

local set theory

alg-d

https://alg-d.com/math/kan_extension/

2025 年 8 月 6 日

この PDF では local set theory というものを導入し，圏論と論理の関係について解説する．数学基礎論についてはある程度慣れていることを想定するため，そうでない読者は [1] も参照のこと．

目次

1	定義	2
2	形式的証明の基本的性質	6
2.1	$\leftrightarrow$ について	8
2.2	$\top$ について	9
2.3	$\wedge$ について	10
2.4	$\rightarrow$ について	11
2.5	$\{x \mid \varphi\}$ について	13
2.6	$\forall$ について	14
2.7	$\perp$ について	16
2.8	$\neg$ について	16
2.9	$\vee$ について	18
2.10	$\exists$ について	20
2.11	$\exists!$ について	22
3	local set theory による集合論	24
3.1	自然数について	27

3.2	選択公理と排中律について	32
4	トポスの準備	40
5	local set theory が定めるトポス	45
6	トポスによる local set theory の解釈	50
6.1	定義	50
6.2	基本的性質	52
6.3	健全性定理	60
6.4	完全性定理	67
7	トポスが定める local set theory	70

1 定義

定義. 型記号と呼ばれる記号と, 関数記号と呼ばれる記号からなる集合 L を局所言語という.

局所言語 L に含まれない特別な記号として $I, \Omega, P, \times$ などを用意しておく.

定義. 局所言語 L の型とは, 以下により定まるものをいう.

- (1) I と Ω は型である^{*1}.
- (2) L に属する型記号は型である.
- (3) $n \geq 2$ で $A_1, \dots, A_n$ が型ならば $(A_1) \times \dots \times (A_n)$ も型である.
- (4) A が型ならば $P(A)$ も型である.
- (5) 以上により得られるもののみが型である.

以下読みやすくするため, 括弧は適当に省略したり, $()$ の代わりに $[]$ を使ったりする. また $A_1 \times \dots \times A_n$ という記号は $n = 0, 1$ の場合も使用し, $n = 0$ の場合は I , $n = 1$ の場合は A_1 を表すものとする.

更に局所言語 L に対しては次のようになっているものとする.

^{*1} この型 I は普通 1 と書くが, これだと自然数や終対象を表す 1 と区別しづらいと思ったので, この PDF では I と書くことにする.

- L の型 A に対して、可算無限個の変数記号 $v_0^A, v_1^A, v_2^A, \dots$ が用意されているものとする。
- L に属する関数記号 f に対して「ドメインと呼ばれる型」と「コドメインと呼ばれる型」が与えられているものとする。 f のドメインが A でコドメインが B であることを記号では $f: A \rightarrow B$ と書くことにする。またこのときの記号 $A \rightarrow B$ を f のシグネチャと呼ぶ。

定義. 局所言語 L の項とその型とは、以下により定まるものをいう。

- (1) $*$ は I を型とする項である。
- (2) A が型のとき、変数記号 $v_0^A, v_1^A, v_2^A, \dots$ は A を型とする項である。
- (3) $f: A \rightarrow B$ が L の関数記号で t が A を型とする項のとき、 $f(t)$ は B を型とする項である。
- (4) $n \geq 2$ で $1 \leq i \leq n$ に対して t_i が型 A_i の項のとき、 $\langle t_1, \dots, t_n \rangle$ は型 $A_1 \times \dots \times A_n$ の項である。(また $n = 0$ の場合 $\langle t_1, \dots, t_n \rangle$ は $*$ を表し、 $n = 1$ の場合 $\langle t_1, \dots, t_n \rangle$ は t_1 を表すものとしておく。)
- (5) $n \geq 2$ で t が型 $A_1 \times \dots \times A_n$ の項のとき、 $1 \leq i \leq n$ に対して $q_i(t)$ は型 A_i の項である。
- (6) t が型 Ω の項のとき、 $\{v_i^A \mid t\}$ は型 PA の項である。
- (7) t, s が型 A の項のとき、 $t = s$ は型 Ω の項である。
- (8) t が型 A の項で s が型 PA の項のとき、 $t \in s$ は型 Ω の項である。
- (9) 以上により得られるもののみが項である。

定義. L -論理式とは型 Ω の項のことである。

以下では特に断らなくても、 t, s, r などの文字は一般の項を表し、 φ, ψ, χ などのギリシャ文字は L -論理式を表すことにする。また変数記号は $x^A, y^A, z^A, \dots$ などの文字で書く。右上に付いている型を表す記号は省略して、単に $x, y, z, \dots$ と書くことも多い。この場合、型については特に記述が無くても適切なものになっているものとする。例えば $x = y$ と書いてあれば、 x と y の型は等しいものとする。

これを踏まえて、まず L -論理式に対して以下の略記を導入する ($\equiv$ は項が文字列として等しいことを表す記号である)。

- $\varphi \leftrightarrow \psi \equiv \varphi = \psi$
- $\top \equiv * = *$

- $\varphi \wedge \psi \equiv \langle \varphi, \psi \rangle = \langle \top, \top \rangle$
- $\varphi \rightarrow \psi \equiv (\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow \varphi$
- $\forall x(\varphi) \equiv \{x \mid \varphi\} = \{x \mid \top\}$
- $\forall x \in t(\varphi) \equiv \forall x(x \in t \rightarrow \varphi)$
- $\perp \equiv \forall x^\Omega(x^\Omega)$
- $\neg\varphi \equiv \varphi \rightarrow \perp$
- $\varphi \vee \psi \equiv \forall y^\Omega([(\varphi \rightarrow y^\Omega) \wedge (\psi \rightarrow y^\Omega)] \rightarrow y^\Omega)$ (但し y^Ω は φ と ψ に現れない変数記号とする.)
- $\exists x \varphi \equiv \forall y^\Omega([\forall x(\varphi \rightarrow y^\Omega)] \rightarrow y^\Omega)$ (但し y^Ω は φ に現れない変数記号とする.)
- $\exists x \in t(\varphi) \equiv \exists x(x \in t \wedge \varphi)$
- $t \neq s \equiv \neg(t = s)$
- $t \notin s \equiv \neg(t \in s)$

項 t の中に現れる変数記号 x が束縛されているとは、 x が $\{x \mid \varphi\}$ の中に入っている変数記号であることをいう。そうでない x は自由変数という。例えば $t \equiv \langle \{x \mid x \in y\}, z \rangle$ の場合は x が束縛変数で y と z は自由変数である。また定義から、 $\forall x \varphi$ や $\exists x \varphi$ の形で出てくる x も束縛変数である。

項 t に現れる自由変数全体の集合を $\text{Var}(t)$ と書く。つまり先の例の場合は $\text{Var}(t) = \{y, z\}$ となる。また項の集合 X に対しては $\text{Var}(X) := \bigcup_{t \in X} \text{Var}(t)$ と書く。 $\text{Var}(t) = \emptyset$ のとき t を閉項と呼ぶ。

以下、項 t に対して $\text{Var}(t) = \{x_1, \dots, x_n\}$ などのような表示をした場合には、特に断らなくても $x_1, \dots, x_n$ は互いに異なるものと約束しておく。

x を変数記号、 t, s を項として、 s の型と x の型が等しいとする。このとき t の中の自由変数 x を s に置き換えてできる文字列を $t[x \rightsquigarrow s]$ で表す。 $t[x \rightsquigarrow s]$ も項であり、型は t と等しくなる (但し、自由変数が束縛変数になってしまうような代入は禁止する)。また t の中の自由変数 x を強調したいときは $t(x)$ のような書き方も使用する。この場合 $t(x)[x \rightsquigarrow s]$ のことを $t(s)$ と書く。またより一般に $t(x_1, \dots, x_n)$ のような書き方も使用する (このとき必ずしも全ての x_i が t の中に現れなくてもよいし、また x_i 以外の自由変数があってもよいものとする)。

X を項の集合とするとき $X[x \rightsquigarrow s] := \{t[x \rightsquigarrow s] \mid t \in X\}$ と書く。

代入を使って更に次の略記を導入する。

- $\exists! x \varphi \equiv \exists x(\varphi \wedge \forall y(\varphi[x \rightsquigarrow y] \rightarrow x = y))$ (但し y は x と異なる変数記号で、 φ に現れないとする.)

- $\exists! x \in t(\varphi) \equiv \exists! x (x \in t \wedge \varphi)$

以上により，通常使うような論理式は L -論理式として書くことができる．

次に L -論理式の証明を，いわゆるシークエント計算により定義する．

定義． L -論理式の有限集合 Γ と L -論理式 φ の組をシークエントといい $\Gamma : \varphi$ と書く．更に以下のような記法を使用する．

- $\Gamma \cup \Delta : \varphi$ のことを $\Gamma, \Delta : \varphi$ と書く．
- $\Gamma \cup \{\psi\} : \varphi$ のことを $\Gamma, \psi : \varphi$ または $\psi, \Gamma : \varphi$ と書く．
- $\{\varphi_1, \dots, \varphi_m\} : \varphi$ のことを $\varphi_1, \dots, \varphi_m : \varphi$ と書く．
- $\emptyset : \varphi$ のことを $: \varphi$ と書く．

また Var に対しても同様に，例えば $\text{Var}(X \cup \{t\})$ のことを $\text{Var}(X, t)$ と書いたりする．

定義．local set theory の基本公理とは，以下のシークエントをいう．

- (1) (Unity) : $x^{\mathbf{I}} = *$
- (2) (Equality 0) : $x = x$
- (3) (Equality 1) $x = y, \varphi[z \rightsquigarrow x] : \varphi[z \rightsquigarrow y]$
- (4) (Products 0) : $q_i(\langle x_1, \dots, x_n \rangle) = x_i$ (但し $n \geq 2$ とする．)
- (5) (Products 1) : $x = \langle q_1(x), \dots, q_n(x) \rangle$ (但し $n \geq 2$ とする．)
- (6) (Comprehension) : $x \in \{x \mid \varphi\} \leftrightarrow \varphi$

定義．local set theory の推論規則とは以下のものをいう．

- (1) (Thinning) $\frac{\Gamma : \varphi}{\Gamma, \psi : \varphi} \text{T}$
- (2) (Cut) $\frac{\Gamma : \varphi \quad \Gamma, \varphi : \psi}{\Gamma : \psi} \text{C} \star$ (但し $\text{Var}(\varphi) \subset \text{Var}(\gamma, \psi)$ とする．)
- (3) (Substitution) $\frac{\Gamma : \varphi}{\Gamma[x \rightsquigarrow t] : \varphi[x \rightsquigarrow t]} \text{S}(x \rightsquigarrow t)$
- (4) (Extensionality) $\frac{\Gamma : x \in t \leftrightarrow x \in s}{\Gamma : t = s} \text{Ex} \star$ (但し $x \notin \text{Var}(\Gamma, t, s)$ とする．)
- (5) (Equivalence) $\frac{\Gamma, \varphi : \psi \quad \Gamma, \psi : \varphi}{\Gamma : \varphi \leftrightarrow \psi} \text{Eq}$

但し，変数記号について何らかの条件が付いている場合は $\star$ を付けておくことにする．

※ Cut に不思議な条件が付いているが，これは健全性定理 (定理 6.12) を成り立たせ

るための条件である．詳しくは [2]3.26 の後の REMARK を参照．

これら推論規則を使って証明図を考えることができる．

定義. T をシークエントからなる集合とする．このとき次を満たす証明図が存在することを $\Gamma \vdash_T \varphi$ で表す．

- 一番下が $\Gamma : \varphi$ になっている．
- 一番上は全て「基本公理か T の元」になっている．

また $\Gamma \vdash_{\emptyset} \varphi$ を $\Gamma \vdash \varphi$ と書き, $\emptyset \vdash_T \varphi$ を $\vdash_T \varphi$ と書く．

定義. L を局所言語とする．シークエントの集合 S で次の条件を満たすものを local set theory という．

任意のシークエント $\Gamma : \varphi$ に対して「 $\Gamma \vdash_S \varphi \iff (\Gamma : \varphi) \in S$ 」となる．

T をシークエントの集合とするとき, $S := \{\Gamma : \varphi \mid \Gamma \vdash_T \varphi\}$ と定義すれば S は明らかに local set theory になる．これを T で生成される local set theory という． $\emptyset$ で生成される local set theory を pure local set theory という．

定義. local set theory S が無矛盾 $\iff \vdash_S \perp$ でない．

pure local set theory は無矛盾であることが定理 6.13 で分かる．

2 形式的証明の基本的性質

この節では $\Gamma \vdash \varphi$ が形式的証明の満たすべき性質を持っていることを確かめる．

命題 2.1. $\text{Var}(\varphi) \subset \text{Var}(\Gamma, \Delta, \psi)$ のとき $\frac{\Gamma : \varphi \quad \Delta, \varphi : \psi}{\Gamma, \Delta : \psi} C \star$ である (以下これも推論規則だと思って同じ記号 $C \star$ で表す)．

証明. Thinning と Cut を組み合わせて次のようにすればよい (但し Thinning の複数回の使用を 1 つの Thinning で書いている)．

$$\frac{\frac{\Gamma : \varphi}{\Gamma, \Delta : \varphi} T \quad \frac{\Delta, \varphi : \psi}{\Gamma, \Delta, \varphi : \psi} T}{\Gamma, \Delta : \psi} C \star$$

□

命題 2.2. $x = y \vdash y = x$ である.

証明. $\varphi(z) \equiv z = x$ とすると $\varphi(x) \equiv x = x$ だから, 次のようにして成り立つ.

$$\frac{\begin{array}{c} \text{基本公理} \\ : \varphi(x) \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{基本公理} \\ x = y, \varphi(x) : \varphi(y) \end{array}}{x = y : y = x} \text{C} \star$$

□

命題 2.3. $x = y, y = z \vdash x = z$ である.

証明. $\varphi(w) \equiv w = z$ とすると

$$\frac{\frac{}{x = y : y = x} \text{命題 2.2} \quad \begin{array}{c} \text{基本公理} \\ y = x, \varphi(y) : \varphi(x) \end{array}}{x = y, y = z : x = z} \text{C} \star$$

□

命題 2.4. $x_0 = x_1, y_0 = y_1 \vdash \langle x_0, y_0 \rangle = \langle x_1, y_1 \rangle$ である.

証明. まず $\varphi(x) \equiv \langle x_0, y_0 \rangle = \langle x, y_0 \rangle$ とすると, $\varphi(x_0) \equiv \langle x_0, y_0 \rangle = \langle x_0, y_0 \rangle$ だから

$$\frac{\begin{array}{c} \text{基本公理} \\ : z = z \end{array} \text{S}(z \rightsquigarrow \langle x_0, y_0 \rangle) \quad \begin{array}{c} \text{基本公理} \\ x_0 = x_1, \varphi(x_0) : \varphi(x_1) \end{array}}{\begin{array}{c} : \varphi(x_0) \\ x_0 = x_1 : \varphi(x_1) \end{array}} \text{C} \star$$

である. そこで $\psi(y) \equiv \langle x_0, y_0 \rangle = \langle x_1, y \rangle$ とすると $\psi(y_0) \equiv \varphi(x_1)$ だから

$$\frac{\frac{}{x_0 = x_1 : \psi(y_0)} \text{上述} \quad \begin{array}{c} \text{基本公理} \\ y_0 = y_1, \psi(y_0) : \psi(y_1) \end{array}}{x_0 = x_1, y_0 = y_1 : \psi(y_1)} \text{C} \star$$

となる.

□

命題 2.5. $\langle x_0, y_0 \rangle = \langle x_1, y_1 \rangle \vdash x_0 = x_1$ である.

証明. $t_i \equiv \langle x_i, y_i \rangle$ と略記すると

$$\frac{\begin{array}{c} \text{基本公理} \\ : q_1(t_0) = x_0 \end{array} \quad \frac{\begin{array}{c} \text{基本公理} \\ z_0 = z_1, q_1(z_0) = x_0 : q_1(z_1) = x_0 \end{array} \text{S}(z_0 \rightsquigarrow t_0) \quad \frac{\begin{array}{c} \text{基本公理} \\ t_0 = z_1, q_1(t_0) = x_0 : q_1(z_1) = x_0 \end{array} \text{S}(z_1 \rightsquigarrow t_1)}}{t_0 = t_1 : q_1(t_1) = x_0} \text{C} \star$$

$$\frac{\frac{}{t_0 = t_1 : q_1(t_1) = x_0} \text{ 上述} \quad \frac{\frac{}{z_1 = x_0, z_1 = x_1 : x_0 = x_1} \text{ 基本公理} \quad S(z_1 \rightsquigarrow q_1(t_1))}{q_1(t_1) = x_0, q_1(t_1) = x_1 : x_0 = x_1} \text{ C } \star}{t_0 = t_1, q_1(t_1) = x_1 : x_0 = x_1} \text{ C } \star$$

$$\frac{\frac{}{: q_1(t_1) = x_1} \text{ 基本公理} \quad \frac{}{t_0 = t_1, q_1(t_1) = x_1 : x_0 = x_1} \text{ 上述}}{t_0 = t_1 : x_0 = x_1} \text{ C } \star$$

により成り立つ. □

命題 2.6. $x = y \vdash t[z \rightsquigarrow x] = t[z \rightsquigarrow y]$ である.

証明. $\varphi(w) \equiv t[z \rightsquigarrow x] = t[z \rightsquigarrow w]$ とすると

$$\frac{\frac{\frac{}{: u = u} \text{ 基本公理} \quad S(u \rightsquigarrow t[z \rightsquigarrow x])}{: \varphi(x)} \quad \frac{\frac{}{x = y, \varphi(x) : \varphi(y)} \text{ 基本公理}}{x = y : t[z \rightsquigarrow x] = t[z \rightsquigarrow y]} \text{ C } \star}{x = y : t[z \rightsquigarrow x] = t[z \rightsquigarrow y]} \text{ C } \star$$

□

命題 2.7. $\varphi \vdash \varphi$ である.

証明. 次のようにして成り立つ.

$$\frac{\frac{\frac{}{: x^\Omega = x^\Omega} \text{ 基本公理} \quad \frac{\frac{}{x^\Omega = x^\Omega, x^\Omega : x^\Omega} \text{ 基本公理}}{x^\Omega : x^\Omega} \text{ C } \star}}{x^\Omega : x^\Omega} \text{ C } \star}{\varphi : \varphi} \text{ C } \star$$

□

2.1 $\leftrightarrow$ について

命題 2.8. $\varphi \leftrightarrow \psi \vdash \psi \leftrightarrow \varphi$ である.

証明. $\varphi \leftrightarrow \psi \equiv \varphi = \psi$ という定義だったから命題 2.2 より明らか. □

命題 2.9. $\frac{\Gamma : \varphi \quad \Delta, \psi : \chi}{\Gamma, \Delta, \varphi \leftrightarrow \psi : \chi}$ である.

証明. 次のようにして成り立つ.

$$\begin{array}{c}
\text{基本公理} \\
\frac{\Gamma : \varphi \quad \frac{x^\Omega = y^\Omega, x^\Omega : y^\Omega}{\varphi \leftrightarrow \psi, \varphi : \psi} S(x^\Omega \rightsquigarrow \varphi, y^\Omega \rightsquigarrow \psi)}{\Gamma, \varphi \leftrightarrow \psi : \psi} C \star \\
\frac{\Gamma, \varphi \leftrightarrow \psi : \psi \quad \Delta, \psi : \chi}{\Gamma, \Delta, \varphi \leftrightarrow \psi : \chi} C \star
\end{array}$$

□

2.2 $\top$ について

命題 2.10. $\top \vdash \top$ である.

証明. $\top \equiv * = *$ という定義だったから, 次のようにして成り立つ.

$$\begin{array}{c}
\text{基本公理} \\
\frac{: x^\top = x^\top}{: * = *} S(x^\top \rightsquigarrow *)
\end{array}$$

□

命題 2.11. $\varphi \vdash \varphi \leftrightarrow \top$ である.

証明. 次のようにして成り立つ.

$$\begin{array}{c}
\frac{\frac{}{\varphi : \varphi} \text{命題 2.7}}{\varphi, \top : \varphi} T \quad \frac{\frac{}{: \top} \text{命題 2.10}}{\varphi, \varphi : \top} T}{\varphi : \varphi \leftrightarrow \top} \text{Eq}
\end{array}$$

□

命題 2.12. $\varphi \leftrightarrow \top \vdash \varphi$ である.

証明. 次のようにして成り立つ.

$$\begin{array}{c}
\frac{\frac{}{: \top} \text{命題 2.10}}{\varphi \leftrightarrow \top : \top} T \quad \frac{\frac{\frac{}{y^\Omega = x^\Omega : x^\Omega = y^\Omega} \text{命題 2.2} \quad \frac{x^\Omega = y^\Omega, x^\Omega : y^\Omega}{\varphi \leftrightarrow \top, \top : \varphi} S(x^\Omega \rightsquigarrow \top, y^\Omega \rightsquigarrow \varphi)}{\varphi \leftrightarrow \top : \varphi} C \star}{\varphi \leftrightarrow \top : \varphi} C \star
\end{array}$$

(但し Substitution 2 回をまとめて 1 つで書いた. 以下同様の記法を使用する.)

□

2.3 $\wedge$ について

命題 2.13. $\varphi, \psi \vdash \varphi \wedge \psi$ である.

証明. $\varphi \wedge \psi \equiv \langle \varphi, \psi \rangle = \langle \top, \top \rangle$ という定義だったから, 次のようにして成り立つ.

$$\frac{\frac{\psi : \psi \leftrightarrow \top}{\psi : \psi \leftrightarrow \top} \text{命題 2.11} \quad \frac{\frac{\varphi : \varphi \leftrightarrow \top}{\varphi : \varphi \leftrightarrow \top} \text{命題 2.11} \quad \frac{\varphi \leftrightarrow \top, \psi \leftrightarrow \top : \varphi \wedge \psi}{\varphi \leftrightarrow \top, \psi \leftrightarrow \top : \varphi \wedge \psi} \text{命題 2.4}}{\varphi, \psi : \varphi \wedge \psi} \text{C} \star$$

□

命題 2.14. $\frac{\Gamma : \varphi \quad \Delta : \psi}{\Gamma, \Delta : \varphi \wedge \psi}$ である.

証明. 次のようにして成り立つ.

$$\frac{\Gamma : \varphi \quad \frac{\Delta : \psi \quad \frac{\varphi, \psi : \varphi \wedge \psi}{\varphi, \psi : \varphi \wedge \psi} \text{命題 2.13}}{\Delta, \varphi : \varphi \wedge \psi} \text{C} \star}{\Gamma, \Delta : \varphi \wedge \psi} \text{C} \star$$

□

命題 2.15. $\frac{\Gamma, \varphi : \chi}{\Gamma, \varphi \wedge \psi : \chi}$ である. (同様にして $\frac{\Gamma, \varphi : \chi}{\Gamma, \psi \wedge \varphi : \chi}$ も成り立つ.)

証明. 次のようにして成り立つ.

$$\frac{\frac{\varphi \wedge \psi : \varphi \leftrightarrow \top}{\varphi \wedge \psi : \varphi \leftrightarrow \top} \text{命題 2.5} \quad \frac{\varphi \leftrightarrow \top : \varphi}{\varphi \leftrightarrow \top : \varphi} \text{命題 2.12}}{\varphi \wedge \psi : \varphi} \text{C} \star} \quad \Gamma, \varphi : \chi \text{C} \star}{\Gamma, \varphi \wedge \psi : \chi} \text{C} \star$$

□

系 2.16. $\varphi \wedge \psi \vdash \varphi$ かつ $\varphi \wedge \psi \vdash \psi$ である.

□

系 2.17. $\varphi \wedge \psi \vdash \psi \wedge \varphi$ である.

□

命題 2.18. $\frac{\Gamma, \varphi, \psi : \chi}{\Gamma, \varphi \wedge \psi : \chi}$ である.

証明. 次のようにして成り立つ.

$$\frac{\frac{\varphi \wedge \psi : \varphi}{\varphi \wedge \psi : \varphi} \text{命題 2.15} \quad \frac{\frac{\varphi \wedge \psi : \psi}{\varphi \wedge \psi : \psi} \text{命題 2.15} \quad \Gamma, \varphi, \psi : \chi}{\Gamma, \varphi \wedge \psi, \varphi : \chi} \text{C} \star}{\Gamma, \varphi \wedge \psi : \chi} \text{C} \star$$

□

命題 2.19. $\frac{\Gamma, \varphi \wedge \psi : \chi}{\Gamma, \varphi, \psi : \chi}$ である.

証明. 次のようにして成り立つ.

$$\frac{\frac{\varphi, \psi : \varphi \wedge \psi}{\Gamma, \varphi \wedge \psi : \chi} \text{ 命題 2.13} \quad \Gamma, \varphi \wedge \psi : \chi}{\Gamma, \varphi, \psi : \chi} C \star$$

□

命題 2.20. $(\varphi \wedge \psi) \wedge \chi \vdash \varphi \wedge (\psi \wedge \chi)$ である. (同様にして $\varphi \wedge (\psi \wedge \chi) \vdash (\varphi \wedge \psi) \wedge \chi$ も成り立つ.)

証明. 次のようにして成り立つ.

$$\frac{\frac{\varphi \wedge \psi : \varphi}{\varphi \wedge \psi, \chi : \varphi \wedge (\psi \wedge \chi)} \text{ 系 2.16} \quad \frac{\frac{\varphi \wedge \psi : \psi}{\varphi \wedge \psi, \chi : \psi \wedge \chi} \text{ 系 2.16} \quad \frac{\chi : \chi}{\varphi \wedge \psi, \chi : \psi \wedge \chi} \text{ 命題 2.7}}{\varphi \wedge \psi, \chi : \varphi \wedge (\psi \wedge \chi)} \text{ 命題 2.14} \\ \frac{\varphi \wedge \psi, \chi : \varphi \wedge (\psi \wedge \chi)}{(\varphi \wedge \psi) \wedge \chi : \varphi \wedge (\psi \wedge \chi)} \text{ 命題 2.18}$$

□

2.4 $\rightarrow$ について

命題 2.21. $\frac{\Gamma : \varphi \quad \Delta, \psi : \chi}{\Gamma, \Delta, \varphi \rightarrow \psi : \chi}$ である.

証明. 定義より $\varphi \rightarrow \psi \equiv (\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow \varphi$ だから, 次により成り立つ.

$$\frac{\frac{(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow \varphi : \varphi \leftrightarrow (\varphi \wedge \psi)}{\Gamma, \Delta, (\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow \varphi : \chi} \text{ 命題 2.8} \quad \frac{\frac{\Gamma : \varphi \quad \frac{\Delta, \psi : \chi}{\Delta, \varphi \wedge \psi : \chi} \text{ 命題 2.15}}{\Gamma, \Delta, \varphi \leftrightarrow (\varphi \wedge \psi) : \chi} \text{ 命題 2.9}}{\Gamma, \Delta, (\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow \varphi : \chi} C \star$$

□

系 2.22. $\varphi, \varphi \rightarrow \psi \vdash \psi$ である.

□

命題 2.23. $\frac{\Gamma : \varphi \rightarrow \psi}{\Gamma, \varphi : \psi}$ である.

証明. 次のようにして成り立つ.

$$\frac{\Gamma : \varphi \rightarrow \psi \quad \frac{}{\varphi, \varphi \rightarrow \psi : \psi} \text{系 2.22}}{\Gamma, \varphi : \psi} \text{C} \star$$

□

命題 2.24. $\frac{\Gamma, \varphi : \psi}{\Gamma : \varphi \rightarrow \psi}$ である.

証明. 次のようにして成り立つ.

$$\frac{\frac{\frac{}{\varphi \wedge \psi : \varphi} \text{命題 2.16}}{\Gamma, \varphi \wedge \psi : \varphi} \text{T} \quad \frac{\frac{}{\varphi : \varphi} \text{命題 2.7} \quad \Gamma, \varphi : \psi}{\Gamma, \varphi : \varphi \wedge \psi} \text{命題 2.14}}{\Gamma : (\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow \varphi} \text{Eq}$$

□

命題 2.25. $\varphi \vdash \psi \rightarrow \varphi$ である.

証明. 次のようにして成り立つ.

$$\frac{\frac{\frac{}{\varphi : \varphi} \text{命題 2.7}}{\varphi, \psi : \varphi} \text{T}}{\varphi : \psi \rightarrow \varphi} \text{命題 2.24}$$

□

命題 2.26. $\varphi \leftrightarrow \psi \vdash \varphi \rightarrow \psi$ である. (よって命題 2.2 により $\varphi \leftrightarrow \psi \vdash \psi \rightarrow \varphi$ も成り立つ.)

証明. 次のようにして成り立つ.

$$\frac{\frac{\text{基本公理}}{x^\Omega = y^\Omega, x^\Omega : y^\Omega} \text{S}(x^\Omega \rightsquigarrow \varphi, y^\Omega \rightsquigarrow \psi)}{\frac{\varphi \leftrightarrow \psi, \varphi : \psi}{\varphi \leftrightarrow \psi : \varphi \rightarrow \psi} \text{命題 2.24}}$$

□

命題 2.27. $\varphi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow \varphi \vdash \varphi \leftrightarrow \psi$ である.

証明. 命題 2.2, 2.3 により $(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow \varphi, (\psi \wedge \varphi) \leftrightarrow \psi \vdash \varphi \leftrightarrow \psi$ である.

□

命題 2.28. $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi) \vdash (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi)$ である.

証明. 次のようにして成り立つ.

$$\begin{array}{c}
\frac{}{\varphi : \varphi} \text{ 命題 2.7} \quad \frac{}{\varphi : \varphi} \text{ 命題 2.7} \quad \frac{}{\psi, \psi \rightarrow \chi : \chi} \text{ 系 2.22} \\
\frac{}{\varphi, \psi, \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi) : \chi} \text{ 命題 2.21} \\
\frac{}{\varphi, \varphi \rightarrow \psi, \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi) : \chi} \text{ 命題 2.21} \\
\frac{}{\varphi \rightarrow \psi, \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi) : \varphi \rightarrow \chi} \text{ 命題 2.24} \\
\frac{}{\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi) : (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi)} \text{ 命題 2.24}
\end{array}$$

□

2.5 $\{x \mid \varphi\}$ について

命題 2.29. $\varphi \vdash x \in \{x \mid \varphi\}$ かつ $x \in \{x \mid \varphi\} \vdash \varphi$ である.

証明. 次のようにして成り立つ.

$$\begin{array}{c}
\text{基本公理} \\
\frac{}{x \in \{x \mid \varphi\} \leftrightarrow \varphi} \quad \frac{}{x \in \{x \mid \varphi\} \leftrightarrow \varphi : x \in \{x \mid \varphi\} \rightarrow \varphi} \text{ 命題 2.26} \\
\frac{}{x \in \{x \mid \varphi\} \rightarrow \varphi} \text{ C } \star \\
\frac{}{x \in \{x \mid \varphi\} : \varphi} \text{ 命題 2.23}
\end{array}$$

$$\begin{array}{c}
\text{基本公理} \\
\frac{}{x \in \{x \mid \varphi\} \leftrightarrow \varphi} \quad \frac{}{x \in \{x \mid \varphi\} \leftrightarrow \varphi : \varphi \rightarrow x \in \{x \mid \varphi\}} \text{ 命題 2.26} \\
\frac{}{\varphi \rightarrow x \in \{x \mid \varphi\}} \text{ C } \star \\
\frac{}{\varphi : x \in \{x \mid \varphi\}} \text{ 命題 2.23}
\end{array}$$

□

命題 2.30. $x \notin \text{Var}(\Gamma)$ のとき $\frac{\Gamma : \varphi \leftrightarrow \psi}{\Gamma : \{x \mid \varphi\} = \{x \mid \psi\}}$ である.

証明. まず次のようになる.

$$\begin{array}{c}
\frac{}{x \in \{x \mid \varphi\} : \varphi} \text{ 命題 2.29} \quad \frac{}{\Gamma, \varphi : \psi} \text{ C } \star \quad \frac{}{\psi : x \in \{x \mid \psi\}} \text{ 命題 2.29} \\
\frac{}{\Gamma, x \in \{x \mid \varphi\} : \psi} \text{ C } \star \quad \frac{}{\Gamma, x \in \{x \mid \varphi\} : x \in \{x \mid \psi\}} \text{ C } \star
\end{array}$$

$\varphi \rightarrow \psi \equiv (\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow \psi$ だったから, 次のようにして成り立つ.

$$\begin{array}{c}
\frac{}{\Gamma : \varphi \leftrightarrow \psi} \text{ 命題 2.29 と同様} \quad \frac{}{\Gamma : \varphi \leftrightarrow \psi} \text{ 命題 2.29 と同様} \\
\frac{}{\Gamma, \varphi : \psi} \text{ 上述} \quad \frac{}{\Gamma, \psi : \varphi} \text{ 上述} \\
\frac{}{\Gamma, x \in \{x \mid \varphi\} : x \in \{x \mid \psi\}} \text{ 上述} \quad \frac{}{\Gamma, x \in \{x \mid \psi\} : x \in \{x \mid \varphi\}} \text{ 上述} \\
\frac{}{\Gamma : x \in \{x \mid \varphi\} \leftrightarrow x \in \{x \mid \psi\}} \text{ Eq} \\
\frac{}{\Gamma : \{x \mid \varphi\} = \{x \mid \psi\}} \text{ Ex } \star
\end{array}$$

□

命題 2.31. $x \in \text{Var}(\varphi, \psi)$ のとき $\frac{\Gamma : \{x \mid \varphi\} = \{x \mid \psi\}}{\Gamma : \varphi \leftrightarrow \psi}$ である.

証明. $\chi \equiv \{x \mid \varphi\} = \{x \mid \psi\}$ と書く.

$$\frac{\frac{\varphi : x \in \{x \mid \varphi\}}{\chi, x \in \{x \mid \varphi\} : \psi} \quad \frac{\frac{\text{基本公理}}{y = z, x \in y : x \in z} \quad \frac{\chi, x \in \{x \mid \varphi\} : x \in \{x \mid \psi\}}{x \in \{x \mid \psi\} : \psi} \quad \frac{}{x \in \{x \mid \psi\} : \psi} \text{C} \star}{\chi, \varphi : \psi} \text{C} \star$$

となるから, 次のようにして成り立つ.

$$\frac{\Gamma : \chi \quad \frac{\frac{}{\chi, \varphi : \psi} \text{上述} \quad \frac{}{\chi, \psi : \varphi} \text{上述と同様}}{\chi : \varphi \leftrightarrow \psi} \text{Eq}}{\Gamma : \varphi \leftrightarrow \psi} \text{C} \star$$

□

命題 2.32. $y \notin \text{Var}(\varphi)$ のとき $\vdash \{y \mid \varphi[x \rightsquigarrow y]\} = \{x \mid \varphi\}$ である (つまり束縛変数記号は取り換えることができる).

証明. 次のようにして成り立つ.

$$\frac{\frac{\text{基本公理}}{: y \in \{y \mid \varphi[x \rightsquigarrow y]\} \leftrightarrow \varphi[x \rightsquigarrow y]} \quad \frac{\text{基本公理}}{: \varphi \leftrightarrow x \in \{x \mid \varphi\}} \quad \frac{}{: x \in \{y \mid \varphi[x \rightsquigarrow y]\} \leftrightarrow \varphi} \text{S}(y \rightsquigarrow x)}{\frac{}{: x \in \{y \mid \varphi[x \rightsquigarrow y]\} \leftrightarrow x \in \{x \mid \varphi\}} \text{命題 2.3}} \text{Ex} \star$$

□

2.6 $\forall$ について

命題 2.33. $x \in \text{Var}(\varphi)$ のとき $\forall x \varphi \vdash \varphi$ である.

証明. $\forall x \varphi \equiv \{x \mid \varphi\} = \{x \mid \top\}$ だったから, 次のようにして成り立つ.

$$\frac{\frac{\frac{}{\forall x \varphi : \forall x \varphi} \text{命題 2.7}}{\forall x \varphi : \varphi \leftrightarrow \top} \text{命題 2.31} \star \quad \frac{}{\varphi \leftrightarrow \top : \varphi} \text{命題 2.12}}{\forall x \varphi : \varphi} \text{C} \star$$

□

命題 2.34. $x \notin \text{Var}(\Gamma)$ のとき $\frac{\Gamma : \varphi}{\Gamma : \forall x \varphi}$ である.

証明. 次のようにして成り立つ.

$$\frac{\frac{\Gamma : \varphi \quad \frac{}{\varphi : \varphi \leftrightarrow \top} \text{命題 2.11}}{\Gamma : \varphi \leftrightarrow \top} \text{C} \star}{\Gamma : \{x \mid \varphi\} = \{x \mid \top\}} \text{命題 2.30} \star$$

□

命題 2.35. $x \notin \text{Var}(\varphi)$ のとき $\frac{\Gamma : \varphi}{\Gamma : \forall x \varphi}$ である.

証明. Γ, φ に現れていない変数記号 y を取れば

$$\frac{\frac{\frac{\Gamma : \varphi}{\Gamma[x \rightsquigarrow y] : \varphi} \text{S}(x \rightsquigarrow y)}{\Gamma[x \rightsquigarrow y] : \forall x \varphi} \text{命題 2.34} \star}{\Gamma : \forall x \varphi} \text{S}(y \rightsquigarrow x)$$

□

命題 2.36. $x \in \text{Var}(\varphi)$ のとき $\frac{\Gamma : \forall x \varphi}{\Gamma : \varphi[x \rightsquigarrow t]}$ である.

証明. Γ, φ に現れていない変数記号 y を取れば

$$\frac{\frac{\frac{\Gamma : \forall x \varphi}{\Gamma[x \rightsquigarrow y] : \forall x \varphi} \text{S}(x \rightsquigarrow y) \quad \frac{}{\forall x \varphi : \varphi} \text{命題 2.33} \star}{\Gamma[x \rightsquigarrow y] : \varphi} \text{C} \star}{\frac{\frac{\Gamma[x \rightsquigarrow y] : \varphi}{\Gamma[x \rightsquigarrow y] : \varphi[x \rightsquigarrow t]} \text{S}(x \rightsquigarrow t)}{\Gamma : \varphi[x \rightsquigarrow t]} \text{S}(y \rightsquigarrow x)}$$

□

命題 2.37. $x \in \text{Var}(\varphi)$ かつ $\text{Var}(t) \subset \text{Var}(\forall x \varphi, \Gamma, \psi)$ のとき $\frac{\Gamma, \varphi[x \rightsquigarrow t] : \psi}{\Gamma, \forall x \varphi : \psi}$ である.

証明. 次のようにして成り立つ.

$$\frac{\frac{\frac{}{\forall x \varphi : \varphi} \text{命題 2.33} \star}{\forall x \varphi : \varphi[x \rightsquigarrow t]} \text{S}(x \rightsquigarrow t) \quad \Gamma, \varphi[x \rightsquigarrow t] : \psi}{\Gamma, \forall x \varphi : \psi} \text{C} \star$$

□

命題 2.38. $y \notin \text{Var}(\varphi)$ のとき $\vdash \forall y \varphi[x \rightsquigarrow y] \leftrightarrow \forall x \varphi$ である.

証明. 次のようにして成り立つ.

$$\frac{\frac{\frac{}{: \{y \mid \varphi[x \rightsquigarrow y]\} = \{x \mid \varphi\}}{\text{命題 2.32 } \star}}{\text{命題 2.6}} \quad \frac{\frac{\frac{}{: \{y \mid \top\} = \{x \mid \top\}}{\text{命題 2.32 } \star}}{\text{命題 2.6}}}{\text{命題 2.3}}}{\text{命題 2.3}} \frac{}{: \forall y \varphi[x \rightsquigarrow y] \leftrightarrow (\{x \mid \varphi\} = \{y \mid \top\}) \leftrightarrow \forall x \varphi}$$

□

2.7 $\perp$ について

命題 2.39. $\perp \vdash \varphi$ である.

証明. $\perp \equiv \forall x^\Omega (x^\Omega)$ だったから, 次のようにして成り立つ.

$$\frac{\frac{\frac{}{\forall x^\Omega (x^\Omega) : x^\Omega}}{\text{命題 2.33 } \star}}{\forall x^\Omega (x^\Omega) : \varphi} S(x^\Omega \rightsquigarrow \varphi)$$

□

2.8 $\neg$ について

命題 2.40. $\vdash (\neg \top) \leftrightarrow \perp$ である.

証明. 次のようにして成り立つ.

$$\frac{\frac{\frac{}{: \top}}{\text{命題 2.10}} \quad \frac{\frac{}{\perp : \perp}}{\text{命題 2.7}}}{\text{命題 2.21}} \quad \frac{\frac{}{\perp : \top \rightarrow \perp}}{\text{命題 2.39}}}{\text{Eq}} \frac{}{: (\top \rightarrow \perp) \leftrightarrow \perp}$$

□

命題 2.41. $\vdash (\neg \perp) \leftrightarrow \top$ である.

証明. 次のようにして成り立つ.

$$\frac{\frac{\frac{}{: \top}}{\text{命題 2.10}} \quad \frac{\frac{}{\perp : \perp}}{\text{命題 2.7}}}{\text{命題 2.24}} \quad \frac{\frac{}{\perp : \top \rightarrow \perp}}{\text{Eq}}}{\text{Eq}} \frac{}{: (\perp \rightarrow \perp) \leftrightarrow \top}$$

□

命題 2.42. $\frac{\Gamma, \varphi : \perp}{\Gamma : \neg\varphi}$ である.

証明. $\neg\varphi \equiv \varphi \rightarrow \perp$ だったから, 命題 2.24 より明らか. □

命題 2.43. $\frac{\Gamma : \varphi}{\Gamma, \neg\varphi : \perp}$ である.

証明. $\neg\varphi \equiv \varphi \rightarrow \perp$ より次のようにして成り立つ.

$$\frac{\Gamma : \varphi \quad \frac{}{\perp : \perp} \text{命題 2.7}}{\Gamma, \varphi \rightarrow \perp : \perp} \text{命題 2.21}$$

□

命題 2.44. $\vdash (x^\Omega \wedge \neg x^\Omega) \leftrightarrow \perp$ である.

証明. 次のようにして成り立つ.

$$\frac{\frac{\frac{}{x^\Omega : x^\Omega} \text{命題 2.7}}{x^\Omega, \neg x^\Omega : \perp} \text{命題 2.43}}{x^\Omega \wedge \neg x^\Omega : \perp} \text{命題 2.18} \quad \frac{}{\perp : x^\Omega \wedge \neg x^\Omega} \text{命題 2.39}}{: (x^\Omega \wedge \neg x^\Omega) \leftrightarrow \perp} \text{Eq}$$

□

命題 2.45. $\varphi \vdash \neg\neg\varphi$ である.

証明. $\neg$ の定義より $\neg\neg\varphi \equiv (\varphi \rightarrow \perp) \rightarrow \perp$ だったから, 次のようにして成り立つ.

$$\frac{\frac{}{\varphi, \varphi \rightarrow \perp : \perp} \text{系 2.22}}{\varphi : (\varphi \rightarrow \perp) \rightarrow \perp} \text{命題 2.24}$$

□

命題 2.46. $\neg\neg\neg\varphi \vdash \neg\varphi$ である.

証明. 次のようにして成り立つ.

$$\frac{\frac{\frac{}{\varphi : (\varphi \rightarrow \perp) \rightarrow \perp} \text{命題 2.45}}{\varphi, ((\varphi \rightarrow \perp) \rightarrow \perp) \rightarrow \perp : \perp} \text{命題 2.21}}{((\varphi \rightarrow \perp) \rightarrow \perp) \rightarrow \perp : \varphi \rightarrow \perp} \text{命題 2.24}$$

□

命題 2.47. $\varphi \rightarrow \psi \vdash \neg\psi \rightarrow \neg\varphi$ である.

証明. 次のようにして成り立つ.

$$\begin{array}{c}
\frac{}{\varphi : \varphi} \text{ 命題 2.7} \quad \frac{}{\psi, \psi \rightarrow \perp : \perp} \text{ 系 2.22} \\
\hline
\frac{}{\varphi, \varphi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow \perp : \perp} \text{ 命題 2.21} \\
\hline
\frac{}{\varphi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow \perp : \varphi \rightarrow \perp} \text{ 命題 2.24} \\
\hline
\frac{}{\varphi \rightarrow \psi : (\psi \rightarrow \perp) \rightarrow (\varphi \rightarrow \perp)} \text{ 命題 2.24}
\end{array}$$

□

この体系では排中律は成り立たない. 即ち $\vdash \varphi \vee \neg \varphi$ や $\neg \neg \varphi \vdash \varphi$ や $\neg \psi \rightarrow \neg \varphi \vdash \varphi \rightarrow \psi$ は成り立たない. 定理 3.8 も参照.

2.9 $\vee$ について

命題 2.48. $\frac{\Gamma, \varphi : \chi \quad \Delta, \psi : \chi}{\Gamma, \Delta, \varphi \vee \psi : \chi}$ である.

証明. $\varphi \vee \psi \equiv \forall y^\Omega [(\varphi \rightarrow y^\Omega \wedge \psi \rightarrow y^\Omega) \rightarrow y^\Omega]$ が定義だったから, 次のようにして成り立つ.

$$\begin{array}{c}
\frac{\Gamma, \varphi : \chi}{\Gamma : \varphi \rightarrow \chi} \text{ 命題 2.24} \quad \frac{\Delta, \psi : \chi}{\Delta : \psi \rightarrow \chi} \text{ 命題 2.24} \\
\hline
\frac{}{\Gamma, \Delta : (\varphi \rightarrow \chi) \wedge (\psi \rightarrow \chi)} \text{ 命題 2.14} \quad \frac{}{\chi : \chi} \text{ 命題 2.7} \\
\hline
\frac{}{\Gamma, \Delta, (\varphi \rightarrow \chi \wedge \psi \rightarrow \chi) \rightarrow \chi : \chi} \text{ 命題 2.21} \\
\hline
\frac{}{\Gamma, \Delta, \forall y^\Omega [(\varphi \rightarrow y^\Omega \wedge \psi \rightarrow y^\Omega) \rightarrow y^\Omega] : \chi} \text{ 命題 2.37 } \star
\end{array}$$

□

命題 2.49. $\frac{\Gamma : \varphi}{\Gamma : \varphi \vee \psi}$ である. (同様に $\frac{\Gamma : \varphi}{\Gamma : \psi \vee \varphi}$ も成り立つ.)

証明. y^Ω を新しい変数記号として, 次のようにして成り立つ.

$$\begin{array}{c}
\frac{\Gamma : \varphi \quad \frac{}{y^\Omega : y^\Omega} \text{ 命題 2.7}}{\Gamma, \varphi \rightarrow y^\Omega : y^\Omega} \text{ 命題 2.21} \\
\hline
\frac{}{\Gamma, (\varphi \rightarrow y^\Omega) \wedge (\psi \rightarrow y^\Omega) : y^\Omega} \text{ 命題 2.15} \\
\hline
\frac{}{\Gamma : (\varphi \rightarrow y^\Omega \wedge \psi \rightarrow y^\Omega) \rightarrow y^\Omega} \text{ 命題 2.24} \\
\hline
\frac{}{\Gamma : \forall y^\Omega [(\varphi \rightarrow y^\Omega \wedge \psi \rightarrow y^\Omega) \rightarrow y^\Omega]} \text{ 命題 2.34 } \star
\end{array}$$

□

系 2.50. $\varphi \vdash \varphi \vee \psi$ かつ $\psi \vdash \varphi \vee \psi$ である.

□

系 2.51. $\varphi \vee \psi \vdash \psi \vee \varphi$ である.

□

命題 2.52. $(\varphi \vee \psi) \vee \chi \vdash \varphi \vee (\psi \vee \chi)$ である. (同様にして $\varphi \vee (\psi \vee \chi) \vdash (\varphi \vee \psi) \vee \chi$ も成り立つ.)

証明. 次のようにして成り立つ.

$$\frac{\frac{\frac{}{\varphi : \varphi \vee (\psi \vee \chi)}{\text{命題 2.50}} \quad \frac{\frac{\frac{}{\psi : \psi \vee \chi}}{\text{命題 2.50}} \quad \frac{\psi : \varphi \vee (\psi \vee \chi)}{\text{命題 2.49}}}{\psi : \varphi \vee (\psi \vee \chi)} \text{命題 2.48} \quad \frac{\frac{\frac{}{\chi : \psi \vee \chi}}{\text{命題 2.50}} \quad \frac{\chi : \varphi \vee (\psi \vee \chi)}{\text{命題 2.49}}}{\chi : \varphi \vee (\psi \vee \chi)} \text{命題 2.48}}{\varphi \vee \psi : \varphi \vee (\psi \vee \chi)} \text{命題 2.48}}{(\varphi \vee \psi) \vee \chi : \varphi \vee (\psi \vee \chi)} \text{命題 2.48}$$

□

命題 2.53. $\vdash \neg\neg(x^\Omega \vee \neg x^\Omega)$ である.

証明. 次のようにして成り立つ.

$$\frac{\frac{\frac{}{x^\Omega : x^\Omega \vee \neg x^\Omega}}{\text{命題 2.50}} \quad \frac{\frac{}{\neg(x^\Omega \vee \neg x^\Omega) : \neg(x^\Omega \vee \neg x^\Omega)}}{\text{命題 2.7}}}{\neg(x^\Omega \vee \neg x^\Omega), x^\Omega : x^\Omega \vee \neg x^\Omega} \text{T} \quad \frac{\frac{}{\neg(x^\Omega \vee \neg x^\Omega), x^\Omega \vee \neg x^\Omega : \perp}}{\text{命題 2.21}}}{\neg(x^\Omega \vee \neg x^\Omega), x^\Omega : \perp} \text{C} \star \quad \frac{}{\neg(x^\Omega \vee \neg x^\Omega) : \neg x^\Omega} \text{命題 2.42}$$

$$\frac{\frac{\frac{}{\neg(x^\Omega \vee \neg x^\Omega) : \neg x^\Omega}}{\text{上述}} \quad \frac{\frac{}{\neg(x^\Omega \vee \neg x^\Omega) : \neg(x^\Omega \vee \neg x^\Omega)}}{\text{命題 2.7}}}{\neg(x^\Omega \vee \neg x^\Omega) : x^\Omega \vee \neg x^\Omega} \text{命題 2.49} \quad \frac{\frac{}{\neg(x^\Omega \vee \neg x^\Omega), x^\Omega \vee \neg x^\Omega : \perp}}{\text{命題 2.21}}}{\neg(x^\Omega \vee \neg x^\Omega) : \perp} \text{C} \star \quad \frac{}{: \neg\neg(x^\Omega \vee \neg x^\Omega)} \text{命題 2.42}$$

□

命題 2.54. $\vdash [\varphi \vee (\psi \wedge \chi)] \leftrightarrow [(\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi)]$ である.

証明. まず次のようにして $\varphi \vee (\psi \wedge \chi) \vdash (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi)$ である.

$$\frac{\frac{\frac{}{\varphi : \varphi \vee \psi}}{\text{命題 2.50}} \quad \frac{\frac{\frac{}{\psi \wedge \chi : \psi}}{\text{命題 2.16}} \quad \frac{\psi \wedge \chi : \varphi \vee \psi}{\text{命題 2.49}}}{\psi \wedge \chi : \varphi \vee \psi} \text{命題 2.48} \quad \frac{}{\varphi \vee (\psi \wedge \chi) : \varphi \vee \chi} \text{左と同様}}{\varphi \vee (\psi \wedge \chi) : (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi)} \text{命題 2.14}$$

逆に次のようにして $(\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi) \vdash \varphi \vee (\psi \wedge \chi)$ である.

$$\begin{array}{c}
\frac{\varphi : \varphi \vee (\psi \wedge \chi)}{\varphi : \varphi \vee (\psi \wedge \chi)} \text{ 命題 2.50} \quad \frac{\frac{\psi, \chi : \psi \wedge \chi}{\psi, \chi : \varphi \vee (\psi \wedge \chi)} \text{ 命題 2.13}}{\psi, \chi : \varphi \vee (\psi \wedge \chi)} \text{ 命題 2.49} \\
\frac{\varphi : \varphi \vee (\psi \wedge \chi)}{\varphi : \varphi \vee (\psi \wedge \chi)} \text{ 命題 2.50} \quad \frac{\varphi \vee \psi, \chi : \varphi \vee (\psi \wedge \chi)}{(\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi), \chi : \varphi \vee (\psi \wedge \chi)} \text{ 命題 2.15} \\
\frac{\varphi : \varphi \vee (\psi \wedge \chi)}{(\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi), \varphi \vee \chi : \varphi \vee (\psi \wedge \chi)} \text{ 命題 2.48} \\
\frac{(\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi) : \varphi \vee \chi}{(\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi) : \varphi \vee (\psi \wedge \chi)} \text{ 命題 2.16} \quad \frac{(\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi), \varphi \vee \chi : \varphi \vee (\psi \wedge \chi)}{(\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi) : \varphi \vee (\psi \wedge \chi)} \text{ 上述} \\
\text{C} \star
\end{array}$$

□

2.10 $\exists$ について

命題 2.55. $x \in \text{Var}(\varphi)$ のとき $\varphi \vdash \exists x \varphi$ である.

証明. φ に含まれない変数記号 y^Ω を取れば $\exists x \varphi \equiv \forall y^\Omega (\forall x (\varphi \rightarrow y^\Omega) \rightarrow y^\Omega)$ という定義だったから

$$\begin{array}{c}
\frac{\varphi, \varphi \rightarrow y^\Omega : y^\Omega}{\varphi, \forall x (\varphi \rightarrow y^\Omega) : y^\Omega} \text{ 系 2.22} \\
\frac{\varphi, \forall x (\varphi \rightarrow y^\Omega) : y^\Omega}{\varphi : \forall x (\varphi \rightarrow y^\Omega) \rightarrow y^\Omega} \text{ 命題 2.37} \star \\
\frac{\varphi : \forall x (\varphi \rightarrow y^\Omega) \rightarrow y^\Omega}{\varphi : \forall y^\Omega (\forall x (\varphi \rightarrow y^\Omega) \rightarrow y^\Omega)} \text{ 命題 2.24} \\
\text{命題 2.34} \star
\end{array}$$

となり成り立つ.

□

命題 2.56. $x \notin \text{Var}(\Gamma, \psi)$ のとき $\frac{\Gamma, \varphi : \psi}{\Gamma, \exists x \varphi : \psi}$ である.

証明. 次のようにして成り立つ.

$$\begin{array}{c}
\frac{\Gamma, \varphi : \psi}{\Gamma : \varphi \rightarrow \psi} \text{ 命題 2.24} \\
\frac{\Gamma : \varphi \rightarrow \psi}{\Gamma : \forall x (\varphi \rightarrow \psi)} \text{ 命題 2.34} \star \quad \frac{\psi : \psi}{\psi : \psi} \text{ 命題 2.7} \\
\frac{\Gamma : \forall x (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \psi : \psi}{\Gamma, \forall y^\Omega (\forall x (\varphi \rightarrow y^\Omega) \rightarrow y^\Omega) : \psi} \text{ 命題 2.21} \\
\text{命題 2.37} \star
\end{array}$$

(注: y^Ω に ψ が代入できるように $x \notin \text{Var}(\psi)$ という条件が付いている)

□

命題 2.57. $x \notin \text{Var}(\varphi)$ のとき $\frac{\Gamma, \varphi : \psi}{\Gamma, \exists x \varphi : \psi}$ である.

証明. Γ, φ, ψ に現れていない変数記号 y を取れば

$$\frac{\frac{\frac{\Gamma, \varphi : \psi}{\Gamma[x \rightsquigarrow y], \varphi : \psi[x \rightsquigarrow y]} S(x \rightsquigarrow y)}{\Gamma[x \rightsquigarrow y], \exists x \varphi : \psi[x \rightsquigarrow y]} \text{命題 2.56} \star}{\Gamma, \exists x \varphi : \psi} S(y \rightsquigarrow x)$$

□

命題 2.58. $x \in \text{Var}(\varphi)$ で $\text{Var}(t) \subset \text{Var}(\Gamma, \exists x \varphi)$ のとき $\frac{\Gamma : \varphi[x \rightsquigarrow t]}{\Gamma : \exists x \varphi}$ である.

証明. 次のようにして成り立つ.

$$\frac{\Gamma : \varphi[x \rightsquigarrow t] \quad \frac{\frac{}{\varphi : \exists x \varphi} \text{命題 2.55} \star}{\varphi[x \rightsquigarrow t] : \exists x \varphi} S(x \rightsquigarrow t)}{\Gamma : \exists x \varphi} C \star$$

□

命題 2.59. $y \notin \text{Var}(\varphi)$ のとき $\vdash \exists y \varphi[x \rightsquigarrow y] \leftrightarrow \exists x \varphi$ である.

証明. 次のようにして成り立つ.

$$\frac{\frac{\frac{\varphi[x \rightsquigarrow y] : \varphi[x \rightsquigarrow y]}{\varphi[x \rightsquigarrow y] : \exists x \varphi} \text{命題 2.58} \star}{\exists y \varphi[x \rightsquigarrow y] : \exists x \varphi} \text{命題 2.56} \star \quad \frac{\frac{\frac{\varphi : \varphi[x \rightsquigarrow y][y \rightsquigarrow x]}{\varphi : \exists y \varphi[x \rightsquigarrow y]} \text{命題 2.58} \star}{\exists x \varphi : \exists y \varphi[x \rightsquigarrow y]} \text{命題 2.56} \star}{: \exists y \varphi[x \rightsquigarrow y] \leftrightarrow \exists x \varphi} \text{Eq}$$

□

命題 2.60. $x \in \text{Var}(\psi) \setminus \text{Var}(\varphi)$ のとき $\vdash \exists x (\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow \varphi \wedge \exists x \psi$ である.

証明. 次のようにして成り立つ.

$$\frac{\frac{\frac{\varphi \wedge \psi : \varphi}{\exists x (\varphi \wedge \psi) : \varphi} \text{命題 2.56} \star}{\exists x (\varphi \wedge \psi) : \varphi \wedge \exists x \psi} \text{命題 2.14} \quad \frac{\frac{\frac{\psi : \exists x \psi}{\varphi \wedge \psi : \exists x \psi} \text{命題 2.15}}{\exists x (\varphi \wedge \psi) : \exists x \psi} \text{命題 2.56} \star}{\varphi \wedge \exists x \psi : \exists x (\varphi \wedge \psi)} \text{命題 2.15}$$

$$\frac{\frac{\frac{\varphi \wedge \psi : \exists x (\varphi \wedge \psi)}{\varphi, \psi : \exists x (\varphi \wedge \psi)} \text{命題 2.19}}{\varphi, \exists x \psi : \exists x (\varphi \wedge \psi)} \text{命題 2.56} \star}{\varphi \wedge \exists x \psi : \exists x (\varphi \wedge \psi)} \text{命題 2.15}$$

□

2.11 $\exists!$ について

命題 2.61. $x \in \text{Var}(\varphi)$ のとき $\exists!x \varphi \vdash \exists x \varphi$ である.

証明. $\exists!x \varphi \equiv \exists x (\varphi \wedge \forall y (\varphi[x \rightsquigarrow y] \rightarrow x = y))$ が定義だったから, 次のようにして成り立つ.

$$\frac{\frac{\varphi \wedge \forall y (\varphi[x \rightsquigarrow y] \rightarrow x = y) : \varphi \quad \text{命題 2.16} \quad \frac{\varphi : \exists x \varphi \quad \text{命題 2.55} \star}{\varphi : \exists x \varphi} \text{C} \star}{\frac{\varphi \wedge \forall y (\varphi[x \rightsquigarrow y] \rightarrow x = y) : \exists x \varphi}{\exists x (\varphi \wedge \forall y (\varphi[x \rightsquigarrow y] \rightarrow x = y)) : \exists x \varphi} \text{命題 2.56} \star}$$

□

命題 2.62. $x \in \text{Var}(\varphi)$, $x \notin \text{Var}(t)$ のとき $\exists!x \varphi, \varphi, \varphi[x \rightsquigarrow t] \vdash x = t$ である

証明. $\psi \equiv \forall y (\varphi[x \rightsquigarrow y] \rightarrow x = y)$ とすれば定義より $\exists!x^\Omega \varphi \equiv \exists x (\varphi \wedge \psi)$ である. このとき項 s に対して次が成り立つ.

$$\frac{\frac{\frac{\psi : \forall y (\varphi[x \rightsquigarrow y] \rightarrow x = y) \quad \text{命題 2.7}}{\psi : \varphi[x \rightsquigarrow s] \rightarrow x = s} \text{命題 2.36} \star}{\psi, \varphi[x \rightsquigarrow s] : x = s} \text{命題 2.23}$$

よって次のようにして成り立つ.

$$\frac{\frac{\frac{\frac{\psi, \varphi[x \rightsquigarrow z] : x = z \quad \text{上述}}{\psi, \varphi[x \rightsquigarrow z], \varphi[x \rightsquigarrow t] : x = z \wedge x = t} \text{命題 2.14}}{\psi, \varphi[x \rightsquigarrow z], \varphi[x \rightsquigarrow t] : z = t} \text{命題 2.3}}{\frac{\varphi \wedge \psi, \varphi[x \rightsquigarrow z], \varphi[x \rightsquigarrow t] : z = t \quad \text{命題 2.15}}{\exists x (\varphi \wedge \psi), \varphi[x \rightsquigarrow z], \varphi[x \rightsquigarrow t] : z = t} \text{命題 2.56} \star} \text{S}(z \rightsquigarrow x)$$

□

命題 2.63. $x \in \text{Var}(\varphi)$ のとき $\exists!x^\Omega \varphi \vdash \varphi[x^\Omega \rightsquigarrow \varphi[x^\Omega \rightsquigarrow \top]]$ である (即ち $\vdash \exists!x^\Omega \varphi$ のときは $\vdash \varphi[x^\Omega \rightsquigarrow \psi]$ となる L -論理式 ψ を具体的に作ることができる).

証明. 簡単のため φ のことを $\varphi(x^\Omega)$ と書く. このとき

$$\begin{array}{c}
\text{基本公理} \\
\frac{x^\Omega : x^\Omega \leftrightarrow \top}{\text{命題 2.11}} \quad \frac{x^\Omega = y^\Omega, \varphi(x^\Omega) : \varphi(y^\Omega)}{x^\Omega \leftrightarrow \top, \varphi(x^\Omega) : \varphi(\top)} S(y^\Omega \rightsquigarrow \top) \\
\frac{\varphi(x^\Omega), x^\Omega : \varphi(\top)}{\exists! x^\Omega \varphi(x^\Omega), \varphi(x^\Omega), x^\Omega : \varphi(\top)} C \star \\
\frac{\exists! x^\Omega \varphi(x^\Omega), \varphi(x^\Omega), \varphi(\top) : x^\Omega = \top}{\exists! x^\Omega \varphi(x^\Omega), \varphi(x^\Omega), \varphi(\top) : x^\Omega} \text{命題 2.62} \star \\
\frac{\exists! x^\Omega \varphi(x^\Omega), \varphi(x^\Omega), \varphi(\top) : x^\Omega}{\exists! x^\Omega \varphi(x^\Omega), \varphi(x^\Omega) : x^\Omega \leftrightarrow \varphi(\top)} \text{命題 2.12} \quad \frac{\exists! x^\Omega \varphi(x^\Omega), \varphi(x^\Omega), x^\Omega : \varphi(\top)}{\exists! x^\Omega \varphi(x^\Omega), \varphi(x^\Omega) : x^\Omega \leftrightarrow \varphi(\top)} \text{上述} \\
\text{Eq}
\end{array}$$

$$\begin{array}{c}
\text{基本公理} \\
\frac{\exists! x^\Omega \varphi(x^\Omega), \varphi(x^\Omega) : x^\Omega \leftrightarrow \varphi(\top)}{\text{上述}} \quad \frac{x^\Omega = y^\Omega, \varphi(x^\Omega) : \varphi(y^\Omega)}{x^\Omega \leftrightarrow \varphi(\top), \varphi(x^\Omega) : \varphi(\varphi(\top))} S(y^\Omega \rightsquigarrow \varphi(\top)) \\
\frac{\exists! x^\Omega \varphi(x^\Omega), \varphi(x^\Omega) : \varphi(\varphi(\top))}{\exists! x^\Omega \varphi(x^\Omega), \exists x^\Omega \varphi(x^\Omega) : \varphi(\varphi(\top))} C \star \\
\text{命題 2.56} \star
\end{array}$$

となるが $\exists! x^\Omega \varphi(x^\Omega) \vdash \exists x^\Omega \varphi(x^\Omega)$ だから $\exists! x^\Omega \varphi \vdash \varphi(\varphi(\top)) \equiv \varphi[x^\Omega \rightsquigarrow \varphi[x^\Omega \rightsquigarrow \top]]$ が分かった。 $\square$

命題 2.64. φ を L -論理式として $x^{\text{PA}} \in \text{Var}(\varphi)$, $y \notin \text{Var}(\varphi)$ とする. このとき

$$t \equiv \{y \mid \exists x^{\text{PA}} (y \in x^{\text{PA}} \wedge \varphi)\}$$

とすれば $\exists! x^{\text{PA}} \varphi \vdash \varphi[x^{\text{PA}} \rightsquigarrow t]$ である. (即ち型 PA の変数記号のときも $\vdash \varphi(t)$ となる項 t を具体的に作ることができる.)

証明. まず

$$\begin{array}{c}
\frac{y \in x^{\text{PA}}, \varphi : y \in x^{\text{PA}} \wedge \varphi}{\text{命題 2.13}} \quad \frac{y \in x^{\text{PA}} \wedge \varphi : \exists x^{\text{PA}} (y \in x^{\text{PA}} \wedge \varphi)}{\text{命題 2.55} \star} \\
\frac{y \in x^{\text{PA}}, \varphi : \exists x^{\text{PA}} (y \in x^{\text{PA}} \wedge \varphi)}{y \in x^{\text{PA}}, \varphi : y \in t} t \text{ の定義} \\
\frac{y \in x^{\text{PA}}, \varphi : y \in t}{\varphi : y \in x^{\text{PA}} \rightarrow y \in t} \text{命題 2.24}
\end{array}$$

である. 次に z を新しい変数記号とすれば

$$\begin{array}{c}
\text{基本公理} \\
\frac{}{y \in t \leftrightarrow \exists x^{\text{PA}} (y \in x^{\text{PA}} \wedge \varphi)} \text{命題 2.23, 2.26} \\
\frac{}{y \in t : \exists x^{\text{PA}} (y \in x^{\text{PA}} \wedge \varphi)} \text{命題 2.59} \star \\
\frac{\exists! x^{\text{PA}} \varphi, \varphi : (\exists! x^{\text{PA}} \varphi) \wedge \varphi}{y \in t : \exists z (y \in z \wedge \varphi[x^{\text{PA}} \rightsquigarrow z])} \text{命題 2.13} \quad \text{命題 2.14} \\
\frac{\exists! x^{\text{PA}} \varphi, \varphi, y \in t : (\exists! x^{\text{PA}} \varphi) \wedge \varphi \wedge \exists z (y \in z \wedge \varphi[x^{\text{PA}} \rightsquigarrow z])}{\exists! x^{\text{PA}} \varphi, \varphi, y \in t : \exists z [(\exists! x^{\text{PA}} \varphi) \wedge \varphi \wedge \varphi[x^{\text{PA}} \rightsquigarrow z] \wedge y \in z]} \text{命題 2.60} \star \\
\frac{\exists! x^{\text{PA}} \varphi, \varphi, y \in t : \exists z [x^{\text{PA}} = z \wedge y \in z]}{\exists! x^{\text{PA}} \varphi, \varphi, y \in t : \exists z [y \in x^{\text{PA}}]} \text{命題 2.62} \star \quad \text{等号公理} \\
\frac{\exists! x^{\text{PA}} \varphi, \varphi, y \in t : y \in x^{\text{PA}}}{\exists! x^{\text{PA}} \varphi, \varphi : y \in t \rightarrow y \in x^{\text{PA}}} \text{命題 2.24}
\end{array}$$

だから $\exists! x^{\text{PA}} \varphi, \varphi \vdash y \in x^{\text{PA}} \leftrightarrow y \in t$ が分かる. よって

$$\begin{array}{c}
\text{基本公理} \\
\frac{\frac{\exists! x^{\text{PA}} \varphi, \varphi : y \in x^{\text{PA}} \leftrightarrow y \in t}{\exists! x^{\text{PA}} \varphi, \varphi : x^{\text{PA}} = t} \text{上述}}{\exists! x^{\text{PA}} \varphi, \varphi : \varphi[x^{\text{PA}} \rightsquigarrow t]} \text{Ex} \star \quad \frac{x^{\text{PA}} = w, \varphi : \varphi[x^{\text{PA}} \rightsquigarrow w]}{x^{\text{PA}} = t, \varphi : \varphi[x^{\text{PA}} \rightsquigarrow t]} \text{S}(w \rightsquigarrow t) \\
\frac{\exists! x^{\text{PA}} \varphi, \varphi : \varphi[x^{\text{PA}} \rightsquigarrow t]}{\exists! x^{\text{PA}} \varphi, \exists x^{\text{PA}} \varphi : \varphi[x^{\text{PA}} \rightsquigarrow t]} \text{C} \star \quad \text{命題 2.56} \star
\end{array}$$

となるが, $\exists! x^{\text{PA}} \varphi \vdash \exists x^{\text{PA}} \varphi$ だから $\exists! x^{\text{PA}} \varphi \vdash \varphi[x^{\text{PA}} \rightsquigarrow t]$ である. □

3 local set theory による集合論

定義. L を局所言語とする. L -集合とは, 型 PA の閉項のことをいう.

以下では L -集合は大文字 X, Y, A, B などで表す. L -集合に対して以下の略記を用意する.

- $X \subset Y \equiv \forall x \in X (x \in Y)$
- $X \cap Y \equiv \{x \mid x \in X \wedge x \in Y\}$
- $X \cup Y \equiv \{x \mid x \in X \vee x \in Y\}$
- $U^A \equiv \{x^A \mid \top\}$ (これも型を省略して単に U と書くことがある.)
- $\emptyset^A \equiv \{x^A \mid \perp\}$
- $-X \equiv \{x \mid x \notin X\}$
- $\mathcal{P}X \equiv \{x \mid x \subset X\}$
- $\bigcap X \equiv \{x \mid \forall y \in X (x \in y)\}$
- $\bigcup X \equiv \{x \mid \exists y \in X (x \in y)\}$

- $\{t\} \equiv \{x \mid x = t\}$ (但し $x \notin \text{Var}(t)$ とする)
- $\{t, s\} \equiv \{x \mid x = t \vee x = s\}$ (但し $x \notin \text{Var}(t, s)$ とする)
- $\{t \mid \varphi\} \equiv \{z \mid \exists x_1 \cdots \exists x_n (z = t \wedge \varphi)\}$ (但し $\text{Var}(t) = \{x_1, \dots, x_n\}$ で, t は変数記号ではないとする)
- $X \times Y \equiv \{\langle x, y \rangle \mid x \in X \wedge y \in Y\}$
- $X + Y \equiv \{\langle \{x\}, \emptyset \rangle \mid x \in X\} \cup \{\langle \emptyset, \{y\} \rangle \mid y \in Y\}$
- $Y^X \equiv \{z \mid z \subset X \times Y \wedge \forall x \in X \exists! y \in Y (\langle x, y \rangle \in z)\}$

このように定義すると以下の L -論理式を証明することができる.

- $X = Y \leftrightarrow \forall x (x \in X \leftrightarrow x \in Y)$
- $X \subset X$
- $(X \subset Y \wedge Y \subset X) \rightarrow X = Y$
- $(X \subset Y \wedge Y \subset Z) \rightarrow X \subset Z$
- $Z \subset X \cap Y \leftrightarrow Z \subset X \wedge Z \subset Y$
- $X \cup Y \subset Z \leftrightarrow X \subset Z \wedge Y \subset Z$
- $x^A \in U^A$
- $x^A \notin \emptyset^A$
- $X \in \mathcal{P}Y \leftrightarrow X \subset Y$
- $X \subset \bigcap Y \leftrightarrow \forall u \in Y (X \subset u)$
- $\bigcup Y \subset X \leftrightarrow \forall u \in Y (u \subset X)$
- $x \in \{y\} \leftrightarrow x = y$
- $\varphi \rightarrow (t \in \{t \mid \varphi\})$

こうして local set theory において通常と同様の集合論を展開することができる. 但し, L -集合とはただの閉項であるから, 集合としては同じでも項としては異なる場合がありえる. そこで L -集合 X, Y に対して (メタ数学における) 同値関係 $\overset{S}{\equiv}$ を^{*2}

$$X \overset{S}{\equiv} Y \iff \vdash_S X = Y$$

と定義して, $\overset{S}{\equiv}$ による同値類を S -集合という. 以下では X の属する同値類を $[X]_S$, もしくは単に X と書く (つまり S -集合 X と書いたら, これは実際には同値類 $[X]_S$ のことである).

^{*2} ここでは L -集合に対して $\overset{S}{\equiv}$ を定義したが, 一般の項に対しても同じ意味で $\overset{S}{\equiv}$ を使うことにする.

S -集合 f が $\vdash_S f \in Y^X$ を満たすとき、 f を X から Y への S -写像といい記号では $f: X \rightarrow Y$ と書く。またこのとき $\langle x, y \rangle \in f$ を $f(x) = y$ と書く。

t を項として $\text{Var}(t) \subset \{x_1, \dots, x_n\}$ とする。更に S -集合 X, Y に対して

$$\langle x_1, \dots, x_n \rangle \in X \vdash_S t \in Y$$

が成り立つとする。このとき S -集合

$$\{\langle \langle x_1, \dots, x_n \rangle, t \rangle \mid \langle x_1, \dots, x_n \rangle \in X\}$$

を map_t で表す。変数記号を明示するときは $\text{map}_t^{x_1, \dots, x_n}$ などと書く。

命題 3.1. 変数記号 y の型が $A_1 \times \dots \times A_n$ で $\text{Var}(\varphi, \psi) = \{y\}$ のとき

$$\varphi \vdash \psi \iff \varphi[y \rightsquigarrow \langle x_1, \dots, x_n \rangle] \vdash \psi[y \rightsquigarrow \langle x_1, \dots, x_n \rangle].$$

証明. ($\implies$) 基本公理 (Equality 1) により明らか。

($\impliedby$) $n = 0$ の場合は基本公理 (Unity) により明らか。 $n = 1$ の場合は $\langle x_1 \rangle \equiv x_1$ だったから、次により成り立つ。

$$\frac{\overline{\varphi[y \rightsquigarrow x_1] : \psi[y \rightsquigarrow x_1]}}{\varphi : \psi} S(x_1 \rightsquigarrow y)$$

$n \geq 2$ の場合。Substitution を繰り返し使うことで次のようになる。

$$\frac{\frac{\overline{\varphi[y \rightsquigarrow \langle x_1, \dots, x_n \rangle] : \psi[y \rightsquigarrow \langle x_1, \dots, x_n \rangle]}}{\varphi[y \rightsquigarrow \langle q_1(y), \dots, x_n \rangle] : \psi[y \rightsquigarrow \langle q_1(y), \dots, x_n \rangle]} S(x_1 \rightsquigarrow q_1(y))}{\vdots} S(x_2 \rightsquigarrow q_2(y))$$

$$\frac{\overline{\varphi[y \rightsquigarrow \langle q_1(y), \dots, q_n(y) \rangle] : \psi[y \rightsquigarrow \langle q_1(y), \dots, q_n(y) \rangle]}}{S(x_n \rightsquigarrow q_n(y))}$$

よって基本公理: $y = \langle q_1(y), \dots, q_n(y) \rangle$ と命題 2.6 により $\varphi \vdash \psi$ となる。 $\square$

命題 3.2. map_t は S -写像 $\text{map}_t: X \rightarrow Y$ を定める。

証明. $\vdash_S \text{map}_t \in Y^X$ を示せばよい。 φ として

$$u \subset X \times Y \wedge \forall x \in X \exists! y \in Y (\langle x, y \rangle \in u)$$

を考えれば $Y^X \equiv \{u \mid \varphi\}$ が定義だったから $\vdash_S \varphi[u \rightsquigarrow \text{map}_t]$ を示せばよい。

まず map_t の定義から明らかに $\vdash_S \text{map}_t \subset X \times Y$ である。

次に $\vec{x} \equiv \langle x_1, \dots, x_n \rangle$ と書くと、 map_t の定義から

$$\begin{array}{c}
\frac{}{\vec{x} \in X : t \in Y} \text{map}_t \text{ の条件} \quad \frac{}{\vec{x} \in X : \langle \vec{x}, t \rangle \in \text{map}_t} \text{定義} \\
\hline
\vec{x} \in X : t \in Y \wedge \langle \vec{x}, t \rangle \in \text{map}_t \quad \text{命題 2.14} \\
\\
\frac{\langle \vec{x}, z \rangle \in \text{map}_t : \langle \vec{x}, z \rangle = \langle \vec{x}, t \rangle \quad \langle \vec{x}, z \rangle = \langle \vec{x}, t \rangle : z = t}{\langle \vec{x}, z \rangle \in \text{map}_t : z = t} \text{命題 2.5 と同様} \\
\hline
\frac{}{z \in Y, \langle \vec{x}, z \rangle \in \text{map}_t : z = t} \text{C} \star \\
\\
\frac{}{z \in Y : \langle \vec{x}, z \rangle \in \text{map}_t \rightarrow t = z} \text{T} \\
\hline
\frac{}{z \in Y : \langle \vec{x}, z \rangle \in \text{map}_t \rightarrow t = z} \text{命題 2.24} \\
\\
\frac{}{z \in Y \rightarrow (\langle \vec{x}, z \rangle \in \text{map}_t \rightarrow t = z)} \text{命題 2.24} \\
\hline
\frac{}{z \in Y \rightarrow (\langle \vec{x}, z \rangle \in \text{map}_t \rightarrow t = z)} \text{命題 2.34} \star
\end{array}$$

だから

$$\begin{array}{c}
\frac{}{\vec{x} \in X : t \in Y \wedge \langle \vec{x}, t \rangle \in \text{map}_t} \quad \frac{}{:\forall z \in Y (\langle \vec{x}, z \rangle \in \text{map}_t \rightarrow t = z)} \text{命題 2.14} \\
\hline
\frac{}{\vec{x} \in X : t \in Y \wedge \langle \vec{x}, t \rangle \in \text{map}_t \wedge \forall z \in Y (\langle \vec{x}, z \rangle \in \text{map}_t \rightarrow t = z)} \text{命題 2.58} \star \\
\hline
\frac{}{\vec{x} \in X : \exists y \in Y [\langle \vec{x}, y \rangle \in \text{map}_t \wedge \forall z \in Y (\langle \vec{x}, z \rangle \in \text{map}_t \rightarrow y = z)]} \text{命題 3.1} \star \\
\hline
\frac{}{x \in X : \exists y \in Y [\langle x, y \rangle \in \text{map}_t \wedge \forall z \in Y (\langle x, z \rangle \in \text{map}_t \rightarrow y = z)]} \text{命題 2.24} \\
\hline
\frac{}{:x \in X \rightarrow \exists! y \in Y (\langle x, y \rangle \in \text{map}_t)} \text{命題 2.34} \star \\
\hline
\frac{}{: \forall x \in X \exists! y \in Y (\langle x, y \rangle \in \text{map}_t)} \text{命題 2.34} \star
\end{array}$$

より $\vdash_S \varphi[u \rightsquigarrow \text{map}_t]$ が分かる。 □

3.1 自然数について

local set theory で自然数を扱うには natural number system というものを使用する。

定義. L を局所言語, S を L における local set theory とする. このとき S における natural number system とは, 3 つ組 $\langle \mathbb{N}, \mathbf{s}, o \rangle$ であって以下の条件を満たすものをいう.

- (1) $\mathbb{N}$ は L の型である.
- (2) $\mathbf{s}: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ は L の関数記号である.
- (3) o は L における型 $\mathbb{N}$ の閉項である.
- (4) $\vdash_S \mathbf{s}(o) \neq o$ である.
- (5) $\mathbf{s}(x) = \mathbf{s}(y) \vdash_S x = y$ である.
- (6) $o \in x, \forall y (y \in x \rightarrow \mathbf{s}(y) \in x) \vdash_S \forall y (y \in x)$ である.

以下では $\langle \mathbb{N}, \mathbf{s}, o \rangle$ を S における natural number system として, 型 $\mathbb{N}$ の変数記号として n, m などを使う.

命題 3.3. $\text{Var}(\varphi(n)) = \{n\}$ として, 更に $\vdash_S \varphi(o)$ かつ $\varphi(n) \vdash_S \varphi(\mathbf{s}(n))$ とする. このとき $\vdash_S \forall n \varphi(n)$ である.

証明. $X \equiv \{n \mid \varphi(n)\}$ に natural number system の条件を使うことで, 次のようにして成り立つ.

$$\begin{array}{c}
\frac{\frac{\frac{}{: \varphi(o)} \text{ 假定}}{\varphi(o), \forall n [\varphi(n) \rightarrow \varphi(\mathbf{s}(n))] : \forall n \varphi(n)} \text{ C } \star}{\forall n [\varphi(n) \rightarrow \varphi(\mathbf{s}(n))] : \forall n \varphi(n)} \text{ C } \star \\
\frac{\frac{\frac{\frac{}{\varphi(n) : \varphi(\mathbf{s}(n))} \text{ 假定}}{: \varphi(n) \rightarrow \varphi(\mathbf{s}(n))} \text{ 命題 2.24}}{: \forall n [\varphi(n) \rightarrow \varphi(\mathbf{s}(n))] } \text{ 命題 2.34 } \star}{\forall n [\varphi(n) \rightarrow \varphi(\mathbf{s}(n))] : \forall n \varphi(n)} \text{ 上述} \\
\frac{}{: \forall n \varphi(n)} \text{ C } \star
\end{array}$$

□

命題 3.4. $\vdash_S \mathbf{s}(n) \neq n$ である.

証明. 命題 3.3 により $\vdash_S \mathbf{s}(o) \neq o$ と $\mathbf{s}(n) \neq n \vdash_S \mathbf{s}(\mathbf{s}(n)) \neq \mathbf{s}(n)$ を示せばよい. 前者は natural number system の定義である. 後者は $\varphi(n) \equiv \mathbf{s}(n) = n$ とすれば

$$\begin{array}{c}
\frac{\frac{\frac{}{\mathbf{s}(x) = \mathbf{s}(y) : x = y} \text{ 定義}}{\mathbf{s}(\mathbf{s}(n)) = \mathbf{s}(n) : \mathbf{s}(n) = n} \text{ S}(x \rightsquigarrow \mathbf{s}(n), y \rightsquigarrow n)}{\varphi(\mathbf{s}(n)) \rightarrow \varphi(n)} \text{ 命題 2.24} \\
\frac{\frac{}{: \varphi(\mathbf{s}(n)) \rightarrow \varphi(n)} \text{ 上述}}{\varphi(\mathbf{s}(n)) \rightarrow \varphi(n) : \neg \varphi(n) \rightarrow \neg \varphi(\mathbf{s}(n))} \text{ 命題 2.47} \\
\frac{}{: \neg \varphi(n) \rightarrow \neg \varphi(\mathbf{s}(n))} \text{ C } \star \\
\frac{}{\mathbf{s}(n) \neq n : \mathbf{s}(\mathbf{s}(n)) \neq \mathbf{s}(n)} \text{ 命題 2.23}
\end{array}$$

となる.

□

定理 3.5. X を S -集合, t を閉項として, t の型が $\mathbf{A}$ で X の型が $\mathbf{PA}$ であるとする. このとき S -写像 $g: X \rightarrow X$ に対して, ある S -写像 $f: U^{\mathbf{N}} \rightarrow X$ が一意に存在して

$$\vdash_S f(o) = t \wedge \forall n [f(\mathbf{s}(n)) = g(f(n))]$$

となる.

証明. S -集合 Y を

$$Y \equiv \{u \in \mathcal{P}(U^{\mathbb{N} \times X}) \mid \langle o, t \rangle \in u \wedge \forall n \forall x (\langle n, x \rangle \in u \rightarrow \langle \mathbf{s}(n), g(x) \rangle \in u)\}$$

と定義して, $f \equiv \bigcup U$ と定める. この f が条件を満たす. $\square$

定理 3.6. X を S -集合, t を閉項で $\vdash_S t \in X$ とする. このとき S -写像 $g: X \times U^{\mathbb{N}} \rightarrow X$ に対して, ある S -写像 $f: U^{\mathbb{N}} \rightarrow X$ が一意に存在して

$$\vdash_S f(o) = t \wedge \forall n [f(\mathbf{s}(n)) = g(f(n), n)]$$

となる.

証明. $Y \equiv X \times U^{\mathbb{N}}$, $h := \text{map}_{\langle g(\langle x, n \rangle), n \rangle}^{x, n}: Y \rightarrow Y$ としてこの h に定理 3.5 を使えば, S -写像 $k: U^{\mathbb{N}} \rightarrow Y$ で

$$\vdash_S k(o) = \langle t, o \rangle \wedge \forall n [k(\mathbf{s}(n)) = h(k(n))]$$

となるものが得られる. $f := p_1 \circ k: U^{\mathbb{N}} \rightarrow X$ とすれば

$$\vdash_S f(o) = t \wedge \forall n [f(\mathbf{s}(n)) = g(f(n), n)]$$

である. $\square$

$X \equiv PU^{\mathbb{N}}$, $t \equiv \emptyset^{\mathbb{N}}$ として $g := \text{map}_{u \cup \{x\}}^{u, x}: PU^{\mathbb{N}} \times U^{\mathbb{N}} \rightarrow PU^{\mathbb{N}}$ に定理 3.6 を使うと, S -写像 $f: U^{\mathbb{N}} \rightarrow PU^{\mathbb{N}}$ で

$$\vdash_S f(o) = \emptyset^{\mathbb{N}} \wedge \forall n [f(\mathbf{s}(n)) = f(n) \cup \{n\}]$$

となるものが得られる. これを使って $m < n \equiv m \in f(n)$ と定義する.

命題 3.7. 次が成り立つ.

- (1) $\vdash_S n \not< o$
- (2) $\vdash_S n < \mathbf{s}(m) \leftrightarrow (n = m \vee n < m)$
- (3) $n < m \vdash_S \mathbf{s}(n) = m \vee \mathbf{s}(n) < m$
- (4) $n < m, m < k \vdash_S n < k$
- (5) $\vdash_S n \not< n$
- (6) $\vdash_S n < m \vee n = m \vee m < n$

証明. (1) (2) 定義から明らか.

(3) $\varphi(m) \equiv n < m \rightarrow (s(n) = m \vee s(n) < m)$ とする. まず次により $\vdash_S \forall n \varphi(o)$ である.

$$\begin{array}{c}
\frac{}{ : n \not< o } (1) \\
\frac{}{ n < o : \perp } \text{命題 2.23} \quad \frac{}{ \perp : (s(n) = o \vee s(n) < o) } \text{命題 2.39} \\
\hline
n < o : (s(n) = o \vee s(n) < o) \quad \text{C} \star \\
\hline
: n < o \rightarrow (s(n) = o \vee s(n) < o) \quad \text{命題 2.24} \\
\hline
: \forall n [n < o \rightarrow (s(n) = o \vee s(n) < o)] \quad \text{命題 2.34} \star
\end{array}$$

次に, 次のようにして $\forall n \varphi(m) \vdash_S \forall n \varphi(s(m))$ である.

$$\begin{array}{c}
\frac{}{ n = m : s(n) = s(m) } \text{命題 2.6} \quad \frac{}{ \varphi(m), n < m : s(n) = m \vee s(n) < m } \text{命題 2.22} \\
\hline
\varphi(m), n < m : s(n) < s(m) \quad (2) \\
\hline
\varphi(m), n = m \vee n < m : s(n) = s(m) \vee s(n) < s(m) \quad \text{命題 2.48} \\
\hline
\varphi(m), n < s(m) : s(n) = s(m) \vee s(n) < s(m) \quad (2) \\
\hline
\varphi(m) : \varphi(s(m)) \quad \text{命題 2.24} \\
\hline
\forall n \varphi(m) : \varphi(s(m)) \quad \text{命題 2.37} \star \\
\hline
\forall n \varphi(m) : \forall n \varphi(s(m)) \quad \text{命題 2.34} \star
\end{array}$$

よって命題 3.3 により $\vdash_S \forall m \forall n \varphi(m)$ である. 従って

$$\begin{array}{c}
\frac{}{ : \forall n \forall m [n < m \rightarrow (s(n) = m \vee s(n) < m)] } \text{上述} \\
\hline
: n < m \rightarrow (s(n) = m \vee s(n) < m) \quad \text{命題 2.36} \star \\
\hline
n < m : s(n) = m \vee s(n) < m \quad \text{命題 2.23, 2.19}
\end{array}$$

となる.

(4) $\varphi(k) \equiv (n < m \wedge m < k) \rightarrow n < k$ とする. まず次のようにして $\vdash_S \forall n \forall m \varphi(o)$ である.

$$\begin{array}{c}
\frac{}{ : m \not< o } (1) \\
\frac{}{ m < o : \perp } \text{命題 2.23} \quad \frac{}{ \perp : n < o } \text{命題 2.39} \\
\hline
m < o : n < o \quad \text{C} \star \\
\hline
n < m \wedge m < o : n < o \quad \text{命題 2.15} \\
\hline
: (n < m \wedge m < o) \rightarrow n < o \quad \text{命題 2.24} \\
\hline
: \forall n \forall m [(n < m \wedge m < o) \rightarrow n < o] \quad \text{命題 2.34} \star
\end{array}$$

次に, 次のようにして $\forall n \forall m \varphi(k) \vdash_S \forall n \forall m \varphi(s(k))$ である.

$$\begin{array}{c}
\frac{}{\varphi(k), n < m, m < k : n = k} \text{命題 2.22} \quad \frac{}{n < m, m = k : n < k} \text{基本公理} \\
\frac{}{\varphi(k), n < m, m < k : n = k \vee n < k} \quad \frac{}{n < m, m = k : n = k \vee n < k} \text{命題 2.49} \\
\frac{}{\varphi(k), n < m, m = k \vee m < k : n = k \vee n < k} \text{命題 2.48} \\
\frac{}{\varphi(k), n < m \wedge m < s(k) : n < s(k)} (2), \text{命題 2.18} \\
\frac{}{\varphi(k) : \varphi(s(k))} \text{命題 2.24} \\
\frac{}{\forall n \forall m \varphi(k) : \varphi(s(k))} \text{命題 2.37} \star \\
\frac{}{\forall n \forall m \varphi(k) : \forall n \forall m \varphi(s(k))} \text{命題 2.34} \star
\end{array}$$

よって命題 3.3 により $\vdash_S \forall k \forall n \forall m \varphi(k)$ である。従って

$$\begin{array}{c}
\frac{}{: \forall k \forall n \forall m [(n < m \wedge m < k) \rightarrow n < k]} \text{上述} \\
\frac{}{: (n < m \wedge m < k) \rightarrow n < k} \text{命題 2.36} \star \\
\frac{}{n < m, m < k : n < k} \text{命題 2.23, 2.19}
\end{array}$$

となる。

(5) 命題 3.3 により $\vdash_S o \not< o$ と $n \not< n \vdash_S s(n) \not< s(n)$ を示せばよい。前者は (1) より明らか。後者は次のようにして成り立つ。

$$\begin{array}{c}
\frac{}{: n < s(n)} (2) \quad \frac{}{n < s(n), s(n) < n : n < n} (4) \\
\frac{}{s(n) < n : n < n} \text{C} \star \quad \frac{}{: s(n) \neq n} \text{命題 3.4} \\
\frac{}{s(n) \in f(n), n \not< n : \perp} \text{命題 2.43} \quad \frac{}{s(n) = n : \perp} \text{命題 2.23} \\
\frac{}{s(n) \in f(n) \vee s(n) = n, n \not< n : \perp} \text{命題 2.48} \\
\frac{}{s(n) \in f(n) \vee s(n) \in \{n\}, n \not< n : \perp} \\
\frac{}{s(n) \in f(n) \cup \{n\}, n \not< n : \perp} \text{命題 2.42} \\
\frac{}{n \not< n : s(n) \notin f(n) \cup \{n\}} \\
\frac{}{n \not< n : s(n) \notin f(s(n))}
\end{array}$$

(6) $\varphi(n) \equiv n < m \vee n = m \vee m < n$ とする。まず次のようにして $\vdash_S \forall m \varphi(o)$ である。

$$\begin{array}{c}
\frac{}{: o < s(m)} \\
\frac{}{: o < m \vee o = m} (2) \\
\frac{}{: o < m \vee o = m \vee m < o} \text{命題 2.49} \\
\frac{}{: \forall m (o < m \vee o = m \vee m < o)} \text{命題 2.34} \star
\end{array}$$

次に、次のようにして $\forall m \varphi(n) \vdash_S \forall m \varphi(s(n))$ である。

$$\begin{array}{c}
\frac{}{n < m : \mathbf{s}(n) < m \vee \mathbf{s}(n) = m} \quad \frac{}{m = n \vee m < n : m = n \vee m < n} \text{命題 2.7} \\
\hline
\frac{\varphi(n) : \mathbf{s}(n) < m \vee \mathbf{s}(n) = m \vee (m = n \vee m < n)}{\varphi(n) : \mathbf{s}(n) < m \vee \mathbf{s}(n) = m \vee m < \mathbf{s}(n)} \text{(2)} \\
\hline
\frac{\forall m \varphi(n) : \varphi(\mathbf{s}(n))}{\forall m \varphi(n) : \forall m \varphi(\mathbf{s}(n))} \text{命題 2.37} \star \\
\hline
\frac{}{\forall m \varphi(n) : \forall m \varphi(\mathbf{s}(n))} \text{命題 2.34} \star
\end{array}$$

よって命題 3.3 により $\vdash_S \forall m \varphi(n)$ である. 従って $\vdash_S n < m \vee n = m \vee m < n$ である. $\square$

次に S -写像 $+: U^{\mathbb{N}} \times U^{\mathbb{N}} \rightarrow U^{\mathbb{N}}$ を定義する. そのために $X \equiv (U^{\mathbb{N}})^{U^{\mathbb{N}}}$, $t \equiv \text{id}_{U^{\mathbb{N}}}$ として $s \equiv \text{map}_{\mathbf{s}(n)}^n$ とする. S -写像 $g: X \times U^{\mathbb{N}} \rightarrow X$ を $g(k, n) := s \circ k$ で定めて定理 3.6 を使うと, S -写像 $f: U^{\mathbb{N}} \rightarrow X$ で

$$\vdash_S f(o) = \text{id}_{U^{\mathbb{N}}} \wedge \forall n [f(\mathbf{s}(n)) = s \circ (f(n))]$$

となるものが得られる. $C(S)$ における随伴射として得られる S -写像を $+: U^{\mathbb{N}} \times U^{\mathbb{N}} \rightarrow U^{\mathbb{N}}$ と定める. 即ち $+(m, n) = f(m)(n)$ である. 以下 $+(m, n)$ を $m + n$ と書く. f の定義から

$$\vdash_S o + n = n, \quad \vdash_S \mathbf{s}(m) + n = \mathbf{s}(m + n)$$

である. 同様にして $\cdot: U^{\mathbb{N}} \times U^{\mathbb{N}} \rightarrow U^{\mathbb{N}}$ も定義できる. また $+$ や $\cdot$ の常識的な性質を証明することができる. こうして natural number system を使って自然数論を展開することができる. 故に $\mathbb{Z} \equiv (U^{\mathbb{N}} \times U^{\mathbb{N}})/\sim$ という形で有理整数環を定義することができる. 有理数体, 実数体なども定義することができる.

3.2 選択公理と排中律について

定義. S を局所言語 L の local set theory とする.

(1) S が well-termed

$\iff \vdash_S \exists! x \varphi$ ならば, ある t が存在して $\text{Var}(t) = \text{Var}(\varphi) \setminus \{x\}$ かつ $\vdash_S \varphi[x \rightsquigarrow t]$ となる.

(2) S が well-typed

$\iff$ 任意の S -集合 X に対して, ある型 $\mathbf{A}$ が存在して $C(S)$ での同型 $X \cong U^{\mathbf{A}}$ が成り立つ.

(3) S -集合 X が singleton $\iff \vdash_S \forall x \in X \forall y \in X (x = y)$ となる.

- (4) S が singleton-witnessed
 $\iff \varphi$ が L -論理式で $\text{Var}(\varphi) \subset \{x\}$ を満たすならば, ある singleton X が存在して $\vdash_S \forall x \in X \varphi$ かつ $\vdash_S \exists x \in X \leftrightarrow \exists x \varphi$ となる.
- (5) S が古典的 $\iff \vdash_S x^\Omega \vee \neg x^\Omega$ である.
- (6) S が完全 $\iff$ 任意の L -閉論理式 φ に対して $\vdash_S \varphi$ または $\vdash_S \neg \varphi$ である.
- (7) S が選択公理を満たす
 $\iff X, Y$ が S -集合, $\varphi(x, y)$ が L -論理式で $\text{Var}(\varphi(x, y)) \subset \{x, y\}$ とする. このとき $\vdash_S \forall x \in X \exists y \in Y \varphi(x, y)$ ならば, ある S -写像 $f: X \rightarrow Y$ が存在して $\vdash_S \forall x \in X \varphi(x, f(x))$ となる.
- (8) S が IAC (Implicit Axiom of Choice) を満たす
 $\iff X, Y$ が S -集合, $\varphi(x, y)$ が L -論理式で $\text{Var}(\varphi(x, y)) \subset \{x, y\}$ とする. このとき $\vdash_S \forall x \in X \exists y \in Y \varphi(x, y)$ ならば, $\vdash_S \exists f \in Y^X \forall x \in X \varphi(x, f(x))$ となる.
- (9) S が Hilbertian
 $\iff$ 変数記号 x が $\vdash_S \neg \exists x (x = x)$ を満たすとする. このとき L -論理式 φ に対して, ある項 t が存在して $\text{Var}(t) \subset \text{Var}(\varphi) \setminus \{x\}$ かつ $\exists x \varphi \vdash_S \varphi[x \rightsquigarrow t]$ である.
- (10) S -集合 X の補集合とは, S -集合 Y であって $X \cup Y \stackrel{S}{=} U$, $X \cap Y \stackrel{S}{=} \emptyset$ を満たすものをいう.

定理 3.8. local set theory S に対して以下の条件は同値である.

- (1) S が古典的である.
- (2) 任意の S -集合 X の補集合が存在する.
- (3) $U^\Omega \stackrel{S}{=} \{\top, \perp\}$ である.
- (4) $\neg \neg x^\Omega \vdash_S x^\Omega$ である.
- (5) $\neg y^\Omega \rightarrow \neg x^\Omega \vdash_S x^\Omega \rightarrow y^\Omega$ である.

証明. (1 $\implies$ 2) S -集合 X に対して $Y \equiv \{x \mid x \notin X\}$ と定める. 命題 2.44 より

$$X \cap Y \equiv \{x \mid x \in X \wedge x \in Y\} \stackrel{S}{=} \{x \mid x \in X \wedge x \notin X\} \stackrel{S}{=} \{x \mid \perp\} \equiv \emptyset$$

である. また

$$\begin{array}{c}
\text{基本公理} \\
\frac{}{: x \in Y \leftrightarrow x \notin X} \text{ 命題 2.23, 2.26} \\
\frac{x \in Y : x \notin X}{x \in Y : x \in X \vee x \notin X} \text{ 命題 2.49} \\
\frac{x \in X : x \in X \vee x \notin X \quad \text{命題 2.50} \quad \frac{x \in Y : x \in X \vee x \notin X}{x \in X \vee x \in Y : x \in X \vee x \notin X} \text{ 命題 2.48}}{x \in X \vee x \in Y : x \in X \vee x \notin X}
\end{array}$$

$$\begin{array}{c}
\text{基本公理} \\
\frac{}{x \in Y \leftrightarrow x \notin X} \text{命題 2.23, 2.26} \\
\frac{}{x \notin X : x \in Y} \text{命題 2.49} \\
\frac{}{x \notin X : x \in X \vee x \in Y} \text{命題 2.48} \\
\frac{x \in X : x \in X \vee x \in Y \quad \text{命題 2.50}}{x \in X \vee x \notin X : x \in X \vee x \in Y}
\end{array}$$

だから $X \cup Y \stackrel{S}{=} \{x \mid x \in X \vee x \notin X\}$ である. よって

$$\begin{array}{c}
\frac{}{: y^\Omega \vee \neg y^\Omega} \text{仮定 (1)} \\
\frac{}{: (y^\Omega \vee \neg y^\Omega) \leftrightarrow \top} \text{命題 2.11} \\
\frac{}{: (x \in X \vee x \notin X) \leftrightarrow \top} \text{S}(y^\Omega \rightsquigarrow x \in X) \\
\frac{}{: X \cup Y = U} \text{命題 2.30} \star
\end{array}$$

となり Y は X の補集合である.

(2 $\implies$ 3) $\{\top\}$ の補集合を Y とする. $\{\top\} \cap Y \stackrel{S}{=} \emptyset$ だから $(x^\Omega \leftrightarrow \top) \wedge x \in Y \vdash_S \perp$ である. よって

$$\begin{array}{c}
\frac{x^\Omega : x^\Omega \leftrightarrow \top \quad \text{命題 2.11}}{x^\Omega, x^\Omega \in Y : \perp} \text{C} \star \quad \frac{}{\perp : x^\Omega} \text{命題 2.39} \\
\frac{}{x^\Omega \in Y : \perp \leftrightarrow x^\Omega} \text{Eq}
\end{array}$$

により $x^\Omega \in Y \vdash_S x^\Omega \leftrightarrow \perp$ である. 逆に $x^\Omega \leftrightarrow \perp \vdash_S x^\Omega \in Y$ だから $\vdash_S Y = \{\perp\}$ となる. 従って $U^\Omega \stackrel{S}{=} \{\top\} \cup Y \stackrel{S}{=} \{\top, \perp\}$ である.

(3 $\implies$ 4) 仮定 (3) より $\vdash_S \top \leftrightarrow (x^\Omega = \top \vee x^\Omega = \perp)$ である. よって

$$\begin{array}{c}
\frac{x^\Omega = \top : \neg \neg x^\Omega \rightarrow x^\Omega \quad \text{命題 2.40, 2.41}}{(x^\Omega = \top) \vee (x^\Omega = \perp) : \neg \neg x^\Omega \rightarrow x^\Omega} \text{命題 2.40, 2.41} \\
\frac{}{(x^\Omega = \top) \vee (x^\Omega = \perp) : \neg \neg x^\Omega \rightarrow x^\Omega} \text{命題 2.48} \\
\frac{}{: (x^\Omega = \top) \vee (x^\Omega = \perp)} \text{上述} \\
\frac{}{: (x^\Omega = \top) \vee (x^\Omega = \perp) : \neg \neg x^\Omega \rightarrow x^\Omega} \text{C} \star \\
\frac{}{\neg \neg x^\Omega : x^\Omega} \text{命題 2.23}
\end{array}$$

である.

(4 $\implies$ 1) 命題 2.53 と仮定 (4) から明らか.

(4 $\implies$ 5) 次のようにして成り立つ.

$$\begin{array}{c}
\frac{}{\neg y^\Omega \rightarrow \neg x^\Omega : \neg \neg x^\Omega \rightarrow \neg \neg y^\Omega} \text{命題 2.47} \\
\frac{}{\neg y^\Omega \rightarrow \neg x^\Omega, \neg \neg x^\Omega : \neg \neg y^\Omega} \text{命題 2.23} \\
\frac{}{\neg y^\Omega \rightarrow \neg x^\Omega, \neg \neg x^\Omega : y^\Omega} \text{仮定 (4)} \\
\frac{}{\neg y^\Omega \rightarrow \neg x^\Omega, \neg \neg x^\Omega : y^\Omega} \text{C} \star
\end{array}$$

$$\frac{\frac{\overline{x^\Omega : \neg\neg x^\Omega} \text{ 命題 2.45} \quad \frac{\overline{\neg y^\Omega \rightarrow \neg x^\Omega, \neg\neg x^\Omega : y^\Omega} \text{ 上述}}{\neg y^\Omega \rightarrow \neg x^\Omega, x^\Omega : y^\Omega} \text{ C } \star}{\neg y^\Omega \rightarrow \neg x^\Omega : x^\Omega \rightarrow y^\Omega} \text{ 命題 2.24}$$

(5 $\implies$ 4) 次のようにして成り立つ.

$$\frac{\frac{\overline{\neg x^\Omega : \neg\neg\neg x^\Omega} \text{ 命題 2.45}}{\neg x^\Omega : \neg\neg\neg x^\Omega} \quad \frac{\overline{\neg x^\Omega \rightarrow \neg\neg\neg x^\Omega : \neg\neg x^\Omega \rightarrow x^\Omega} \text{ 仮定 (5)}}{\neg x^\Omega : \neg\neg\neg x^\Omega \rightarrow x^\Omega} \text{ C } \star}{\neg\neg x^\Omega : x^\Omega} \text{ 命題 2.23}$$

□

定理 3.9. S が選択公理を満たすならば古典的である.

証明. $\vdash_S a \neq b$ となる閉項 a, b を2つ取り $Y := \{a, b\}$ とする. (例えば $a := \emptyset^I$, $b := U^I$ とすればよい. 命題 2.30, 2.31 より $\vdash a = b \leftrightarrow (\perp \leftrightarrow \top)$ だから

$$\frac{\frac{\overline{a = b : \perp \leftrightarrow \top}}{a = b : \perp \leftrightarrow \top} \text{ 命題 2.23, 2.26} \quad \frac{\overline{\perp \leftrightarrow \top : \perp} \text{ 命題 2.12}}{\perp : \perp} \text{ C } \star}{a = b : \perp} \text{ 命題 2.24}$$

となる.) このとき $\varphi(x_1^\Omega, x_2^\Omega, y) \equiv (y = a \rightarrow x_1^\Omega) \wedge (y = b \rightarrow x_2^\Omega)$ と書けば

$$x_1^\Omega \vee x_2^\Omega \vdash_S \exists y \in Y \varphi(x_1^\Omega, x_2^\Omega, y) \quad (3.10)$$

である.

∴) まず次のようになる.

$$\frac{\frac{\overline{a \neq b} \text{ 命題 2.23}}{a = b : \perp} \quad \frac{\overline{\perp : x_2^\Omega} \text{ 命題 2.39}}{\perp : x_2^\Omega} \text{ C } \star}{a = b : x_2^\Omega} \text{ 命題 2.24}$$

$$\frac{\overline{x_1^\Omega : a = a \rightarrow x_1^\Omega} \text{ 命題 2.25} \quad \frac{\overline{a = b : x_2^\Omega} \text{ 命題 2.24}}{a = b : x_2^\Omega} \text{ 命題 2.14}}{x_1^\Omega : (a = a \rightarrow x_1^\Omega) \wedge (a = b \rightarrow x_2^\Omega)} \text{ 命題 2.14}$$

$$\frac{\overline{a \in Y} \quad x_1^\Omega : (a = a \rightarrow x_1^\Omega) \wedge (a = b \rightarrow x_2^\Omega)}{x_1^\Omega : a \in Y \wedge [(a = a \rightarrow x_1^\Omega) \wedge (a = b \rightarrow x_2^\Omega)]} \text{ 命題 2.14}$$

$$\frac{x_1^\Omega : a \in Y \wedge [(a = a \rightarrow x_1^\Omega) \wedge (a = b \rightarrow x_2^\Omega)]}{x_1^\Omega : \exists y \in Y [(y = a \rightarrow x_1^\Omega) \wedge (y = b \rightarrow x_2^\Omega)]} \text{ 命題 2.58 } \star$$

	$\frac{}{: b = a \rightarrow x_1^\Omega}$ 上と同様	$\frac{}{x_2^\Omega : b = b \rightarrow x_2^\Omega}$ 命題 2.25	
	$\frac{}{: b \in Y}$	$\frac{}{x_2^\Omega : (b = a \rightarrow x_1^\Omega) \wedge (b = b \rightarrow x_2^\Omega)}$ 命題 2.14	
	$\frac{}{x_2^\Omega : b \in Y \wedge [(b = a \rightarrow x_1^\Omega) \wedge (b = b \rightarrow x_2^\Omega)]}$ 命題 2.14		
	$\frac{}{x_2^\Omega : \exists y \in Y [(y = a \rightarrow x_1^\Omega) \wedge (y = b \rightarrow x_2^\Omega)]}$ 命題 2.58 *		

よって命題 2.48 を使えばよい。

そこで $X \equiv \{\langle x_1^\Omega, x_2^\Omega \rangle \mid x_1^\Omega \vee x_2^\Omega\}$ とすれば

$\frac{}{\langle x_1^\Omega, x_2^\Omega \rangle \in X : x_1^\Omega \vee x_2^\Omega}$ X の定義	
$\frac{}{x = \langle x_1^\Omega, x_2^\Omega \rangle, x \in X : x_1^\Omega \vee x_2^\Omega}$ 等号公理	$\frac{}{x_1^\Omega \vee x_2^\Omega : \exists y \in Y \varphi(x_1^\Omega, x_2^\Omega, y)}$ (3.10)
$\frac{}{x = \langle x_1^\Omega, x_2^\Omega \rangle, x \in X : \exists y \in Y \varphi(x_1^\Omega, x_2^\Omega, y)}$ C *	
$\frac{}{x = \langle x_1^\Omega, x_2^\Omega \rangle : x \in X \rightarrow \exists y \in Y \varphi(x_1^\Omega, x_2^\Omega, y)}$ 命題 2.24	
$\frac{}{x = \langle q_1(x), x_2^\Omega \rangle : x \in X \rightarrow \exists y \in Y \varphi(q_1(x), x_2^\Omega, y)}$ S($x_1^\Omega \rightsquigarrow q_1(x)$)	
$\frac{}{x = \langle q_1(x), q_2(x) \rangle : x \in X \rightarrow \exists y \in Y \varphi(q_1(x), q_2(x), y)}$ S($x_2^\Omega \rightsquigarrow q_2(x)$)	
$\frac{}{: x \in X \rightarrow \exists y \in Y \varphi(q_1(x), q_2(x), y)}$ 基本公理	
$\frac{}{: \forall x \in X \exists y \in Y \varphi(q_1(x), q_2(x), y)}$ 命題 2.34 *	

となる。 S の選択公理より、 S -写像 $f: X \rightarrow Y$ で $\vdash_S \forall x \in X \varphi(q_1(x), q_2(x), f(x))$ となるものが存在する。つまり φ の定義より

$$\vdash_S \forall x \in X [(f(x) = a \rightarrow q_1(x)) \wedge (f(x) = b \rightarrow q_2(x))]$$

となる。このとき命題 2.36 を使えば

$$\begin{aligned} x_1^\Omega \vee x_2^\Omega \vdash_S f(x_1^\Omega, x_2^\Omega) = a \rightarrow x_1^\Omega \\ x_1^\Omega \vee x_2^\Omega \vdash_S f(x_1^\Omega, x_2^\Omega) = b \rightarrow x_2^\Omega \end{aligned}$$

が分かる。また Y の定義より $x_1^\Omega \vee x_2^\Omega \vdash_S f(x_1^\Omega, x_2^\Omega) = a \vee f(x_1^\Omega, x_2^\Omega) = b$ である。故に

$\frac{}{: \top}$ 命題 2.10	
$\frac{}{: x_1^\Omega \vee \top}$ 命題 2.49	$\frac{}{x_1^\Omega \vee x_2^\Omega : f(x_1^\Omega, x_2^\Omega) = a \rightarrow x_1^\Omega}$ S($x_2^\Omega \rightsquigarrow \top$)
$\frac{}{x_1^\Omega \vee \top : f(x_1^\Omega, \top) = a \rightarrow x_1^\Omega}$ C *	
$\frac{}{: f(x_1^\Omega, \top) = a \rightarrow x_1^\Omega}$ 命題 2.23	
$\frac{}{f(x_1^\Omega, \top) = a : x_1^\Omega}$ 命題 2.49	
$\frac{}{f(x_1^\Omega, \top) = a : x_1^\Omega \vee f(x_1^\Omega, \top) = b}$	

と命題 2.50 により $\vdash_S x_1^\Omega \vee f(x_1^\Omega, \top) = b$ が分かる。同様にして $\vdash_S x_2^\Omega \vee f(\top, x_2^\Omega) = a$ が分かる。従って

$$\begin{array}{c}
\frac{\overline{: x_1^\Omega \vee f(x_1^\Omega, \top) = b}}{\overline{: x^\Omega \vee f(x^\Omega, \top) = b}} S(x_1^\Omega \rightsquigarrow x^\Omega) \quad \frac{\overline{: x_2^\Omega \vee f(\top, x_2^\Omega) = a}}{\overline{: x^\Omega \vee f(\top, x^\Omega) = a}} S(x_2^\Omega \rightsquigarrow x^\Omega) \\
\hline
\overline{: [x^\Omega \vee f(x^\Omega, \top) = b] \wedge [x^\Omega \vee f(\top, x^\Omega) = a]} \text{命題 2.14} \\
\hline
\overline{: x^\Omega \vee [f(x^\Omega, \top) = b \wedge f(\top, x^\Omega) = a]} \text{命題 2.54}
\end{array}$$

となる．そこで $\psi(x^\Omega) \equiv f(x^\Omega, \top) = b \wedge f(\top, x^\Omega) = a$ と書けば

$$\begin{array}{c}
\text{基本公理} \\
\frac{x^\Omega = z^\Omega, \psi(x^\Omega) : \psi(z^\Omega)}{x^\Omega = \top, \psi(x^\Omega) : \psi(\top)} S(z^\Omega \rightsquigarrow \top) \quad \frac{\overline{: a \neq b}}{a = b : \perp} \text{命題 2.23} \\
\hline
\frac{\overline{: x^\Omega = \top}}{\overline{: x^\Omega = \top, \psi(x^\Omega) : \psi(\top)}} \text{命題 2.11} \quad \frac{\overline{: x^\Omega = \top, \psi(x^\Omega) : a = b}}{x^\Omega = \top, \psi(x^\Omega) : \perp} \text{命題 2.3} \\
\hline
\overline{: x^\Omega : x^\Omega = \top} \quad \frac{x^\Omega = \top, \psi(x^\Omega) : \perp}{x^\Omega, \psi(x^\Omega) : \perp} C \star \\
\hline
\overline{: x^\Omega : x^\Omega \vee \neg x^\Omega} \text{命題 2.50} \quad \frac{\overline{\psi(x^\Omega) : \neg x^\Omega}}{\overline{\psi(x^\Omega) : x^\Omega \vee \neg x^\Omega}} \text{命題 2.42} \\
\hline
\overline{: x^\Omega \vee \psi(x^\Omega)} \text{上述} \quad \frac{\overline{\psi(x^\Omega) : x^\Omega \vee \neg x^\Omega}}{x^\Omega \vee \psi(x^\Omega) : x^\Omega \vee \neg x^\Omega} \text{命題 2.49} \\
\hline
\overline{: x^\Omega \vee \neg x^\Omega} C \star
\end{array}$$

により S は古典的である． □

※ L -閉論理式 φ に対する $\vdash \varphi \vee \neg \varphi$ はもう少し簡単に証明できる．

まず $V \equiv \{y \in Y \mid y = a \vee \varphi\}$, $W \equiv \{y \in Y \mid y = b \vee \varphi\}$, $X \equiv \{V, W\}$ と定義する． φ が閉だから V, W, X は S -集合である．このとき

$$\begin{array}{c}
\frac{\overline{: a \in Y \wedge a \in V}}{\overline{: \exists y \in Y (y \in V)}} \text{命題 2.58} \star \quad \frac{\overline{: b \in Y \wedge b \in W}}{\overline{: \exists y \in Y (y \in W)}} \text{命題 2.58} \star \\
\hline
\frac{\overline{: \exists y \in Y (y \in V)}}{x = V : \exists y \in Y (y \in x)} \text{等号公理} \quad \frac{\overline{: \exists y \in Y (y \in W)}}{x = W : \exists y \in Y (y \in x)} \text{等号公理} \\
\hline
\frac{x = V \vee x = W : \exists y \in Y (y \in x)}{x \in X : \exists y \in Y (y \in x)} X \text{ の定義} \\
\hline
\frac{x \in X : \exists y \in Y (y \in x)}{: x \in X \rightarrow \exists y \in Y (y \in x)} \text{命題 2.24} \\
\hline
\frac{: x \in X \rightarrow \exists y \in Y (y \in x)}{: \forall x \in X \exists y \in Y (y \in x)} \text{命題 2.34} \star
\end{array}$$

だから S の選択公理により， S -写像 $f: X \rightarrow Y$ を使って $\vdash_S \forall x \in X (f(x) \in x)$ とできる．このとき

$\frac{\frac{\frac{}{: \forall x \in X (f(x) \in x)}}{: f(V) \in V} \text{ 命題 2.36 } \star}{: f(V) = a \vee \varphi} \text{ } V \text{ の定義}}{\frac{\frac{}{: \forall x \in X (f(x) \in x)}}{: f(W) \in W} \text{ 命題 2.36 } \star}{: f(W) = b \vee \varphi} \text{ } W \text{ の定義}} \text{ 命題 2.14}$	
$\frac{}{: [f(V) = a \vee \varphi] \wedge [f(W) = b \vee \varphi]} \text{ 命題 2.54}$	
$\frac{}{: \varphi \vee [f(V) = a \wedge f(W) = b]}$	
$\frac{}{: \varphi \vee [f(V) \neq f(W)]}$	
$\frac{\frac{}{\varphi : y = b \vee \varphi} \text{ 命題 2.50}}{\varphi, y = a \vee \varphi : y = b \vee \varphi} \text{ T}$	
$\frac{\frac{}{\varphi : y = a \vee \varphi} \text{ 命題 2.50}}{\varphi, y = b \vee \varphi : y = a \vee \varphi} \text{ T}$	
$\frac{}{\varphi : (y = a \vee \varphi) \leftrightarrow (y = b \vee \varphi)} \text{ Eq}$	
$\frac{}{\varphi : V = W} \text{ 命題 2.30}$	
$\frac{}{\varphi : f(V) = f(W)} \text{ 命題 2.47}$	
$\frac{\frac{}{f(V) \neq f(W) : \neg \varphi} \text{ 命題 2.49}}{f(V) \neq f(W) : \varphi \vee \neg \varphi} \text{ 命題 2.48}$	
$\frac{\frac{}{\varphi : \varphi \vee \neg \varphi} \text{ 命題 2.50}}{\varphi \vee [f(V) \neq f(W)] : \varphi \vee \neg \varphi}$	
により $\vdash_S \varphi \vee \neg \varphi$ となる.	

定理 3.11. S が選択公理を満たす $\iff S$ が singleton-witnessed かつ IAC を満たす.

証明. (選択公理 $\implies$ singleton-witnessed) S が選択公理を満たすとして, φ が $\text{Var}(\varphi) \subset \{x\}$ を満たすとする. $X \equiv \{x \mid \varphi\}$, $Y \equiv \{y^I \mid \exists x \varphi\}$ と定義すれば

$\frac{}{\varphi : x \in X} \text{ 命題 2.29}$	
$\frac{}{\varphi : \varphi} \text{ 命題 2.7}$	
$\frac{}{\varphi : x \in X \wedge \varphi} \text{ 命題 2.14}$	
$\frac{}{\varphi : \exists x \in X \varphi} \text{ 命題 2.55 } \star$	
$\frac{}{y^I \in Y : \exists x \varphi} \text{ 命題 2.29}$	
$\frac{}{\exists x \varphi : \exists x \in X \varphi} \text{ 命題 2.56 } \star$	
$\frac{}{y^I \in Y : \exists x \in X \varphi} \text{ C } \star$	
$\frac{}{: y^I \in Y \rightarrow \exists x \in X \varphi} \text{ 命題 2.24}$	
$\frac{}{: \forall y^I \in Y \exists x \in X \varphi} \text{ 命題 2.34 } \star$	

となる. よって選択公理により, ある S -写像 $f: Y \rightarrow X$ が存在して

$$\vdash_S \forall y^I \in Y \varphi[x \rightsquigarrow f(y^I)]$$

である. このとき $Z \equiv \{x \mid f(*) = x\}$ は明らかに singleton であり

$$\vdash_S \forall x \in Z \varphi, \quad \vdash_S \exists x \in Z \leftrightarrow \exists x \varphi$$

となる. よって S は singleton-witnessed である.

(選択公理 $\implies$ IAC) 命題 2.58 から明らか.

(singleton-witnessed かつ IAC $\implies$ 選択公理) $\varphi(x, y)$ が $\text{Var}(\varphi(x, y)) \subset \{x, y\}$ と

$$\vdash_S \forall x \in X \exists y \in Y \varphi(x, y)$$

を満たすとする. X, Y の型を PA, PB としたとき型 $\text{P}(\text{A} \times \text{B})$ の変数記号 f を取り

$$\psi \equiv f \in Y^X \wedge \forall x \in X \varphi(x, f(x))$$

とすると, これは $\text{Var}(\psi) \subset \{f\}$ を満たす. よって singleton-witnessed により, ある singleton Z が存在して

$$\vdash_S \forall f \in Z [f \in Y^X \wedge \forall x \in X \varphi(x, f(x))]$$

$$\vdash_S \exists f \in Z \leftrightarrow [\exists f \in Y^X \forall x \in X \varphi(x, f(x))]$$

となる. IAC により $\vdash_S \exists f \in Y^X \forall x \in X \varphi(x, f(x))$ であるから $\vdash_S \exists! f (f \in Z)$ である. よって命題 2.64 により項 t が存在して $\vdash_S t \in Z$ である. このとき t は S -写像 $t: X \rightarrow Y$ であり $\vdash_S \forall x \in X \varphi(x, t(x))$ となる. $\square$

定理 3.12. S が Hilbertian ならば選択公理を満たす.

証明. $\varphi(x, y)$ が $\text{Var}(\varphi(x, y)) \subset \{x, y\}$ と $\vdash_S \forall x \in X \exists y \in Y \varphi(x, y)$ を満たすとする. このとき $\psi \equiv y \in Y \wedge \varphi(x, y)$ に Hilbertian を使えば, 項 t が存在して $\text{Var}(t) \subset \{x\}$ かつ $\exists y \in Y \varphi(x, y) \vdash_S t \in Y \wedge \varphi(x, t)$ である. よって

$$\frac{\frac{\frac{}{: \forall x \in X \exists y \in Y \varphi(x, y)}}{: x \in X \rightarrow \exists y \in Y \varphi(x, y)}}{x \in X : \exists y \in Y \varphi(x, y)} \quad \begin{array}{l} \text{命題 2.33} \star \\ \text{命題 2.23} \end{array} \quad \frac{\frac{\frac{}{\exists y \in Y \varphi(x, y) : t \in Y \wedge \varphi(x, t)}}{\exists y \in Y \varphi(x, y) : t \in Y}}{\text{系 2.16}}}{x \in X : t \in Y} \text{C} \star$$

となるから $\text{map}_t: X \rightarrow Y$ は S -写像である. 従って

$$\frac{\frac{\frac{\frac{}{: \forall x \in X \exists y \in Y \varphi(x, y)}}{: x \in X \rightarrow \exists y \in Y \varphi(x, y)}}{x \in X : \exists y \in Y \varphi(x, y)} \quad \begin{array}{l} \text{命題 2.33} \star \\ \text{命題 2.23} \end{array} \quad \frac{\frac{\frac{}{\exists y \in Y \varphi(x, y) : t \in Y \wedge \varphi(x, t)}}{\exists y \in Y \varphi(x, y) : \varphi(x, t)}}{\text{系 2.16}}}{x \in X : \varphi(x, t)} \text{C} \star$$

$$\frac{\frac{}{: x \in X \rightarrow \varphi(x, t)}}{: \forall x \in X \varphi(x, t)} \quad \begin{array}{l} \text{命題 2.24} \\ \text{命題 2.34} \star \end{array}$$

となるから選択公理が成り立つ. $\square$

4 トポスの準備

E をトポスとする．この PDF では以下の記号を使用する．

- この PDF では，トポスの定義として次の条件を採用する．

- (1) E は有限完備である．
- (2) E は部分対象分類子を持つ．
- (3) E は冪対象を持つ．

ここでトポスには終対象，直積，部分対象分類子，冪対象などが何なのか予め定まっているものとする．つまりトポスとは組 $E = \langle E, 1, \times, \dots \rangle$ のことである．更に F がトポスの間の関手のとき，例えば $F(1) = 1$ というのは「終対象と交換する」という意味ではなく，1 を 1 に写すという意味であるとする．

- $\langle \Omega, \text{true} \rangle$ で E の部分対象分類子を表す．
- $a_1, \dots, a_n \in E$ を対象とするととき， p_i で標準的な射影 $a_1 \times \dots \times a_n \rightarrow a_i$ を表す．
- $f_i: a \rightarrow a_i$ から直積の普遍性で得られる射 $a \rightarrow a_1 \times \dots \times a_n$ を $\langle f_1, \dots, f_n \rangle$ と書く．
- 対角射 $\Delta := \langle \text{id}_a, \text{id}_a \rangle: a \rightarrow a \times a$ はモノ射である．そこで Δ に対応する射を $\text{eq}: a \times a \rightarrow \Omega$ と書く．
- $\text{eq}: a \times a \rightarrow \Omega$ の随伴射を $\{ \cdot \}_a: a \rightarrow Pa$ と書く．
- $\text{id}: Pa \rightarrow Pa$ の随伴射を $\in: a \times Pa \rightarrow \Omega$ と書く．
- 合成 $a \xrightarrow{!} 1 \xrightarrow{\text{true}} \Omega$ も true で表す．
- $\langle \text{true}, \text{true} \rangle: 1 \rightarrow \Omega \times \Omega$ に対応する射を $\wedge: \Omega \times \Omega \rightarrow \Omega$ と書く．
- $f, g: a \rightarrow \Omega$ に対して $f \wedge g: a \rightarrow \Omega$ を合成

$$a \xrightarrow{\langle f, g \rangle} \Omega \times \Omega \xrightarrow{\wedge} \Omega$$

で定める．

- $f: a \rightarrow \Omega$ を射とするととき，対応するモノ射を f' と書く．つまり次の図式は pullback であり， $\text{true} = f \circ f'$ となる．

$$\begin{array}{ccc} b & \xrightarrow{!} & 1 \\ f' \downarrow & & \downarrow \text{true} \\ a & \xrightarrow{f} & \Omega \end{array}$$

- $f, g: a \rightarrow \Omega$ を射とすると, a の部分対象として包含関係 $f' \subset g'$ を考えることができる. そこで $f' \subset g'$ となることを $f \leq g$ と書く.

命題 4.1. $f, g: a \rightarrow \Omega$ に対して

$$f \leq g \iff g \circ f' = \text{true}.$$

証明. $f \leq g$ となるのは, ある k が存在して $f' \circ k = g'$ となるときである.

$$\begin{array}{ccccc} b & \xrightarrow{\quad k \quad} & 1 & \xrightarrow{\quad ! \quad} & 1 \\ & \searrow f' & \downarrow g' & & \downarrow \text{true} \\ & & a & \xrightarrow{\quad g \quad} & \Omega \end{array}$$

よって $f \leq g \iff g \circ f' = \text{true}$ となる. □

命題 4.2. $f: a \rightarrow b$, $g: b \rightarrow \Omega$, $h: a \rightarrow \Omega$ として $a' := \text{dom}(h')$, $b' := \text{dom}(g')$ とする. このとき

$$h \leq g \circ f \iff \text{ある } k: a' \rightarrow b' \text{ が存在して } g' \circ k = f \circ h' \text{ となる.}$$

$$\begin{array}{ccccc} a' & \xrightarrow{\quad k \quad} & b' & \xrightarrow{\quad ! \quad} & 1 \\ h' \downarrow & & \downarrow g' & & \downarrow \text{true} \\ a & \xrightarrow{\quad f \quad} & b & \xrightarrow{\quad g \quad} & \Omega \end{array}$$

証明. 次の図式の $(*)$ を pullback とすると

$$\begin{array}{ccccccc} a' & \xrightarrow{\quad l \quad} & c & \longrightarrow & b' & \xrightarrow{\quad ! \quad} & 1 \\ & \searrow h' & \downarrow (g \circ f)' & & \downarrow g' & & \downarrow \text{true} \\ & & a & \xrightarrow{\quad f \quad} & b & \xrightarrow{\quad g \quad} & \Omega \end{array} \quad (*)$$

$$\begin{aligned} h \leq g \circ f &\iff \text{ある } l: a' \rightarrow c \text{ が存在して } (g \circ f)' \circ l = h' \text{ となる} \\ &\iff \text{ある } k: a' \rightarrow b' \text{ が存在して } g' \circ k = f \circ h' \text{ となる} \end{aligned}$$

□

命題 4.3. $f, g, h: a \rightarrow \Omega$ に対して

$$h \leq f \wedge g \iff h \leq f \text{ かつ } h \leq g$$

である.

証明. $\wedge$ と $(f \wedge g)'$ の定義より, 次の図式の右の四角と外側の四角は pullback である.
よって左の四角も pullback である.

$$\begin{array}{ccccc} b & \xrightarrow{!} & 1 & \xrightarrow{!} & 1 \\ (f \wedge g)' \downarrow & & \downarrow \langle \top, \top \rangle & & \downarrow \text{true} \\ a & \xrightarrow{\langle f, g \rangle} & \Omega \times \Omega & \xrightarrow{\wedge} & \Omega \end{array}$$

よって

$$\begin{aligned} h \leq f \wedge g &\iff \text{ある } k \text{ が存在して } (f \wedge g)' \circ k = h' \text{ となる} \\ &\iff \langle f, g \rangle \circ h' = \langle \text{true}, \text{true} \rangle \\ &\iff f \circ h' = \text{true} \text{ かつ } g \circ h' = \text{true} \\ &\iff h \leq f \text{ かつ } h \leq g \end{aligned}$$

である. □

命題 4.4. $f, g: a \rightarrow \Omega$, $k: b \rightarrow a$ とするとき

$$f \leq g \implies f \circ k \leq g \circ k.$$

証明. □

命題 4.5. $f, g: a \rightarrow \Omega$, $k: b \rightarrow a$ とするとき

$$(f \wedge g) \circ k = (f \circ k) \wedge (g \circ k).$$

証明. $(f \wedge g) \circ k$ とは合成

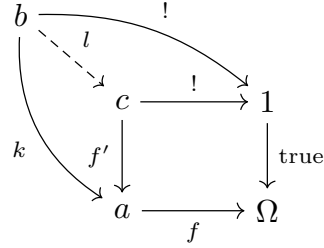
$$b \xrightarrow{k} a \xrightarrow{\langle f, g \rangle} \Omega \times \Omega \xrightarrow{\wedge} \Omega$$

のことだから, $\langle f, g \rangle \circ k = \langle f \circ k, g \circ k \rangle$ より明らか. □

命題 4.6. $f, g: a \rightarrow \Omega$, $k: b \rightarrow a$ とするとき

$$f \circ k = \text{true} \iff \text{ある } l \text{ が存在して } f' \circ l = k$$

証明. $(\implies)$ $f \circ k = \text{true}$ とすると次の図式の一番外側が可換だから, pullback の普遍性により点線の射 l が得られる.

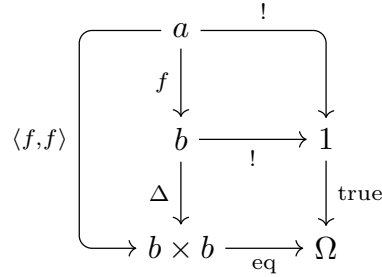


$(\impliedby)$ $f' \circ l = k$ とすると $f \circ k = f \circ f' \circ l = \text{true}$ である. $\square$

命題 4.7. $f, g: a \rightarrow b$ に対して

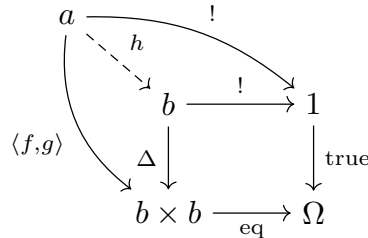
$$f = g \iff (a \xrightarrow{\langle f, g \rangle} b \times b \xrightarrow{\text{eq}} \Omega) = \text{true} \text{ である.}$$

証明. $(\implies)$ $f = g$ のときは



が可換となるから $(a \xrightarrow{\langle f, f \rangle} b \times b \xrightarrow{\text{eq}} \Omega) = \text{true}$ である.

$(\impliedby)$ $(a \xrightarrow{\langle f, g \rangle} b \times b \xrightarrow{\text{eq}} \Omega) = \text{true}$ とすると, pullback の普遍性により次の点線の射 h が得られる.



即ち $f = h = g$ である. $\square$

命題 4.8. $f: a \rightarrow \Omega$ に対して $(a \xrightarrow{\langle f, \text{true} \rangle} \Omega \times \Omega \xrightarrow{\text{eq}} \Omega) = f$ である.

証明. $\text{dom}(f') = b$ として次の図式を考える.

$$\begin{array}{ccccc}
 b & \xrightarrow{\text{true}} & \Omega & \xrightarrow{!} & 1 \\
 f' \downarrow & & \downarrow \Delta & & \downarrow \text{true} \\
 a & \xrightarrow{\langle f, \text{true} \rangle} & \Omega \times \Omega & \xrightarrow{\text{eq}} & \Omega
 \end{array}$$

左の四角が pullback であることを示せば全体も pullback であることが分かり, f' の定義から $(a \xrightarrow{\langle f, \text{true} \rangle} \Omega \times \Omega \xrightarrow{\text{eq}} \Omega) = f$ となる. そこで次の図式が可換であるとする.

$$\begin{array}{ccc}
 c & \xrightarrow{q_0} & \Omega \\
 q_1 \searrow & & \downarrow \Delta \\
 & b \xrightarrow{\text{true}} & \Omega \\
 & f' \downarrow & \\
 & a \xrightarrow{\langle f, \text{true} \rangle} & \Omega \times \Omega
 \end{array}$$

右下の $\Omega \times \Omega$ が直積だから, 可換図式が得られる.

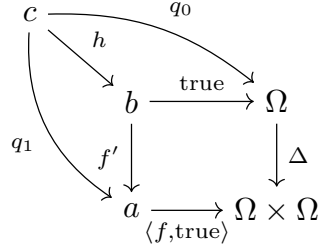
$$\begin{array}{ccc}
 c & \xrightarrow{q_0} & \Omega \\
 q_1 \searrow & & \downarrow \text{id} \\
 & b \xrightarrow{\text{true}} & \Omega \\
 & f' \downarrow & \\
 & a \xrightarrow{f} & \Omega
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 c & \xrightarrow{q_0} & \Omega \\
 q_1 \searrow & & \downarrow \text{id} \\
 & b \xrightarrow{\text{true}} & \Omega \\
 & f' \downarrow & \\
 & a \xrightarrow{\text{true}} & \Omega
 \end{array}$$

右の図式の可換性から $q_0 = \text{true} \circ q_1 = \text{true}$ である. 従って $f \circ q_1 = q_0 = \text{true}$ だから次の実線の可換図式が得られる

$$\begin{array}{ccc}
 c & \xrightarrow{!} & 1 \\
 \text{---} h \searrow & & \downarrow \text{true} \\
 & b \xrightarrow{!} & 1 \\
 q_1 \searrow & & \\
 & a \xrightarrow{f} & \Omega
 \end{array}$$

よって f' の定義により点線の射 $h: c \rightarrow b$ が存在して可換となる. 即ち $f' \circ h = q_1$ だ

から



が可換となる．このような h が一意であることも容易に分かるので pullback であることが分かった． $\square$

5 local set theory が定めるトポス

通常の (ZFC のような) 集合論において，対象を集合，射を写像とすると，これはトポスになるのであった．同様のことが local set theory S に対しても成り立つことを示すことがこの節の目的である．まず圏 $C(S)$ を以下のようにして定める．

- 対象を S -集合とする．
- X, Y を S -集合， $f: X \rightarrow Y$ を S -写像とすると，3 組 $\langle f, X, Y \rangle$ を X から Y への射とする．
- $f, g: X \rightarrow Y$ が S -写像のとき次が成り立つ．

$$f \stackrel{S}{=} g \iff x \in X \vdash_S \langle x, y \rangle \in f \leftrightarrow \langle x, y \rangle \in g \quad (5.1)$$

$\therefore (\implies) \vdash_S f = g$ とすると命題 2.6 より $\vdash_S \langle x, y \rangle \in f \leftrightarrow \langle x, y \rangle \in g$ である．

$(\impliedby)$ まず $x \in X \vdash_S \langle x, y \rangle \in f \leftrightarrow \langle x, y \rangle \in g$ だから命題 2.6 を使えば

$$u = \langle x, y \rangle, x \in X \vdash_S u \in f \leftrightarrow u \in g$$

が分かる．よって

$$\frac{\frac{\frac{}{u = \langle x, y \rangle, x \in X : u \in f \leftrightarrow u \in g} \text{ 上述}}{u = \langle x, y \rangle \wedge x \in X \wedge y \in Y : u \in f \leftrightarrow u \in g} \text{ 命題 2.15}}{\exists x \exists y (u = \langle x, y \rangle \wedge x \in X \wedge y \in Y) : u \in f \leftrightarrow u \in g} \text{ 命題 2.56 } \star$$

$$\frac{\exists x \exists y (u = \langle x, y \rangle \wedge x \in X \wedge y \in Y) : u \in f \leftrightarrow u \in g}{u \in f, \exists x \exists y (u = \langle x, y \rangle \wedge x \in X \wedge y \in Y) : u \in g} \text{ 命題 2.23}$$

となる。次に $f \in Y^X$ だから Y^X の定義より

$$\vdash_S f \subset X \times Y \wedge \forall x \in X \exists! y \in Y \langle x, y \rangle \in f$$

が成り立つ。 $f \subset X \times Y$ の定義は $\forall u \in f (u \in X \times Y)$ だったから

$$\frac{\frac{\frac{}{: f \subset X \times Y}}{: \forall u \in f [\exists x \exists y (u = \langle x, y \rangle \wedge x \in X \wedge y \in Y)]}}{: u \in f \rightarrow [\exists x \exists y (u = \langle x, y \rangle \wedge x \in X \wedge y \in Y)]} \text{命題 2.36 } \star}{u \in f : \exists x \exists y (u = \langle x, y \rangle \wedge x \in X \wedge y \in Y)} \text{命題 2.23}$$

となる。よって $u \in f \vdash_S u \in g$ が分かる。同様にして $u \in g \vdash_S u \in f$ も分かるから

$$\frac{\frac{\frac{}{u \in f : u \in g} \quad \frac{}{u \in g : u \in f}}{: u \in f \leftrightarrow u \in g} \text{Eq}}{: f = g} \text{Ex } \star$$

となる。

- $f: X \rightarrow Y$ と $g: Y \rightarrow Z$ が S -写像のとき、 S -写像の合成 $g \circ f$ を

$$g \circ f \equiv \{ \langle x, z \rangle \mid \exists y (\langle x, y \rangle \in f \wedge \langle y, z \rangle \in g) \}$$

と定める。

- $g \circ f: X \rightarrow Z$ である。
- S -写像の合成は結合律を満たす。即ち $f: X \rightarrow Y$, $g: Y \rightarrow Z$, $h: Z \rightarrow W$ とするとき $(h \circ g) \circ f \stackrel{S}{=} h \circ (g \circ f)$ である。
- S -集合 X に対して $\text{id}_X \equiv \{ \langle x, x \rangle \mid x \in X \}$ と定める。
- $\text{id}_X: X \rightarrow X$ は S -写像である。
- id_X は恒等射の条件を満たす。即ち $f: X \rightarrow Y$ に対して $\text{id}_Y \circ f \stackrel{S}{=} f$, $f \circ \text{id}_X \stackrel{S}{=} f$ である。
- 以上により $C(S)$ は圏である。

命題 5.2. t を項として $\text{Var}(t) \subset \{x_1, \dots, x_n\}$ かつ $\langle x_1, \dots, x_n \rangle \in X \vdash_S t \in Y$ であるとする (即ち S -写像 $\text{map}_t: X \rightarrow Y$ が得られる)。更に s_i を x_i と同じ型の項として $\text{Var}(s_i) \subset \{z_1, \dots, z_m\}$ かつ $\langle z_1, \dots, z_m \rangle \in Z \vdash_S \langle s_1, \dots, s_n \rangle \in X$ とする。このとき S -写像として $\text{map}_t^{\vec{x}} \circ \text{map}_{\langle s_1, \dots, s_n \rangle}^{\vec{z}} \stackrel{S}{=} \text{map}_{t[\vec{x} \rightsquigarrow \vec{s}]}^{\vec{z}}$ である。(但し $\vec{x} := \langle x_1, \dots, x_n \rangle$, $\vec{z} := \langle z_1, \dots, z_m \rangle$ として $t[x_1 \rightsquigarrow s_1] \cdots [x_k \rightsquigarrow s_k]$ を $t[\vec{x} \rightsquigarrow \vec{s}]$ と書いた)。

証明. (5.1) により

$$z \in Z \vdash_S \langle z, y \rangle \in \text{map}_t^{\vec{x}} \circ \text{map}_{\langle s_1, \dots, s_n \rangle}^{\vec{z}} \leftrightarrow \langle z, y \rangle \in \text{map}_{t[\vec{x} \rightsquigarrow \vec{s}]}^{\vec{z}}$$

を示せばよい. まず $\langle \langle z_1, \dots, z_m \rangle, y \rangle \in \text{map}_{t[\vec{x} \rightsquigarrow \vec{s}]}^{\vec{z}}$ は

$$y = t[\vec{x} \rightsquigarrow \vec{s}]$$

と同値である. 次に $\langle \langle z_1, \dots, z_m \rangle, y \rangle \in \text{map}_t^{\vec{x}} \circ \text{map}_{\langle s_1, \dots, s_n \rangle}^{\vec{z}}$ は

$$\exists x_1 \dots \exists x_n (\langle x_1, \dots, x_n \rangle = \langle s_1, \dots, s_n \rangle \wedge y = t)$$

と同値である. よって

$$\vdash_S y = t[\vec{x} \rightsquigarrow \vec{s}] \leftrightarrow \exists x_1 \dots \exists x_n (\langle x_1, \dots, x_n \rangle = \langle s_1, \dots, s_n \rangle \wedge y = t)$$

を示せばよい. それは以下のようにして成り立つ.

$$\begin{array}{c} \text{命題 2.7} \\ \hline y = t[\vec{x} \rightsquigarrow \vec{s}] : y = t[\vec{x} \rightsquigarrow \vec{s}] \\ \hline y = t[\vec{x} \rightsquigarrow \vec{s}] : \langle s_1, \dots, s_n \rangle = \langle s_1, \dots, s_n \rangle \wedge y = t[\vec{x} \rightsquigarrow \vec{s}] \quad \text{命題 2.14, 基本公理} \\ \hline y = t[\vec{x} \rightsquigarrow \vec{s}] : \exists x_1 \dots \exists x_n (\langle x_1, \dots, x_n \rangle = \langle s_1, \dots, s_n \rangle \wedge y = t) \quad \text{命題 2.58} \star \\ \hline \text{基本公理} \\ \hline \langle x_1, \dots, x_n \rangle = \langle s_1, \dots, s_n \rangle, y = t : y = t[\vec{x} \rightsquigarrow \vec{s}] \quad \text{命題 2.13} \\ \hline \langle x_1, \dots, x_n \rangle = \langle s_1, \dots, s_n \rangle \wedge y = t : y = t[\vec{x} \rightsquigarrow \vec{s}] \quad \text{命題 2.56} \star \\ \hline \exists x_1 \dots \exists x_n (\langle x_1, \dots, x_n \rangle = \langle s_1, \dots, s_n \rangle \wedge y = t) : y = t[\vec{x} \rightsquigarrow \vec{s}] \end{array}$$

□

命題 5.3. t, s を同じ型の項として $\text{Var}(t, s) \subset \{x_1, \dots, x_n\}$ かつ $\vdash_S t \in Y, \vdash_S t \in Y$ であるとする. このとき

$$\text{map}_t^{\vec{x}} \stackrel{S}{=} \text{map}_s^{\vec{x}} \iff \vdash_S t = s.$$

証明. まず $\vdash_S [\langle \langle x_1, \dots, x_n \rangle, y \rangle \in \text{map}_t^{\vec{x}}] \leftrightarrow y = t$ である.

$\therefore \text{map}_t^{\vec{x}} : U \rightarrow Y$ が S -写像だから $\vdash_S \exists! y \in Y \langle \langle x_1, \dots, x_n \rangle, y \rangle \in \text{map}_t^{\vec{x}}$ である.
よって定義より $\vdash_S \langle \langle x_1, \dots, x_n \rangle, t \rangle \in \text{map}_t^{\vec{x}}$ だから命題 2.62 から分かる.

従って (5.1) と命題 3.1 により

$$\begin{aligned} \text{map}_t^{\vec{x}} \stackrel{S}{=} \text{map}_s^{\vec{x}} &\iff x \in U \vdash_S \langle x, y \rangle \in \text{map}_t^{\vec{x}} \leftrightarrow \langle x, y \rangle \in \text{map}_s^{\vec{x}} \\ &\iff \vdash_S \langle \langle x_1, \dots, x_n \rangle, y \rangle \in \text{map}_t^{\vec{x}} \leftrightarrow \langle \langle x_1, \dots, x_n \rangle, y \rangle \in \text{map}_s^{\vec{x}} \\ &\iff \vdash_S y = t \leftrightarrow y = s \\ &\iff \vdash_S t = s \end{aligned}$$

となる. □

命題 5.4. 圏 $C(S)$ は終対象を持つ.

証明. $1 := U^I$ とする. 基本公理により $(x^I = *) \leftrightarrow \top$ だから $\{*\} \stackrel{S}{=} 1$ である. この 1 が終対象であることを示す. まず $\vdash_S * \in 1$ だから, S -集合 X に対して $x \in X \vdash_S * \in 1$ である. よって $\text{map}_*: X \rightarrow 1$ は S -写像である. このような S -写像が一意であることを示せばよい.

そこで $h: X \rightarrow 1$ を S -写像とする. 即ち $\vdash_S \forall x \in X \exists! y \in 1 (\langle x, y \rangle \in h)$ である. このとき $1 \stackrel{S}{=} \{*\}$ だから $\vdash_S \forall x \in X (\langle x, * \rangle \in h)$ となる. 即ち $h \stackrel{S}{=} \{\langle x, * \rangle \mid x \in X\} \stackrel{S}{=} \text{map}_*$ である. □

命題 5.5. $C(S)$ は 2 項直積を持つ.

証明. S -集合 X, Y に対して

$$\langle x, y \rangle \in X \times Y \vdash x \in X, \quad \langle x, y \rangle \in X \times Y \vdash y \in Y$$

だからこれらは S -写像 $\text{map}_x: X \times Y \rightarrow X$, $\text{map}_y: X \times Y \rightarrow Y$ を定める. これにより $X \times Y$ は X と Y の直積になる. □

命題 5.6. $C(S)$ は equalizer を持つ (従って有限完備である).

証明. S -写像 $f, g: X \rightarrow Y$ に対して

$$Z \equiv \{x \in X \mid \forall y (\langle x, y \rangle \in f \leftrightarrow \langle x, y \rangle \in g)\}$$

と定めて $e: Z \rightarrow X$ を包含写像とすれば, これが f と g の equalizer になる. □

命題 5.7. $C(S)$ は部分対象分類子を持つ.

証明. $\Omega := U^\Omega$ とする. $x^I \in 1 \vdash \top \in \Omega$ だから $\text{true} := \text{map}_\top: 1 \rightarrow \Omega$ と定義できる. これが部分対象分類子であることを示せばよい.

そこで $f: X \rightarrow Y$ をモノ射とする. $t \equiv \exists x (\langle x, y \rangle \in f)$ とすれば $y \in Y \vdash_S t \in \Omega$ である. よって S -写像 $h := \text{map}_t: Y \rightarrow \Omega$ が得られる. このとき

$$\begin{aligned} h \circ f &\equiv \{\langle x, z \rangle \mid \exists y (\langle x, y \rangle \in f \wedge \langle y, z \rangle \in h)\} \\ &\stackrel{S}{=} \{\langle x, z \rangle \mid \exists y (\langle x, y \rangle \in f \wedge z = t)\} \\ &\stackrel{S}{=} \{\langle x, \top \rangle \mid \top\} \end{aligned}$$

となる．故に次の図式は可換である．

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{!} & 1 \\ f \downarrow & & \downarrow \text{true} \\ Y & \xrightarrow{h} & \Omega \end{array}$$

これが pullback であることを示すため、次の図式を可換にするような $k: Z \rightarrow Y$ を取る．

$$\begin{array}{ccccc} & & Z & \xrightarrow{\quad ! \quad} & 1 \\ & & \searrow k & & \downarrow \text{true} \\ & X & \xrightarrow{!} & 1 \\ f \downarrow & & & & \\ Y & \xrightarrow{h} & \Omega \end{array}$$

可換性から $z \in Z$ に対して $h \circ k(z) = \top$ となるので、 $\vdash_S t[y \rightsquigarrow k(z)] = \top$ となる．即ち $\vdash_S \exists x (\langle x, k(z) \rangle \in f)$ である． f がモノ射だからこの x は一意である．そこで $l \equiv \{\langle z, x \rangle \mid \langle x, k(z) \rangle \in f\}$ と定めればこれは S -写像 $l: Z \rightarrow X$ を定めて $f \circ l = k$ となる．このような l は一意である．

以上により $\langle \Omega, \text{true} \rangle$ は部分対象分類子である． □

命題 5.8. $C(S)$ は冪対象を持つ．

証明. X を S -集合とすると $\langle x, y \rangle \in X \times PX \vdash_S (x \in y) \in \Omega$ である．よって S -写像 $\text{ev} := \text{map}_{x \in y}: X \times PX \rightarrow \Omega$ が得られる．

これが普遍性を満たすことを示すため、 $f: X \times Y \rightarrow \Omega$ を S -写像とする． $t \equiv \{x \mid f(x, y) = \top\}$ とすれば $y \in Y \vdash_S t \in PX$ だから S -写像 $h := \text{map}_t: Y \rightarrow PX$ が得られる．このとき $\text{ev}(\text{id} \times h(x, y)) \stackrel{S}{=} \text{ev}(x, \{x \mid f(x, y) = \top\}) \stackrel{S}{=} f(x, y)$ となるから、次の図式が可換である．

$$\begin{array}{ccc} X \times Y & & \\ \text{id} \times h \downarrow & \searrow f & \\ X \times PX & \xrightarrow{\text{ev}} & \Omega \end{array}$$

このような h が一意であることを示せばよい．そこで $h': Y \rightarrow PX$ が $\text{ev} \circ (\text{id} \times h') = f$ を満たすとする． h' が S -写像だから $y \in Y \vdash_S \exists! z \in PX (\langle y, z \rangle \in h')$ である．そこで $\varphi \equiv z \in PX \wedge \langle y, z \rangle \in h'$ に命題 2.64 を適用すれば

$$\exists! z \in PX (\langle y, z \rangle \in h') \vdash s \in PX \wedge \langle y, s \rangle \in h'$$

$$(s \equiv \{u \mid \exists z \in PX (u \in z \wedge \langle y, z \rangle \in h')\})$$

であるから $y \in Y \vdash_S s \in PX \wedge \langle y, s \rangle \in h'$ となる. 一方で

$$f(x, y) \stackrel{S}{=} \text{ev}(x, h'(y)) \stackrel{S}{=} x \in h'(y) \stackrel{S}{=} \exists z \in PX (x \in z \wedge \langle y, z \rangle \in h')$$

である. よって $y \in Y \vdash \langle y, z \rangle \in h \leftrightarrow \langle y, z \rangle \in h'$ が分かるから, (5.1) により $h \stackrel{S}{=} h'$ である. $\square$

以上により次の定理が成り立つ.

定理 5.9. local set theory S に対して $C(S)$ はトポスである. $\square$

$C(S)$ を linguistic topos という.

6 トポスによる local set theory の解釈

前節で local set theory からトポスを作ることができることを見た. 逆にトポスがあればそこから local set theory を作ることができるが, それを説明する前に, 一般のトポスにおける local set theory の解釈を説明する.

6.1 定義

定義. 局所言語 L のトポス E での解釈 I とは, 以下が与えられていることを言う.

(1) L の型 A に対して E の対象 A_I が与えられ, 以下の条件を満たす.

- $(A_1 \times \cdots \times A_n)_I = (A_1)_I \times \cdots \times (A_n)_I$ である.
- $(PA)_I = P(A_I)$ である.
- $I_I = 1$ である.
- $\Omega_I = \Omega$ である.

(2) 関数記号 $f: A \rightarrow B$ に対して E の射 $f_I: A_I \rightarrow B_I$ が与えられている.

解釈 I を使うことで, 任意の項 t に対して E の射を割り当てることことができる. それを説明するためにまず記法の説明をする. $x_1^{A_1}, \dots, x_n^{A_n}$ を相異なる変数記号したとき, 有限列 $\langle x_1^{A_1}, \dots, x_n^{A_n} \rangle$ を $\vec{x}$ で表すことにする (有限列なので順番で区別する). 以下この記法を使うときには断らなくても $x_1^{A_1}, \dots, x_n^{A_n}$ は必ず相異なるものと約束する. またこの有限列 $\vec{x} = \langle x_1^{A_1}, \dots, x_n^{A_n} \rangle$ に対して $|\vec{x}| \in E$ を

$$|\vec{x}| := (A_1)_I \times \cdots \times (A_n)_I$$

で定める.

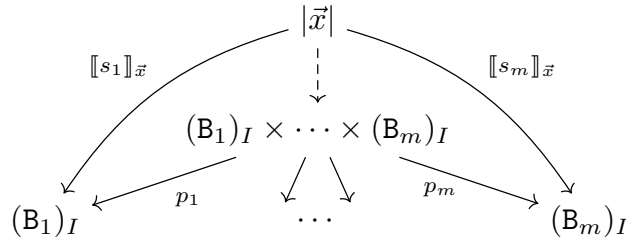
定義. I を E での解釈とする. t を型 B の項, $\vec{x} = \langle x_1^{A_1}, \dots, x_n^{A_n} \rangle$ を変数記号とする. このとき E の射 $\llbracket t \rrbracket_{\vec{x}}: |\vec{x}| \rightarrow B_I$ を以下のようにして定める. (但し $\llbracket t \rrbracket_{\vec{x}}$ と書いたときは, 断らなくとも $\text{Var}(t) \subset \{x_1^{A_1}, \dots, x_n^{A_n}\}$ であるものと約束する.)

- (1) $\llbracket * \rrbracket_{\vec{x}}$ は一意な射 $|\vec{x}| \rightarrow 1$ とする.
- (2) $\llbracket x_i^{A_i} \rrbracket_{\vec{x}}$ は $|\vec{x}| = (A_1)_I \times \dots \times (A_n)_I \xrightarrow{p_i} (A_i)_I$ とする.
- (3) s が型 C の項で $f: C \rightarrow B$ が関数記号のとき, $\llbracket f(s) \rrbracket_{\vec{x}}$ は合成

$$|\vec{x}| \xrightarrow{\llbracket s \rrbracket_{\vec{x}}} C_I \xrightarrow{f_I} B_I$$

とする.

- (4) s_i が型 B_i の項のとき $\llbracket \langle s_1, \dots, s_m \rangle \rrbracket_{\vec{x}} := \langle \llbracket s_1 \rrbracket_{\vec{x}}, \dots, \llbracket s_m \rrbracket_{\vec{x}} \rangle$ とする.



- (5) s が型 $B_1 \times \dots \times B_m$ の項のとき $\llbracket q_i(s) \rrbracket_{\vec{x}}$ は合成

$$|\vec{x}| \xrightarrow{\llbracket s \rrbracket_{\vec{x}}} (B_1)_I \times \dots \times (B_m)_I \xrightarrow{p_i} (B_i)_I$$

とする.

- (6) y が型 C の変数記号とき, $\llbracket \{y \mid \varphi\} \rrbracket_{\vec{x}}: |\vec{x}| \rightarrow PC_I$ は

$$\llbracket \varphi[y \rightsquigarrow u] \rrbracket_{u\vec{x}}: C_I \times |\vec{x}| \rightarrow \Omega$$

の随伴射とする (但し u は $\vec{x}$ 以外の変数記号として, $u\vec{x}$ で $\langle u, x_1^{A_1}, \dots, x_n^{A_n} \rangle$ を表す). つまり次の図式は可換である.

$$\begin{array}{ccc} C_I \times |\vec{x}| & & \\ \text{id}_{C_I} \times \llbracket \{y \mid \varphi\} \rrbracket_{\vec{x}} \downarrow & \searrow \llbracket \varphi[y \rightsquigarrow u] \rrbracket_{u\vec{x}} & \\ C_I \times PC_I & \xrightarrow{\epsilon} & \Omega \end{array}$$

※ 命題 6.14 の後で, ここでの y は $\vec{x}$ に含まれないとしてよいことを見る.

(7) s_0, s_1 が型 $\mathbf{C}$ の項のとき $\llbracket s_0 = s_1 \rrbracket_{\vec{x}}$ は合成

$$|\vec{x}| \xrightarrow{\llbracket \langle s_0, s_1 \rangle \rrbracket_{\vec{x}}} \mathbf{C}_I \times \mathbf{C}_I \xrightarrow{\text{eq}} \Omega$$

とする.

(8) s_0, s_1 が型 $\mathbf{C}, \mathbf{PC}$ の項のとき $\llbracket s_0 \in s_1 \rrbracket_{\vec{x}}$ は合成

$$|\vec{x}| \xrightarrow{\llbracket \langle s_0, s_1 \rangle \rrbracket_{\vec{x}}} \mathbf{C}_I \times \mathbf{PC}_I \xrightarrow{\in} \Omega$$

とする.

もちろん $\llbracket t \rrbracket_{\vec{x}}$ は解釈 I の取り方に依存した記号である. そこで解釈 I を使用していることを明示したい場合は $\llbracket t \rrbracket_{\vec{x}}^I$ のように書くことにする.

項として L -論理式 φ を考えた場合は $\llbracket \varphi \rrbracket_{\vec{x}}$ は E の射 $|\vec{x}| \rightarrow \Omega$ になる. そこで「 φ が真である」ということを $\llbracket \varphi \rrbracket_{\vec{x}} = \text{true}$ により定義することができる. より一般に $\Gamma \models_I \varphi$ を以下のように定義する.

定義. L -論理式の有限集合 $\Gamma = \{\varphi_1, \dots, \varphi_k\}$ に対して $\llbracket \Gamma \rrbracket_{\vec{x}} := \llbracket \varphi_1 \rrbracket_{\vec{x}} \wedge \dots \wedge \llbracket \varphi_k \rrbracket_{\vec{x}}$ と定める. (但し $k = 0$ のときは $\llbracket \Gamma \rrbracket_{\vec{x}} := \text{true}$ とする.)

定義. $\Gamma : \varphi$ をシークエントとして $\text{Var}(\Gamma, \varphi) = \{x_1, \dots, x_n\}$ とする. このとき

$$\Gamma \models_I \varphi \iff \llbracket \Gamma \rrbracket_{\vec{x}} \leq \llbracket \varphi \rrbracket_{\vec{x}}$$

と定義する. また $\emptyset \models_I \varphi$ を $\models_I \varphi$ と書く. 即ち $\models_I \varphi \iff \llbracket \varphi \rrbracket_{\vec{x}} = \text{true}$ である.

定義. L を局所言語, T をシークエントの集合, I を L の解釈とする.

- (1) I が T のモデル $\iff$ 任意の $(\Gamma : \varphi) \in T$ に対して $\Gamma \models_I \varphi$ となる.
- (2) $\Gamma \models_T \varphi \iff T$ の任意のモデル I に対して $\Gamma \models_I \varphi$ となる.
- (3) $\Gamma \models_{\emptyset} \varphi$ を $\Gamma \models \varphi$ と書く.

この $\Gamma \models_T \varphi$ が健全性定理 (定理 6.12) と完全性定理 (定理 6.17) を満たすことを示すのがこの節の最終的な目標である.

6.2 基本的性質

補題 6.1. t を項として $\text{Var}(t) \subset \{x_1, \dots, x_n\}$ とする. $\text{Var}(t) \subset \{x_{j_1}, \dots, x_{j_k}\}$ ($j_1 < \dots < j_k$) として $\vec{y} := \langle x_{j_1}, \dots, x_{j_k} \rangle$ と書く. t の型を $\mathbf{B}$ とする. このとき次の図式は可

換である.

$$\begin{array}{ccc}
 |\vec{x}| & & \\
 \downarrow \llbracket \langle x_{j_1}, \dots, x_{j_k} \rangle \rrbracket_{\vec{x}} & \searrow \llbracket t \rrbracket_{\vec{x}} & \\
 |\vec{y}| & \xrightarrow{\llbracket t \rrbracket_{\vec{y}}} & B_I
 \end{array}$$

証明. 項 t の構成に関する帰納法.

(1) $t \equiv *$ の場合. 定義から次の図式になり, 明らかに可換である.

$$\begin{array}{ccc}
 |\vec{x}| & & \\
 \downarrow \llbracket \langle x_{j_1}, \dots, x_{j_k} \rangle \rrbracket_{\vec{x}} & \searrow ! & \\
 |\vec{y}| & \xrightarrow{!} & 1
 \end{array}$$

(2) $t \equiv x_{j_i}$ が変数記号の場合. x_{j_i} の型を A_{j_i} とすると, 定義から次の図式になる. これは直積の普遍性から可換である.

$$\begin{array}{ccc}
 |\vec{x}| & & \\
 \downarrow \llbracket \langle x_{j_1}, \dots, x_{j_k} \rangle \rrbracket_{\vec{x}} & \searrow p_{j_i} & \\
 |\vec{y}| & \xrightarrow{p_i} & (A_{j_i})_I
 \end{array}$$

(3) $t \equiv f(s)$ ($f: C \rightarrow B$ は関数記号で, s は型 C の項) の場合. 定義から次の図式になり, 帰納法の仮定により可換である.

$$\begin{array}{ccccc}
 |\vec{x}| & & \xrightarrow{\llbracket t \rrbracket_{\vec{x}}} & & \\
 \downarrow \llbracket \langle x_{j_1}, \dots, x_{j_k} \rangle \rrbracket_{\vec{x}} & \searrow \text{(定義)} & \downarrow \llbracket s \rrbracket_{\vec{x}} & & \\
 |\vec{y}| & \xrightarrow{\llbracket s \rrbracket_{\vec{y}}} & C_I & \xrightarrow{f_I} & B_I \\
 & \text{(定義)} & \uparrow & & \uparrow \\
 & & \llbracket t \rrbracket_{\vec{y}} & &
 \end{array}$$

(帰納法の仮定)

(4) $t \equiv \langle s_1, \dots, s_m \rangle$ (s_i は型 C_i の項) の場合. 次の図式が可換であることを示せばよい.

$$\begin{array}{ccc}
 |\vec{x}| & & \\
 \downarrow \langle x_{j_1}, \dots, x_{j_k} \rangle & \searrow \langle \llbracket s_1 \rrbracket_{\vec{x}}, \dots, \llbracket s_m \rrbracket_{\vec{x}} \rangle & \\
 |\vec{y}| & \xrightarrow{\langle \llbracket s_1 \rrbracket_{\vec{y}}, \dots, \llbracket s_m \rrbracket_{\vec{y}} \rangle} & (C_1)_I \times \dots \times (C_m)_I
 \end{array}$$

そのためには直積の普遍性により, 各 $1 \leq i \leq k$ に対して次の図式が可換であることを示せばよいが, それは帰納法の仮定から成り立つ.

$$\begin{array}{ccc} |\vec{x}| & & \\ \langle x_{j_1}, \dots, x_{j_k} \rangle \downarrow & \searrow \llbracket s_i \rrbracket_{\vec{x}} & \\ |\vec{y}| & \xrightarrow{\llbracket s_i \rrbracket_{\vec{y}}} & (C_i)_I \end{array}$$

(5) $t \equiv q_i(s)$ (s は型 $C_1 \times \dots \times C_m$ の項) のとき. 定義から次の図式になり, 帰納法の仮定により可換である.

$$\begin{array}{ccccc} |\vec{x}| & & \xrightarrow{\llbracket t \rrbracket_{\vec{x}}} & & \\ \llbracket \langle x_{j_1}, \dots, x_{j_k} \rangle \rrbracket_{\vec{x}} \downarrow & \searrow \text{(帰納法の仮定)} & \searrow \llbracket s \rrbracket_{\vec{x}} & \text{(定義)} & \downarrow \\ |\vec{y}| & \xrightarrow{\llbracket s \rrbracket_{\vec{y}}} & (C_1)_I \times \dots \times (C_m)_I & \xrightarrow{p_i} & (C_i)_I \\ & & \text{(定義)} & & \uparrow \\ & & \xrightarrow{\llbracket t \rrbracket_{\vec{y}}} & & \end{array}$$

(6) $t \equiv \{z \mid \varphi\}$ (z は型 C の変数記号) の場合. まず次の図式は可換である.

$$\begin{array}{ccc} C_I \times |\vec{x}| & \xrightarrow{\llbracket \varphi[z \rightsquigarrow u] \rrbracket_{u\vec{x}}} & \\ \llbracket \langle u, x_{j_1}, \dots, x_{j_k} \rangle \rrbracket_{u\vec{x}} \downarrow & \text{(帰納法の仮定)} & \downarrow \\ C_I \times |\vec{y}| & \xrightarrow{\llbracket \varphi[z \rightsquigarrow u] \rrbracket_{u\vec{y}}} & \\ \text{id}_{C_I} \times \llbracket \{z \mid \varphi\} \rrbracket_{\vec{y}} \downarrow & \text{(定義)} & \downarrow \\ C_I \times PC_I & \xrightarrow{\epsilon} & \Omega \end{array}$$

左上の射 $\llbracket \langle u, x_{j_1}, \dots, x_{j_k} \rangle \rrbracket_{u\vec{x}}$ は直積の普遍性から $\text{id}_{C_I} \times \llbracket \langle x_{j_1}, \dots, x_{j_k} \rangle \rrbracket_{\vec{x}}$ と一致する. よって $\llbracket \{z \mid \varphi\} \rrbracket_{\vec{x}}$ の定義から

$$\begin{array}{ccc} |\vec{x}| & & \\ \llbracket \langle x_{j_1}, \dots, x_{j_k} \rangle \rrbracket_{\vec{x}} \downarrow & \searrow \llbracket \{z \mid \varphi\} \rrbracket_{\vec{x}} & \\ |\vec{y}| & \xrightarrow{\llbracket \{z \mid \varphi\} \rrbracket_{\vec{y}}} & \Omega \end{array}$$

が可換となる.

(7) $t \equiv s_0 = s_1$ (s_0, s_1 は型 $\mathbf{C}$ の項) の場合. 定義から次の図式になり, 帰納法の仮定により可換である.

$$\begin{array}{ccccc}
 |\vec{x}| & & \llbracket s_0 = s_1 \rrbracket_{\vec{x}} & & \\
 & \searrow & & \searrow & \\
 & & & & \text{(定義)} \\
 \llbracket \langle x_{j_1}, \dots, x_{j_k} \rangle \rrbracket_{\vec{x}} & \downarrow & & \downarrow & \llbracket \langle s_0, s_1 \rangle \rrbracket_{\vec{x}} \\
 & & \text{(帰納法の仮定)} & & \\
 |\vec{y}| & \xrightarrow{\llbracket \langle s_0, s_1 \rangle \rrbracket_{\vec{y}}} & \mathbf{C}_I \times \mathbf{C}_I & \xrightarrow{\text{eq}} & \Omega \\
 & \searrow & & \searrow & \\
 & & & & \text{(定義)} \\
 & & \llbracket s_0 = s_1 \rrbracket_{\vec{y}} & &
 \end{array}$$

(8) $t \equiv s_0 \in s_1$ (s_0, s_1 は型 $\mathbf{C}, \mathbf{PC}$ の項) の場合. 定義から次の図式になり, 帰納法の仮定により可換である.

$$\begin{array}{ccccc}
 |\vec{x}| & & \llbracket s_0 \in s_1 \rrbracket_{\vec{x}} & & \\
 & \searrow & & \searrow & \\
 & & & & \text{(定義)} \\
 \llbracket \langle x_{j_1}, \dots, x_{j_k} \rangle \rrbracket_{\vec{x}} & \downarrow & & \downarrow & \llbracket \langle s_0, s_1 \rangle \rrbracket_{\vec{x}} \\
 & & \text{(帰納法の仮定)} & & \\
 |\vec{y}| & \xrightarrow{\llbracket \langle s_0, s_1 \rangle \rrbracket_{\vec{y}}} & \mathbf{C}_I \times \mathbf{PC}_I & \xrightarrow{\in} & \Omega \\
 & \searrow & & \searrow & \\
 & & & & \text{(定義)} \\
 & & \llbracket s_0 \in s_1 \rrbracket_{\vec{y}} & &
 \end{array}$$

□

補題 6.2. t は項で $\text{Var}(t) \subset \{z_1, \dots, z_k\}$ とする. t の型を $\mathbf{B}$, z_i の型を $\mathbf{C}_i$ として, r_i を型 $\mathbf{C}_i$ の項とする. このとき次の図式は可換である.

$$\begin{array}{ccc}
 |\vec{x}| & & \\
 \downarrow \llbracket \langle r_1, \dots, r_k \rangle \rrbracket_{\vec{x}} & \searrow \llbracket t[\vec{z} \rightsquigarrow \vec{r}] \rrbracket_{\vec{x}} & \\
 |\vec{z}| & \xrightarrow{\llbracket t \rrbracket_{\vec{z}}} & \mathbf{B}_I
 \end{array}$$

証明. t の構成に関する帰納法.

(1) $t \equiv *$ の場合. 定義から次の図式になり, 明らかに可換である.

$$\begin{array}{ccc}
 |\vec{x}| & & \\
 \downarrow \llbracket \langle r_1, \dots, r_k \rangle \rrbracket_{\vec{x}} & \searrow ! & \\
 |\vec{z}| & \xrightarrow{!} & 1
 \end{array}$$

(2) $t \equiv z_i$ が変数記号の場合. 定義から次の図式になり, 明らかに可換である.

$$\begin{array}{ccc} |\vec{x}| & & \\ \langle \llbracket r_1 \rrbracket_{\vec{x}}, \dots, \llbracket r_k \rrbracket_{\vec{x}} \rangle \downarrow & \searrow \llbracket r_i \rrbracket_{\vec{x}} & \\ |\vec{z}| & \xrightarrow{p_i} & (C_i)_I \end{array}$$

(3) $t \equiv f(s)$ ($f: D \rightarrow B$ は関数記号で, s は型 D の項) の場合. 定義から次の図式になり, 帰納法の仮定により可換である.

$$\begin{array}{ccccc} |\vec{x}| & & \xrightarrow{\llbracket t[\vec{z} \rightsquigarrow \vec{r}] \rrbracket_{\vec{x}}} & & \\ \downarrow \llbracket \langle r_1, \dots, r_k \rangle \rrbracket_{\vec{x}} & \searrow \text{(定義)} & & \searrow \text{(定義)} & \\ |\vec{z}| & \xrightarrow{\llbracket s \rrbracket_{\vec{z}}} & D_I & \xrightarrow{f_I} & B_I \\ & \text{(定義)} & & & \uparrow \\ & \xrightarrow{\llbracket t \rrbracket_{\vec{z}}} & & & \end{array}$$

(帰納法の仮定) $\llbracket s[\vec{z} \rightsquigarrow \vec{r}] \rrbracket_{\vec{x}}$

(4) $t \equiv \langle s_1, \dots, s_m \rangle$ (s_i は型 D_i の項) の場合. 次の図式が可換であることを示せばよい.

$$\begin{array}{ccc} |\vec{x}| & & \\ \downarrow \llbracket \langle r_1, \dots, r_k \rangle \rrbracket_{\vec{x}} & \searrow \langle \llbracket s_1[\vec{z} \rightsquigarrow \vec{r}] \rrbracket_{\vec{x}}, \dots, \llbracket s_m[\vec{z} \rightsquigarrow \vec{r}] \rrbracket_{\vec{x}} \rangle & \\ |\vec{z}| & \xrightarrow{\langle \llbracket s_1 \rrbracket_{\vec{z}}, \dots, \llbracket s_m \rrbracket_{\vec{z}} \rangle} & (D_1)_I \times \dots \times (D_m)_I \end{array}$$

そのためには直積の普遍性により, 各 $1 \leq i \leq m$ に対して次の図式が可換であることを示せばよいが, それは帰納法の仮定から成り立つ.

$$\begin{array}{ccc} |\vec{x}| & & \\ \downarrow \llbracket \langle r_1, \dots, r_k \rangle \rrbracket_{\vec{x}} & \searrow \llbracket s_i[\vec{z} \rightsquigarrow \vec{r}] \rrbracket_{\vec{x}} & \\ |\vec{z}| & \xrightarrow{\llbracket s_i \rrbracket_{\vec{z}}} & (D_i)_I \end{array}$$

(5) $t \equiv q_i(s)$ (s は型 $D_1 \times \dots \times D_m$ の項) のとき. 定義から次の図式になり, 帰納法の

仮定により可換である．

$$\begin{array}{ccc}
 |\vec{x}| & \xrightarrow{\llbracket t[\vec{z} \rightsquigarrow \vec{r}] \rrbracket_{\vec{x}}} & (D_i)_I \\
 \downarrow \llbracket \langle r_1, \dots, r_k \rangle \rrbracket_{\vec{x}} & \searrow \llbracket s[\vec{z} \rightsquigarrow \vec{r}] \rrbracket_{\vec{x}} \text{ (定義)} & \uparrow \\
 |\vec{z}| & \xrightarrow{\llbracket s \rrbracket_{\vec{z}}} (D_1)_I \times \dots \times (D_m)_I \xrightarrow{p_i} (D_i)_I & \\
 & \uparrow \llbracket t \rrbracket_{\vec{z}} \text{ (定義)} &
 \end{array}$$

(6) $t \equiv \{y \mid \varphi\}$ (y は型 D の変数記号) の場合．まず次の図式は可換である．

$$\begin{array}{ccc}
 D_I \times |\vec{x}| & \xrightarrow{\llbracket \varphi[y \rightsquigarrow u][u\vec{z} \rightsquigarrow u\vec{r}] \rrbracket_{u\vec{x}}} & \Omega \\
 \downarrow \llbracket \langle u, r_1, \dots, r_k \rangle \rrbracket_{u\vec{x}} & \searrow \llbracket \varphi[y \rightsquigarrow u] \rrbracket_{u\vec{z}} \text{ (帰納法の仮定)} & \\
 D_I \times |\vec{z}| & \xrightarrow{\llbracket \varphi[y \rightsquigarrow u] \rrbracket_{u\vec{z}}} & \Omega \\
 \downarrow \text{id}_{D_I} \times \llbracket \{y \mid \varphi\} \rrbracket_{\vec{z}} \text{ (定義)} & \nearrow & \\
 D_I \times PD_I & \xrightarrow{\in} & \Omega
 \end{array}$$

左上の射 $\llbracket \langle u, r_1, \dots, r_k \rangle \rrbracket_{u\vec{x}}$ は直積の普遍性から $\text{id}_{D_I} \times \llbracket \langle r_1, \dots, r_k \rangle \rrbracket_{\vec{x}}$ と一致する．

(6-i) $y \notin \{z_1, \dots, z_k\}$ のとき, $t[\vec{z} \rightsquigarrow \vec{r}] \equiv \{y \mid \varphi[\vec{z} \rightsquigarrow \vec{r}]\}$ である．また定義から

$$\begin{array}{ccc}
 D_I \times |\vec{x}| & \xrightarrow{\llbracket \varphi[\vec{z} \rightsquigarrow \vec{r}][y \rightsquigarrow u] \rrbracket_{u\vec{x}}} & \Omega \\
 \downarrow \text{id}_{D_I} \times \llbracket \{y \mid \varphi[\vec{z} \rightsquigarrow \vec{r}]\} \rrbracket_{\vec{x}} & \searrow & \\
 D_I \times PD_I & \xrightarrow{\in} & \Omega
 \end{array}$$

が可換である．この右上に出てくる $\varphi[\vec{z} \rightsquigarrow \vec{r}][y \rightsquigarrow u]$ は $\varphi[y \rightsquigarrow u][u\vec{z} \rightsquigarrow u\vec{r}]$ と一致する．

よって $\in$ が counit だから 2 つの射

$$\begin{aligned}
 D_I \times (A_1)_I \times \dots \times (A_n)_I & \xrightarrow{\llbracket \langle s_1, \dots, s_k \rangle \rrbracket_{\vec{x}}} D_I \times (C_1)_I \times \dots \times (C_k)_I \xrightarrow{\llbracket \{y \mid \varphi\} \rrbracket_{\vec{z}}} D_I \times PD_I \\
 D_I \times (A_1)_I \times \dots \times (A_n)_I & \xrightarrow{\llbracket \{y \mid \varphi[\vec{z} \rightsquigarrow \vec{r}]\} \rrbracket_{\vec{x}}} D_I \times PD_I
 \end{aligned}$$

は等しくなる．即ち次の図式は可換である．

$$\begin{array}{ccc}
 |\vec{x}| & \xrightarrow{\llbracket t[\vec{z} \rightsquigarrow \vec{r}] \rrbracket_{\vec{x}} = \llbracket \{y \mid \varphi[\vec{z} \rightsquigarrow \vec{r}]\} \rrbracket_{\vec{x}}} & B_I \\
 \downarrow \llbracket \langle r_1, \dots, r_k \rangle \rrbracket_{\vec{x}} & \searrow & \\
 |\vec{z}| & \xrightarrow{\llbracket t \rrbracket_{\vec{z}} = \llbracket \{y \mid \varphi\} \rrbracket_{\vec{z}}} & B_I
 \end{array}$$

(6-ii) $y \equiv z_i$ のとき, $\vec{z}, \vec{r}$ から z_i, r_i を除いたものを $\vec{z}', \vec{r}'$ と書く. するとこの場合は $t[\vec{z} \rightsquigarrow \vec{r}] \equiv \{y \mid \varphi[\vec{z}' \rightsquigarrow \vec{r}']\}$ である. $\llbracket \{y \mid \varphi[\vec{z}' \rightsquigarrow \vec{r}']\} \rrbracket_{\vec{x}}$ の定義から

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{D}_I \times |\vec{x}| & & \\ \text{id}_{\mathbf{D}_I} \times \llbracket \{y \mid \varphi[\vec{z}' \rightsquigarrow \vec{r}']\} \rrbracket_{\vec{x}} \downarrow & \searrow \llbracket \varphi[\vec{z}' \rightsquigarrow \vec{r}'] [y \rightsquigarrow u] \rrbracket_{u\vec{x}} & \\ \mathbf{D}_I \times \mathbf{PD}_I & \xrightarrow{\in} & \Omega \end{array}$$

が可換となる. $\varphi[\vec{z}' \rightsquigarrow \vec{r}'] [y \rightsquigarrow u]$ は $\varphi[y \rightsquigarrow u] [u\vec{z} \rightsquigarrow u\vec{r}']$ と一致するから, (6-i) と同様に
して

$$\begin{array}{ccc} |\vec{x}| & & \\ \llbracket \langle r_1, \dots, r_k \rangle \rrbracket_{\vec{x}} \downarrow & \searrow \llbracket t[\vec{z} \rightsquigarrow \vec{r}] \rrbracket_{\vec{x}} = \llbracket \{y \mid \varphi[\vec{z}' \rightsquigarrow \vec{r}']\} \rrbracket_{\vec{x}} & \\ |\vec{z}| & \xrightarrow{\llbracket t \rrbracket_{\vec{z}} = \llbracket \{y \mid \varphi\} \rrbracket_{\vec{z}}} & \mathbf{B}_I \end{array}$$

が可換となる.

(7) $t \equiv s_0 = s_1$ (s_0, s_1 は型 $\mathbf{D}$ の項) の場合. 定義から次の図式になり, 帰納法の仮定により可換である.

$$\begin{array}{ccccc} |\vec{x}| & & & & \\ \llbracket \langle r_1, \dots, r_k \rangle \rrbracket_{\vec{x}} \downarrow & \searrow \llbracket s_0[\vec{z} \rightsquigarrow \vec{r}] = s_1[\vec{z} \rightsquigarrow \vec{r}] \rrbracket_{\vec{x}} & & & \\ |\vec{z}| & \xrightarrow{\llbracket \langle s_0, s_1 \rangle \rrbracket_{\vec{z}}} & \mathbf{D}_I \times \mathbf{D}_I & \xrightarrow{\text{eq}} & \Omega \\ & & \text{(定義)} & & \uparrow \\ & & \text{(帰納法の仮定)} & & \text{(定義)} \\ & & \llbracket \langle s_0[\vec{z} \rightsquigarrow \vec{r}], s_1[\vec{z} \rightsquigarrow \vec{r}] \rangle \rrbracket_{\vec{x}} & & \end{array}$$

$\llbracket s_0 = s_1 \rrbracket_{\vec{z}}$

(8) $t \equiv s_0 \in s_1$ (s_0, s_1 は型 $\mathbf{D}, \mathbf{PD}$ の項) の場合. 定義から次の図式になり, 帰納法の仮定により可換である.

$$\begin{array}{ccccc} |\vec{x}| & & & & \\ \llbracket \langle r_1, \dots, r_k \rangle \rrbracket_{\vec{x}} \downarrow & \searrow \llbracket s_0[\vec{z} \rightsquigarrow \vec{r}] \in s_1[\vec{z} \rightsquigarrow \vec{r}] \rrbracket_{\vec{x}} & & & \\ |\vec{z}| & \xrightarrow{\llbracket \langle s_0, s_1 \rangle \rrbracket_{\vec{z}}} & \mathbf{D}_I \times \mathbf{PD}_I & \xrightarrow{\in} & \Omega \\ & & \text{(定義)} & & \uparrow \\ & & \text{(帰納法の仮定)} & & \text{(定義)} \\ & & \llbracket \langle s_0[\vec{z} \rightsquigarrow \vec{r}], s_1[\vec{z} \rightsquigarrow \vec{r}] \rangle \rrbracket_{\vec{x}} & & \end{array}$$

$\llbracket s_0 \in s_1 \rrbracket_{\vec{z}}$

□

系 6.3. y と z が異なる変数記号で, $z \notin \text{Var}(t)$ のとき

$$\llbracket t[y \rightsquigarrow z] \rrbracket_{z\vec{x}} = \llbracket t \rrbracket_{y\vec{x}}$$

となる. □

命題 6.4. $\Gamma : \varphi$ をシークエントとして $\text{Var}(\Gamma, \varphi) \subset \{x_1, \dots, x_n\}$ であるとする. このとき $\Gamma \vdash_I \varphi$ ならば $\llbracket \Gamma \rrbracket_{\vec{x}} \leq \llbracket \varphi \rrbracket_{\vec{x}}$ である.

証明. u を $\vec{x}$ に含まれない変数記号として

$$\llbracket \Gamma \rrbracket_{\vec{x}} \leq \llbracket \varphi \rrbracket_{\vec{x}} \implies \llbracket \Gamma \rrbracket_{u\vec{x}} \leq \llbracket \varphi \rrbracket_{u\vec{x}} \quad (6.5)$$

を示せば, n についての帰納法から分かる.

まず補題 6.1 より次の図式は可換である.

$$\begin{array}{ccc} & |u\vec{x}| & \\ & \downarrow & \searrow \llbracket \varphi \rrbracket_{u\vec{x}} \\ \llbracket \langle x_1, \dots, x_n \rangle \rrbracket_{u\vec{x}} & & \\ & |\vec{x}| & \xrightarrow{\llbracket \varphi \rrbracket_{\vec{x}}} \Omega \end{array}$$

即ち $p := \llbracket \langle x_1, \dots, x_n \rangle \rrbracket_{u\vec{x}}$ と書けば $\llbracket \varphi \rrbracket_{u\vec{x}} = \llbracket \varphi \rrbracket_{\vec{x}} \circ p$ となる.

次に $\llbracket \Gamma \rrbracket_{u\vec{x}}$ についても, $\Gamma = \{\varphi_1, \dots, \varphi_k\}$ とすれば

$$\begin{aligned} \llbracket \Gamma \rrbracket_{u\vec{x}} &= \llbracket \varphi_1 \rrbracket_{u\vec{x}} \wedge \dots \wedge \llbracket \varphi_k \rrbracket_{u\vec{x}} \\ &= (\llbracket \varphi_1 \rrbracket_{\vec{x}} \circ p) \wedge \dots \wedge (\llbracket \varphi_k \rrbracket_{\vec{x}} \circ p) \\ &= (\llbracket \varphi_1 \rrbracket_{\vec{x}} \wedge \dots \wedge \llbracket \varphi_k \rrbracket_{\vec{x}}) \circ p \\ &= \llbracket \Gamma \rrbracket_{\vec{x}} \circ p \end{aligned} \quad (\text{命題 4.5})$$

である. 従って命題 4.4 より (6.5) が分かる. □

命題 6.6. $\text{Var}(\Gamma, \varphi) = \{x_1, \dots, x_n\}$ とするとき

$$\Gamma \vdash_I \varphi \iff \llbracket \varphi \rrbracket_{\vec{x}} \circ \llbracket \Gamma \rrbracket'_{\vec{x}} = \text{true}.$$

証明. 命題 4.1 より明らか. □

命題 6.7. $\Gamma \vdash_I t = s \iff \llbracket t \rrbracket_{\vec{x}} \circ \llbracket \Gamma \rrbracket'_{\vec{x}} = \llbracket s \rrbracket_{\vec{x}} \circ \llbracket \Gamma \rrbracket'_{\vec{x}}$ である.

証明. $\llbracket t = s \rrbracket_{\vec{x}} = (|\vec{x}| \xrightarrow{\langle \llbracket t \rrbracket_{\vec{x}}, \llbracket s \rrbracket_{\vec{x}} \rangle} B_I \times B_I \xrightarrow{\text{eq}} \Omega)$ だから

$$\begin{aligned} \Gamma \models_I t = s &\iff (a \xrightarrow{\llbracket \Gamma \rrbracket'_{\vec{x}}} |\vec{x}| \xrightarrow{\langle \llbracket t \rrbracket_{\vec{x}}, \llbracket s \rrbracket_{\vec{x}} \rangle} B_I \times B_I \xrightarrow{\text{eq}} \Omega) = \text{true} \\ &\iff (a \xrightarrow{\langle \llbracket t \rrbracket_{\vec{x}} \circ \llbracket \Gamma \rrbracket'_{\vec{x}}, \llbracket s \rrbracket_{\vec{x}} \circ \llbracket \Gamma \rrbracket'_{\vec{x}} \rangle} B_I \times B_I \xrightarrow{\text{eq}} \Omega) = \text{true} \\ &\iff \llbracket t \rrbracket_{\vec{x}} \circ \llbracket \Gamma \rrbracket'_{\vec{x}} = \llbracket s \rrbracket_{\vec{x}} \circ \llbracket \Gamma \rrbracket'_{\vec{x}} \quad (\text{命題 4.7}) \end{aligned}$$

となる. □

6.3 健全性定理

命題 6.8. $\Gamma : \varphi$ を基本公理とするととき $\Gamma \models \varphi$ である.

証明. (Unity: $\models x^I = *$)

$$\begin{aligned} \llbracket x^I = * \rrbracket_{x^I} &= (|x^I| \xrightarrow{\llbracket \langle x^I, * \rangle \rrbracket_{x^I}} 1 \times 1 \xrightarrow{\text{eq}} \Omega) \\ &= (1 \xrightarrow{\langle !, ! \rangle} 1 \times 1 \xrightarrow{\text{eq}} \Omega) \\ &= \text{true} \end{aligned} \quad (\text{命題 4.7})$$

となるから $\models x^I = *$ である.

(Equality 0: $\models x = x$)

$$\begin{aligned} \llbracket x = x \rrbracket_x &= (|x| \xrightarrow{\langle \text{id}, \text{id} \rangle} |x| \times |x| \xrightarrow{\text{eq}} \Omega) \\ &= \text{true} \end{aligned} \quad (\text{命題 4.7})$$

となるから $\models x = x$ である.

(Equality 1: $x = y, \varphi[z \rightsquigarrow x] \models \varphi[z \rightsquigarrow y]$)

$z \notin \text{Var}(\varphi)$ の場合は明らかなので $\text{Var}(\varphi) = \{z, u_1, \dots, u_m\}$ とする.

(i) x, y が $\vec{u}$ に含まれない場合. $f := \llbracket x = y \rrbracket_{xy\vec{u}} \wedge \llbracket \varphi[z \rightsquigarrow x] \rrbracket_{xy\vec{u}}$ とする. 命題 4.3 より $f \leq \llbracket x = y \rrbracket_{xy\vec{u}}$ かつ $f \leq \llbracket \varphi[z \rightsquigarrow x] \rrbracket_{xy\vec{u}}$ である. このとき

$$f \leq \llbracket x = y \rrbracket_{xy\vec{u}} = (|xy\vec{u}| \xrightarrow{\langle \llbracket x \rrbracket_{xy\vec{u}}, \llbracket y \rrbracket_{xy\vec{u}} \rangle} |xy| \xrightarrow{\text{eq}} \Omega)$$

だから命題 4.1 より

$$(a \xrightarrow{f'} |xy\vec{u}| \xrightarrow{\langle \llbracket x \rrbracket_{xy\vec{u}}, \llbracket y \rrbracket_{xy\vec{u}} \rangle} |xy| \xrightarrow{\text{eq}} \Omega) = \text{true}$$

となる．よって命題 4.7 より

$$\llbracket x \rrbracket_{xy\vec{u}} \circ f' = \llbracket y \rrbracket_{xy\vec{u}} \circ f' \quad (6.9)$$

である．次に $f \leq \llbracket \varphi[z \rightsquigarrow x] \rrbracket_{xy\vec{u}}$ より

$$\begin{aligned} f &\leq \llbracket \varphi[z \rightsquigarrow x] \rrbracket_{xy\vec{u}} \\ &= \llbracket \varphi[z \rightsquigarrow x] \rrbracket_{x\vec{u}} \circ \llbracket \langle x, u_1, \dots, u_m \rangle \rrbracket_{xy\vec{u}} \quad (\text{命題 6.1}) \\ &= \llbracket \varphi \rrbracket_{z\vec{u}} \circ \llbracket \langle x, u_1, \dots, u_m \rangle \rrbracket_{xy\vec{u}} \quad (\text{系 6.3}) \end{aligned}$$

だから命題 4.2 より，ある k が存在して $\llbracket \varphi \rrbracket'_{z\vec{u}} \circ k = \llbracket \langle x, u_1, \dots, u_m \rangle \rrbracket_{xy\vec{u}} \circ f'$ となる．このとき

$$\begin{aligned} &\llbracket \langle x, u_1, \dots, u_m \rangle \rrbracket_{xy\vec{u}} \circ f' \\ &= (a \xrightarrow{f'} |xy\vec{u}| \xrightarrow{\langle \llbracket x \rrbracket_{xy\vec{u}}, \llbracket u_1 \rrbracket_{xy\vec{u}}, \dots, \llbracket u_m \rrbracket_{xy\vec{u}} \rangle} |z\vec{u}|) \\ &= (a \xrightarrow{\langle \llbracket x \rrbracket_{xy\vec{u}} \circ f', \llbracket u_1 \rrbracket_{xy\vec{u}} \circ f', \dots, \llbracket u_m \rrbracket_{xy\vec{u}} \circ f' \rangle} |z\vec{u}|) \\ &= (a \xrightarrow{\langle \llbracket y \rrbracket_{xy\vec{u}} \circ f', \llbracket u_1 \rrbracket_{xy\vec{u}} \circ f', \dots, \llbracket u_m \rrbracket_{xy\vec{u}} \circ f' \rangle} |z\vec{u}|) \quad (\text{等式 6.9}) \\ &= (a \xrightarrow{f'} |xy\vec{u}| \xrightarrow{\langle \llbracket y \rrbracket_{xy\vec{u}}, \llbracket u_1 \rrbracket_{xy\vec{u}}, \dots, \llbracket u_m \rrbracket_{xy\vec{u}} \rangle} |z\vec{u}|) \\ &= (a \xrightarrow{f'} |xy\vec{u}| \xrightarrow{\llbracket \langle y, u_1, \dots, u_m \rangle \rrbracket_{xy\vec{u}}} |z\vec{u}|) \end{aligned}$$

だから再び命題 4.2 より $f \leq \llbracket \varphi \rrbracket_{z\vec{u}} \circ \llbracket \langle y, u_1, \dots, u_m \rangle \rrbracket_{xy\vec{u}} = \llbracket \varphi[z \rightsquigarrow y] \rrbracket_{zy\vec{u}}$ が分かる．よって $x = y, \varphi[z \rightsquigarrow x] \models \varphi[z \rightsquigarrow y]$ である．

(ii) x が $\vec{u}$ に含まれて y が含まれない場合． $u_1 = x$ としてよい． $\vec{v} = \langle u_2, \dots, u_m \rangle$ と書く． $f := \llbracket x = y \rrbracket_{xy\vec{v}} \wedge \llbracket \varphi[z \rightsquigarrow x] \rrbracket_{xy\vec{v}}$ とすれば (i) と同様 $\llbracket x \rrbracket_{xy\vec{v}} \circ f' = \llbracket y \rrbracket_{xy\vec{v}} \circ f'$ である．このとき

$$\begin{array}{ccc} |xy\vec{v}| & \xrightarrow{\llbracket \varphi[z \rightsquigarrow x] \rrbracket_{xy\vec{v}}} & \Omega \\ \downarrow \scriptstyle (6.1) & \nearrow \scriptstyle \llbracket \varphi[z \rightsquigarrow x] \rrbracket_{x\vec{v}} \scriptstyle (6.2) & \uparrow \scriptstyle \llbracket \varphi \rrbracket_{zx\vec{v}} \\ |x\vec{v}| & \xrightarrow{\llbracket \langle x, x, u_2, \dots, u_2 \rangle \rrbracket_{x\vec{v}}} & |zx\vec{v}| \\ \uparrow \scriptstyle \llbracket \langle x, x, u_2, \dots, u_2 \rangle \rrbracket_{xy\vec{v}} & & \end{array}$$

が可換だから

$$f \leq \llbracket \varphi[z \rightsquigarrow x] \rrbracket_{xy\vec{v}} = \llbracket \varphi \rrbracket_{zx\vec{v}} \circ \llbracket \langle x, x, u_2, \dots, u_m \rangle \rrbracket_{xy\vec{v}}$$

である。よって命題 4.2 より, ある k が存在して $\llbracket \varphi \rrbracket'_{zx\vec{v}} \circ k = \llbracket \langle x, x, u_2, \dots, u_m \rangle \rrbracket_{xy\vec{v}} \circ f'$ となる。このとき

$$\begin{aligned} \llbracket \langle x, x, u_2, \dots, u_m \rangle \rrbracket_{xy\vec{v}} \circ f' &= \langle \llbracket x \rrbracket_{xy\vec{v}} \circ f', \llbracket x \rrbracket_{xy\vec{v}} \circ f', \llbracket u_2 \rrbracket_{xy\vec{v}} \circ f', \dots, \llbracket u_m \rrbracket_{xy\vec{v}} \circ f' \rangle \\ &= \langle \llbracket y \rrbracket_{xy\vec{v}} \circ f', \llbracket y \rrbracket_{xy\vec{v}} \circ f', \llbracket u_2 \rrbracket_{xy\vec{v}} \circ f', \dots, \llbracket u_m \rrbracket_{xy\vec{v}} \circ f' \rangle \\ &= \llbracket \langle y, y, u_2, \dots, u_m \rangle \rrbracket_{xy\vec{v}} \circ f' \end{aligned}$$

だから $f \leq \llbracket \varphi \rrbracket_{zx\vec{v}} \circ \llbracket \langle y, y, u_2, \dots, u_m \rangle \rrbracket_{xy\vec{u}} = \llbracket \varphi[z \rightsquigarrow y] \rrbracket_{zy\vec{u}}$ となる。

(iii) y が $\vec{u}$ に含まれて x が含まれない場合は (ii) と同様。

(iv) x, y が $\vec{u}$ に含まれる場合. $u_1 = x, u_2 = y$ としてよい. $\vec{v} = \langle u_3, \dots, u_m \rangle$ と書く. $f := \llbracket x = y \rrbracket_{xy\vec{v}} \wedge \llbracket \varphi[z \rightsquigarrow x] \rrbracket_{xy\vec{v}}$ とすれば (i) と同様にして $\llbracket x \rrbracket_{xy\vec{v}} \circ f' = \llbracket y \rrbracket_{xy\vec{v}} \circ f'$ だから

$$\begin{aligned} f &\leq \llbracket \varphi[z \rightsquigarrow x] \rrbracket_{xy\vec{v}} \\ &= \llbracket \varphi \rrbracket_{zxy\vec{v}} \circ \llbracket \langle x, x, y, u_3, \dots, u_m \rangle \rrbracket_{xy\vec{v}} \end{aligned} \quad (\text{補題 6.2})$$

だから命題 4.2 より, ある k が存在して $\llbracket \varphi \rrbracket'_{zxy\vec{v}} \circ k = \llbracket \langle x, x, y, u_3, \dots, u_m \rangle \rrbracket_{xy\vec{v}} \circ f'$ となる。このとき

$$\begin{aligned} \llbracket \langle x, x, y, u_3, \dots, u_m \rangle \rrbracket_{xy\vec{v}} \circ f' &= \langle \llbracket x \rrbracket_{xy\vec{v}} \circ f', \llbracket x \rrbracket_{xy\vec{v}} \circ f', \llbracket y \rrbracket_{xy\vec{v}} \circ f', \llbracket u_3 \rrbracket_{xy\vec{v}} \circ f', \dots, \llbracket u_m \rrbracket_{xy\vec{v}} \circ f' \rangle \\ &= \langle \llbracket y \rrbracket_{xy\vec{v}} \circ f', \llbracket x \rrbracket_{xy\vec{v}} \circ f', \llbracket y \rrbracket_{xy\vec{v}} \circ f', \llbracket u_3 \rrbracket_{xy\vec{v}} \circ f', \dots, \llbracket u_m \rrbracket_{xy\vec{v}} \circ f' \rangle \\ &= \llbracket \langle y, x, y, u_3, \dots, u_m \rangle \rrbracket_{xy\vec{v}} \circ f' \end{aligned}$$

だから $f \leq \llbracket \varphi \rrbracket_{zxy\vec{v}} \circ \llbracket \langle y, x, y, u_3, \dots, u_m \rangle \rrbracket_{xy\vec{u}} = \llbracket \varphi[z \rightsquigarrow y] \rrbracket_{xy\vec{u}}$ となる。

(Products 0: $\models q_i(\langle x_1, \dots, x_n \rangle) = x_i$)

$\vec{x} = \{x_1, \dots, x_n\}$ とすると

$$\begin{aligned} \llbracket q_i(\langle x_1, \dots, x_n \rangle) = x_i \rrbracket_{\vec{x}} &= (|\vec{x}| \xrightarrow{\langle \llbracket q_i(\langle x_1, \dots, x_n \rangle) \rrbracket_{\vec{x}}, \llbracket x_i \rrbracket_{\vec{x}} \rangle} |x_i| \times |x_i| \xrightarrow{\text{eq}} \Omega) \\ &= (|\vec{x}| \xrightarrow{\langle p_i, p_i \rangle} |x_i| \times |x_i| \xrightarrow{\text{eq}} \Omega) \\ &= \text{true} \end{aligned}$$

だから $\models q_i(\langle x_1, \dots, x_n \rangle) = x_i$ である。

(Products 1: $\models x = \langle q_1(x), \dots, q_n(x) \rangle$)

$$\begin{aligned} \llbracket x = \langle q_1(x), \dots, q_n(x) \rangle \rrbracket_x &= (|x| \xrightarrow{\langle \llbracket x \rrbracket_x, \llbracket \langle q_1(x), \dots, q_n(x) \rangle \rrbracket_x \rangle} |x| \times |x| \xrightarrow{\text{eq}} \Omega) \\ &= (|x| \xrightarrow{\langle \text{id}, \langle p_1, \dots, p_n \rangle \rangle} |x| \times |x| \xrightarrow{\text{eq}} \Omega) \\ &= \text{true} \end{aligned}$$

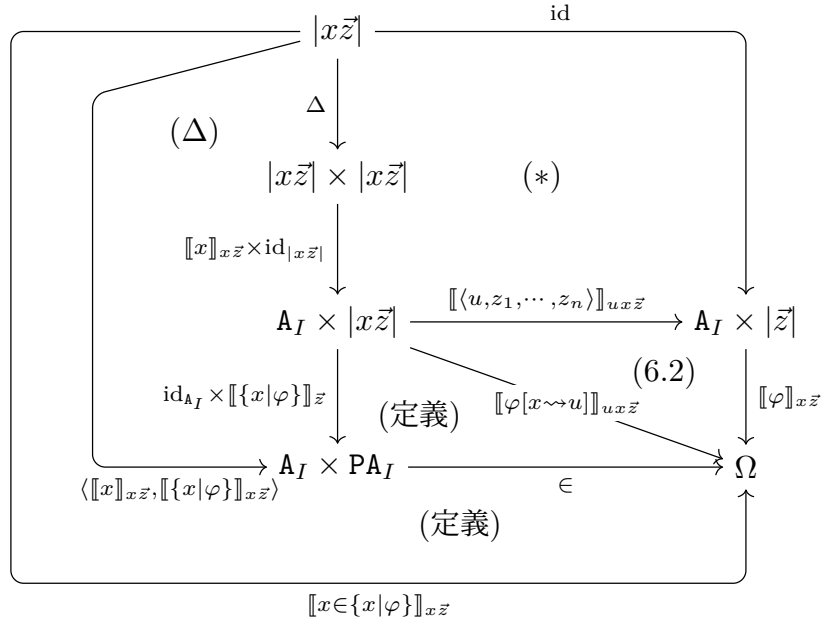
だから $\models x = \langle q_1(x), \dots, q_n(x) \rangle$ である.

(Comprehension: $\models x \in \{x \mid \varphi\} \leftrightarrow \varphi$)

$\text{Var}(\varphi) = \{x, z_1, \dots, z_n\}$ とする. $\leftrightarrow$ の定義より $\llbracket x \in \{x \mid \varphi\} \leftrightarrow \varphi \rrbracket_{x\vec{z}}$ は

$$|x\vec{z}| \xrightarrow{\langle \llbracket x \in \{x \mid \varphi\} \rrbracket_{x\vec{z}}, \llbracket \varphi \rrbracket_{x\vec{z}} \rangle} \Omega \times \Omega \xrightarrow{\text{eq}} \Omega$$

になるから $\llbracket x \in \{x \mid \varphi\} \rrbracket_{x\vec{z}} = \llbracket \varphi \rrbracket_{x\vec{z}}$ を示せばよい. そこで次の図式を考える.



この図式は可換である. よって $\llbracket x \in \{x \mid \varphi\} \rrbracket_{x\vec{z}} = \llbracket \varphi \rrbracket_{x\vec{z}}$ である. □

命題 6.10. $\frac{\Gamma_1 : \varphi_1 \quad \dots \quad \Gamma_n : \varphi_n}{\Gamma : \varphi}$ が推論規則のとき, $\Gamma_1 \models_I \varphi_1, \dots, \Gamma_n \models_I \varphi_n$ ならば $\Gamma \models_I \varphi$ である.

証明. (Thinning: $\Gamma \models_I \varphi$ ならば $\Gamma, \psi \models_I \varphi$)

$\text{Var}(\Gamma, \varphi, \psi) = \{x_1, \dots, x_n\}$ とする. $\Gamma \models_I \varphi$ とすると命題 6.4 より $\llbracket \Gamma \rrbracket_{\vec{x}} \leq \llbracket \varphi \rrbracket_{\vec{x}}$ である. よって

$$\llbracket \Gamma \cup \{\psi\} \rrbracket_{\vec{x}} = \llbracket \Gamma \rrbracket_{\vec{x}} \wedge \llbracket \psi \rrbracket_{\vec{x}} \leq \llbracket \Gamma \rrbracket_{\vec{x}} \leq \llbracket \varphi \rrbracket_{\vec{x}}$$

となるから $\Gamma, \psi \models_I \varphi$ である.

(Cut: $\Gamma \models_I \varphi$ かつ $\Gamma, \varphi \models_I \psi$ ならば $\Gamma \models_I \psi$)

$\text{Var}(\Gamma, \psi) = \{x_1, \dots, x_n\}$ とする. Cut の条件により $\text{Var}(\Gamma, \varphi, \psi) = \{x_1, \dots, x_n\}$ である. よって $\Gamma \models_I \varphi$ かつ $\Gamma, \varphi \models_I \psi$ とすると

$$\llbracket \Gamma \rrbracket_{\vec{x}} = \llbracket \Gamma \rrbracket_{\vec{x}} \wedge \llbracket \varphi \rrbracket_{\vec{x}} = \llbracket \Gamma \cup \{\varphi\} \rrbracket_{\vec{x}} \leq \llbracket \psi \rrbracket_{\vec{x}}$$

となるから $\Gamma \models_I \psi$ である.

(Substitution: $\Gamma \models_I \varphi$ ならば $\Gamma[y \rightsquigarrow t] \models_I \varphi[y \rightsquigarrow t]$)

$y \notin \text{Var}(\Gamma, \varphi)$ の場合は明らかだから $\text{Var}(\Gamma, \varphi) = \{y, x_1, \dots, x_n\}$ とする. t に現れる新しい自由変数を $z_1, \dots, z_m$ とすると

$$\text{Var}(\Gamma[y \rightsquigarrow t], \varphi[y \rightsquigarrow t]) = \{x_1, \dots, x_n, z_1, \dots, z_m\}$$

である. よって補題 6.2 より

$$\begin{aligned} \llbracket \Gamma[y \rightsquigarrow t] \rrbracket_{\vec{x}\vec{z}} &= \llbracket \Gamma \rrbracket_{y\vec{x}} \circ \llbracket \langle t, x_1, \dots, x_n \rangle \rrbracket_{\vec{x}\vec{z}} \\ &\leq \llbracket \varphi \rrbracket_{y\vec{x}} \circ \llbracket \langle t, x_1, \dots, x_n \rangle \rrbracket_{\vec{x}\vec{z}} = \llbracket \varphi[y \rightsquigarrow t] \rrbracket_{\vec{x}\vec{z}} \end{aligned}$$

である.

(Extensionality: $\Gamma \models_I y \in t \leftrightarrow y \in s$ ならば $\Gamma \models_I t = s$)

$\text{Var}(\Gamma, t, s) = \{x_1, \dots, x_n\}$ とする. Extensionality の条件よりこの中に y は含まれない. よって補題 6.1 より

$$\begin{array}{ccc} |y\vec{x}| & & \\ \llbracket \langle x_1, \dots, x_n \rangle \rrbracket_{y\vec{x}} \downarrow & \searrow \llbracket \Gamma \rrbracket_{y\vec{x}} & \\ |\vec{x}| & \xrightarrow{\llbracket \Gamma \rrbracket_{\vec{x}}} & \Omega \end{array}$$

は可換である. そこで $a := \text{dom}(\llbracket \Gamma \rrbracket'_{\vec{x}})$, $b := \text{dom}(\llbracket \Gamma \rrbracket'_{y\vec{x}})$ と書くと次の図式が得られる. (点線の射は pullback の普遍性で得られる射.)

$$\begin{array}{ccccc} b & \dashrightarrow & a & \xrightarrow{!} & 1 \\ \llbracket \Gamma \rrbracket'_{y\vec{x}} \downarrow & & \downarrow \llbracket \Gamma \rrbracket'_{\vec{x}} & & \downarrow \text{true} \\ |y\vec{x}| & \xrightarrow{\llbracket \langle x_1, \dots, x_n \rangle \rrbracket_{y\vec{x}}} & |\vec{x}| & \xrightarrow{\llbracket \Gamma \rrbracket_{\vec{x}}} & \Omega \\ & \searrow & \nearrow & & \\ & & \llbracket \Gamma \rrbracket_{y\vec{x}} & & \end{array}$$

右の四角と一番外側の四角が pullback だから, 左の四角も pullback である. 一方で次の四角も pullback である.

$$\begin{array}{ccc} |y| \times a & \xrightarrow{p} & a \\ \text{id} \times \llbracket \Gamma \rrbracket'_{\vec{x}} \downarrow & & \downarrow \llbracket \Gamma \rrbracket'_{\vec{x}} \\ |y\vec{x}| & \xrightarrow{\llbracket \langle x_1, \dots, x_n \rangle \rrbracket_{y\vec{x}}} & |\vec{x}| \end{array}$$

よって部分対象として $[\Gamma]_{y\vec{x}}' \cong \text{id} \times [\Gamma]_{\vec{x}}'$ である．以下簡単のため $[\Gamma]_{y\vec{x}}' = \text{id} \times [\Gamma]_{\vec{x}}'$ とする．

$\Gamma \models_I y \in t \leftrightarrow y \in s$ とすると，命題 6.7 より

$$[y \in t]_{y\vec{x}} \circ [\Gamma]_{y\vec{x}}' = [y \in s]_{y\vec{x}} \circ [\Gamma]_{y\vec{x}}' \quad (6.11)$$

となる．ここで $[y \in t]_{y\vec{x}}$ の定義を思い出すと次の可換図式が得られる．

$$\begin{array}{ccc} |y| \times a & & |y| \times a \\ \downarrow [\Gamma]_{y\vec{x}}' = \text{id} \times [\Gamma]_{\vec{x}}' & & \downarrow [\Gamma]_{y\vec{x}}' = \text{id} \times [\Gamma]_{\vec{x}}' \\ |y\vec{x}| & & |y\vec{x}| \\ \downarrow \langle [y]_{y\vec{x}}, [t]_{y\vec{x}} \rangle & \searrow [y \in t]_{y\vec{x}} & \downarrow \langle [y]_{y\vec{x}}, [s]_{y\vec{x}} \rangle \\ \mathbf{C}_I \times \mathbf{PC}_I & \xrightarrow{\quad \in \quad} & \mathbf{C}_I \times \mathbf{PC}_I \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & & \searrow \\ & & \Omega \end{array}$$

よって

$$\begin{aligned} [y \in t]_{y\vec{x}} \circ [\Gamma]_{y\vec{x}}' &= (|y| \times a \xrightarrow{\text{id} \times [\Gamma]_{\vec{x}}'} |y\vec{x}| \xrightarrow{\langle [y]_{y\vec{x}}, [t]_{y\vec{x}} \rangle} \mathbf{C}_I \times \mathbf{PC}_I \xrightarrow{\quad \in \quad} \Omega) \\ &= (|y| \times a \xrightarrow{\text{id} \times ([t]_{\vec{x}} \circ [\Gamma]_{\vec{x}}')} \mathbf{C}_I \times \mathbf{PC}_I \xrightarrow{\quad \in \quad} \Omega) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccccc} |y| & \xleftarrow{p_1} & |y| \times a & \xrightarrow{p_2} & a \\ \text{id} \downarrow & & \downarrow [\Gamma]_{y\vec{x}}' & & \downarrow [\Gamma]_{\vec{x}}' \\ |y| & \xleftarrow{[y]_{y\vec{x}}} & |y\vec{x}| & \xrightarrow{[\langle x_1, \dots, x_n \rangle]_{y\vec{x}}} & |\vec{x}| \\ \text{id} \downarrow & & \downarrow \langle [y]_{y\vec{x}}, [t]_{y\vec{x}} \rangle & \searrow [t]_{y\vec{x}} & \downarrow [t]_{\vec{x}} \\ \mathbf{C}_I & \xleftarrow{p_1} & \mathbf{C}_I \times \mathbf{PC}_I & \xrightarrow{p_2} & \mathbf{PC}_I \end{array}$$

である． s についても同様だから等式 (6.11) により次の可換図式が得られる．

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{C}_I \times \mathbf{PC}_I & \xrightarrow{\quad \in \quad} & \Omega \\ \uparrow \text{id} \times ([t]_{\vec{x}} \circ [\Gamma]_{\vec{x}}') & & \downarrow \text{id} \\ |y| \times a & & \Omega \\ \downarrow \text{id} \times ([s]_{\vec{x}} \circ [\Gamma]_{\vec{x}}') & & \uparrow \text{id} \\ \mathbf{C}_I \times \mathbf{PC}_I & \xrightarrow{\quad \in \quad} & \Omega \end{array}$$

よって随伴により次の可換図式が得られる.

$$\begin{array}{ccc}
& \text{PC}_I & \xrightarrow{\text{id}} \text{PC}_I \\
\uparrow \llbracket t \rrbracket_{\vec{x}} \circ \llbracket \Gamma \rrbracket'_{\vec{x}} & & \downarrow \text{id} \\
& a & \text{PC}_I \\
\downarrow \llbracket s \rrbracket_{\vec{x}} \circ \llbracket \Gamma \rrbracket'_{\vec{x}} & & \uparrow \text{id} \\
& \text{PC}_I & \xrightarrow{\text{id}} \text{PC}_I
\end{array}$$

即ち $\llbracket t \rrbracket_{\vec{x}} \circ \llbracket \Gamma \rrbracket'_{\vec{x}} = \llbracket s \rrbracket_{\vec{x}} \circ \llbracket \Gamma \rrbracket'_{\vec{x}}$ である. 故に再び命題 6.7 により $\Gamma \models_I t = s$ となる.

(Equivalence: $\Gamma, \varphi \models_I \psi$ かつ $\Gamma, \psi \models_I \varphi$ ならば $\Gamma \models_I \varphi \leftrightarrow \psi$)

$\text{Var}(\Gamma, \varphi, \psi) = \{x_1, \dots, x_n\}$ とする. $\Gamma, \varphi \models_I \psi$ かつ $\Gamma, \psi \models_I \varphi$ とすると

$$\llbracket \Gamma \rrbracket_{\vec{x}} \wedge \llbracket \varphi \rrbracket_{\vec{x}} \leq \llbracket \psi \rrbracket_{\vec{x}}, \quad \llbracket \Gamma \rrbracket_{\vec{x}} \wedge \llbracket \psi \rrbracket_{\vec{x}} \leq \llbracket \varphi \rrbracket_{\vec{x}}$$

である. よって $\llbracket \Gamma \rrbracket_{\vec{x}} \wedge \llbracket \varphi \rrbracket_{\vec{x}} = \llbracket \Gamma \rrbracket_{\vec{x}} \wedge \llbracket \psi \rrbracket_{\vec{x}}$ となる. 従って

$$\begin{aligned}
\llbracket \varphi \rrbracket_{\vec{x}} \circ \llbracket \Gamma \rrbracket'_{\vec{x}} &= (\llbracket \varphi \rrbracket_{\vec{x}} \circ \llbracket \Gamma \rrbracket'_{\vec{x}}) \wedge \text{true} \\
&= (\llbracket \varphi \rrbracket_{\vec{x}} \circ \llbracket \Gamma \rrbracket'_{\vec{x}}) \wedge (\llbracket \Gamma \rrbracket_{\vec{x}} \circ \llbracket \Gamma \rrbracket'_{\vec{x}}) \\
&= (\llbracket \varphi \rrbracket_{\vec{x}} \wedge \llbracket \Gamma \rrbracket_{\vec{x}}) \circ \llbracket \Gamma \rrbracket'_{\vec{x}} \\
&= (\llbracket \psi \rrbracket_{\vec{x}} \wedge \llbracket \Gamma \rrbracket_{\vec{x}}) \circ \llbracket \Gamma \rrbracket'_{\vec{x}} \\
&= (\llbracket \psi \rrbracket_{\vec{x}} \circ \llbracket \Gamma \rrbracket'_{\vec{x}}) \wedge (\llbracket \Gamma \rrbracket_{\vec{x}} \circ \llbracket \Gamma \rrbracket'_{\vec{x}}) \\
&= (\llbracket \psi \rrbracket_{\vec{x}} \circ \llbracket \Gamma \rrbracket'_{\vec{x}}) \wedge \text{true} \\
&= \llbracket \psi \rrbracket_{\vec{x}} \circ \llbracket \Gamma \rrbracket'_{\vec{x}}
\end{aligned}$$

となるから命題 6.7 と $\leftrightarrow$ の定義より $\Gamma \models_I \varphi \leftrightarrow \psi$ である. □

以上により次の定理が得られた.

定理 6.12 (健全性定理). $\Gamma \vdash_T \varphi$ ならば $\Gamma \models_T \varphi$ である. □

定理 6.13. pure local set theory は無矛盾である.

証明. まず準備として, 有限集合がなす充満部分圏 $\mathbf{FinSet} \subset \mathbf{Set}$ はトポスである. この $\mathbf{FinSet}$ における局所言語 L の解釈 I を以下により定める.

- $\mathbb{I}_I$ は 1 元集合とする.
- $\Omega_I := \Omega = \{0, 1\}$ とする.

- 型記号 $A \in L$ に対して A_I は非空有限集合とする (なんでもよい).
- 関数記号 $f: A \rightarrow B$ に対して f_I は写像 $A_I \rightarrow B_I$ とする (なんでもよい).

さて pure local set theory が矛盾していると仮定する. 即ち $\vdash \perp$ である. x, y を型 Ω の異なる変数記号として L -論理式 $x = y$ を考えると, 命題 2.39 より $\vdash x = y$ となる. よって健全性定理 (定理 6.12) により $\models_I x = y$ である. これは命題 6.7 により $\llbracket x \rrbracket_{xy} = \llbracket y \rrbracket_{xy}$ を意味する. 定義より $\llbracket x \rrbracket_{xy} = p_1: \Omega \times \Omega \rightarrow \Omega$, $\llbracket y \rrbracket_{xy} = p_2: \Omega \times \Omega \rightarrow \Omega$ であるから $p_1 = p_2$ となるが, これは $\Omega = \{0, 1\}$ だから成り立たず矛盾である. $\square$

命題 6.14. I が S のモデルで $\vdash_S t = s$ のとき $\llbracket t \rrbracket_{\vec{x}} = \llbracket s \rrbracket_{\vec{x}}$ である.

証明. $\vdash_S t = s$ とすると健全性定理 (定理 6.12) により $\models_S t = s$ である. よって命題 6.7 により $\llbracket t \rrbracket_{\vec{x}} = \llbracket s \rrbracket_{\vec{x}}$ となる. $\square$

$\llbracket \{y \mid \varphi\} \rrbracket_{\vec{x}}$ の定義において, $\vec{x}$ に現れない変数記号 u を使って $\varphi[y \rightsquigarrow u]$ を考えていたが, 命題 2.32 によれば $\vdash \{u \mid \varphi[y \rightsquigarrow u]\} = \{y \mid \varphi\}$ である. よって命題 6.14 により

$$\llbracket \{u \mid \varphi[y \rightsquigarrow u]\} \rrbracket_{\vec{x}} = \llbracket \{y \mid \varphi\} \rrbracket_{\vec{x}}$$

となる. これにより初めから y は $\vec{x}$ に現れないとしてよく, その場合

$$\begin{array}{ccc} |y| \times |\vec{x}| & & \\ \text{id}_{c_I} \times \llbracket \{y \mid \varphi\} \rrbracket_{\vec{x}} \downarrow & \searrow \llbracket \varphi \rrbracket_{y\vec{x}} & \\ |y| \times P|y| & \xrightarrow{\epsilon} & \Omega \end{array}$$

となる. 以下では $\llbracket \{y \mid \varphi\} \rrbracket_{\vec{x}}$ を扱う場合には, 特に断らなくても y は $\vec{x}$ に現れないものとする.

6.4 完全性定理

local set theory S に対して, L の $C(S)$ における解釈 $\mathfrak{C}$ を次により定める.

- 型記号 A に対して $A_{\mathfrak{C}} := U^A$ とする.
- 関数記号 $f: A \rightarrow B$ に対して $f_{\mathfrak{C}} := \text{map}_{\mathfrak{f}(x)}^x: U^A \rightarrow U^B$ とする.

この解釈を S の canonical な解釈という

命題 6.15. 項 t に対して $\llbracket t \rrbracket_{\vec{x}}^{\mathfrak{C}} \stackrel{S}{=} \text{map}_{\vec{t}}^{\vec{x}}$ である.

証明. t の構成についての帰納法.

(1) $t \equiv *$ の場合.

$$\llbracket * \rrbracket_{\vec{x}} = (|\vec{x}| \xrightarrow{!} 1) = \text{map}_{*}^{\vec{x}}.$$

(2) $t \equiv x_i$ が変数記号の場合.

$$\llbracket x_i \rrbracket_{\vec{x}} = p_i = \text{map}_{x_i}^{\vec{x}}.$$

(3) $t \equiv f(s)$ ($f: C \rightarrow B$ は関数記号で, s は型 C の項) の場合.

$$\begin{aligned} \llbracket f(s) \rrbracket_{\vec{x}} &= (|\vec{x}| \xrightarrow{\llbracket s \rrbracket_{\vec{x}}} U^C \xrightarrow{f} U^B) \\ &= (|\vec{x}| \xrightarrow{\text{map}_s^{\vec{x}}} U^C \xrightarrow{\text{map}_{f(y)}^y} U^B) && \text{(帰納法の仮定と } I \text{ の定義)} \\ &= \text{map}_{f(s)}^{\vec{x}}. && \text{(命題 5.2)} \end{aligned}$$

(4) $t \equiv \langle s_1, \dots, s_m \rangle$ (s_i は型 C_i の項) の場合.

$$\begin{aligned} \llbracket \langle s_1, \dots, s_m \rangle \rrbracket_{\vec{x}} &= \langle \llbracket s_1 \rrbracket_{\vec{x}}, \dots, \llbracket s_m \rrbracket_{\vec{x}} \rangle \\ &= \langle \text{map}_{s_1}^{\vec{x}}, \dots, \text{map}_{s_m}^{\vec{x}} \rangle && \text{(帰納法の仮定)} \end{aligned}$$

であるから $\langle \text{map}_{s_1}^{\vec{x}}, \dots, \text{map}_{s_m}^{\vec{x}} \rangle = \text{map}_{\langle s_1, \dots, s_m \rangle}^{\vec{x}}$ を示せばよい. そこで次の図式を考える.

$$\begin{array}{ccccc} & & |\vec{x}| & & \\ & \text{map}_{s_1}^{\vec{x}} \swarrow & \downarrow \text{map}_{\langle s_1, \dots, s_m \rangle}^{\vec{x}} & \searrow \text{map}_{s_m}^{\vec{x}} & \\ & U^{C_1} \times \dots \times U^{C_m} & & & \\ & \swarrow p_1 \quad \downarrow \quad \searrow p_m & & & \\ U^{C_1} & & \dots & & U^{C_m} \end{array}$$

(2) で示した通り, $\vec{y} = \{y_1^{C_1}, \dots, y_m^{C_m}\}$ とすれば $p_i = \text{map}_{y_i}^{\vec{y}}$ である. よって命題 5.2 により

$$p_i \circ \text{map}_{\langle s_1, \dots, s_m \rangle}^{\vec{x}} = \text{map}_{y_i}^{\vec{y}} \circ \text{map}_{\langle s_1, \dots, s_m \rangle}^{\vec{x}} = \text{map}_{s_i}^{\vec{x}}$$

となるから, 直積の普遍性により $\langle \text{map}_{s_1}^{\vec{x}}, \dots, \text{map}_{s_m}^{\vec{x}} \rangle = \text{map}_{\langle s_1, \dots, s_m \rangle}^{\vec{x}}$ である.

(5) $t \equiv q_i(s)$ (s は型 $C_1 \times \dots \times C_m$ の項) の場合. まず y を型 $C_1 \times \dots \times C_m$ の変数記号とすると $y \in U^{C_1 \times \dots \times C_m} \vdash_S q_i(y) \in U^{C_i}$ である. よって $\text{map}_{q_i(y)}^y: U^{C_1 \times \dots \times C_m} \rightarrow U^{C_i}$ は S -写像であるが, 定義より

$$\text{map}_{q_i(y)}^y \equiv \{ \langle y, q_i(y) \rangle \mid \top \} \stackrel{S}{=} \{ \langle \langle z_1^{C_1}, \dots, z_m^{C_m} \rangle, z_i^{C_i} \rangle \mid \top \} \stackrel{S}{=} p_i$$

である。よって

$$\begin{aligned}\llbracket q_i(s) \rrbracket_{\vec{x}} &= (|\vec{x}| \xrightarrow{\llbracket s \rrbracket_{\vec{x}}} U^{\mathbf{C}_1} \times \cdots \times U^{\mathbf{C}_m} \xrightarrow{p_i} U^{\mathbf{C}_i}) \\ &= (|\vec{x}| \xrightarrow{\text{map}_{\vec{s}}} U^{\mathbf{C}_1} \times \cdots \times U^{\mathbf{C}_m} \xrightarrow{\text{map}_{q_i(y)}^y} U^{\mathbf{C}_i}) \\ &= \text{map}_{q_i(s)}^{\vec{x}}.\end{aligned}$$

(6) $t \equiv \{y \mid \varphi\}$ (y は型 $\mathbf{C}$ の変数記号) の場合. $\llbracket \{y \mid \varphi\} \rrbracket_{\vec{x}}$ は $\llbracket \varphi \rrbracket_{y\vec{x}}$ の随伴射である. 帰納法の仮定より

$$\llbracket \varphi \rrbracket_{y\vec{x}} \stackrel{S}{=} \text{map}_{\varphi}^{y\vec{x}} \equiv \{\langle \langle y, x_1, \dots, x_n \rangle, \varphi \rangle \mid \top\}$$

だから, この随伴射は

$$\{\langle \langle x_1, \dots, x_n \rangle, \{y \mid \varphi\} \rangle \mid \top\} \equiv \text{map}_{\{y \mid \varphi\}}^{\vec{x}}$$

である.

(7) $t \equiv s_0 = s_1$ (s_0, s_1 は型 $\mathbf{C}$ の項) の場合.

$$\begin{aligned}\llbracket s_0 = s_1 \rrbracket_{\vec{x}} &= (|\vec{x}| \xrightarrow{\llbracket \langle s_0, s_1 \rangle \rrbracket_{\vec{x}}} U^{\mathbf{C}} \times U^{\mathbf{C}} \xrightarrow{\text{eq}} \Omega) \\ &= (|\vec{x}| \xrightarrow{\text{map}_{\langle s_0, s_1 \rangle}^{\vec{x}}} U^{\mathbf{C}} \times U^{\mathbf{C}} \xrightarrow{\text{map}_{y=z}^{yz}} \Omega) && \text{(帰納法の仮定)} \\ &= \text{map}_{s_0=s_1}^{\vec{x}}. && \text{(命題 5.2)}\end{aligned}$$

(8) $t \equiv s_0 \in s_1$ (s_0, s_1 は型 $\mathbf{C}, \mathbf{PC}$ の項) の場合.

$$\begin{aligned}\llbracket s_0 \in s_1 \rrbracket_{\vec{x}} &= (|\vec{x}| \xrightarrow{\llbracket \langle s_0, s_1 \rangle \rrbracket_{\vec{x}}} U^{\mathbf{C}} \times PU^{\mathbf{C}} \xrightarrow{\in} \Omega) \\ &= (|\vec{x}| \xrightarrow{\text{map}_{\langle s_0, s_1 \rangle}^{\vec{x}}} U^{\mathbf{C}} \times PU^{\mathbf{C}} \xrightarrow{\text{map}_{y \in z}^{yz}} \Omega) && \text{(帰納法の仮定)} \\ &= \text{map}_{s_0 \in s_1}^{\vec{x}}. && \text{(命題 5.2)}\end{aligned}$$

□

定理 6.16. local set theory S に対して $\Gamma \models_{\mathfrak{C}} \varphi \iff \Gamma \vdash_S \varphi$ である. 即ち $\mathfrak{C}$ は S のモデルである (このモデルを S の canonical モデルと呼ぶ).

証明. まず $\Gamma = \emptyset$ の場合を考えると, $\text{Var}(\varphi) = \{x_1, \dots, x_n\}$ とすれば

$$\begin{aligned}\models_{\mathfrak{C}} \varphi &\iff \llbracket \varphi \rrbracket_{\vec{x}} \stackrel{S}{=} \text{true} \\ &\iff \text{map}_{\varphi}^{\vec{x}} \stackrel{S}{=} \text{map}_{\top}^{\vec{x}} && \text{(命題 5.7, 6.15)} \\ &\iff \vdash_S \varphi = \top && \text{(命題 5.3)} \\ &\iff \vdash_S \varphi && \text{(命題 2.11, 2.12)}\end{aligned}$$

である。よって一般の Γ の場合は $\Gamma = \{\varphi_1, \dots, \varphi_k\}$ と書くと、まず命題 2.23, 2.24 と健全性定理の証明 (命題 6.8, 6.10) により

$$\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_k \models_{\mathfrak{C}} \varphi \iff \models_{\mathfrak{C}} \varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_k \rightarrow \varphi$$

である。従って

$$\begin{aligned} \Gamma \models_{\mathfrak{C}} \varphi &\iff \varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_k \models_{\mathfrak{C}} \varphi \\ &\iff \models_{\mathfrak{C}} \varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_k \rightarrow \varphi \\ &\iff \vdash_S \varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_k \rightarrow \varphi \\ &\iff \varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_k \vdash_S \varphi \\ &\iff \Gamma \vdash_S \varphi \end{aligned}$$

となる。 □

定理 6.17 (完全性定理). T をシーケントの集合とすると、 $\Gamma \models_T \varphi$ ならば $\Gamma \vdash_T \varphi$ である。

証明. $\Gamma \models_T \varphi$ とする。 S を T で生成される local set theory とすれば、定理 6.16 より $\mathfrak{C}$ は T のモデルである。よって $\Gamma \models_{\mathfrak{C}} \varphi$ となる。従って再び定理 6.16 より $\Gamma \vdash_S \varphi$ である。故に S の定義より $\Gamma \vdash_T \varphi$ となる。 □

7 トポスが定める local set theory

トポス E に対して、局所言語 $L(E)$ を以下により定める。

- 型記号は E の対象とする (但し 1 と Ω は除く)。
- 関数記号は E の射とする。但し E の射として $f: a \rightarrow b$ のとき、関数記号 f のシグネチャは $a \rightarrow b$ とする。

以下では区別のため、 E の対象や射が定める記号を下線を付けて区別することにする。つまり $a \in E$ が対象のとき $\underline{a}$ は $L(E)$ の型記号であり、 $f: a \rightarrow b$ が射のとき $\underline{f}$ は $L(E)$ の関数記号である。 $\underline{f}$ のシグネチャは $\underline{a} \rightarrow \underline{b}$ となる。但し便宜上 $\underline{1} := 1$, $\underline{\Omega} := \Omega$ と定めておく。

このとき $L(E)$ の E での解釈 J (これを自然な解釈という) を以下のようにして定めることができる。

- 型記号 $\underline{a}$ に対して $\underline{a}_J := a$ とする。

- 関数記号 $\underline{f}$ に対して $\underline{f}_J := f$ とする.

これを使って $\text{Th}(E) := \{\Gamma : \varphi \mid \Gamma \vdash_J \varphi\}$ と定める.

定理 7.1. トポス E に対して $\Gamma \vdash_{\text{Th}(E)} \varphi \iff \Gamma \vdash_J \varphi$ である. 即ち $\text{Th}(E)$ は local set theory である.

証明. $(\implies)$ $\Gamma \vdash_{\text{Th}(E)} \varphi$ とすると健全性定理 (定理 6.12) より $\Gamma \vdash_{\text{Th}(E)} \varphi$ である. J は $\text{Th}(E)$ のモデルだから $\Gamma \vdash_J \varphi$ となる.

$(\impliedby)$ 定義から明らか. □

命題 7.2. $f, g: a \rightarrow b$ を E の射とするととき

$$f = g \iff \vdash_{\text{Th}(E)} \underline{f}(x) = \underline{g}(x).$$

証明. $(\implies)$ $f = g$ のときは関数記号として $\underline{f} \equiv \underline{g}$ だから明らか.

$(\impliedby)$ $\vdash_{\text{Th}(E)} \underline{f}(x) = \underline{g}(x)$ とすると定理 7.1 より $\vdash_J \underline{f}(x) = \underline{g}(x)$ である. つまり命題 6.7 より $\llbracket \underline{f}(x) \rrbracket_x = \llbracket \underline{g}(x) \rrbracket_x$ となる. 定義より

$$\begin{aligned} \llbracket \underline{f}(x) \rrbracket_x &= (|x| \xrightarrow{\text{id}} |x| \xrightarrow{\underline{f}_J} b) = f \\ \llbracket \underline{g}(x) \rrbracket_x &= (|x| \xrightarrow{\text{id}} |x| \xrightarrow{\underline{g}_J} b) = g \end{aligned}$$

となるから $f = g$ である. □

命題 7.3. $f: a \rightarrow b$, $g: b \rightarrow c$ を E の射とするととき

$$\vdash_{\text{Th}(E)} \underline{g}(\underline{f}(x)) = \underline{g \circ f}(x).$$

証明. 定理 7.1 と命題 6.7 より $\llbracket \underline{g}(\underline{f}(x)) \rrbracket_x = \llbracket \underline{g \circ f}(x) \rrbracket_x$ を示せばよい. これは定義より

$$\begin{aligned} \llbracket \underline{g}(\underline{f}(x)) \rrbracket_x &= (|x| \xrightarrow{\text{id}} |x| \xrightarrow{\underline{f}_J} b \xrightarrow{\underline{g}_J} c) = g \circ f \\ \llbracket \underline{g \circ f}(x) \rrbracket_x &= (|x| \xrightarrow{\text{id}} |x| \xrightarrow{\underline{g \circ f}_J} c) = g \circ f \end{aligned}$$

となるから成り立つ. □

命題 7.4. $f: a \rightarrow b$ を E の射とするととき

$$f \text{ がモノ射} \iff \underline{f}(x) = \underline{f}(y) \vdash_{\text{Th}(E)} x = y.$$

証明. ($\implies$) f をモノ射とする. 命題 2.7 より $\underline{f}(x) = \underline{f}(y) \vdash_{\text{Th}(E)} \underline{f}(x) = \underline{f}(y)$ なので, 定理 7.1 より $\underline{f}(x) = \underline{f}(y) \vdash_{\text{Th}(E)} \underline{f}(x) = \underline{f}(y)$ である. $\Gamma := \{\underline{f}(x) = \underline{g}(x)\}$ とすれば命題 6.7 より

$$\llbracket \underline{f}(x) \rrbracket_{xy} \circ \llbracket \Gamma \rrbracket'_{xy} = \llbracket \underline{f}(y) \rrbracket_{xy} \circ \llbracket \Gamma \rrbracket'_{xy}$$

となる. 即ち

$$f \circ \llbracket x \rrbracket_{xy} \circ \llbracket \Gamma \rrbracket'_{xy} = f \circ \llbracket y \rrbracket_{xy} \circ \llbracket \Gamma \rrbracket'_{xy}$$

である. 今 f がモノ射だから

$$\llbracket x \rrbracket_{xy} \circ \llbracket \Gamma \rrbracket'_{xy} = \llbracket y \rrbracket_{xy} \circ \llbracket \Gamma \rrbracket'_{xy}$$

となる. 従って $\underline{f}(x) = \underline{f}(y) \vdash_{\text{Th}(E)} x = y$ である. 再び定理 7.1 より

$$\underline{f}(x) = \underline{f}(y) \vdash_{\text{Th}(E)} x = y$$

となる.

($\impliedby$) $g, h: c \rightarrow a$ が $f \circ g = f \circ h$ を満たすとする. 命題 7.2, 7.3 より

$$\vdash_{\text{Th}(E)} \underline{f}(\underline{g}(x)) = \underline{f}(\underline{h}(x))$$

である. よって

$$\frac{\frac{\vdash \underline{f}(\underline{g}(x)) = \underline{f}(\underline{h}(x))}{\vdash \underline{f}(\underline{g}(x)) = \underline{f}(\underline{h}(x))} \text{ 上述} \quad \frac{\frac{\underline{f}(u) = \underline{f}(v) : u = v}{\underline{f}(\underline{g}(x)) = \underline{f}(\underline{h}(x)) : \underline{g}(x) = \underline{h}(x)} \text{ 假定}}{\vdash \underline{f}(\underline{g}(x)) = \underline{f}(\underline{h}(x)) : \underline{g}(x) = \underline{h}(x)} \text{ C} \star \quad \text{S}(u \rightsquigarrow \underline{g}(x), v \rightsquigarrow \underline{h}(x))$$

により $\vdash_{\text{Th}(E)} \underline{g}(x) = \underline{h}(x)$ となる. よって再び命題 7.2 により $g = h$ である. $\square$

命題 7.5. t を型 B の項とすると $\llbracket \{t\} \rrbracket_{\vec{x}} = (|\vec{x}| \xrightarrow{\llbracket t \rrbracket_{\vec{x}}} B_I \xrightarrow{\{\cdot\}_{B_I}} \text{PB}_I)$ である. 特に型 A の変数記号 x に対して $\llbracket \{x\} \rrbracket_x = \{\cdot\}_{A_I}$ となる.

証明. $\{t\} \equiv \{y \mid y = t\}$ だったから, 定義より次の図式が可換となる.

$$\begin{array}{ccc} B_I \times |\vec{x}| & & \\ \text{id}_{B_I} \times \llbracket \{t\} \rrbracket_{\vec{x}} \downarrow & \searrow \llbracket u=t \rrbracket_{u\vec{x}} & \\ B_I \times \text{PB}_I & \xrightarrow{\in} & \Omega \end{array}$$

このとき

$$\begin{aligned}\llbracket u = t \rrbracket_{u\vec{x}} &= (|u\vec{x}| \xrightarrow{\langle \llbracket u \rrbracket_{u\vec{x}}, \llbracket t \rrbracket_{u\vec{x}} \rangle} \mathbf{B}_I \times \mathbf{B}_I \xrightarrow{\text{eq}} \Omega) \\ &= (\mathbf{B}_I \times |\vec{x}| \xrightarrow{\text{id} \times \llbracket t \rrbracket_{\vec{x}}} \mathbf{B}_I \times \mathbf{B}_I \xrightarrow{\text{eq}} \Omega)\end{aligned}$$

である．即ち次の図式が可換となる．

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{B}_I \times \mathbf{B}_I & \xrightarrow{\text{eq}} & \Omega \\ \text{id} \times \llbracket t \rrbracket_{\vec{x}} \uparrow & & \downarrow \text{id} \\ \mathbf{B}_I \times |\vec{x}| & & \Omega \\ \text{id} \times \llbracket \{t\} \rrbracket_{\vec{x}} \downarrow & & \uparrow \text{id} \\ \mathbf{B}_I \times \mathbf{PB}_I & \xrightarrow{\in} & \Omega \end{array}$$

よって随伴により次の可換図式を得る．

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{B}_I & \xrightarrow{\{\cdot\}_{\mathbf{B}_I}} & \mathbf{PB}_I \\ \llbracket t \rrbracket_{\vec{x}} \uparrow & & \downarrow \text{id} \\ |\vec{x}| & & \mathbf{PB}_I \\ \llbracket \{t\} \rrbracket_{\vec{x}} \downarrow & & \uparrow \text{id} \\ \mathbf{PB}_I & \xrightarrow{\text{id}} & \mathbf{PB}_I \end{array}$$

即ち $(|\vec{x}| \xrightarrow{\llbracket t \rrbracket_{\vec{x}}} \mathbf{B}_I \xrightarrow{\{\cdot\}_{\mathbf{B}_I}} \mathbf{PB}_I) = \llbracket \{t\} \rrbracket_{\vec{x}}$ である． □

命題 7.6. $\{\cdot\}_a: a \rightarrow Pa$ はモノ射である．

証明. 命題 7.4 より

$$\underline{\{\cdot\}}_a(x) = \underline{\{\cdot\}}_a(y) \vdash_{\text{Th}(E)} x = y$$

を示せばよい．まず定義より $\llbracket \underline{\{\cdot\}}_a(x) \rrbracket_x = (a \xrightarrow{\text{id}} a \xrightarrow{\underline{\{\cdot\}}_a} Pa) = \{\cdot\}_a$ である．一方で命題 7.5 より $\{\cdot\}_a = \llbracket \{x\} \rrbracket_x$ だから $\llbracket \underline{\{\cdot\}}_a(x) \rrbracket_x = \llbracket \{x\} \rrbracket_x$ となる．よって命題 6.7 により $\vdash_J \underline{\{\cdot\}}_a(x) = \{x\}$ となる．即ち $\vdash_{\text{Th}(E)} \underline{\{\cdot\}}_a(x) = \{x\}$ である．以上により

$$\{x\} = \{y\} \vdash_{\text{Th}(E)} x = y$$

を示せばよいが，これは明らか． □

命題 7.7. $f: a \rightarrow c$ を E の射, $m: b \rightarrow c$ をモノ射として

$$\vdash_{\text{Th}(E)} \exists y [\underline{m}(y) = \underline{f}(x)]$$

とする. このとき $g: a \rightarrow b$ が一意に存在して $m \circ g = f$ となる.

証明. モノ射 m に対応する射を $k: c \rightarrow \Omega$ とする. 即ち次の図式は pullback である.

$$\begin{array}{ccc} b & \xrightarrow{!} & 1 \\ m \downarrow & & \downarrow \text{true} \\ c & \xrightarrow{k} & \Omega \end{array}$$

特に $k \circ m = \text{true}$ である. このとき次のようにして $\vdash_{\text{Th}(E)} \underline{k}(f(x))$ となる.

$$\frac{\frac{\frac{\frac{\underline{m}(y) = \underline{f}(x) : \underline{k}(\underline{m}(y)) = \underline{k}(\underline{f}(x))}{\text{命題 2.6}}}{\underline{m}(y) = \underline{f}(x) : \top = \underline{k}(\underline{f}(x))}{\text{命題 7.3}}}{\underline{m}(y) = \underline{f}(x) : \underline{k}(\underline{f}(x))}{\text{命題 2.12}}}{\vdash \exists y [\underline{m}(y) = \underline{f}(x)] \text{ 仮定}} \quad \frac{\exists y [\underline{m}(y) = \underline{f}(x)] : \underline{k}(\underline{f}(x))}{\text{命題 2.56 } \star}}{\vdash \underline{k}(\underline{f}(x))} \text{ C } \star$$

故に定理 7.1 により $\models_J \underline{k}(f(x))$ である. 即ち $\llbracket \underline{k}(f(x)) \rrbracket_x = \text{true}$ となる. 定義より

$$\llbracket \underline{k}(f(x)) \rrbracket_x = (a \xrightarrow{f} c \xrightarrow{k} \Omega)$$

だから pullback の普遍性により次の点線の射 g が存在して可換となる.

$$\begin{array}{ccccc} a & & & & 1 \\ & \searrow g & & \searrow ! & \\ & b & \xrightarrow{!} & 1 & \\ & m \downarrow & & \downarrow \text{true} & \\ & c & \xrightarrow{k} & \Omega & \end{array}$$

f (from a to c)

即ち $m \circ g = f$ である. □

命題 7.8. x, y を型 $\underline{a}, \underline{b}$ の変数記号として, $L(E)$ -論理式 $\varphi(x, y)$ が

$$\vdash_{\text{Th}(E)} \exists! y \varphi(x, y)$$

を満たすとする。このとき E の射 $g: a \rightarrow b$ が一意に存在して

$$\vdash_{\text{Th}(E)} \varphi(x, \underline{g}(x))$$

となる。

証明. $t \equiv \{y \mid \varphi(x, y)\}$ として $f := \llbracket t \rrbracket_x^J$ と定める。 x の型が $\underline{a}$ で t の型が $P\underline{b}$ だから、 $f: a \rightarrow Pb$ となる。 また

$$\llbracket f(x) \rrbracket_x = (a \xrightarrow{\text{id}} a \xrightarrow{f_J} Pb) = f = \llbracket t \rrbracket_x$$

となるから命題 6.7 により $\models_J \underline{f}(x) = t$ ，即ち $\vdash_{\text{Th}(E)} \underline{f}(x) = t$ である。 よって u を新しい変数記号とすると

$$\begin{array}{c} \text{基本公理} \quad \frac{\exists! y \varphi(x, y), \varphi(x, y), \varphi(x, u) : u = y}{\varphi(x, y), \varphi(x, u) : u = y} \text{命題 2.62 } \star \\ \frac{y = u, \varphi(x, y) : \varphi(x, u)}{\varphi(x, y) : (u = y) \leftrightarrow \varphi(x, u)} \text{定義} \\ \frac{\varphi(x, y) : u \in \{y\} \leftrightarrow u \in t}{\varphi(x, y) : \{y\} = t} \text{Ex } \star \\ \frac{\varphi(x, y) : \{y\} = t}{\varphi(x, y) : \{\cdot\}_b(y) = \underline{f}(x)} \text{上述, 命題 7.6 の証明} \\ \frac{\varphi(x, y) : \{\cdot\}_b(y) = \underline{f}(x)}{\varphi(x, y) : \exists y [\{\cdot\}_b(y) = \underline{f}(x)]} \text{命題 2.58 } \star \\ \frac{\exists y \varphi(x, y) : \exists y [\{\cdot\}_b(y) = \underline{f}(x)]}{\exists y [\{\cdot\}_b(y) = \underline{f}(x)]} \text{命題 2.56 } \star \\ \frac{\exists y [\{\cdot\}_b(y) = \underline{f}(x)]}{\exists y [\{\cdot\}_b(y) = \underline{f}(x)]} \text{仮定, 命題 2.61 } \star \end{array}$$

となる。従って命題 7.7 により，ある $g: a \rightarrow b$ が一意に存在して $\{\cdot\}_b \circ g = f$ となる。 よって命題 7.2, 7.3 により $\vdash_{\text{Th}(E)} \{\cdot\}_b(\underline{g}(x)) = \underline{f}(x)$ となる。 上で示した通り $\vdash_{\text{Th}(E)} \underline{f}(x) = t$ で， また命題 7.6 の証明で示した通り $\vdash_{\text{Th}(E)} \{\cdot\}_a(x) = \{x\}$ だから

$$\vdash_{\text{Th}(E)} \{\underline{g}(x)\} = t$$

となる。 即ち $\vdash_{\text{Th}(E)} \underline{g}(x) \in t$ なので $\vdash_{\text{Th}(E)} \varphi(x, \underline{g}(x))$ である。 $\square$

定理 7.9. トポス E に対して $C(\text{Th}(E)) \simeq E$ である。 即ち任意のトポスは linguistic topos と圏同値になる。

証明. 関手 $F: E \rightarrow C(\text{Th}(E))$ を以下により定める。

- $a \in E$ に対して $Fa := U^a$ とする。
- $f: a \rightarrow b$ に対して $\underline{f}: \underline{a} \rightarrow \underline{b}$ である。 よって $x \in Fa \vdash_{\text{Th}(E)} \underline{f}(x) \in Fb$ となる。 そこで $Ff := \text{map}_{\underline{f}(x)}: Fa \rightarrow Fb$ と定める。

この F が圏同値であることを示す.

(本質的全射) X を $\text{Th}(E)$ -集合とする. $x \in X$ は $L(E)$ -論理式である. そこで E での自然な解釈 J を使って $i_X := \llbracket x \in X \rrbracket'_x$, $a := \text{dom}(i_X)$ と定める. 即ち次の図式は E における pullback である.

$$\begin{array}{ccc} a & \xrightarrow{!} & 1 \\ i_X \downarrow & & \downarrow \text{true} \\ |x| & \xrightarrow{\llbracket x \in X \rrbracket_x} & \Omega \end{array}$$

i_X は E の射だから $L(E)$ の関数記号 $\underline{i_X}: \underline{a} \rightarrow \underline{|x|}$ を定める. よって u を型 $\underline{a}$ の変数記号とすれば $\underline{i_X}(u)$ は項である. 従って自然な解釈 J により E の射 $\llbracket \underline{i_X}(u) \rrbracket_u$ が定まるが, このとき補題 6.2 により

$$\begin{array}{ccc} a & & \\ \llbracket \underline{i_X}(u) \rrbracket_u \downarrow & \searrow \llbracket \underline{i_X}(u) \in X \rrbracket_u & \\ |x| & \xrightarrow{\llbracket x \in X \rrbracket_x} & \Omega \end{array}$$

は可換である. ここで定義より

$$\llbracket \underline{i_X}(u) \rrbracket_u = \underline{i_X}_J = i_X = \llbracket x \in X \rrbracket'_x$$

である. よって $\llbracket \underline{i_X}(u) \in X \rrbracket_u = \text{true}$ となるから $\models_J \underline{i_X}(u) \in X$ である. 故に定理 7.1 より $\vdash_{\text{Th}(E)} \underline{i_X}(u) \in X$ が分かる. 従って $\text{Th}(E)$ -写像 $f_X := \text{map}_{\underline{i_X}(u)}^u: Fa = U^{\underline{a}} \rightarrow X$ が定まる. i_X がモノ射だから f_X は単射である. よって f_X が全射であることを示せばよい. まず

$$\frac{\frac{}{: \underline{i_X}(v) = \underline{i_X}(v)} \text{命題 2.7}}{: \exists u (\underline{i_X}(v) = \underline{i_X}(u))} \text{命題 2.58 } \star$$

より $\llbracket \exists u (\underline{i_X}(v) = \underline{i_X}(u)) \rrbracket_v = \text{true}$ が分かる. よって補題 6.2 により次の図式の一番外側は可換である.

$$\begin{array}{ccccc} a & & & & 1 \\ & \searrow h & & \searrow ! & \\ & b & \xrightarrow{!} & & 1 \\ & \downarrow \llbracket \exists u (x = \underline{i_X}(u)) \rrbracket'_x & & \downarrow \text{true} & \\ \llbracket \underline{i_X}(v) \rrbracket_v \searrow & |x| & \xrightarrow{\llbracket \exists u (x = \underline{i_X}(u)) \rrbracket_x} & & \Omega \end{array}$$

従って pullback の普遍性により点線の h が得られる．ここで

$$\llbracket i_X(v) \rrbracket_v = i_X = \llbracket x \in X \rrbracket'_x$$

だったから $\llbracket x \in X \rrbracket_x \leq \llbracket \exists u (x = i_X(u)) \rrbracket_x$ となる．即ち

$$x \in X \models_J \exists u (x = i_X(u))$$

だから $x \in X \vdash_{\text{Th}(E)} \exists u (x = i_X(u))$ である．よって

$$\frac{\frac{x \in X : \exists u (x = i_X(u))}{: x \in X \rightarrow \exists u (x = i_X(u))} \text{命題 2.24}}{: \forall x \in X \exists u (x = i_X(u))} \text{命題 2.34 } \star$$

となる．よって f_X の定義より $\vdash_{\text{Th}(E)} \forall x \in X \exists u \in Fa (x = f_X(u))$ である．

(忠実) $f, g: a \rightarrow b$ を E の射として $Ff \stackrel{\text{Th}(E)}{=} Fg$ とする．つまり定義より

$$\vdash_{\text{Th}(E)} \text{map}_{\underline{f}(x)}^x = \text{map}_{\underline{g}(x)}^x$$

である．命題 5.3 より $\vdash_{\text{Th}(E)} \underline{f}(x) = \underline{g}(x)$ となるから，命題 7.2 より $f = g$ である．

(充満) $f: Fa \rightarrow Fb$ を $\text{Th}(E)$ -写像とする．即ち $\vdash_{\text{Th}(E)} \forall x \in Fa \exists! y \in Fb \langle x, y \rangle \in f$ である． $Fa = U^a$, $Fb = U^b$ だから $\vdash_{\text{Th}(E)} \exists! y \langle x, y \rangle \in f$ となる．よって補題 7.8 により， E の射 $g: a \rightarrow b$ が一意に存在して

$$\vdash_{\text{Th}(E)} \langle x, \underline{g}(x) \rangle \in f$$

となる．よって $Fg = \text{map}_{\underline{g}(x)}^x = f$ である． $\square$

この定理により，トポスの色々な性質を **Set** の場合と同じように証明するということが可能になる．例えば次のような証明ができる (この命題は [4] ではモナドを使った圏論的な証明がされている)．

命題 7.10. 任意のトポス E は有限余完備である．

証明. 有限余完備性は圏同値で保たれるから，local set theory S に対して $C(S)$ が有限余完備であることを示せばよい．

まず $0 := \emptyset^I$ が $C(S)$ の始対象であることが分かる．

次に S -集合 X, Y に対して項 $\langle \{x\}, 0 \rangle$ は S -写像 $\text{map}_{\langle \{x\}, 0 \rangle}^x: X \rightarrow X + Y$ を定める．同様に $Y \rightarrow X + Y$ も得られて，これにより $X + Y$ は X と Y の余直積になることが分かる．

最後に $f, g: X \rightarrow Y$ を S -写像とすると、 Y 上の 2 項関係 (即ち S -集合 $R \subset Y \times Y$) を

$$R \equiv \bigcap \{u \mid u \text{ は } Y \text{ 上の同値関係} \wedge \forall x \forall y \forall z (\langle x, y \rangle \in f \wedge \langle x, z \rangle \in g \rightarrow \langle y, z \rangle \in u)\}$$

と定義すると $\vdash_S$ (R は同値関係) となる。よって

$$t \equiv \{x \mid \langle x, y \rangle \in R\}, \quad Y/R \equiv \{t \mid y \in Y\}$$

と定義すると $\text{map}_t^y: Y \rightarrow Y/R$ は S -写像であり、これが f と g の coequalizer を与えることが分かる。 $\square$

命題 7.11. トポス E における射 $f: a \rightarrow 0$ は同型射である。

証明. $E = C(S)$ の場合に証明すればよい。そこで $f: X \rightarrow 0$ を $C(S)$ の射とする。この場合 $0 = \emptyset^1$ であり、 f が S -写像だから $\vdash_S \forall x \in X \exists! y \in \emptyset^1 f(x) = y$ となる。故に $X = \emptyset$ であり、 f は同型となる。 $\square$

命題 7.12. トポス E における射 $f: 0 \rightarrow a$ はモノ射である。

証明. $g, h: b \rightarrow 0$ とすると、命題 7.11 により g は同型射だから逆射 $g^{-1}: 0 \rightarrow b$ が存在する。このとき 0 が始対象だから $h \circ g^{-1} = \text{id}_0$ である。よって $h = g$ となる。 $\square$

参考文献

- [1] alg-d, 数学基礎論 (数理論理学) 入門, <https://alg-d.com/math/ac/>
- [2] J. L. Bell, Toposes and Local Set Theories, Dover Publications (2008)
- [3] J. L. Bell, Notes on Toposes and Local Set Theories, <https://publish.uwo.ca/~jbell/>
- [4] S. Mac Lane and I. Moerdijk, Sheaves in Geometry and Logic, Springer, 1992
- [5] Michael P. Fourman, Sheaf Models for Set Theory, Journal of Pure and Applied Algebra 19 (1980), 91–101, [https://doi.org/10.1016/0022-4049\(80\)90096-1](https://doi.org/10.1016/0022-4049(80)90096-1)