

モナド

alg-d

<http://alg-d.com/math/category/>

2016年5月20日

このPDFでは \mathcal{C} を strict 2-category とする .

定義. lax 2-functor $\mathbf{1} \rightarrow \mathcal{C}$ をモナドという . また \mathcal{C}^{co} でのモナド , 即ち oplax 2-functor $\mathbf{1} \rightarrow \mathcal{C}$ をコモナドという .

$F: \mathbf{1} \rightarrow \mathcal{C}$ をモナドとする . F は \mathcal{C} の 2-morphism $\psi: \text{id}_{F*} \Rightarrow F(\text{id}_*)$ と , 次の自然変換 φ を与えられているのであった .

$$\begin{array}{ccc}
 & \mathbf{1}(*, *) \times \mathbf{1}(*, *) & \\
 F \times F \swarrow & & \searrow C \\
 \mathcal{C}(F*, F*) \times \mathcal{C}(F*, F*) & \xRightarrow{\varphi} & \mathbf{1}(*, *) \\
 C \searrow & & \swarrow F \\
 & \mathcal{C}(F*, F*) &
 \end{array}$$

故にモナド $F: \mathbf{1} \rightarrow \mathcal{C}$ は対象 $a := F*$, 1-morphism $t := F(\text{id}_*): a \rightarrow a$, 2-morphism $\mu := \varphi_{\text{id}_*, \text{id}_*}: t \circ t \Rightarrow t$, $\eta: \text{id}_a \Rightarrow t$ の4つを与えると確定する .

$$\begin{array}{ccc}
 & a & \\
 t \nearrow & & \searrow t \\
 a & \xrightarrow{t} & a \\
 & \Downarrow \mu &
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 & \text{id}_a & \\
 a & \xrightarrow{\quad} & a \\
 & \Downarrow \eta & \\
 a & \xrightarrow{t} & a
 \end{array}$$

lax 2-functor の定義から，次の等号が成り立つ．

逆に， a, t, μ, η が上記の条件を満たすとすれば，lax 2-functor $F: \mathbf{1} \rightarrow \mathcal{C}$ を定義することができる．

こうして lax 2-functor $F: \mathbf{1} \rightarrow \mathcal{C}$ と四つ組 $\langle a, t, \mu, \eta \rangle$ を同一視することができる．そこで，この条件を満たす $\langle a, t, \mu, \eta \rangle$ のこともモナドと呼ぶ．単に t のことをモナドということもある．

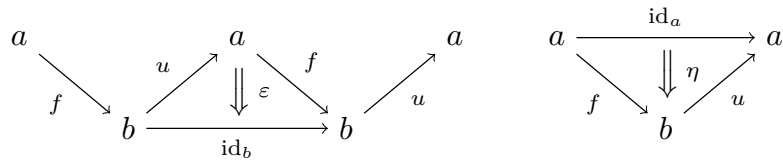
図式から容易に分かるように， \mathcal{C}^{op} でのモナドは \mathcal{C} でのモナドでもある．

例． $a \in \mathcal{C}$ とするとき， $\langle a, \text{id}_a, \text{id}_{\text{id}_a}, \text{id}_{\text{id}_a} \rangle$ はモナドである． □

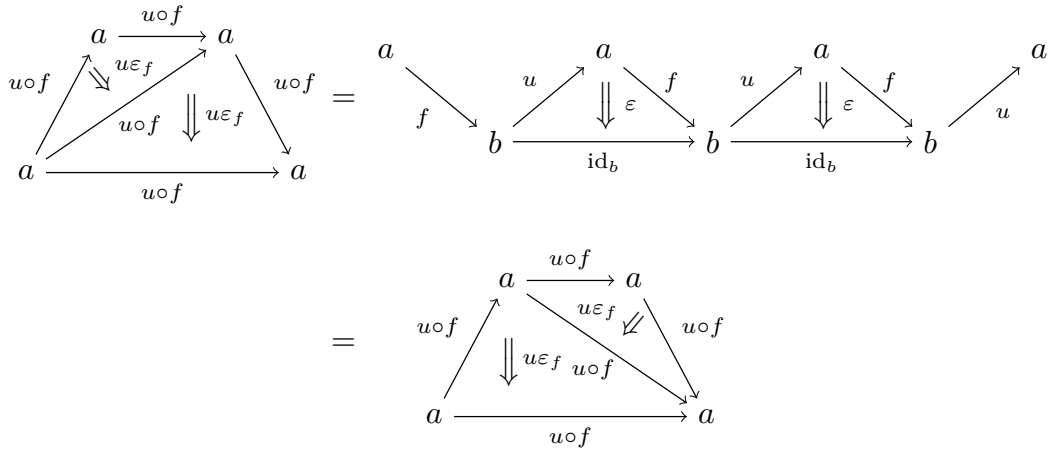
例． $f: a \rightarrow b$ として，左 Kan 拡張 $\langle f^\dagger f, \eta \rangle$ が存在するとする．このとき $f^\dagger f$ はコモナドになる．その為には，左 Kan 拡張の普遍性により次の μ と ε を取る．

このとき $\langle b, f^\dagger f, \mu, \varepsilon \rangle$ がコモナドとなることが分かる．この形のコモナドを density コモナドという．同様にして右 Kan 拡張 $f^\dagger f$ はモナドとなり，これを codensity モナドという． \square

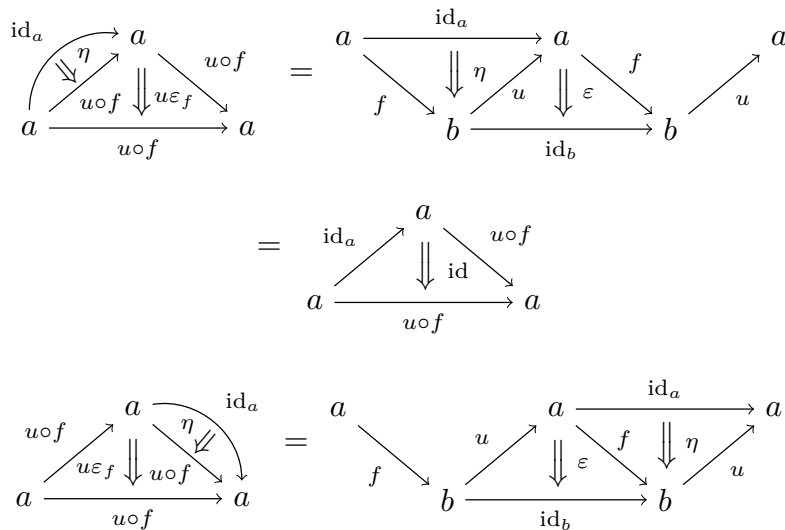
命題 1. $f \dashv u: a \rightarrow b$ を随伴とし，unit を η ，counit を ε とすれば， $\langle a, u \circ f, u\varepsilon_f, \eta \rangle$ はモナドである．



証明. まず結合律については



となり成り立つ．単位元についても



$$= \begin{array}{ccc} & a & \\ u \circ f \nearrow & \Downarrow \text{id} & \searrow \text{id}_a \\ a & \xrightarrow{u \circ f} & a \end{array}$$

となり成り立つ。 □

定義. $F, F': \mathbf{1} \rightarrow \mathcal{C}$ をモナドとする. F から F' へのモナド関手とは, pseudonatural transformation $F \Rightarrow F'$ のことである.

モナド F を組 $\langle a, t, \mu, \eta \rangle$, モナド F' を組 $\langle a', t', \mu', \eta' \rangle$ と同一視したとき, $\langle a, t, \mu, \eta \rangle$ から $\langle a', t', \mu', \eta' \rangle$ へのモナド関手とは, 組 $\langle f, \varphi \rangle$ であって以下を満たすものであると言
い換えることができる.

(1) $f: a \rightarrow a'$ は 1-morphism で $\varphi: t' \circ f \Rightarrow f \circ t$ は 2-morphism である.

$$\begin{array}{ccc} a & \xrightarrow{f} & a' \\ t \downarrow & \swarrow \varphi & \downarrow t' \\ a & \xrightarrow{f} & a' \end{array}$$

(2) $\varphi \circ \eta'_f = f \eta$ である.

$$\begin{array}{ccc} a & \xrightarrow{f} & a' \\ t \downarrow & \swarrow \varphi & \downarrow t' \\ a & \xrightarrow{f} & a' \end{array} \eta'_f \text{id}_{a'} = \begin{array}{ccc} a & \xrightarrow{f} & a' \\ t \downarrow & \swarrow \eta & \downarrow \text{id}_a \\ a & \xrightarrow{f} & a' \end{array} \text{id}_{a'} = \begin{array}{ccc} a & \xrightarrow{f} & a' \\ t \downarrow & & \downarrow \\ a & \xrightarrow{f} & a' \end{array} \text{id}_{a'}$$

(3) $\mu \circ \varphi_t \circ t' \varphi = \varphi \circ \mu'_f$ である.

$$\begin{array}{ccc} a & \xrightarrow{f} & a' \\ t \downarrow & \swarrow \varphi & \downarrow t' \\ \mu \leftarrow a & \xrightarrow{f} & a' \\ t \downarrow & \swarrow \varphi & \downarrow t' \\ a & \xrightarrow{f} & a' \end{array} = \begin{array}{ccc} a & \xrightarrow{f} & a' \\ t \downarrow & \swarrow \varphi & \downarrow t' \\ \mu' \leftarrow a' & \xrightarrow{f} & a' \\ t \downarrow & \swarrow \varphi & \downarrow t' \\ a & \xrightarrow{f} & a' \end{array}$$

$\langle a, t, \mu, \eta \rangle$ から $\langle a', t', \mu', \eta' \rangle$ へのモナド関手を $\langle f, \varphi \rangle: \langle a, t, \mu, \eta \rangle \longrightarrow \langle a', t', \mu', \eta' \rangle$, もしくは単に $f: t \longrightarrow t'$ で表す .

定義. $F, F': \mathbf{1} \longrightarrow \mathcal{C}$ をモナド , $\sigma, \tau: F \Longrightarrow F'$ をモナド関手とする . σ から τ へのモナド関手変換とは modification $\sigma \Longrightarrow \tau$ のことである .

σ, τ を $\langle f, \varphi \rangle, \langle g, \psi \rangle$ と同一視すれば , $\langle f, \varphi \rangle$ から $\langle g, \psi \rangle$ へのモナド関手変換とは , 2-morphism $\sigma: f \Longrightarrow g$ であって次の等式を満たすものである .

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{ccc}
 a & \xrightarrow{f} & a' \\
 t \downarrow & \varphi \swarrow & \downarrow t' \\
 a & \xrightarrow{f} & a' \\
 & \downarrow \sigma & \\
 a & \xrightarrow{g} & a'
 \end{array} & = &
 \begin{array}{ccc}
 a & \xrightarrow{f} & a' \\
 t \downarrow & \downarrow \sigma & \downarrow t' \\
 a & \xrightarrow{g} & a' \\
 & \psi \swarrow & \\
 a & \xrightarrow{g} & a'
 \end{array}
 \end{array}$$

$\text{Monad}(\mathcal{C}) := \text{Fun}_{\text{lax}}(\mathbf{1}, \mathcal{C})$ とすれば , $\text{Monad}(\mathcal{C})$ は対象をモナド , 1-morphism をモナド関手 , 2-morphism をモナド関手変換とする strict 2-category である .

$a, b \in \mathcal{C}$ を対象 , $f, g: a \longrightarrow b$ を 1-morphism , $\varphi: f \Longrightarrow g$ を 2-morphism とする . $\text{Incc}(a) := \langle a, \text{id}_a, \text{id}_{\text{id}_a}, \text{id}_{\text{id}_a} \rangle$ はモナドであり $\text{Incc}(f) := \langle f, \text{id}_f \rangle: \text{Incc}(a) \longrightarrow \text{Incc}(b)$ はモナド関手 , $\text{Incc}(\varphi) := \varphi: f \Longrightarrow g$ はモナド関手変換である . こうして strict 2-functor $\text{Incc}: \mathcal{C} \longrightarrow \text{Monad}(\mathcal{C})$ が得られる .

逆にモナド $\langle a, t, \mu, \eta \rangle$, モナド関手 $\langle f, \varphi \rangle$, モナド関手変換 σ に対して $U_{\mathcal{C}}(\langle a, t, \mu, \eta \rangle) := a$, $U_{\mathcal{C}}(\langle f, \varphi \rangle) := f$, $U_{\mathcal{C}}(\sigma) := \sigma$ と定めれば $U_{\mathcal{C}}: \text{Monad}(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathcal{C}$ は strict 2-functor である .

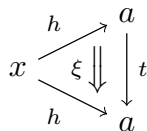
命題 2. Cat -随伴 $U_{\mathcal{C}} \dashv \text{Incc}: \text{Monad}(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathcal{C}$ が成り立つ .

証明. 略 □

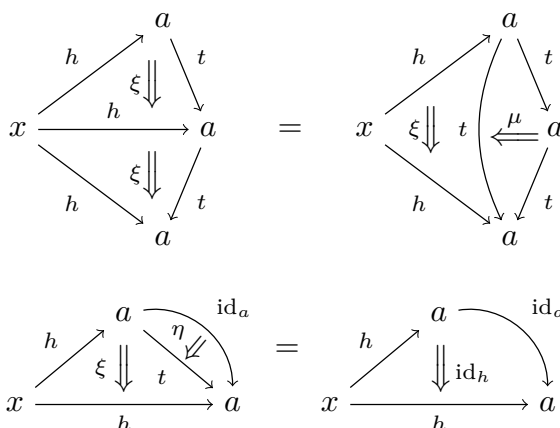
一般に , Incc は右随伴を持つとは限らない . Incc の右随伴が存在するとき , それを $\text{Alg}_{\mathcal{C}}$ で表す .

定義. $\langle a, t, \mu, \eta \rangle$ をモナドとする . モナド関手 $\langle h, \xi \rangle: \text{Incc}(x) \longrightarrow t$ を左 t -加群という . 即ち $\langle h, \xi \rangle$ は以下の条件を満たす .

- $h: x \rightarrow a$ は 1-morphism で $\xi: t \circ h \Rightarrow h$ は 2-morphism である .

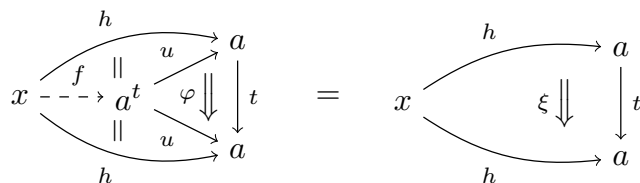


- 次の等式が成り立つ .

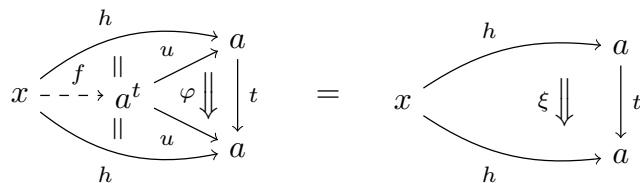


定義. モナド $\langle a, t, \mu, \eta \rangle$ の普遍左 t -加群とは左 t -加群 $\langle u: a^t \rightarrow a, \varphi: t \circ u \Rightarrow u \rangle$ であって、以下の条件を満たすものをいう .

- $\langle h: x \rightarrow a, \xi: t \circ h \Rightarrow h \rangle$ が左 t -加群ならば , 1-morphism $f: x \rightarrow a^t$ が一意に存在して次の等式が成り立つ .



- $\langle h, \xi \rangle, \langle h', \xi' \rangle$ を左 t -加群とする . 上記の条件により $f, f': x \rightarrow a^t$ が取れる .



$$\begin{array}{ccc}
\begin{array}{c}
x \begin{array}{l} \xrightarrow{f'} \\ \xrightarrow{\quad} \\ \xrightarrow{f'} \end{array} a^t \\
\begin{array}{c} \xrightarrow{h'} \\ \xrightarrow{\quad} \\ \xrightarrow{h'} \end{array} a \\
\end{array} \xrightarrow{u} \begin{array}{c} a \\ \downarrow t \\ a \end{array} \\
\begin{array}{c} \parallel \\ \parallel \end{array} \\
\begin{array}{c} \varphi \\ \downarrow \\ \varphi \end{array}
\end{array} = \begin{array}{ccc}
x & \begin{array}{c} \xrightarrow{h'} \\ \xrightarrow{\quad} \\ \xrightarrow{h'} \end{array} & \begin{array}{c} a \\ \downarrow t \\ a \end{array} \\
& \begin{array}{c} \xi' \\ \downarrow \\ \xi' \end{array} &
\end{array}$$

2-morphism $\sigma: h \Rightarrow h'$ が次の等式を満たすとき

$$\begin{array}{ccc}
\begin{array}{c}
x \begin{array}{l} \xrightarrow{h} \\ \xrightarrow{\quad} \\ \xrightarrow{h'} \end{array} a \\
\begin{array}{c} \xrightarrow{h} \\ \xrightarrow{\quad} \\ \xrightarrow{h'} \end{array} a \\
\end{array} \xrightarrow{u} \begin{array}{c} a \\ \downarrow t \\ a \end{array} \\
\begin{array}{c} \Downarrow \sigma \\ \Downarrow \sigma \end{array} \\
\begin{array}{c} \xi \\ \downarrow \\ \xi \end{array}
\end{array} = \begin{array}{ccc}
x & \begin{array}{c} \xrightarrow{h} \\ \xrightarrow{\quad} \\ \xrightarrow{h'} \end{array} & \begin{array}{c} a \\ \downarrow t \\ a \end{array} \\
& \begin{array}{c} \xi \\ \downarrow \\ \xi \end{array} &
\end{array}$$

2-morphism $\tau: f \Rightarrow f'$ が一意に存在して $u \circ \tau = \sigma$ となる .

$$\begin{array}{ccc}
x \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \Downarrow \tau \\ \xrightarrow{f'} \end{array} a^t \xrightarrow{u} b & = & x \begin{array}{c} \xrightarrow{h} \\ \Downarrow \sigma \\ \xrightarrow{h'} \end{array} b
\end{array}$$

また a^t をモナド t の Eilenberg-Moore 対象という .

定理 3. Alg_C が存在するならば , 任意のモナド $\langle a, t, \mu, \eta \rangle$ に対して $\text{Alg}_C(t)$ はモナド t の Eilenberg-Moore 対象である .

証明. 随伴 $\text{Inc}_C \dashv \text{Alg}_C$ の counit が定めるモナド関手を $\langle u^t, \delta^t \rangle: \text{Inc}_C(\text{Alg}_C(t)) \rightarrow t$ とする . 即ち $\langle u^t, \delta^t \rangle$ は左 t -加群である .

$$\begin{array}{ccc}
\text{Alg}_C(t) & \xrightarrow{u^t} & a \\
\text{id} \downarrow & \swarrow \delta^t & \downarrow t \\
\text{Alg}_C(t) & \xrightarrow{u^t} & a
\end{array}$$

$\langle u^t, \delta^t \rangle$ が普遍左 t -加群であることを示すため , $\langle h, \xi \rangle$ を左 t -加群とする .

$$\begin{array}{ccc}
x & \begin{array}{c} \xrightarrow{h} \\ \xrightarrow{\quad} \\ \xrightarrow{h} \end{array} & a \\
& \begin{array}{c} \xi \\ \downarrow \\ \xi \end{array} & \\
& \begin{array}{c} \downarrow t \\ \downarrow t \end{array} &
\end{array}$$

即ち $\langle h, \xi \rangle$ はモナド関手 $\text{Inc}_{\mathcal{C}}(x) \longrightarrow t$ である .

$$\begin{array}{ccc} x & \xrightarrow{h} & a \\ \text{id} \downarrow & \swarrow \xi & \downarrow t \\ x & \xrightarrow{h} & a \end{array}$$

随伴 $\text{Inc}_{\mathcal{C}} \dashv \text{Alg}_{\mathcal{C}}$ で $\langle h, \xi \rangle: \text{Inc}_{\mathcal{C}}(x) \longrightarrow t$ に対応する $f: x \longrightarrow \text{Alg}_{\mathcal{C}}(t)$ を取る . $\langle u^t, \delta^t \rangle$ の取り方から , 次の等式が成り立つ .

$$\begin{array}{ccc} x & \xrightarrow{f} & \text{Alg}_{\mathcal{C}}(t) & \xrightarrow{u^t} & a \\ \text{id} \downarrow & \swarrow \text{id}_f & \downarrow \text{id}_a & \swarrow \delta^t & \downarrow t \\ x & \xrightarrow{f} & \text{Alg}_{\mathcal{C}}(t) & \xrightarrow{u^t} & a \end{array} = \begin{array}{ccc} x & \xrightarrow{h} & a \\ \text{id}_b \downarrow & \swarrow \xi & \downarrow t \\ x & \xrightarrow{h} & a \end{array}$$

これは書きかえれば次の図式となる . 随伴 $\text{Inc}_{\mathcal{C}} \dashv \text{Alg}_{\mathcal{C}}$ の性質から f が一意であることも分かる .

$$\begin{array}{ccc} & \xrightarrow{h} & a \\ & \parallel & \uparrow u^t \\ x & \xrightarrow{f} & \text{Alg}_{\mathcal{C}}(t) & \xrightarrow{\delta^t} & t \\ & \parallel & \downarrow u^t \\ & \xrightarrow{h} & a \end{array} = \begin{array}{ccc} & \xrightarrow{h} & a \\ & \xi \Downarrow & \\ x & & \\ & \xrightarrow{h} & a \end{array}$$

次に $\langle h, \xi \rangle, \langle h', \xi' \rangle$ を左 t -加群として 2-morphism $\sigma: h \Longrightarrow h'$ が次の等式を満たすとする .

$$\begin{array}{ccc} & \xrightarrow{h} & a \\ & \Downarrow \sigma & \\ x & \xrightarrow{h'} & a \\ & \xi' \Downarrow & \\ & \xrightarrow{h'} & a \end{array} = \begin{array}{ccc} & \xrightarrow{h} & a \\ & \xi \Downarrow & \\ x & \xrightarrow{h} & a \\ & \Downarrow \sigma & \\ & \xrightarrow{h'} & a \end{array}$$

このとき σ はモナド関手変換 $\langle h, \xi \rangle \Longrightarrow \langle h', \xi' \rangle$ を与える . よって随伴 $\text{Inc}_{\mathcal{C}} \dashv \text{Alg}_{\mathcal{C}}$ による圏同型

$$\text{Monad}(\mathcal{C})(\text{Inc}_{\mathcal{C}}(x), t) \cong \mathcal{C}(x, \text{Alg}_{\mathcal{C}}(t))$$

で $\sigma: \langle h, \xi \rangle \Longrightarrow \langle h', \xi' \rangle: \text{Inc}_{\mathcal{C}}(x) \longrightarrow t$ に対応する $\tau: f \Longrightarrow f': x \longrightarrow a^t$ が取れる . このとき counit の性質から $u^t \circ \tau = \sigma$ であり , このような τ は一意である .

以上により $\langle u^t, \delta^t \rangle$ は普遍左 t -加群である . □

逆に

定理 4. 任意のモナド t に対して Eilenberg-Moore 対象が存在するならば $\text{Alg}_{\mathcal{C}}$ が存在する .

証明. まず以下のように定義する .

- モナド $\langle a, t, \mu, \eta \rangle$ に対して $\text{Alg}_{\mathcal{C}}(t) := a^t$ と定める .
- $\langle a, t, \mu, \eta \rangle, \langle a', t', \mu', \eta' \rangle$ をモナド , $\langle f, \varphi \rangle: t \rightarrow t'$ をモナド関手とする . $a^{t'}$ の普遍性により $\text{Alg}_{\mathcal{C}}(\langle f, \varphi \rangle): a^t \rightarrow a^{t'}$ を定める .

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{ccc}
 u^t & \xrightarrow{\quad} & a \xrightarrow{f} a' \\
 & \searrow & \uparrow u^{t'} \\
 & \text{Alg}_{\mathcal{C}}(f) \parallel & \\
 \text{Alg}_{\mathcal{C}}(t) & \xrightarrow{\text{Alg}_{\mathcal{C}}(f)} & \text{Alg}_{\mathcal{C}}(t') \\
 & \parallel & \delta^{t'} \Downarrow \\
 & \uparrow & \\
 u^t & \xrightarrow{\quad} & a \xrightarrow{f} a'
 \end{array}
 & = &
 \begin{array}{ccc}
 u^t & \xrightarrow{\quad} & a \xrightarrow{f} a' \\
 & \searrow & \uparrow \\
 & \text{Alg}_{\mathcal{C}}(t) & \delta^t \Downarrow t \\
 & \uparrow & \swarrow \varphi \\
 & \text{Alg}_{\mathcal{C}}(t) & \\
 u^t & \xrightarrow{\quad} & a \xrightarrow{f} a'
 \end{array}
 \end{array}$$

- $\langle a, t, \mu, \eta \rangle, \langle a', t', \mu', \eta' \rangle$ をモナド , $\langle f, \varphi \rangle: t \rightarrow t'$ をモナド関手 , $\sigma: \langle f, \varphi \rangle \Rightarrow \langle f', \varphi' \rangle$ をモナド関手変換とする . このとき σ は次の等式を満たす .

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{ccc}
 & & f \\
 & & \Downarrow \sigma \\
 u^t & \xrightarrow{\quad} & a \xrightarrow{\quad} a' \\
 & \searrow & \uparrow f' \\
 & \xi \Downarrow t & \\
 a^t & \xrightarrow{\quad} & a \xrightarrow{\quad} a' \\
 & \swarrow \varphi' & \\
 u^t & \xrightarrow{\quad} & a \xrightarrow{f'} a' \\
 & & \Downarrow \sigma \\
 & & f'
 \end{array}
 & = &
 \begin{array}{ccc}
 & & f \\
 & & \swarrow \varphi \\
 u^t & \xrightarrow{\quad} & a \xrightarrow{\quad} a' \\
 & \searrow & \uparrow f \\
 & \xi \Downarrow t & \\
 a^t & \xrightarrow{\quad} & a \xrightarrow{\quad} a' \\
 & \swarrow \varphi' & \\
 u^t & \xrightarrow{\quad} & a \xrightarrow{f'} a' \\
 & & \Downarrow \sigma \\
 & & f'
 \end{array}
 \end{array}$$

よって $\text{Alg}_{\mathcal{C}}(\sigma): \text{Alg}_{\mathcal{C}}(\langle f, \varphi \rangle) \Rightarrow \text{Alg}_{\mathcal{C}}(\langle f', \varphi' \rangle)$ が一意に存在して $u^{t'} \circ \text{Alg}_{\mathcal{C}}(\sigma) = \sigma \circ u^t$ となる .

これは strict 2-functor $\text{Alg}_{\mathcal{C}}: \text{Monad}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{C}$ を与えることが分かる . $\text{Inc}_{\mathcal{C}} \dashv \text{Alg}_{\mathcal{C}}$ を示せばよい . その為には x, t について自然な圏同型

$$\Phi_{xt}: \text{Monad}(\mathcal{C})(\text{Inc}_{\mathcal{C}}(x), t) \cong \mathcal{C}(x, a^t)$$

を構成すればよい . Φ_{xt} を a^t の普遍性により自然に定めれば , Φ_{xt} は圏同型を与える . よってこの Φ_{xt} が自然であればよい . 以下 , 簡単のため $M(x, t) := \text{Monad}(\mathcal{C})(\text{Inc}_{\mathcal{C}}(x), t)$ と書く .

まず x について自然であることを示す．その為には 2-morphism $\alpha: f \implies g: x \longrightarrow x'$ に対して等式

$$M(x', t) \xrightarrow{\Phi_{x't}} \mathcal{C}(x', a^t) \begin{array}{c} \xrightarrow{-\circ f} \\ \Downarrow -\circ\alpha \\ \xrightarrow{-\circ g} \end{array} \mathcal{C}(x, a^t) = M(x', t) \begin{array}{c} \xrightarrow{-\circ\langle f, \text{id}_f \rangle} \\ \Downarrow -\circ\alpha \\ \xrightarrow{-\circ\langle g, \text{id}_g \rangle} \end{array} M(x, t) \xrightarrow{\Phi_{xt}} \mathcal{C}(x, a^t)$$

を示せばよい．まず $\Phi_{x't}(-) \circ f = \Phi_{xt}(- \circ \langle f, \text{id}_f \rangle)$ を示す．

$\therefore \langle h, \xi \rangle: \text{Inc}_{\mathcal{C}}(x') \longrightarrow t$ をモナド関手，すなわち左 t -加群とする．普遍性から $x' \longrightarrow a^t$ が取れて，これが $\Phi_{x't}(h)$ である．

一方，左 t -加群 $h \circ f$ に対応するのが $\Phi_{xt}(h \circ f)$ である．

よって普遍性から $\Phi_{x't}(h) \circ f = \Phi_{xt}(h \circ f)$ となることが分かる．次に $\sigma: \langle h, \xi \rangle \implies \langle h', \xi' \rangle: \text{Inc}_{\mathcal{C}}(x') \longrightarrow t$ をモナド関手変換とする． $\Phi_{x't}(\sigma)$ は次の等式を満たす．

一方 $\Phi_{xt}(\sigma \circ f)$ は次の等式を満たす .

$$x' \begin{array}{c} \xrightarrow{\Phi_{xt}(h \circ f)} \\ \Downarrow \Phi_{xt}(\sigma \circ f) \\ \xrightarrow{\Phi_{xt}(h' \circ f)} \end{array} a^t \xrightarrow{u^t} a = x \xrightarrow{f} x' \begin{array}{c} \xrightarrow{h} \\ \Downarrow \sigma \\ \xrightarrow{h'} \end{array} a$$

よって普遍性から $\Phi_{x't}(\sigma) \circ f = \Phi_{xt}(\sigma \circ f)$ である .

以上により $\Phi_{x't}(-) \circ f = \Phi_{xt}(- \circ \langle f, \text{id}_f \rangle)$ である .

次に自然変換の等式 $\Phi_{x't}(-) \circ \alpha = \Phi_{xt}(- \circ \alpha)$ を示す . その為には左 t -加群 $\langle h, \xi \rangle$ に対して $\Phi_{x't}(h) \circ \alpha = \Phi_{xt}(h \circ \alpha)$ を示せばよいが , これも普遍性から簡単にわかる .

次に t について自然であることを示す . その為にはモナド関手変換 $\sigma: \langle f, \varphi \rangle \Rightarrow \langle g, \psi \rangle: t \rightarrow t'$ に対して等式

$$M(x, t) \xrightarrow{\Phi_{xt}} \mathcal{C}(x, a^t) \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{Alg}(f) \circ -} \\ \Downarrow \text{Alg}(\sigma) \circ - \\ \xrightarrow{\text{Alg}(g) \circ -} \end{array} \mathcal{C}(x, a^{t'}) = M(x, t) \begin{array}{c} \xrightarrow{\langle f, \varphi \rangle \circ -} \\ \Downarrow \sigma \circ - \\ \xrightarrow{\langle g, \psi \rangle \circ -} \end{array} M(x, t') \xrightarrow{\Phi_{x't'}} \mathcal{C}(x, a^{t'})$$

を示せばよい . まず $\text{Alg}_{\mathcal{C}}(f) \circ \Phi_{xt}(-) = \Phi_{x't'}(\langle f, \varphi \rangle \circ -)$ を示す .

$\therefore \langle h, \xi \rangle: \text{Inc}_{\mathcal{C}}(x) \rightarrow t$ をモナド関手 , すなわち左 t -加群とする . $\Phi_{xt}(h), \text{Alg}_{\mathcal{C}}(f)$ は次の等式で与えられる .

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{ccc} x & \xrightarrow{h} & a \\ \text{---} \Phi_{xt}(h) \text{---} & \parallel u^t & \downarrow t \\ & a^t & \delta^t \downarrow \\ & & \parallel u^t \\ x & \xrightarrow{h} & a \end{array} & = & \begin{array}{ccc} x & \xrightarrow{h} & a \\ & \parallel \xi & \downarrow t \\ & & a \end{array} \\ \\ \begin{array}{ccc} a & \xrightarrow{f} & a' \\ u^t \nearrow & \parallel \text{Alg}_{\mathcal{C}}(f) & \parallel u^{t'} \nearrow \\ a^t & \xrightarrow{\quad} & a^{t'} \\ u^t \searrow & \parallel & \parallel u^{t'} \searrow \\ a & \xrightarrow{f} & a' \end{array} & = & \begin{array}{ccc} a & \xrightarrow{f} & a' \\ u^t \nearrow & \parallel & \parallel u^{t'} \nearrow \\ a^t & \xrightarrow{\quad} & a^{t'} \\ u^t \searrow & \parallel & \parallel u^{t'} \searrow \\ a & \xrightarrow{f} & a' \end{array} \end{array}$$

よって $\text{Alg}_C(f) \circ \Phi_{xt}(h)$ は

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{ccccc} x & \xrightarrow{h} & a & \xrightarrow{f} & a' \\ & \searrow^{\Phi_{xt}(h)} & \uparrow^{u^t} & \parallel & \uparrow^{u^{t'}} \\ & a^t & \xrightarrow{\text{Alg}_C(f)} & a^{t'} & \downarrow \delta^{t'} \\ & \swarrow_{\parallel} & \downarrow u^t & \parallel & \downarrow u^{t'} \\ & x & \xrightarrow{h} & a & \xrightarrow{f} & a' \end{array} & = & \begin{array}{ccccc} x & \xrightarrow{h} & a & \xrightarrow{f} & a' \\ & \searrow^{\Phi_{xt}(h)} & \uparrow^{u^t} & \parallel & \uparrow^{u^{t'}} \\ & a^t & \xrightarrow{\text{Alg}_C(f)} & a^{t'} & \downarrow \delta^{t'} \\ & \swarrow_{\parallel} & \downarrow u^t & \parallel & \downarrow u^{t'} \\ & x & \xrightarrow{h} & a & \xrightarrow{f} & a' \end{array} \\ & & & & \searrow \varphi & \\ & & & & t & \\ & & & & a & \\ & & & & \downarrow & \\ & & & & t' & \\ & & & & a' & \end{array} \\ & = & \begin{array}{ccccc} x & \xrightarrow{h} & a & \xrightarrow{f} & a' \\ & \searrow^{\Phi_{xt}(h)} & \downarrow \xi & \parallel & \downarrow t \\ & a^t & \xrightarrow{\text{Alg}_C(f)} & a^{t'} & \downarrow \delta^{t'} \\ & \swarrow_{\parallel} & \downarrow u^t & \parallel & \downarrow u^{t'} \\ & x & \xrightarrow{h} & a & \xrightarrow{f} & a' \end{array} \end{array}$$

より $\text{Alg}_C(f) \circ \Phi_{xt}(h) = \text{Alg}_C(f \circ h)$ となることが分かる . 次に $\sigma: \langle h, \xi \rangle \Rightarrow \langle h', \xi' \rangle: \text{Inc}_C(x) \rightarrow t$ をモナド関手変換とする . $\Phi_{xt}(\sigma)$, $\Phi_{xt'}(f \circ \sigma)$ は次の等式で与えられる .

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{ccc} x & \xrightarrow{\Phi_{xt}(h)} & a^t \xrightarrow{u^t} a \\ & \downarrow \Phi_{xt}(\sigma) & \\ & x & \end{array} & = & \begin{array}{ccc} x & \xrightarrow{h} & a \\ & \downarrow \sigma & \\ & x & \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{ccc} x & \xrightarrow{\Phi_{xt'}(f \circ h)} & a^{t'} \xrightarrow{u^{t'}} a' \\ & \downarrow \Phi_{xt'}(f \circ \sigma) & \\ & x & \end{array} & = & \begin{array}{ccc} x & \xrightarrow{h} & a \xrightarrow{f} a' \\ & \downarrow \sigma & \\ & x & \end{array} \end{array}$$

よって $\text{Alg}_C(f) \circ \Phi_{xt}(\sigma) = \Phi_{xt'}(f \circ \sigma)$ である .

以上により $\text{Alg}_C(f) \circ \Phi_{xt}(-) = \Phi_{xt'}(\langle f, \varphi \rangle \circ -)$ である .

後は自然変換について示せばよい . つまり左 t -加群 $\langle h, \xi \rangle$ に対して $\text{Alg}_C(\sigma) \circ \Phi_{xt}(h) = \Phi_{xt'}(\sigma \circ h)$ を示せばよいがこれも普遍性から分かる . \square

よって , 以下 $a^t = \text{Alg}_C(t)$ と書くことにする .

定理 5. Alg_C が存在するならば , 任意のモナド $\langle a, t, \mu, \eta \rangle$ は随伴から命題 1 の方法で得られる .

証明. $\langle t, \mu \rangle$ は左 t -加群を定める .

$$\begin{array}{ccc}
 & & a \\
 & \nearrow t & \downarrow t \\
 a & \xrightarrow{\mu} & a \\
 & \searrow t & \\
 & & a
 \end{array}$$

よって $f^t: a \rightarrow a^t$ が一意に存在して次の等式が成り立つ .

$$\begin{array}{ccc}
 & & a \\
 & \nearrow t & \downarrow t \\
 a & \xrightarrow{f^t} a^t & \xrightarrow{\delta^t} a \\
 & \searrow t & \downarrow t \\
 & & a
 \end{array}
 =
 \begin{array}{ccc}
 & & a \\
 & \nearrow t & \downarrow t \\
 a & \xrightarrow{\mu} & a \\
 & \searrow t & \\
 & & a
 \end{array}$$

特に $t = u^t \circ f^t$ である . 故に , $f^t \dashv u^t$ を示して , この随伴から命題 1 の方法で得たモナドが $\langle a, t, \mu, \eta \rangle$ と一致することを示せばよい .

$\delta^t: t \circ u^t \Rightarrow u^t$ はモナド関手変換 $\langle t, \mu \rangle \circ \langle u^t, \text{id}_{u^t} \rangle \Rightarrow \langle u^t, \delta^t \rangle$ を定める .

∴)

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{ccc}
 a^t & \xrightarrow{u^t} & a \\
 \text{id}_{a^t} \downarrow & \swarrow \text{id}_{u^t} & \downarrow \text{id}_a \\
 a^t & \xrightarrow{u^t} & a \\
 & \searrow u^t & \downarrow \delta^t \\
 & & a
 \end{array}
 & = &
 \begin{array}{ccc}
 a^t & \xrightarrow{u^t} & a \\
 \text{id}_{a^t} \downarrow & \swarrow \delta^t & \downarrow t \\
 a^t & \xrightarrow{u^t} & a \\
 & \searrow u^t & \downarrow t \\
 & & a
 \end{array}
 \\
 \\
 \begin{array}{ccc}
 & & a^t \\
 & \nearrow \text{id} & \downarrow \text{id} \\
 \text{id} & \xleftarrow{\text{id}} & a^t \\
 & \searrow \text{id} & \downarrow \text{id} \\
 & & a^t
 \end{array}
 & = &
 \begin{array}{ccc}
 & & a \\
 & \nearrow u^t & \downarrow \delta^t \\
 a^t & \xrightarrow{u^t} & a \\
 \text{id} \downarrow & \swarrow \delta^t & \downarrow t \\
 a^t & \xrightarrow{u^t} & a
 \end{array}
 \end{array}$$

よって , 随伴による圏同型

$$\text{Monad}(\mathcal{C})(\text{Incc}(a^t), t) \cong \mathcal{C}(a^t, a^t)$$

で $\delta^t: t \circ u^t \implies u^t: \text{Inc}_C(a^t) \longrightarrow t$ に対応する $\varepsilon^t: k \implies \text{id}: a^t \longrightarrow a^t$ が取れる . counit の性質から $\langle u^t, \delta^t \rangle \circ \langle k, \text{id} \rangle = \langle t, \mu \rangle \circ \langle u^t, \text{id}_{u^t} \rangle$, $u^t \circ \varepsilon = \delta^t$ である .

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{ccc}
 a^t & \xrightarrow{k} & a^t & \xrightarrow{u^t} & a \\
 \text{id} \downarrow & \swarrow \text{id}_k & \downarrow \text{id}_a & \swarrow \delta^t & \downarrow t \\
 a^t & \xrightarrow{k} & a^t & \xrightarrow{u^t} & a
 \end{array} & = & \begin{array}{ccc}
 a^t & \xrightarrow{u^t} & a & \xrightarrow{t} & a \\
 \text{id} \downarrow & \swarrow \text{id}_{u^t} & \downarrow \text{id}_a & \swarrow \mu & \downarrow t \\
 a^t & \xrightarrow{u^t} & a & \xrightarrow{t} & a
 \end{array} \\
 \\
 \begin{array}{ccc}
 a^t & \xrightarrow{k} & a^t & \xrightarrow{u^t} & a \\
 \text{id}_{a^t} \downarrow & \swarrow \varepsilon & \downarrow & \swarrow & \downarrow \\
 a^t & \xrightarrow{k} & a^t & \xrightarrow{u^t} & a
 \end{array} & = & \begin{array}{ccc}
 a^t & \xrightarrow{u^t} & a^t & \xrightarrow{t} & a \\
 \text{id}_{a^t} \downarrow & \swarrow \delta^t & \downarrow & \swarrow & \downarrow \\
 a^t & \xrightarrow{u^t} & a^t & \xrightarrow{t} & a
 \end{array}
 \end{array}$$

$t = u^t \circ f^t$ だから $u^t \circ k = u^t \circ f^t \circ u^t$ であり , よって u^t の普遍性から $k = f^t \circ u^t$ が分かる . また $u^t \varepsilon_{f^t} = \delta_{f^t}^t = \mu$ である .

後は η, ε^t が随伴 $f^t \dashv u^t: a \longrightarrow a^t$ を与えることを示せばよい . まず

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{ccccc}
 a & \xrightarrow{\text{id}} & a & \xrightarrow{\text{id}} & a \\
 \searrow f^t & \Downarrow \eta & \swarrow u^t & \Downarrow \varepsilon^t & \swarrow u^t \\
 & a^t & \xrightarrow{\text{id}} & a^t & \\
 & & & & \searrow u^t
 \end{array} \\
 = & \begin{array}{ccccc}
 a & \xrightarrow{\text{id}} & a & \xrightarrow{t} & a \\
 \searrow f^t & \Downarrow \eta & \swarrow u^t & \Downarrow \delta^t & \swarrow u^t \\
 & a^t & \xrightarrow{\text{id}} & a^t & \\
 & & & & \searrow u^t
 \end{array} \\
 = & \begin{array}{ccccc}
 & & \text{id} & & \\
 & & \downarrow \eta & & \\
 a & \xrightarrow{f^t} & a^t & \xrightarrow{u^t} & a \\
 \text{id} \downarrow & \swarrow \text{id}_{f^t} & \downarrow \text{id} & \swarrow \delta^t & \downarrow t \\
 a & \xrightarrow{f^t} & a^t & \xrightarrow{u^t} & a
 \end{array} \\
 = & \begin{array}{ccccc}
 & & \text{id} & & \\
 & & \downarrow \eta & & \\
 a & \xrightarrow{t} & a & & a \\
 \text{id} \downarrow & \swarrow \mu & \downarrow & \swarrow & \downarrow t \\
 a & \xrightarrow{t} & a & & a
 \end{array}
 \end{array}$$

$$= \begin{array}{ccc} & \text{id} & \\ & \curvearrowright & \\ a & & a \\ \text{id} \downarrow & \swarrow \text{id}_t & \downarrow t \\ a & \xrightarrow{t} & a \end{array}$$

より $u^t(\varepsilon_{f^t}^t \circ f^t \eta) = \text{id}_t$ であるから, $\varepsilon_{f^t} \circ f^t \eta = \text{id}_{f^t}$ が分かる. また

$$\begin{array}{ccc} & \text{id} & \\ & \curvearrowright & \\ a & & a \\ u^t \nearrow & \downarrow \varepsilon^t & \searrow f^t \\ a^t & \xrightarrow{\text{id}} & a^t \\ & \swarrow \delta^t & \nearrow u^t \end{array} = \begin{array}{ccc} & \text{id} & \\ & \downarrow \eta & \\ a & \xrightarrow{t} & a \\ u^t \nearrow & \downarrow \delta^t & \searrow u^t \\ a^t & \xrightarrow{\text{id}} & a^t \end{array}$$

$$= \begin{array}{ccc} a^t & \xrightarrow{u^t} & a \\ \text{id} \downarrow & \swarrow \delta^t & \downarrow \eta \\ a^t & \xrightarrow{u^t} & a \\ & \swarrow \eta & \nwarrow \text{id} \end{array} = \begin{array}{ccc} a^t & \xrightarrow{u^t} & a \\ \text{id} \downarrow & \swarrow \text{id} & \downarrow \text{id} \\ a^t & \xrightarrow{u^t} & a \end{array} = \text{id}$$

より $u^t \varepsilon^t \circ \eta_{u^t} = \text{id}_{u^t}$ である. □

定理 6. $\text{Alg}_{\mathcal{C}}$ が存在するとする. 随伴 $f \dashv u: a \rightarrow b$ の unit を η , counit を ε とする. $f \dashv u$ から得られるモナドを $\langle a, t, \mu, \eta \rangle$ とする. 定理 5 により, モナド t から随伴 $f^t \dashv u^t: a \rightarrow a^t$ (unit は η , counit は ε^t) が得られる. このとき 1-morphism $h: b \rightarrow a^t$ が一意に存在して $u^t \circ h = u$, $u^t \varepsilon_h = (u^t \circ h) \varepsilon$ となる. 更に $f \circ h = f^t$ かつ $h \varepsilon = \varepsilon_h^t$ である.

$$\begin{array}{ccc} & a & \\ f \nearrow & & \nwarrow u^t \\ b & \xrightarrow{u} & a^t \\ & \searrow f^t & \\ & h & \end{array}$$

証明. $\langle u, u \circ \varepsilon \rangle: \text{Inc}_{\mathcal{C}}(b) \rightarrow t$ はモナド関手, よって左 t -加群である.

$$\begin{array}{ccc}
 b & \xrightarrow{u} & a \\
 \text{id}_b \downarrow & \searrow \varepsilon & \downarrow f \\
 & \text{id}_b & b \\
 \text{id}_u \downarrow & & \downarrow u \\
 b & \xrightarrow{u} & a
 \end{array}$$

故に $h: b \rightarrow a^t$ が存在して次の等式が成り立つ.

$$\begin{array}{ccc}
 b & \xrightarrow{h} & a^t & \xrightarrow{u^t} & a \\
 \text{id}_b \downarrow & \swarrow \text{id}_h & \downarrow \text{id} & \swarrow \delta^t & \downarrow f \\
 & & b & & b \\
 & & \downarrow u & & \downarrow u \\
 b & \xrightarrow{h} & a^t & \xrightarrow{u^t} & a
 \end{array}
 =
 \begin{array}{ccc}
 b & \xrightarrow{u} & a \\
 \text{id}_b \downarrow & \searrow \varepsilon & \downarrow f \\
 & \text{id}_b & b \\
 \text{id}_u \downarrow & & \downarrow u \\
 b & \xrightarrow{u} & a
 \end{array}$$

従って $u^t \circ h = u$, $\delta_h^t = u\varepsilon$ である. $\delta^t = u^t\varepsilon$ だったから $u^t\varepsilon_h = (u^t \circ h)\varepsilon$ となる.

$$\begin{array}{ccc}
 a^t & \xrightarrow{u^t} & a \\
 \text{id} \downarrow & \swarrow \delta^t & \downarrow f \\
 & & b \\
 & & \downarrow u \\
 a^t & \xrightarrow{u^t} & a
 \end{array}
 =
 \begin{array}{ccc}
 a^t & \xrightarrow{u^t} & a \\
 \text{id} \downarrow & \swarrow \varepsilon^t & \downarrow f \\
 & & b \\
 & & \downarrow u \\
 a^t & \xrightarrow{u^t} & a
 \end{array}$$

このような h の一意性は u^t の普遍性から分かる.

t の定義から $\mu = u\varepsilon_f$ だったから

$$\begin{array}{ccc}
 a & \xrightarrow{f} & b & \xrightarrow{h} & a^t & \xrightarrow{u^t} & a \\
 \text{id}_a \downarrow & \swarrow \text{id}_f & \downarrow \text{id}_b & \swarrow \text{id}_h & \downarrow \text{id}_{a^t} & \swarrow \delta^t & \downarrow f \\
 & & b & & b & & b \\
 & & \downarrow u & & \downarrow u & & \downarrow u \\
 a & \xrightarrow{f} & b & \xrightarrow{h} & a^t & \xrightarrow{u^t} & a
 \end{array}
 =
 \begin{array}{ccc}
 a & \xrightarrow{f} & b & \xrightarrow{u} & a \\
 \text{id}_a \downarrow & \swarrow \text{id}_f & \downarrow \text{id}_b & \swarrow \varepsilon & \downarrow f \\
 & & b & & b \\
 \text{id}_u \downarrow & & \downarrow u & & \downarrow u \\
 a & \xrightarrow{f} & b & \xrightarrow{u} & a
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
a & \xrightarrow{f} & b & \xrightarrow{u} & a \\
\downarrow \text{id}_a & & & \mu & \downarrow f \\
a & \xrightarrow{f} & b & \xrightarrow{u} & a \\
& & & & \downarrow u \\
& & & & b \\
& & & & \downarrow u \\
& & & & a
\end{array}
=
\begin{array}{ccc}
& & t & & a \\
& & \curvearrowright & & \downarrow t \\
a & \xrightarrow{f^t} & a^t & \xrightarrow{u^t} & a \\
& & \parallel & \delta^t & \downarrow t \\
& & & & a \\
& & \parallel & & \\
& & u^t & & \\
& & \curvearrowleft & & \\
& & t & &
\end{array}$$

となるので, $\langle u^t, \delta^t \rangle$ の普遍性により $h \circ f = f^t$ である. また $h\varepsilon = \varepsilon_h^t$ も u^t の普遍性から分かる. \square

この定理で得られる h を随伴 $f \dashv u$ の right comparison といい, right comparison が同型なとき $f \dashv u$ は monadic であるという.

定義. t をモナドとする. \mathcal{C}^{op} での左 t -加群を右 t -加群という.

$$\begin{array}{ccc}
& & a \\
& \swarrow h & \uparrow t \\
x & \xleftarrow{\xi} & a \\
& \swarrow h & \uparrow t \\
& & a
\end{array}$$

\mathcal{C}^{op} での普遍左 t -加群 $\langle f_t: a \rightarrow a_t, \varphi: f_t \circ t \Rightarrow f_t \rangle$ を普遍右 t -加群という. また a_t を t の Kleisli 対象という.

定理 7. $\text{Alg}_{\mathcal{C}^{\text{op}}}$ が存在する $\iff \mathcal{C}$ の任意のモナド t の Kleisli 対象が存在する. \square

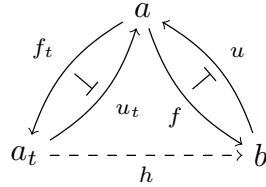
定理 8. $\text{Alg}_{\mathcal{C}^{\text{op}}}$ が存在するならば, \mathcal{C} の任意のモナド $\langle a, t, \mu, \eta \rangle$ は \mathcal{C} の随伴から得られる.

証明. $\text{Alg}_{\mathcal{C}^{\text{op}}}$ が存在するとする. t を \mathcal{C} のモナドとすると, これは \mathcal{C}^{op} のモナドでもあるから, t は \mathcal{C}^{op} の随伴 $u \dashv f$ から得られる. このとき \mathcal{C} の随伴 $f \dashv u$ が成り立ち, これから t が得られる. \square

$\text{Alg}_{\mathcal{C}^{\text{op}}}$ が存在するとして $f \dashv u: a \rightarrow b$ を随伴とする. \mathcal{C}^{op} の随伴 $u \dashv f: a \rightarrow b$ から得られる \mathcal{C}^{op} のモナドを t とすると, t から \mathcal{C}^{op} の随伴 $u_t \dashv f_t: a \rightarrow a_t$ が得られる. このとき \mathcal{C}^{op} の 1-morphism $h: b \rightarrow a_t$ が存在して $f_t \circ h = f, h \circ u = u_t$ となる.

$$\begin{array}{ccc}
& & a & & \\
& \swarrow u & & \searrow f_t & \\
& & \downarrow f & & \\
b & \xrightarrow{u_t} & a_t & & \\
& \swarrow h & & \searrow & \\
& & & &
\end{array}
\text{ in } \mathcal{C}^{\text{op}}$$

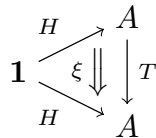
即ち \mathcal{C} において随伴 $f_t \dashv u_t: a \longrightarrow a_t$ が存在して, $h \circ f_t = f, u \circ h = u_t$ である.



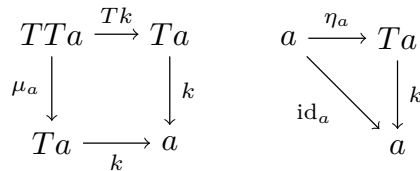
定理 9. Alg_{Cat} が存在する. 故に Cat の任意のモナドは随伴関手から得られる.

証明. A を圏として, モナド $\langle A, T, \mu, \eta \rangle$ に対して Eilenberg-Moore 対象 A^T を構成すればよい.

※ A^T が存在したとすると $A^T \cong \text{Cat}(\mathbf{1}, A^T) \cong \text{Monad}(\text{Cat})(\text{Inc}(\mathbf{1}), T)$ となる. よって圏 A^T の対象は左 T -加群 $\langle H: \mathbf{1} \rightarrow A, \xi: TH \Rightarrow H \rangle$ である.



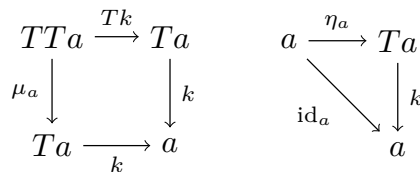
A の対象 $a := H(*)$ と A の射 $k := \xi_*: TH(*) \longrightarrow H(*)$ は次の可換図式を満たす.



逆に $\langle a, k \rangle$ が上記の条件を満たせば, 左 T -加群を与えることが分かる.

圏 A^T を次のように定義する. (この A^T を Eilenberg-Moore 圏という.)

- $a \in A$ と射 $k: Ta \longrightarrow a$ の組 $\langle a, k \rangle$ で, 次の図式を可換にするものを対象とする.



- $\langle a, k \rangle$ から $\langle a', k' \rangle$ と射とは, 射 $f: a \rightarrow a'$ で次の図式を可換にするものとする .

$$\begin{array}{ccc} Ta & \xrightarrow{k} & a \\ Tf \downarrow & & \downarrow f \\ Ta' & \xrightarrow{k'} & a' \end{array}$$

関手 $U^T: A^T \rightarrow A$ を $U^T(\langle a, k \rangle) := a$, $U^T(f) := f$ で定める . 自然変換 $\delta^T: T \circ U^T \Rightarrow U^T$ を $\delta^T_{\langle a, k \rangle} := k: Ta \rightarrow a$ で定める . $\langle U^T, \delta^T \rangle$ は左 T -加群である .

$$\begin{array}{ccc} & U^T \rightarrow & A \\ A^T & \searrow \delta^T \Downarrow & \downarrow T \\ & U^T \rightarrow & A \end{array}$$

$\langle U^T, \delta^T \rangle$ が普遍左 T -加群であることを示す . $\langle H, \xi \rangle$ が左 T -加群であるとする .

$$\begin{array}{ccc} & H \rightarrow & A \\ X & \searrow \xi \Downarrow & \downarrow T \\ & H \rightarrow & A \end{array}$$

関手 $F: X \rightarrow A^T$ を

- 対象 $x \in X$ に対して $Fx := \langle Hx, \xi_x \rangle$ とする . ($\langle H, \xi \rangle$ が左 T -加群だから , 次の図式が可換となる .)

$$\begin{array}{ccc} TTa & \xrightarrow{Tk} & Ta \\ \mu_a \downarrow & & \downarrow k \\ Ta & \xrightarrow{k} & a \end{array} \quad \begin{array}{ccc} a & \xrightarrow{\eta_a} & Ta \\ & \searrow \text{id}_a & \downarrow k \\ & & a \end{array}$$

- X の射 $f: x \rightarrow y$ に対して $Ff := Hf$ とする . (ξ が自然変換だから次の図式が可換であり , よって $f: \langle Hx, \xi_x \rangle \rightarrow \langle Hy, \xi_y \rangle$ は A^T の射である .)

$$\begin{array}{ccc} THx & \xrightarrow{\xi_x} & Hx \\ THf \downarrow & & \downarrow Hf \\ THy & \xrightarrow{\xi_y} & Hy \end{array}$$

で定める．このとき $U^T \circ F = H$, $\delta^T \circ F = \xi$ である．

$$\begin{array}{ccc}
 & H & \\
 & \curvearrowright & \\
 X & \xrightarrow{F} & A^T & \xrightarrow{U^T} & A \\
 & \parallel & \delta^T \Downarrow & & \downarrow T \\
 & & & & A \\
 & \parallel & U^T & & \\
 & \curvearrowleft & H & & \\
 & H & & &
 \end{array}
 =
 \begin{array}{ccc}
 & H & \\
 & \curvearrowright & \\
 X & & A \\
 & \xi \Downarrow & \\
 & & A \\
 & \curvearrowleft & \\
 & H &
 \end{array}$$

明らかにこのような F は一意である．

$\langle H, \xi \rangle$, $\langle H', \xi' \rangle$ を左 T -加群として , 自然変換 σ が次の等式を満たすとする．

$$\begin{array}{ccc}
 & H & \\
 & \curvearrowright & \\
 X & \xrightarrow{F} & A^T & \xrightarrow{U^T} & A \\
 & \parallel & \delta^T \Downarrow & & \downarrow T \\
 & & & & A \\
 & \parallel & U^T & & \\
 & \curvearrowleft & H & & \\
 & H & & &
 \end{array}
 \xrightarrow{\sigma}
 \begin{array}{ccc}
 & H & \\
 & \curvearrowright & \\
 X & \xrightarrow{H'} & A & \xrightarrow{H} & A \\
 & \parallel & \xi' \Downarrow & & \downarrow T \\
 & & & & A \\
 & \parallel & H & & \\
 & \curvearrowleft & H' & & \\
 & H' & & &
 \end{array}$$

$\langle H, \xi \rangle$, $\langle H', \xi' \rangle$ に対して上記方法で $F, F': X \rightarrow A^T$ を定義する．このとき $\tau: F \rightarrow F'$ を $\tau_x := \sigma_x: \langle Hx, \xi_x \rangle \rightarrow \langle H'x, \xi'_x \rangle$ で定める．すると明らかに $U^T \circ \tau = \sigma$ であり , このような τ は一意である．

以上により $\langle U^T, \delta^T \rangle$ が普遍左 T -加群であって , A^T が Eilenberg-Moore 対象であることが分かった． □

定理 10. $\text{Alg}_{\text{Cat}^{\text{op}}}$ が存在する．

証明. A を圏として , モナド $\langle A, T, \mu, \eta \rangle$ に対して Kleisli 対象 A_T を構成すればよい．圏 A_T を以下のように定義する．(この A_T を Kleisli 圏という．)

- $\text{Ob}(A_T) := \text{Ob}(A)$ とする．
- $a, b \in \text{Ob}(A_T)$ に対して , a から b への射とは , A の射 $a \rightarrow Tb$ のこととする． A の射 $f: a \rightarrow Tb$ に対応する A_T の射を $f^b: a \rightarrow b$ で表す．
- 合成は $(a \xrightarrow{f^b} b \xrightarrow{g^b} c) := (a \xrightarrow{f} Tb \xrightarrow{Tg} TTc \xrightarrow{\mu_c} Tc)^b$ で定義する．

関手 $F_T: A \rightarrow A_T$ を

- 対象 $a \in A$ に対して $F_T(a) := a$ とする．
- $f: a \rightarrow b$ に対して $F_T(f) := (a \xrightarrow{f} b \xrightarrow{\eta_b} Tb)^b$ とする．

で定めて , 自然変換 $\varphi: F_T \circ T \Rightarrow F_T$ を $\varphi_a := (\text{id}_{Ta})^b: Ta \rightarrow a$ により定めると

$\langle F_T, \varphi \rangle$ は右 T -加群である .

$\langle F_T, \varphi \rangle$ が普遍右 T -加群であることを示せばよい . その為に $\langle H, \xi \rangle$ を右 T -加群とする .

$$\begin{array}{ccc} & H & A \\ X & \swarrow & \downarrow \xi \\ & H & A \end{array} \quad \begin{array}{c} \uparrow T \\ A \end{array}$$

関手 $F: A_T \rightarrow X$ を

- 対象 $a \in A_T$ に対して $F(a) := H(a)$ とする .
- $f^b: a \rightarrow b$ に対して $F(f^b) := (Ha \xrightarrow{Hf} HTb \xrightarrow{\xi_b} Hb)$ とする .

で定めると次の等式が成り立つ .

$$\begin{array}{ccc} & H & A \\ X & \xleftarrow{F} & A_T \xrightarrow{\varphi} A \\ & \swarrow H & \downarrow \xi \\ & H & A \end{array} \quad \begin{array}{c} \uparrow T \\ A \end{array} = \begin{array}{ccc} & H & A \\ X & \xleftarrow{\xi} & A \\ & \swarrow H & \downarrow \xi \\ & H & A \end{array} \quad \begin{array}{c} \uparrow T \\ A \end{array}$$

明らかにこのような F は一意である .

$\langle H, \xi \rangle, \langle H', \xi' \rangle$ を右 T -加群として , 自然変換 σ が次の等式を満たすとする .

$$\begin{array}{ccc} & H & A \\ X & \xleftarrow{\sigma} & A \\ & \swarrow H' & \downarrow \xi' \\ & H' & A \end{array} \quad \begin{array}{c} \uparrow T \\ A \end{array} = \begin{array}{ccc} & H & A \\ X & \xleftarrow{\xi} & A \\ & \swarrow H & \downarrow \xi \\ & H & A \end{array} \quad \begin{array}{c} \uparrow T \\ A \end{array}$$

$\langle H, \xi \rangle, \langle H', \xi' \rangle$ に対して上記方法で $F, F': A_T \rightarrow X$ を定義する . このとき $\tau: F \rightarrow F'$ を $\tau_a := \sigma_a: Fa = Ha \rightarrow H'a = F'a$ で定める . すると明らかに $\tau \circ F_T = \sigma$ であり , このような τ は一意である .

以上により $\langle F_T, \varphi \rangle$ が普遍右 T -加群であって , A_T が Kleisli 対象であることが分かった . □

定義 . t をコモナドとする . \mathcal{C}^{co} での左 t -加群を左 t -余加群という .

$$\begin{array}{ccc} & h & a \\ x & \xrightarrow{\xi} & a \\ & \swarrow h & \downarrow t \\ & h & a \end{array}$$

\mathcal{C}^{co} での普遍左 t -加群を普遍左 t -余加群という .

補題 11. $\langle a, t, \mu, \eta \rangle$ をモナド , $f: a \rightarrow b$ を 1-morphism として , 左 Kan 拡張 $\langle (f \circ t)^\dagger f, \eta' \rangle$ が存在するとする .

$$\begin{array}{ccc} a & \xrightarrow{f} & b \\ t \uparrow & \uparrow \eta' & \downarrow (f \circ t)^\dagger f \\ a & \xrightarrow{f} & b \end{array}$$

このとき $(f \circ t)^\dagger f$ はコモナドになる .

証明. Kan 拡張の普遍性により次の図式の μ', ε を取る .

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{ccc} a & \xrightarrow{f} & b \\ t \uparrow & \uparrow \eta' & \downarrow (f \circ t)^\dagger f \\ a & \xrightarrow{f} & b \end{array} & \begin{array}{ccc} a & \xrightarrow{f} & b \\ \mu' \searrow & & \swarrow (f \circ t)^\dagger f \\ b & & b \end{array} & = & \begin{array}{ccc} a & \xrightarrow{f} & b \\ t \uparrow & \uparrow \eta' & \downarrow (f \circ t)^\dagger f \\ a & \xrightarrow{f} & b \end{array} \\ & & & & \begin{array}{ccc} a & \xrightarrow{f} & b \\ \mu \swarrow & & \searrow (f \circ t)^\dagger f \\ a & \xrightarrow{f} & b \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{ccc} a & \xrightarrow{f} & b \\ t \uparrow & \uparrow \eta' & \downarrow (f \circ t)^\dagger f \\ a & \xrightarrow{f} & b \end{array} & \begin{array}{ccc} a & \xrightarrow{f} & b \\ \varepsilon \searrow & & \swarrow \text{id}_b \\ b & & b \end{array} & \text{id}_b & = & \begin{array}{ccc} a & \xrightarrow{f} & b \\ \eta \swarrow & & \searrow \text{id}_a \\ a & \xrightarrow{f} & b \end{array} \begin{array}{ccc} a & \xrightarrow{f} & b \\ \uparrow \text{id}_f & & \downarrow \text{id}_b \\ a & \xrightarrow{f} & b \end{array} \end{array}$$

このとき $\langle a, (f \circ t)^\dagger f, \mu', \varepsilon \rangle$ がコモナドとなることが分かる . □

定理 12. \mathcal{C} に米田構造が入っているとする . a を admissible で $t: a \rightarrow a$ をモナドとする . このとき前補題により $t^{-1} = (y_a \circ t)^\dagger y_a$ はコモナドである . 次の図式の $\langle v, \psi \rangle$ を普遍左 t^{-1} -余加群とする .

$$\begin{array}{ccc} & & \hat{a} \\ & v \nearrow & \downarrow t^{-1} \\ c & \xrightarrow{\psi} & \hat{a} \\ & v \searrow & \downarrow t^{-1} \\ & & \hat{a} \end{array}$$

このとき $e \in \mathcal{C}$ が t の Eilenberg-Moore 対象 \iff 次の形の pullback が存在する .

$$\begin{array}{ccc} e & \longrightarrow & c \\ \downarrow & & \downarrow v \\ a & \xrightarrow{y_a} & \widehat{a} \end{array}$$

証明. (\implies) $\langle u^t: a^t \rightarrow a, \varphi \rangle$ を普遍左 t -加群とする . $a(t, 1) \cong t^{-1} \circ a(1, 1) = t^{-1} \circ y_a$ だった . 次の 2-morphism の合成を θ とする .

$$\begin{array}{ccccc} & & a & \xrightarrow{y_a} & \widehat{a} \\ & u^t \nearrow & \uparrow t & \searrow \cong & \downarrow t^{-1} \\ a^t & & \varphi \Uparrow & & a(t, 1) \\ & u^t \searrow & \uparrow \chi^t & \xrightarrow{y_a} & \widehat{a} \end{array}$$

$\langle y_a \circ u^t, \theta \rangle$ は t^{-1} -余代数である . よって普遍 t^{-1} -余代数 $\langle v, \psi \rangle$ の普遍性から次の $f: a^t \rightarrow c$ が存在する .

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{ccc} a^t & \xrightarrow{u^t} & a \\ & \dashrightarrow f & \parallel \\ & & c \\ & \xrightarrow{u^t} & a \end{array} & \begin{array}{ccc} a & \xrightarrow{y_a} & \widehat{a} \\ & \searrow v & \parallel \\ & & \psi \Uparrow \\ & \xrightarrow{y_a} & \widehat{a} \end{array} & = & \begin{array}{ccc} a^t & \xrightarrow{u^t} & a \\ & \searrow \varphi \Uparrow & \uparrow t \\ & & a(t, 1) \\ & \xrightarrow{u^t} & a \end{array} & \begin{array}{ccc} a & \xrightarrow{y_a} & \widehat{a} \\ & \searrow \cong & \parallel \\ & & a(t, 1) \\ & \xrightarrow{y_a} & \widehat{a} \end{array} \end{array}$$

このとき左辺の左下の四角が pullback であることを示せばよい . そこで次の図式の x を取る .

$$\begin{array}{ccc} & & x \\ & \searrow q_1 & \downarrow q_0 \\ & & a^t \xrightarrow{f} c \\ & & \downarrow u^t \quad \downarrow v \\ & & a \xrightarrow{y_a} \widehat{a} \end{array}$$

このとき次の図式を得るが , これは t^{-1} -余代数を与える .

$$\begin{array}{ccc} & & a & \xrightarrow{y_a} & \widehat{a} \\ & q_0 \nearrow & \parallel & \searrow v & \downarrow t^{-1} \\ x & & q_1 \rightarrow & c & \psi \Uparrow \\ & q_0 \searrow & \parallel & \xrightarrow{y_a} & \widehat{a} \end{array}$$

絶対左 Kan リフト $a(t, 1) \dashv y_a = \langle t, \chi^t \rangle$ の普遍性から次の ξ を得る .

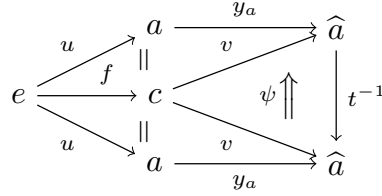
すると $\langle q_0, \xi \rangle$ は左 t -加群である . よって a^t の普遍性から $r: x \rightarrow a^t$ が一意に存在して次の等式が成り立つ .

故に $u^t \circ r = q_0$ であるから , $f \circ r = q_1$ を示せばよい .

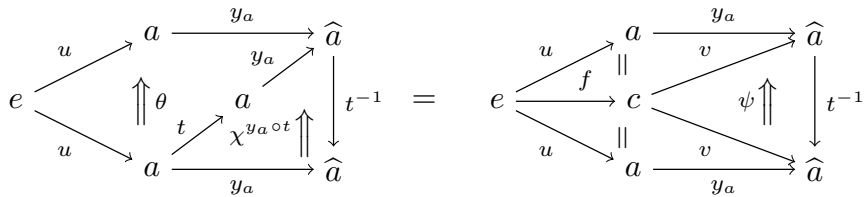
それは定義から $v \circ f \circ r = y_a \circ u^t \circ r = y_a \circ q_0 = v \circ q_1$ となるので , v の普遍性から $f \circ r = q_1$ が分かる .

(\Leftarrow) 次の図式を pullback とする .

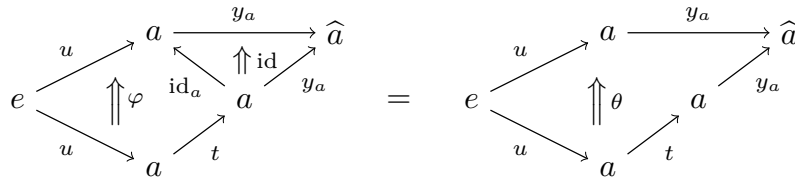
次の合成は t^{-1} -余代数である .



$t_{\dagger}^{-1}y_a = \langle y_a \circ t, \chi^{y_a \circ t} \rangle$ が絶対左 Kan リフトだから次の等式を満たす θ を得る .

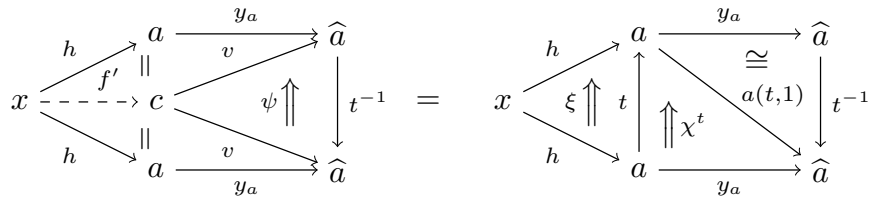


$y_a \dagger y_a = \langle \text{id}_a, \text{id}_{y_a} \rangle$ が絶対左 Kan リフトだから , 次の等式が成り立つ φ が取れる .

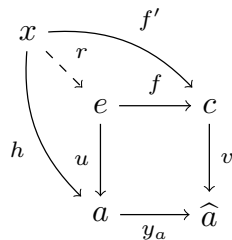


この $\langle u, \varphi \rangle$ は左 t -加群である .

$\langle u, \varphi \rangle$ が普遍左 t -加群であることを示すため , $\langle h: x \rightarrow a, \xi \rangle$ を左 t -加群とする . \implies の証明で $\langle u^t, \varphi \rangle$ から f を得たのと同じ方法で , 次の f' を得る .



左辺の左下の四角が可換で , e が pullback だったから射 $r: x \rightarrow e$ が一意に存在して次の図式が可換となる .



このとき，次の等式が成り立つことを示せばよい．

$$\begin{array}{ccc}
 & h & \\
 & \nearrow & \\
 x & \xrightarrow{r} e & \xrightarrow{u} a \\
 & \parallel & \parallel \\
 & \xrightarrow{h} & \xrightarrow{u} a \\
 & \searrow & \\
 & h & \\
 & \xrightarrow{h} & \\
 & \searrow & \\
 & & a \\
 & & \downarrow t \\
 & & a
 \end{array}
 =
 \begin{array}{ccc}
 & h & \\
 & \nearrow & \\
 x & \xrightarrow{\xi} & a \\
 & \parallel & \parallel \\
 & \xrightarrow{h} & \xrightarrow{u} a \\
 & \searrow & \\
 & h & \\
 & \xrightarrow{h} & \\
 & \searrow & \\
 & & a \\
 & & \downarrow t \\
 & & a
 \end{array}$$

それは

$$\begin{array}{ccc}
 & h & \\
 & \nearrow & \\
 x & \xrightarrow{r} e & \xrightarrow{u} a \\
 & \parallel & \parallel \\
 & \xrightarrow{h} & \xrightarrow{u} a \\
 & \searrow & \\
 & h & \\
 & \xrightarrow{h} & \\
 & \searrow & \\
 & & a \\
 & & \xrightarrow{y_a} \widehat{a} \\
 & & \parallel \\
 & & a(t,1) \\
 & & \downarrow t^{-1} \\
 & & \widehat{a}
 \end{array}
 =
 \begin{array}{ccc}
 & h & \\
 & \nearrow & \\
 x & \xrightarrow{r} e & \xrightarrow{u} a \\
 & \parallel & \parallel \\
 & \xrightarrow{h} & \xrightarrow{u} a \\
 & \searrow & \\
 & h & \\
 & \xrightarrow{h} & \\
 & \searrow & \\
 & & a \\
 & & \xrightarrow{y_a} \widehat{a} \\
 & & \parallel \\
 & & a \\
 & & \uparrow \text{id}_a \\
 & & a \\
 & & \uparrow \text{id}_a \\
 & & a \\
 & & \xrightarrow{y_a} \widehat{a} \\
 & & \parallel \\
 & & a(t,1) \\
 & & \downarrow t^{-1} \\
 & & \widehat{a}
 \end{array}
 =
 \begin{array}{ccc}
 & h & \\
 & \nearrow & \\
 x & \xrightarrow{r} e & \xrightarrow{f} c \\
 & \parallel & \parallel \\
 & \xrightarrow{h} & \xrightarrow{u} a \\
 & \searrow & \\
 & h & \\
 & \xrightarrow{h} & \\
 & \searrow & \\
 & & a \\
 & & \xrightarrow{y_a} \widehat{a} \\
 & & \parallel \\
 & & a \\
 & & \uparrow \psi \\
 & & c \\
 & & \xrightarrow{v} \widehat{a} \\
 & & \parallel \\
 & & a(t,1) \\
 & & \downarrow t^{-1} \\
 & & \widehat{a}
 \end{array}
 =
 \begin{array}{ccc}
 & h & \\
 & \nearrow & \\
 x & \xrightarrow{f'} c & \xrightarrow{v} \widehat{a} \\
 & \parallel & \parallel \\
 & \xrightarrow{h} & \xrightarrow{u} a \\
 & \searrow & \\
 & h & \\
 & \xrightarrow{h} & \\
 & \searrow & \\
 & & a \\
 & & \xrightarrow{y_a} \widehat{a} \\
 & & \parallel \\
 & & a \\
 & & \uparrow \psi \\
 & & c \\
 & & \xrightarrow{v} \widehat{a} \\
 & & \parallel \\
 & & a(t,1) \\
 & & \downarrow t^{-1} \\
 & & \widehat{a}
 \end{array}
 =
 \begin{array}{ccc}
 & h & \\
 & \nearrow & \\
 x & \xrightarrow{\xi} & a \\
 & \parallel & \parallel \\
 & \xrightarrow{h} & \xrightarrow{u} a \\
 & \searrow & \\
 & h & \\
 & \xrightarrow{h} & \\
 & \searrow & \\
 & & a \\
 & & \xrightarrow{y_a} \widehat{a} \\
 & & \parallel \\
 & & a(t,1) \\
 & & \downarrow t^{-1} \\
 & & \widehat{a}
 \end{array}$$

となるから，絶対左 Kan リフト $a(t,1) \dashv y_a = \langle t, \chi^t \rangle$ の普遍性から分かる． □

参考文献

- [1] Ross Street, The formal theory of monads, Journal of Pure and Applied Algebra 2, Issue 2 (1972), 149–168, [http://dx.doi.org/10.1016/0022-4049\(72\)90019-9](http://dx.doi.org/10.1016/0022-4049(72)90019-9)
- [2] Ross Street and R.F.C. Walters, Yoneda Structures on 2-categories, J. Algebra 50 (1978), 350–379