}"', "|"{marking}] & d & & b \arrow[r, "\vec{K}"', "|"{marking}] & d
\end{tikzcd}
$$

augmented virtual double category

【命題】

$f\colon a \to b$ の conjoint が存在するとき，ε_f は cartesian である．
（同様に考えれば companion の ${}_f\varepsilon$ も cartesian である．） $\square$

【命題】

$$\text{cell}\ \begin{tikzcd} b \arrow[r, "J", "\shortmid"{marking}] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\beta"] & a \arrow[d, "f"] \\ b \arrow[r, dashed, no head] & b \end{tikzcd}\ \text{が cartesian} \Longrightarrow \text{ある}\ \begin{tikzcd} a \arrow[r, dashed, no head] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\gamma"] & a \arrow[d, equal] \\ b \arrow[r, "J"', "\shortmid"{marking}] & a \end{tikzcd}\ \text{が存在して}$$

$\langle J, \gamma, \beta \rangle$ が f の conjoint となる． $\square$

augmented virtual double category

但し augmented virtual double category では
pseudo double category のときの「conjoint と companion から cartesian を作る」構成

$$
\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "f_\star", "|"{marking}] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow {}_f\varepsilon"] & b \arrow[r, "J", "|"{marking}] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow \mathrm{id}_J"] & d \arrow[r, "g^\star", "|"{marking}] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow \varepsilon_g"] & c \arrow[d, "g"] \\
b \arrow[r, equal] & b \arrow[r, "J"', "|"{marking}] & d \arrow[r, equal] & d
\end{tikzcd}
$$

はできない．

つまり conjoint と companion が存在するからといって cartesian cell が存在するとは限らない．

opcartesian については少し難しくなる．
（これを cocartesian と呼ぶ）

augmented virtual double category

【定義】

$$\begin{tikzcd} a_0 \arrow[r, "\vec{J}_1", "|"] \arrow[d, "f_0"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\beta_1"] & a_1 \arrow[d, "f_1"] \\ b_0 \arrow[r, "\vec{K}_1"', "|"] & b_1 \end{tikzcd}, \cdots, \begin{tikzcd} a_{n-1} \arrow[r, "\vec{J}_n", "|"] \arrow[d, "f_{n-1}"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\beta_n"] & a_n \arrow[d, "f_n"] \\ b_{n-1} \arrow[r, "\vec{K}_n"', "|"] & b_n \end{tikzcd}$$ が弱 cocartesian パス

$\Longleftrightarrow$ 右辺の θ に対して，次を満たす θ' が一意に存在する．

$$\begin{tikzcd} a_0 \arrow[r, "\vec{J}_1", "|"] \arrow[d, "f_0"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\beta_1"] & a_1 \arrow[r, "\vec{J}_2", "|"] \arrow[d, "f_1"] & \cdots \arrow[r, "\vec{J}_{n-1}", "|"] & a_{n-1} \arrow[r, "\vec{J}_n", "|"] \arrow[d, "f_{n-1}"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\beta_n"] & a_n \arrow[d, "f_n"] \\ b_0 \arrow[r, "\vec{K}_1"', "|"] \arrow[d, "g"'] & b_1 \arrow[r, "\vec{K}_2"', "|"] & \cdots \arrow[r, "\vec{K}_{n-1}"', "|"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\theta'"] & b_{n-1} \arrow[r, "\vec{K}_n"', "|"] & b_n \arrow[d, "h"] \\ c \arrow[rrrr, "\vec{H}"', "|"] & & & & d \end{tikzcd} = \begin{tikzcd} a_0 \arrow[r, "\vec{J}_1 \frown \cdots \frown \vec{J}_n", "|"] \arrow[d, "f_0"'] & a_n \arrow[d, "f_n"] \\ b_0 \arrow[d, "g"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\theta"] & b_n \arrow[d, "h"] \\ c \arrow[r, "\vec{H}"', "|"] & d \end{tikzcd}$$

【定義】

$\vec{J}$ に沿った $g\colon b \to c$ の左 Kan 拡張 $\langle l, \eta \rangle$ とは

(1) $l\colon a \to c$ は垂直射で η は cell
$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "\vec{J}", "\shortmid" marking] \arrow[d, "l"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\eta"] & b \arrow[d, "g"] \\ c \arrow[r, dashed, no head] & c \end{tikzcd}$$
である．

(2) 次の右辺の cell θ に対して，左辺の cell τ が一意に存在して，次の等式が成り立つ．

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, dashed, no head] \arrow[d, "k"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\tau"] & a \arrow[r, "\vec{J}", "\shortmid" marking] \arrow[d, "l"] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\eta"] & b \arrow[d, "g"] \\ c \arrow[r, dashed, no head] & c \arrow[r, dashed, no head] & c \end{tikzcd} = \begin{tikzcd} a \arrow[r, "\vec{J}", "\shortmid" marking] \arrow[d, "k"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\theta"] & b \arrow[d, "g"] \\ c \arrow[r, dashed, no head] & c \end{tikzcd}$$

【命題】

$\langle \beta_1, \cdots, \beta_n \rangle$ が弱 cocartesian パスのとき

η が左 Kan 拡張である $\Longleftrightarrow$ 全体が左 Kan 拡張である.

$$
\begin{tikzcd}
a_0 \arrow[r, "\vec{J}_1"] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\beta_1"] & a_1 \arrow[r, "\vec{J}_2"] \arrow[d, "f_1"] & \cdots \arrow[r, "\vec{J}_{n-1}"] & a_{n-1} \arrow[r, "\vec{J}_n"] \arrow[d, "f_{n-1}"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\beta_n"] & a_n \arrow[d, "f_n"] \\
a_0 \arrow[r, "\vec{K}_1"'] \arrow[d, "l"'] & b_1 \arrow[r, "\vec{K}_2"'] & \cdots \arrow[r, "\vec{K}_{n-1}"'] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\eta"] & b_{n-1} \arrow[r, "\vec{K}_n"'] & b_n \arrow[d, "g"] \\
c \arrow[rrrr, dashed, no head] & & & & c
\end{tikzcd}
$$

□

これが弱 cocartesian という名前なのは，double category における次の命題が弱 cocartesian では成り立たないからである．

【演習問題】

β が cartesian で γ が opcartesian なら $\beta \odot \gamma$ も opcartesian．

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "J", "\shortmid"{marking}] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\beta"] & u \arrow[r, "M", "\shortmid"{marking}] \arrow[d, "f"] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\gamma"] & x \arrow[d, "f"] \\ b \arrow[r, "K"', "\shortmid"{marking}] & v \arrow[r, "N"', "\shortmid"{marking}] & x \end{tikzcd}$$

【定義】

$\langle \beta_1, \cdots, \beta_n \rangle$ が cocartesian パスとは
次のような γ, σ が cartesian なら

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r, "H_1"] \arrow[d, equal] & \cdots \arrow[r, "H_{m-1}"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\mathrm{id}"] & \bullet \arrow[r] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\gamma"] & \bullet \arrow[r, "\vec{J}_1"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\beta_1"] & \bullet \arrow[r, "\vec{J}_2"] \arrow[d] & \cdots \arrow[r, "\vec{J}_{n-1}"] \arrow[d, phantom, "\cdots"] & \bullet \arrow[r, "\vec{J}_n"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\beta_n"] & \bullet \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\sigma"] & \bullet \arrow[r, "H'_2"] \arrow[d, equal] & \cdots \arrow[r, "H'_l"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\mathrm{id}"] & \bullet \arrow[d, equal] \\
\bullet \arrow[r, "H_1"'] & \cdots \arrow[r, "H_{m-1}"'] & \bullet \arrow[r, "H_m"'] & \bullet \arrow[r, "\vec{K}_1"'] & \bullet \arrow[r, "\vec{K}_2"'] & \cdots \arrow[r, "\vec{K}_{n-1}"'] & \bullet \arrow[r, "\vec{K}_n"'] & \bullet \arrow[r, "H'_1"'] & \bullet \arrow[r, "H'_2"'] & \cdots \arrow[r, "H'_l"'] & \bullet
\end{tikzcd}$$

が弱 cocartesian パスになる．

【命題】

$f\colon a \to b$ の conjoint が存在するとき η_f は cocartesian． $\square$

【命題】

cell $\begin{tikzcd} a \arrow[r, dashed] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\gamma"] & a \arrow[d, equal] \\ b \arrow[r, "J"', "|" marking] & a \end{tikzcd}$ が弱 cocartesian $\Longrightarrow$ ある $\begin{tikzcd} b \arrow[r, "J", "|" marking] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\beta"] & a \arrow[d, "f"] \\ b \arrow[r, dashed] & b \end{tikzcd}$ が存在して $\langle J, \gamma, \beta \rangle$ が f の conjoint となる． $\square$

まとめ

- 2 種類の射（垂直射と水平射）を用意することで ((augmented) virtual) double category というものを考えることができる．
- 通常の圏論と同様，普遍性（cartesian，Kan 拡張など）を使って色々な議論をする．
- ((augmented) virtual) double category はモノイダル圏，multicategory，2-category など様々なものの一般化になっている．

おまけ（本編）

おまけ

「圏全体」を抽象化したものを考えたい
$\to$ 圏の圏 **CAT** では不十分（自然変換の情報がない）
$\to$ 圏・関手・自然変換がなす strict 2-category を考えるとよい？
$\to$ ある程度は上手くいく

- 一般の strict 2-category で随伴が定義できる
- 一般の strict 2-category で Kan 拡張が定義できる
- 「左随伴が左 Kan 拡張と交換できる」ことが示せる

しかし「ある程度」であり，strict 2-category は十分ではない．
$\to$ augmented virtual double category が使える．
※他には米田構造，proarrow equipment，pseudo double category が使える．第 4 回関東すうがく徒のつどいを参照
`https://www.youtube.com/watch?v=kEGdYXyW2u4`

おまけ

今回は augmented virtual double category で「普遍随伴」が証明できることを紹介する.

【定理】

$F\colon C \to U$ を関手とする.

各点左 Kan 拡張 $y^\dagger F$ が存在するならば $y^\dagger F \dashv F^\dagger y$ である.

$$\begin{tikzcd}
\widehat{C} \arrow[dr, shift left, "y^\dagger F"] \arrow[dr, phantom, "\perp"] & \\
C \arrow[u, "y"] \arrow[r, "F"'] & U \arrow[ul, shift left, "F^\dagger y"]
\end{tikzcd}$$

□

おまけ

まず V-豊穣圏の augmented virtual double category を定義する.

【定義】

まず V' を次のように取る.

- $V \subset V'$ は充満部分圏，包含 $V \to V'$ は対称 strong モノイダル関手．更にこれは（小とは限らない）任意の極限と交換する.
- V における（小とは限らない）任意の極限が V' の中に存在する.

https://www.youtube.com/watch?v=04xoU6stwX8

【定義】

augmented virtual double category (V, V')-$\mathbb{P}$ROF を次のように定義する．

- (V, V')-$\mathbb{P}$ROF の対象は V'-豊穣圏とする．
- (V, V')-$\mathbb{P}$ROF の垂直射は V'-関手とする．
- (V, V')-$\mathbb{P}$ROF の水平射は V'-関手 $\Phi\colon \mathcal{D}^{\mathrm{op}} \otimes \mathcal{C} \to \mathcal{V}$．
- cell $\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, "\vec{\Phi}", "|"] \arrow[d, "G"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\beta"] & \mathcal{D} \arrow[d, "F"] \\ \mathcal{C}' \arrow[r, "\vec{\Psi}"', "|"] & \mathcal{D}' \end{tikzcd}$ とは自然な射

  $\Phi_1(a_1, a_0) \otimes \cdots \otimes \Phi_n(a_n, a_{n-1}) \to \Psi(Fa_n, Ga_0)$ とする． □

おまけ

【定義】

$(n \geq 1)$ 左 Kan 拡張 η が r-各点左 Kan 拡張
$\Longleftrightarrow k \colon u \to a_0$ として β が cartesian のとき

$$
\begin{tikzcd}
u \arrow[r, "|" marking] \arrow[d, "k"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\beta"] & a_1 \arrow[r, "|" marking, "J_2"] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\mathrm{id}"] & a_2 \arrow[r, "|" marking, "J_3"] \arrow[d, equal] & \cdots \arrow[r, "|" marking, "J_{n-1}"] \arrow[d, phantom, "\cdots"] & a_{n-1} \arrow[r, "|" marking, "J_n"] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\mathrm{id}"] & a_n \arrow[d, equal] \\
a_0 \arrow[r, "|" marking, "J_1"'] \arrow[d, "l"'] & a_1 \arrow[r, "|" marking, "J_2"'] & a_2 \arrow[r, "|" marking, "J_3"'] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\eta"] & \cdots \arrow[r, "|" marking, "J_{n-1}"'] & a_{n-1} \arrow[r, "|" marking, "J_n"'] & a_n \arrow[d, "g"] \\
b \arrow[rrrrr, dashed] & & & & & b
\end{tikzcd}
$$

が左 Kan 拡張になる．

おまけ

【定義】

垂直射 $f\colon a \to b$ が忠実充満 $\iff$
$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, dashed, no head] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow Uf"] & a \arrow[d, "f"] \\ b \arrow[r, dashed, no head] & b \end{tikzcd}$$
が cartesian．

【定義】

垂直射 $f\colon a \to b$ が稠密

$$\iff \begin{tikzcd} u \arrow[r, "J", "\shortmid"{marking}] \arrow[d, "l"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\eta"] & a \arrow[d, "f"] \\ b \arrow[r, dashed, no head] & b \end{tikzcd}$$
が cartesian ならば左 Kan 拡張である．

（$\iff \eta$ が cartesian ならば r-各点左 Kan 拡張である．）

おまけ

【定義】

垂直射 $f\colon a \to b$ が米田射

$\iff$ 任意の水平射 $J\colon u \nrightarrow a$ に対して

垂直射 $l\colon u \to b$ と cartesian cell $\begin{tikzcd} u \arrow[r, "J", "\shortmid"{marking}] \arrow[d, "l"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\sigma_f^J"] & a \arrow[d, "f"] \\ b \arrow[r, dashed, no head] & b \end{tikzcd}$ が存在する．

【定義】

忠実充満かつ稠密な米田射を米田埋込という．

【例】

豊穣圏論の米田埋込 $y\colon \mathcal{C} \to \widehat{\mathcal{C}}$ は (V, V')-$\mathbb{P}$ROF における米田埋込である．

おまけ

$y\colon a \to \widehat{a}$ を $\mathbb{D}$ の米田埋込とする．

米田射の定義より $l\colon u \to \widehat{a}$ と cartesian cell
$$\begin{tikzcd} u \arrow[r, "J", "\shortmid"{marking}] \arrow[d, "l"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\sigma^J_y"] & a \arrow[d, "y"] \\ \widehat{a} \arrow[r, dashed, "\shortmid"{marking}] & \widehat{a} \end{tikzcd}$$
が存在する．稠密の定義（cartesian なら左 Kan 拡張）より
σ^J_y は左 Kan 拡張である．
（更に r-各点左 Kan 拡張であることが分かる）．
即ち $l \cong J^\dagger y$ となる．

おまけ

【定理】

$F\colon C \to U$ を関手とする．
各点左 Kan 拡張 $y^\dagger F$ が存在するならば $y^\dagger F \dashv F^\dagger y$ である． $\square$

【定理】

$y\colon a \to \widehat{a}$ を稠密な米田射として conjoint $y^\star$ が存在するとする．
r-各点左 Kan 拡張 $y^{\star\dagger} f$ が存在するなら $y^{\star\dagger} f \dashv f^{\star\dagger} y$ である．

証明.

$y^{\star\dagger}y = \langle \mathrm{id}, \varepsilon_y \rangle$ が左 Kan 拡張なので次の κ が取れる．

$$
\begin{tikzcd}
\widehat{a} \arrow[r, "y^\star", "\shortmid"{marking}] \arrow[d, "y^{\star\dagger}f"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\eta"] & a \arrow[r, dashed, no head] \arrow[d, "f"] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\eta_f"] & a \arrow[d, equal] \\
b \arrow[r, dashed, no head] \arrow[d, "f^{\star\dagger}y"'] & b \arrow[r, "f^\star"', "\shortmid"{marking}] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\sigma_y^{f^\star}"] & a \arrow[d, "y"] \\
\widehat{a} \arrow[rr, dashed, no head] & {} & \widehat{a}
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
\widehat{a} \arrow[r, dashed, no head] \arrow[d, "y^{\star\dagger}f"'] & \widehat{a} \arrow[r, "y^\star", "\shortmid"{marking}] \arrow[dd, equal] & a \arrow[dd, "y"] \\
b \arrow[d, "f^{\star\dagger}y"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\kappa"] & {} \arrow[r, phantom, "\Downarrow\varepsilon_y"] & {} \\
\widehat{a} \arrow[r, dashed, no head] & \widehat{a} \arrow[r, dashed, no head] & \widehat{a}
\end{tikzcd}
$$

証明.

次に cartesian cell η_y を使って

$$
\begin{tikzcd}
b \arrow[r, "f^\star", "\shortmid"{marking}] \arrow[d, "f^{\star\dagger}y"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\beta"] & a \arrow[d, equal] \\
\widehat{a} \arrow[r, "y^\star"', "\shortmid"{marking}] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\eta_y"] & a \arrow[d, "y"] \\
\widehat{a} \arrow[r, dashed] & \widehat{a}
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
b \arrow[r, "f^\star", "\shortmid"{marking}] \arrow[dd, "f^{\star\dagger}y"'] \arrow[ddr, phantom, "\Downarrow\sigma_y^{f^\star}"] & a \arrow[dd, "y"] \\
 & \\
\widehat{a} \arrow[r, dashed] & \widehat{a}
\end{tikzcd}
$$

により β を得る．この β も cartesian である．

おまけ

証明.

更に $\langle y^{\star\dagger}f, \eta\rangle$ が r-各点左 Kan 拡張なので，次の ε が取れる．

$$
\begin{tikzcd}
b \arrow[r, dashed, no head] \arrow[dd, equal] & b \arrow[r, "f^\star", "\shortmid" marking] \arrow[d, "f^{\star\dagger}y"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\beta"] & a \arrow[d, equal] & & b \arrow[r, "f^\star", "\shortmid" marking] \arrow[dd, equal] & a \arrow[dd, "f"] \\
{} \arrow[r, phantom, "\Downarrow\varepsilon"] & \widehat{a} \arrow[r, "y^\star"', "\shortmid" marking] \arrow[d, "y^{\star\dagger}f"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\eta"] & a \arrow[d, "f"] & = & {} \arrow[r, phantom, "\Downarrow\varepsilon_f"] & {} \\
b \arrow[r, dashed, no head] & b \arrow[r, dashed, no head] & b & & b \arrow[r, dashed, no head] & b
\end{tikzcd}
$$

この κ と ε が $y^{\star\dagger}f \dashv f^{\star\dagger}y$ を与えることを示せばよい．

証明.

$$
\begin{tikzcd}
b \arrow[r, dash, dashed] \arrow[ddd, equal] & b \arrow[r, dash, dashed] \arrow[d, "f^{\star\dagger}y"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow"] & b \arrow[r, "f^{\star}", "\shortmid"{marking}] \arrow[d, "f^{\star\dagger}y"] & a \arrow[dddd, "y"] \\
\arrow[r, phantom, "\Downarrow\varepsilon"] & \widehat{a} \arrow[r, dash, dashed] \arrow[dd, "y^{\star\dagger}f"'] & \widehat{a} \arrow[ddd, equal] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\sigma_y^{f^{\star}}"] & {} \\
& & & \\
b \arrow[r, dash, dashed] \arrow[d, "f^{\star\dagger}y"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow"] & b \arrow[d, "f^{\star\dagger}y"] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\kappa"] & {} & \\
\widehat{a} \arrow[r, dash, dashed] & \widehat{a} \arrow[r, dash, dashed] & \widehat{a} \arrow[r, dash, dashed] & \widehat{a}
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
b \arrow[r, dash, dashed] \arrow[ddd, equal] & b \arrow[r, dash, dashed] \arrow[d, "f^{\star\dagger}y"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow"] & b \arrow[r, "f^{\star}", "\shortmid"{marking}] \arrow[d, "f^{\star\dagger}y", "\shortmid"{marking}] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\beta"] & a \arrow[d, equal] \\
\arrow[r, phantom, "\Downarrow\varepsilon"] & \widehat{a} \arrow[r, dash, dashed] \arrow[dd, "y^{\star\dagger}f"'] & \widehat{a} \arrow[r, "\shortmid"{marking}, "y^{\star}"'] \arrow[ddd, equal] \arrow[ddr, phantom, "\Downarrow\varepsilon_y"] & a \arrow[ddd, "y"] \\
& & & \\
b \arrow[r, dash, dashed] \arrow[d, "f^{\star\dagger}y"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow"] & b \arrow[d, "f^{\star\dagger}y"] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\kappa"] & {} & \\
\widehat{a} \arrow[r, dash, dashed] & \widehat{a} \arrow[r, dash, dashed] & \widehat{a} \arrow[r, dash, dashed] & \widehat{a}
\end{tikzcd}
$$

証明.

$$
=\quad
\begin{tikzcd}
b \arrow[r, dashed, no head] \arrow[dd, equal] & b \arrow[r, "f^\star", "\shortmid" marking] \arrow[d, "f^{\star\dagger}y"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\beta"] & a \arrow[r, dashed, no head] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow"] & a \arrow[d, equal] \\
{} \arrow[r, phantom, "\Downarrow\varepsilon"] & \widehat{a} \arrow[r, "y^\star"', "\shortmid" marking] \arrow[d, "y^{\star\dagger}f"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\eta"] & a \arrow[r, dashed, no head] \arrow[d, "f"] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\eta_f"] & a \arrow[d, equal] \\
b \arrow[r, dashed, no head] \arrow[d, "f^{\star\dagger}y"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow"] & b \arrow[r, dashed, no head] \arrow[d, "f^{\star\dagger}y"] \arrow[drr, phantom, "\Downarrow\sigma_y^{f^\star}"] & b \arrow[r, "f^\star"', "\shortmid" marking] & a \arrow[d, "y"] \\
\widehat{a} \arrow[r, dashed, no head] & \widehat{a} \arrow[rr, dashed, no head] & & \widehat{a}
\end{tikzcd}
\quad=\quad
\begin{tikzcd}
b \arrow[r, dashed, no head] \arrow[dd, equal] & b \arrow[r, "f^\star", "\shortmid" marking] & a \arrow[r, dashed, no head] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow"] & a \arrow[d, equal] \\
{} & \Downarrow\varepsilon_f & a \arrow[r, dashed, no head] \arrow[d, "f"] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\eta_f"] & a \arrow[d, equal] \\
b \arrow[r, dashed, no head] \arrow[d, "f^{\star\dagger}y"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow"] & b \arrow[r, dashed, no head] \arrow[d, "f^{\star\dagger}y"] \arrow[drr, phantom, "\Downarrow\sigma_y^{f^\star}"] & b \arrow[r, "f^\star"', "\shortmid" marking] & a \arrow[d, "y"] \\
\widehat{a} \arrow[r, dashed, no head] & \widehat{a} \arrow[rr, dashed, no head] & & \widehat{a}
\end{tikzcd}
$$

$$
= \quad \sigma_y^{f^\star}
$$

証明.

左 Kan 拡張 $\sigma_y^{f^\star}$ の普遍性により

$$
\begin{tikzcd}
b \arrow[r, dash, dashed] \arrow[dd, equal] & b \arrow[r, dash, dashed] \arrow[d, "f^{\star\dagger}y"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow"] & b \arrow[d, "f^{\star\dagger}y"] \\
{} \arrow[r, phantom, "\Downarrow\varepsilon"] & \widehat{a} \arrow[r, dash, dashed] \arrow[d, "y^{\star\dagger}f"'] & \widehat{a} \arrow[dd, equal] \\
b \arrow[r, dash, dashed] \arrow[d, "f^{\star\dagger}y"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow"] & b \arrow[r, phantom, "\Downarrow\kappa"] \arrow[d, "f^{\star\dagger}y"] & {} \\
\widehat{a} \arrow[r, dash, dashed] & \widehat{a} \arrow[r, dash, dashed] & \widehat{a}
\end{tikzcd}
\quad = \quad \mathrm{id}
$$

となる.

証明.

同様にして

$$
\begin{tikzcd}
\widehat{a} \arrow[r, dashed] \arrow[d, "y^{\star\dagger}f"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow"] & \widehat{a} \arrow[r, dashed] \arrow[d, "y^{\star\dagger}f"] \arrow[ddr, phantom, "\Downarrow\kappa"] & \widehat{a} \arrow[dd, equal] \\
b \arrow[r, dashed] \arrow[dd, equal] \arrow[ddr, phantom, "\Downarrow\varepsilon"] & b \arrow[d, "f^{\star\dagger}y"'] & \\
 & \widehat{a} \arrow[r, dashed] \arrow[d, "y^{\star\dagger}f"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow"] & \widehat{a} \arrow[d, "y^{\star\dagger}f"] \\
b \arrow[r, dashed] & b \arrow[r, dashed] & b
\end{tikzcd}
\quad = \quad \mathrm{id}
$$

も分かり $y^{\star\dagger}f \dashv f^{\star\dagger}y$ である. □

おまけ

【定理】

$y\colon a \to \widehat{a}$ を稠密な米田射，$f\colon a \to b$ を垂直射として conjoint $f^\star$ が存在するとする．垂直随伴 $l \dashv f^{\star\dagger}y$ が存在するならば，任意の $J\colon u \nrightarrow a$ に沿った f の r-各点左 Kan 拡張が存在する．
（従って $y^\star$ が存在すれば前定理より $y^{\star\dagger}f \cong l$ である．） $\square$

圏の米田埋込を公理化する事で，strict 2-category $\mathcal{C}$ における「米田埋込」を定義することができる（米田構造）.

【定義】

$f\colon a \to b$ が（$\mathcal{C}$ の米田構造において）total
$\iff f^{\dagger}y\colon b \to \widehat{a}$ が左随伴を持つ.

【定義】

a が（$\mathcal{C}$ の米田構造において）total
$\iff \mathrm{id}_a$ が total である
（$\iff y\colon a \to \widehat{a}$ が左随伴を持つ.）

【命題】

a が small ならば $\widehat{a}$ は total である．

証明.

$y_{\widehat{a}} \colon \widehat{a} \to \widehat{\widehat{a}}$ は左随伴 $y_a^{-1} \colon \widehat{\widehat{a}} \to \widehat{a}$ を持つ． $\square$

【例】

V-豊穣圏の米田埋込は米田構造を定める．

V-豊穣圏 $\mathcal{C}$ が small $\iff$ $\mathcal{C}$ が小 V-豊穣圏

よって小 V-豊穣圏 $\mathcal{C}$ に対して $y \colon \widehat{\mathcal{C}} \to \widehat{\widehat{\mathcal{C}}}$ は左随伴を持つ． $\square$

おまけ

【定義】

垂直射 $f\colon a \to b$ が（$\mathbb{D}$ において）total
$\iff$ 任意の $J\colon u \nrightarrow a$ に沿った f の r-各点左 Kan 拡張が存在する．

【命題】

$\mathbb{D}$ を augmented virtual equipment として，$y\colon a \to \widehat{a}$ を各点稠密な米田射とする．y が conjoint を持つならば $\widehat{a}$ は total． $\square$

【例】

(V, V')-$\mathbb{P}$ROF を考える．V-豊穣圏 $\mathcal{C}$ に対して米田埋込
$y\colon \mathcal{C} \to \widehat{\mathcal{C}}$ は命題の条件を満たす．よって $\widehat{\mathcal{C}}$ は total である．即ち $y\colon \widehat{\mathcal{C}} \to \widehat{\widehat{\mathcal{C}}}$ は左随伴を持つ． $\square$