

圏の「対数」

alg-d

https://alg-d.com/math/kan_extension/

2025年1月22日

圏 C に対して、 $C \simeq \mathbf{Set}^D$ となるような圏 D を C の「対数」ということにすれば、このような「対数」がいつ存在するかは既に分かっている（「Kan 拡張」の PDF を参照）。ここではそれとは違った観点から「対数」を考える*¹。

まず実数の場合について復習しておく。実数の和と積は可換であり、分配法則

$$(a + b) \times c = a \times c + b \times c$$

を満たすのであった。同様に積と冪も分配法則

$$(a \times b)^c = a^c \times b^c$$

を満たす。しかし積とは違って冪 a^b は非可換である。ところが実は、「冪」の定義を少し変えると、分配法則と可換性両方が成り立つようにすることができる。それには演算 $a * b$ を $a * b := a^{\log b}$ と定義すればよい。これは容易に分かるように

$$(a \times b) * c = (a * c) \times (b * c), \quad a * b = b * a$$

を満たす。

さて、圏の直和を和、直積を積と思えば、圏の場合もこれらは可換であり、分配法則

$$(A \amalg B) \times C \cong (A \times C) \amalg (B \times C)$$

が成り立つが、上記の演算 $*$ についても、圏バージョンを考えることができる。

命題 1. C, D を圏、 $F \dashv G: C \rightarrow D$ 、 $F' \dashv G': C \rightarrow D$ を随伴関手とする。このとき自然変換 $F \Rightarrow F'$ と $G' \Rightarrow G$ は 1 対 1 に対応する。

*¹ これは、以前 S さんに教えてもらった内容 [1] を文書化したものです。S さん、ありがとうございます。

証明. 随伴 $F \dashv G, F' \dashv G'$ の unit をそれぞれ η, η' とする. このとき $G \dashv \text{id}_C \cong F, F' \dashv \text{id}_C \cong G'$ である. よって左 Kan 拡張, 左 Kan リフトの普遍性から, 等式

$$\begin{array}{ccc}
 & D & \\
 F' \nearrow & & \searrow G \\
 C & \xrightarrow{\text{id}_C} & C \\
 & \nwarrow \varphi & \nearrow \eta \\
 & F & \\
 & & \\
 & D & \\
 F' \nearrow & & \searrow G \\
 C & \xrightarrow{\text{id}_C} & C \\
 & \nwarrow \eta' & \nearrow \psi \\
 & G' &
 \end{array} =$$

により $\varphi: F \Rightarrow F'$ と $\psi: G' \Rightarrow G$ が 1 対 1 に対応する. (即ち, 任意の φ に対して, 一意に ψ が存在して等式が成立し, また任意の ψ に対して一意に φ が存在して等式が成り立つ.) \square

そこで, 随伴の圏 $\text{Adj}(C, D)$ を次のように定義することができる.

定義. 圏 C, D に対して, 圏 $\text{Adj}(C, D)$ を

- $\text{Ob}(\text{Adj}(C, D)) := \{F \dashv G: C \rightarrow D\}$ とする.
- $\text{Hom}_{\text{Adj}(C, D)}(F \dashv G, F' \dashv G') := \text{Hom}_{D^C}(F, F') \cong \text{Hom}_{C^D}(G', G)$ とする.

により定める.

これを使うことで圏バージョンの $*$ を定義することができる.

定義. 圏 C, D に対して $C * D := \text{Adj}(C, D^{\text{op}})^{\text{op}}$ と定める.

命題 2. $C * D \cong D * C$ である.

証明. $\text{Adj}(C, D) \cong \text{Adj}(D^{\text{op}}, C^{\text{op}})$ だから

$$C * D = \text{Adj}(C, D^{\text{op}})^{\text{op}} \cong \text{Adj}(D, C^{\text{op}})^{\text{op}} = D * C$$

である. \square

命題 3. A, B, C を圏として, A, B は始対象 0 を持ち, C は 2 項余直積を持つとする. このとき $(A \times B) * C \simeq (A * C) \times (B * C)$ である.

証明. 示すべき圏同値は $\text{Adj}(A \times B, C^{\text{op}})^{\text{op}} \simeq \text{Adj}(A, C^{\text{op}})^{\text{op}} \times \text{Adj}(B, C^{\text{op}})^{\text{op}}$ だから $\text{Adj}(A \times B, C) \simeq \text{Adj}(A, C) \times \text{Adj}(B, C)$ を示せばよい.

$P_0: A \times B \rightarrow A, P_1: A \times B \rightarrow B$ を射影とする. P_0, P_1 は左随伴 L_0, L_1 を持つ.

∴) $0 \dashv! : \mathbb{1} \rightarrow B$ だから $A \cong A \times \mathbb{1} \xrightarrow{\text{id}_A \times 0} A \times B$ を L_0 とすれば $L_0 \dashv P_0$ である。
 L_1 についても同様.

よって関数

$$\begin{array}{ccc}
 X: \text{Ob}(\text{Adj}(A \times B, C)) & \longrightarrow & \text{Ob}(\text{Adj}(A, C) \times \text{Adj}(B, C)) \\
 \Downarrow & & \Downarrow \\
 (L \dashv R) & \longmapsto & \langle LL_0 \dashv P_0 R, LL_1 \dashv P_1 R \rangle
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 & & C \\
 & L \uparrow & \downarrow R \\
 & \dashv & \\
 L_0 \nearrow & A \times B & \searrow P_1 \\
 \downarrow & & \uparrow \\
 A \xleftarrow{P_0} & & L_1 \xrightarrow{B}
 \end{array}$$

が得られる。これは関手になる。逆向きの関数

$$\begin{array}{ccc}
 Y: \text{Ob}(\text{Adj}(A, C) \times \text{Adj}(B, C)) & \longrightarrow & \text{Ob}(\text{Adj}(A \times B, C)) \\
 \Downarrow & & \Downarrow \\
 \langle L_0 \dashv R_0, L_1 \dashv R_1 \rangle & \longmapsto & (\amalg \circ (L_0 \times L_1) \dashv (R_0 \times R_1) \circ \Delta) \\
 A \times B & \xrightarrow[\leftarrow]{\begin{array}{c} L_0 \times L_1 \\ \perp \\ R_0 \times R_1 \end{array}} & C \times C \xrightarrow[\leftarrow]{\begin{array}{c} \amalg \\ \perp \\ \Delta \end{array}} C
 \end{array}$$

も得られる。これも関手になる。これらは互いに逆の関手を与える。

∴) $L \dashv R: A \times B \rightarrow C$ とすると

$$\begin{aligned}
 YX(L \dashv R) &= Y(LL_0 \dashv P_0 R, LL_1 \dashv P_1 R) \\
 &= (\amalg \circ (LL_0 \times LL_1) \dashv (P_0 R \times P_1 R) \circ \Delta)
 \end{aligned}$$

である。 $a \in A, b \in B$ に対して

$$\begin{aligned}
 \amalg \circ (LL_0 \times LL_1)(a, b) &= LL_0(a) \amalg LL_1(b) \\
 &= L(a, 0) \amalg L(0, b) \\
 &\cong L(a, b)
 \end{aligned}$$

であり, $c \in C$ に対して

$$(P_0 R \times P_1 R) \circ \Delta(c) = \langle P_0 R(c), P_1 R(c) \rangle = R(c)$$

だから $YX(L \dashv R) \cong (L \dashv R)$ である. 一方

$$\begin{aligned} XY(L_0 \dashv R_0, L_1 \dashv R_1) &= X(\Pi \circ (L_0 \times L_1) \dashv (R_0 \times R_1) \circ \Delta) \\ &= \langle \Pi \circ (L_0 \times L_1) \circ L_0 \dashv P_0 \circ (R_0 \times R_1) \circ \Delta, \\ &\quad \Pi \circ (L_0 \times L_1) \circ L_1 \dashv P_1 \circ (R_0 \times R_1) \circ \Delta \rangle \end{aligned}$$

であり, $a \in A, b \in B, c \in C$ に対して

$$\begin{aligned} \Pi \circ (L_0 \times L_1) \circ L_0(a) &= L_0(a) \amalg L_1(0) \\ &\cong L_0(a) \amalg 0 \\ &\cong L_0(a) \\ P_0 \circ (R_0 \times R_1) \circ \Delta(c) &= P_0(R_0(c), R_1(c)) \\ &= R_0(c) \\ \Pi \circ (L_0 \times L_1) \circ L_1(b) &= L_0(0) \amalg L_1(b) \\ &\cong 0 \amalg L_1(b) \\ &\cong L_1(b) \\ P_1 \circ (R_0 \times R_1) \circ \Delta(c) &= P_1(R_0(c), R_1(c)) \\ &= R_1(c) \end{aligned}$$

より $XY(L_0 \dashv R_0, L_1 \dashv R_1) \cong \langle L_0 \dashv R_0, L_1 \dashv R_1 \rangle$ である.

従って $\text{Adj}(A \times B, C) \simeq \text{Adj}(A, C) \times \text{Adj}(B, C)$ が分かる. \square

つまり今定義した $C * D$ という演算は可換でかつ (ある程度の条件の下で) 積に対して分配法則が成り立つ. よってこれは実数の場合の $*$ の圏バージョンであると考えられることができる. そこで, 実数の場合に倣って $C^{\log(D)} := C * D = \text{Adj}(C, D^{\text{op}})^{\text{op}}$ と書くことにする*2.

命題 4. A, B, C を圏として, A は 2 項余直積を持ち B, C は始対象 0 を持つとする. このとき $A^{\log(B \times C)} \simeq A^{\log(B)} \times A^{\log(C)}$ である. (この意味で $\log(B \times C) = \log(B) + \log(C)$ と思うことができる.)

証明. 命題 3 から明らか. \square

命題 5. 圏 A が終対象を持つとき $A^{\log(\mathbb{1})} \simeq \mathbb{1}$ である. (この意味で $\log(\mathbb{1}) = 0$ と思うことができる.)

*2 $C^{\log(D)}$ で 1 つの記号であり, $\log(D)$ が定義されるわけではない.

証明. A が終対象 1 を持つから $\text{Adj}(A, \mathbb{1}) \simeq \{! \dashv 1: A \rightarrow \mathbb{1}\} = \mathbb{1}$ となる. 従ってこの場合 $A^{\log(\mathbb{1})} = \text{Adj}(A, \mathbb{1}^{\text{op}})^{\text{op}} \simeq \mathbb{1}$ である. \square

命題 6. $A \neq \mathbb{0}$ のとき $A^{\log(\mathbb{0})} = \mathbb{0}$ である.

証明. $A(\neq \mathbb{0})$ から $\mathbb{0}$ への関手は存在しないから $A^{\log(\mathbb{0})} = \text{Adj}(A, \mathbb{0}^{\text{op}})^{\text{op}} = \mathbb{0}$. \square

命題 7. U が余完備のとき, $U^{\log(\mathbf{Set}^C)} \simeq U^C$ である. (この意味で $\log(\mathbf{Set}^C) = C$ と思うことができる.)

証明. 示すべき圏同値は $\text{Adj}(\mathbf{Set}^C, U^{\text{op}})^{\text{op}} \simeq U^C$ だから $\text{Adj}(\mathbf{Set}^{C^{\text{op}}}, U^{\text{op}}) \simeq (U^{\text{op}})^{C^{\text{op}}}$ を示せばよい. 即ち $\text{Adj}(\widehat{C}, U) \simeq U^C$ を示せばよい.

米田埋込 $y: C \rightarrow \widehat{C}$ により関手 $y^\dagger: U^C \rightarrow U^{\widehat{C}}$ が得られる.

$$\begin{array}{ccc}
 \widehat{C} & & \\
 \uparrow y & \swarrow y^\dagger F & \\
 C & \xrightarrow{F} & U
 \end{array}$$

普遍随伴により $y^\dagger: U^C \rightarrow \text{Adj}(\widehat{C}, U)$ であり, これは本質的全射である. y が忠実充満だから y^\dagger も忠実充満で, 故に y^\dagger は圏同値である. \square

命題 8. 圏 U が余完備のとき $\mathbf{Set}^{\log(U)} \simeq U$ である. (これは $e^{\log x} = x$ に対応する.)

証明. 命題 7 により $\mathbf{Set}^{\log(U)} \cong U^{\log(\mathbf{Set})} \simeq U$ である. \square

参考文献

[1] ft_math さんによる圏論祭, 2012 年 12 月 8 日, https://alg-d.com/math/ft_math/