$\mathbf{Set}^{\mathbf{Set}}$ は局所小ではない

alg-d
https://alg-d.com/math/kan_extension/

2025 年 1 月 13 日

この PDF では $\mathbf{Set}^{\mathbf{Set}}$ が局所小圏でないこと (系 6) を証明する．

C を (局所小とは限らない) 圏，$a \in C$ を対象する．これから 3 つの集まり $\mathrm{Idem}(a)$, $\mathrm{Ret}(a)$，$\mathrm{Ssub}(a)$ を定義する．まずは $\mathrm{Idem}(a)$ は次のように定める．

定義． $\mathrm{Idem}(a) := \{f \colon a \to a \mid f \circ f = f\}$ と定める．

次に $\mathrm{Ret}(a)$ を定義する．まず対象 $a \in C$ の retraction pair とは，3 つ組 $\langle u, i, r\rangle$ であって以下の条件を満たすものをいう．

(1) $u \in C$ は対象である．
(2) $i \colon u \to a$ と $r \colon a \to u$ は C の射である．
(3) $r \circ i = \mathrm{id}_u$ である．

$a \in C$ の retraction pair $\langle u, i, r\rangle$，$\langle v, j, s\rangle$ に対して，同値関係 $\sim$ を

$$\langle u, i, r\rangle \sim \langle v, j, s\rangle \iff \text{ある同型 } h \colon u \to v \text{ が存在して次の図式が可換になる．}$$

$$\begin{tikzcd} & u \arrow[dr, "i"] \arrow[dd, dashed, "h", "\wr"'] & \\ a \arrow[ur, "r"] \arrow[dr, "s"'] & & a \\ & v \arrow[ur, "j"'] & \end{tikzcd}$$

と定める．$a \in C$ の retraction pair $\langle u, i, r\rangle$ の属する同値類を $[u, i, r]$ と書く．

定義． $a \in C$ の retraction pair の同値類全体を $\mathrm{Ret}(a)$ と書く．

最後に $\mathrm{Ssub}(a)$ を定義する．C の射 $i \colon u \to a$ が分裂モノ射とは，ある $r \colon a \to u$ が存

在して $r \circ i = \mathrm{id}_u$ となることをいう．$i\colon u \to a$, $j\colon v \to a$ が分裂モノ射のとき，その間の同値関係 $\sim$ を

$$i \sim j \iff \text{ある同型 } h\colon u \to v \text{ が存在して次の図式が可換になる．}$$

$$\begin{tikzcd}
u \arrow[rd, "i"] \arrow[dd, dashed, "h", "\wr"'] & \\
& a \\
v \arrow[ru, "j"'] &
\end{tikzcd}$$

と定める．分裂モノ射 i の属する同値類を $[i]$ と書く．

定義． コドメインを a とする分裂モノ射の同値類全体を $\mathrm{Ssub}(a)$ と書く．

これらの集まりの間には次のような関係がある．

命題 1． C が局所小圏ならば $\mathrm{Idem}(a)$ は集合である． □

命題 2． $\mathrm{Idem}(a)$ が集合ならば $\mathrm{Ret}(a)$ も集合である[*1]．

証明. $[u, i, r] \in \mathrm{Ret}(a)$ に対して $F([u, i, r]) := i \circ r$ と定める．これは well-defined であり $F([u, i, r]) \in \mathrm{Idem}(a)$ となる．よってこれは関数 $F\colon \mathrm{Ret}(a) \to \mathrm{Idem}(a)$ を定める．これは単射であることが分かる (i が $i \circ r$ と id の equalizer になることから分かる)． □

命題 3． $\mathrm{Ret}(a)$ が集合ならば $\mathrm{Ssub}(a)$ も集合である．

証明. $\langle u, i, r \rangle$ が retraction pair であるとすると $i\colon u \to a$ は分裂モノ射である．よって $[u, i, r] \in \mathrm{Ret}(a)$ に対して $F([u, i, r]) := [i] \in \mathrm{Ssub}(a)$ と定義すると，これは well-defined である．この F は明らかに全射である． □

定義． 圏 C が small idempotency を持つ
$\iff$ 任意の $a \in C$ に対して $\mathrm{Idem}(a)$ が集合である．

上で述べた命題により，圏 C が small idempotency を持つとき $\mathrm{Idem}(a)$ も $\mathrm{Ret}(a)$ も $\mathrm{Ssub}(a)$ も集合である．

C は small idempotency を持つとする．関手 $F\colon C \to \mathbf{Set}$ を次により定義する．

- $a \in C$ に対して $Fa := \mathrm{Ssub}(a) \amalg \{*\}$ とする．

[*1] 厳密にいえば $\mathrm{Ret}(a)$ が集合であるというのは ZFC としてはおかしい言葉だが，意味は通じると思うためここでは単に集合であると書く．

- $f\colon a \to b$ に対して写像 $Ff\colon Fa \to Fb$ を次により定める．
  - ⋆ $[i] \in \mathrm{Ssub}(a)$ で $f \circ i$ が分裂モノ射のとき $Ff([i]) := [f \circ i]$ とする．
  - ⋆ それ以外の $x \in Fa$ に対しては $Ff(x) := *$ とする．

このとき $s, a \in C$ に対して写像 $\theta(s)_a\colon Fa \to Fa$ を次のようにして定める．

- $[i] \in \mathrm{Ssub}(a)$ が $\mathrm{dom}(i) \cong s$ を満たすときは $\theta(s)_a([i]) := [i]$ とする．
- それ以外の $x \in Fa$ に対しては $\theta(s)_a(x) := *$ とする．

これは自然変換 $\theta(s)\colon F \Rightarrow F$ を与える．明らかに $s \cong t$ のときは $\theta(s) = \theta(t)$ である．実は逆も成り立つ．

∵) $\theta(s) = \theta(t)$ とする．このとき定義より

$$\theta(s)_t([\mathrm{id}_t]) = \theta(t)_t([\mathrm{id}_t]) = [\mathrm{id}_t] \neq *$$

となるから，$\theta(s)_t([\mathrm{id}_t]) \neq *$ となるためには $s \cong t$ でなければならない．

また定義から明らかに $\theta(s) \circ \theta(s) = \theta(s)$ である．即ち θ は単射 $\mathrm{Ob}(C)/{\cong} \to \mathrm{Idem}(F)$ を定める．従って $\mathrm{Idem}(F)$ が集合であれば，C の骨格は小圏である．

以上により次の定理が示せた．

定理 4. C と $\mathbf{Set}^C$ が small idempotency を持つとき C は小圏と圏同値である． □

局所小圏は明らかに small idempotency を持つので，次の定理が分かる．

定理 5. 圏 C が小圏と圏同値である $\iff$ C と $\mathbf{Set}^C$ は局所小圏である． □

系 6. $\mathbf{Set}^{\mathbf{Set}}$ は局所小ではない． □

ちなみに次の命題が成り立つ．

命題 7. 直積を持つ圏 C に対しては，局所小であることと small idempotency を持つことは同値である．

証明. 逆は明らかなので，small idempotency を持つならば局所小であることを示す．そこで $f\colon a \to b$ を C の射としたとき，直積の普遍性により得られる次の点線の射を h_f と

する.

$$\begin{tikzcd}
& a \arrow[d, dashed, "h_f"] \arrow[ddl, bend right, "\mathrm{id}_a"'] \arrow[ddr, bend left, "f"] & \\
& a \times b \arrow[dl, "p_0"] \arrow[dr, "p_1"'] & \\
a & & b
\end{tikzcd}$$

このとき $[a, h_f, p_0] \in \mathrm{Ret}(a \times b)$ である．これは単射 $\mathrm{Hom}_C(a, b) \to \mathrm{Ret}(a \times b)$ を与える． □

参考文献

[1] P. Freyd and R. Street, on the size of Categories,Theory and Applications of Categories, Vol. 1, No. 9 (1995), 174–178, `http://www.tac.mta.ca/tac/volumes/1995/n9/1-09abs.html`