

Kan 拡張

alg-d

https://alg-d.com/math/kan_extension/

2025 年 1 月 31 日

この PDF では Kan 拡張を定義して、それが各点 Kan 拡張と呼ばれる方法で計算できることを説明した後、Kan 拡張のよく使う基本的な性質を説明する。

目次

| | | |
|---|--------------|----|
| 1 | 定義 | 1 |
| 2 | 各点 Kan 拡張 | 4 |
| 3 | 随伴と Kan 拡張 | 18 |
| 4 | 米田埋込と Kan 拡張 | 25 |
| 5 | 普遍随伴 | 39 |

1 定義

関手 $F: C \rightarrow D$ と圏 U に対して、関手 $F^{-1}: U^D \rightarrow U^C$ が $F^{-1}(S) := S \circ F$ により定まるのであった (第 1 章「自然変換・関手圏」の PDF を参照)。

定義. C, D, U を圏, $F: C \rightarrow D$, $E: C \rightarrow U$ を関手とする. F に沿った E の左 Kan 拡張 (left Kan extension of E along F) とは, E から F^{-1} への普遍射 $\langle F^{\dagger}E, \eta \rangle$ のことを

いう.

$$\begin{array}{ccc}
 E & \xrightarrow{\eta} & F^\dagger E \circ F & & F^\dagger E \\
 & \searrow \theta & \downarrow \tau_F & & \downarrow \tau \\
 & & S \circ F & & S
 \end{array}$$

即ち, 以下の条件を満たす $\langle F^\dagger E, \eta \rangle$ のことである.

- (1) $F^\dagger E$ は関手 $D \rightarrow U$ で, η は自然変換 $E \Rightarrow F^\dagger E \circ F$ である.

$$\begin{array}{ccc}
 D & & \\
 \uparrow F & \searrow F^\dagger E & \\
 C & \xrightarrow{E} & U
 \end{array}
 \quad \eta \Uparrow$$

- (2) 組 $\langle S, \theta \rangle$ が同じ条件を満たす (即ち $S: D \rightarrow U$ は関手で $\theta: E \Rightarrow S \circ F$ は自然変換) ならば, 自然変換 $\tau: F^\dagger E \Rightarrow S$ が一意に存在して $\theta = \tau_F \circ \eta$ となる. 即ち次の等式が成り立つ.

$$\begin{array}{ccc}
 D & \xrightarrow{S} & U \\
 \uparrow F & \searrow F^\dagger E & \\
 C & \xrightarrow{E} & U
 \end{array}
 \quad \eta \Uparrow \quad \tau
 \quad = \quad
 \begin{array}{ccc}
 D & \xrightarrow{S} & U \\
 \uparrow F & \searrow \theta & \\
 C & \xrightarrow{E} & U
 \end{array}$$

自然変換 η を左 Kan 拡張 $\langle F^\dagger E, \eta \rangle$ の unit と呼ぶ. 左 Kan 拡張 $F^\dagger E$ を $\text{Lan}_F E$ と書くこともある*1.

この PDF では主にこの左 Kan 拡張について述べるが, 同じような概念として右 Kan 拡張, 左 Kan リフト, 右 Kan リフトがある. まず左 Kan 拡張の定義において自然変換の向きを逆にしたものが右 Kan 拡張 $\langle F^\ddagger E, \varepsilon \rangle$ である.

$$\begin{array}{ccc}
 D & \xrightarrow{S} & U \\
 \uparrow F & \searrow F^\ddagger E & \\
 C & \xrightarrow{E} & U
 \end{array}
 \quad \varepsilon \Downarrow \quad \tau
 \quad = \quad
 \begin{array}{ccc}
 D & \xrightarrow{S} & U \\
 \uparrow F & \searrow \theta & \\
 C & \xrightarrow{E} & U
 \end{array}$$

*1 というか, 大抵の本・論文では Lan が使われている. \dagger が使われているのは Kashiwara-Schapira の『Categories and Sheaves』など.

また関手の向きを逆にしたものを Kan リフトという．ここでは左 Kan リフトを $F^{\dagger}E$ 、右 Kan リフトを $F^{\ddagger}E$ で表す．

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{ccc} D & \xleftarrow{S} & U \\ \downarrow F & \nearrow F^{\dagger}E & \\ C & \xleftarrow{E} & U \end{array} & = & \begin{array}{ccc} D & \xleftarrow{S} & U \\ \downarrow F & \nearrow \theta & \\ C & \xleftarrow{E} & U \end{array} \\
 \\
 \begin{array}{ccc} D & \xleftarrow{S} & U \\ \downarrow F & \nearrow F^{\ddagger}E & \\ C & \xleftarrow{E} & U \end{array} & = & \begin{array}{ccc} D & \xleftarrow{S} & U \\ \downarrow F & \searrow \theta & \\ C & \xleftarrow{E} & U \end{array}
 \end{array}$$

普遍射の性質 (第 1 章「極限」「随伴関手」の PDF を参照) から次の 2 つの命題が分かる．

命題 1. $F: C \rightarrow D$, $E: C \rightarrow U$ に対して関手 $\text{Hom}_{U^C}(E, F^{-1}(-)): U^D \rightarrow \mathbf{Set}$ が得られる．このとき

$$\text{Hom}_{U^C}(E, F^{-1}(-)) \text{ が表現可能関手} \iff F^{\dagger}E \text{ が存在する}$$

が成り立つ．またこのとき $\text{Hom}_{U^C}(E, F^{-1}(-)) \cong \text{Hom}_{U^D}(F^{\dagger}E, -)$ である．これから得られる全単射 $\text{Hom}_{U^C}(E, F^{-1}(F^{\dagger}E)) \cong \text{Hom}_{U^D}(F^{\dagger}E, F^{\dagger}E)$ で右辺の $\text{id}_{F^{\dagger}E}$ に対応する左辺の $\eta: E \Rightarrow F^{-1}(F^{\dagger}E)$ が、左 Kan 拡張 $F^{\dagger}E$ の unit である． \square

命題 2. 各 $E \in U^C$ に対して、 F に沿った左 Kan 拡張 $F^{\dagger}E \in U^D$ が存在するとする．このとき F^{\dagger} は関手 $F^{-1}: U^D \rightarrow U^C$ の左随伴関手を定める．随伴 $F^{\dagger} \dashv F^{-1}$ の unit を $\eta: \text{id}_{U^C} \Rightarrow F^{-1} \circ F^{\dagger}$ とするとき、 $E \in U^C$ に対して η_E が $F^{\dagger}E$ の unit となる．同様に右 Kan 拡張 $F^{\ddagger}: U^C \rightarrow U^D$ は F^{-1} の右随伴関手である．即ち $F^{\dagger} \dashv F^{-1} \dashv F^{\ddagger}$ となる． \square

例 3. 関手 $E: J \rightarrow U$ に対して余極限 $\text{colim } E$ とは E から対角関手 $\Delta: U \rightarrow U^J$ への普遍射 $E \Rightarrow \Delta(\text{colim } E)$ であった．一方 $\mathbb{1} = \{*\}$ を 1 点圏として $F: J \rightarrow \mathbb{1}$ を唯一の関手とすれば、 Δ とは $U \cong U^{\mathbb{1}} \xrightarrow{F^{-1}} U^J$ のことである． F に沿った E の左 Kan 拡張とは普

遍射 $E \Rightarrow \Delta(F^\dagger E)$ のことだから、普遍射の一意性から $F^\dagger E \cong \text{colim } E$ が分かる。

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{1} & & \\
 \uparrow F & \searrow F^\dagger E \cong \text{colim } E & \\
 J & \xrightarrow{E} & U \\
 & \eta \Uparrow &
 \end{array}$$

即ち、余極限は左 Kan 拡張である。この場合の unit η は余極限余錐である。同様にして、極限は右 Kan 拡張である。 \square

2 各点 Kan 拡張

余極限 (極限) が左 Kan 拡張 (右 Kan 拡張) であること (例 3) を使うと、「各点 Kan 拡張」という方法で Kan 拡張を計算することができる。 C, D, U を圏, $F: C \rightarrow D$, $E: C \rightarrow U$ を関手として、左 Kan 拡張 $F^\dagger E: D \rightarrow U$ が存在するとする。

$$\begin{array}{ccc}
 D & & \\
 \uparrow F & \searrow F^\dagger E & \\
 C & \xrightarrow{E} & U \\
 & \eta \Uparrow &
 \end{array}$$

$d \in D$ に対して $F^\dagger E(d)$ を計算したい。 d を $d(*) = d$ となる関手 $d: \mathbb{1} \rightarrow D$ とみなしてコンマ圏 $F \downarrow d$ を考えれば次の図式を得る。 (P_0, P_1, σ はコンマ圏により得られる関手と自然変換である。「コンマ圏」の PDF を参照。)

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathbb{1} & \xrightarrow{d} & D & & \\
 P_1 \uparrow & \swarrow \sigma & \uparrow F & \searrow F^\dagger E & \\
 F \downarrow d & \xrightarrow{P_0} & C & \xrightarrow{E} & U \\
 & & \eta \Uparrow & &
 \end{array}$$

自然変換を合成すれば次の図式を得る。

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{1} & & \\
 P_1 \uparrow & \searrow F^\dagger E(d) & \\
 F \downarrow d & \xrightarrow{EP_0} & U \\
 & \Uparrow &
 \end{array}$$

P_1 に沿った左 Kan 拡張は余極限になるから、もしこれが左 Kan 拡張であれば (実は一般にはそうなるとは限らない), $F^\dagger E(d) \cong \text{colim}(EP_0)$ となり, 左 Kan 拡張が余極限に帰着できる.

以上を踏まえて C, D, U を圏, $F: C \rightarrow D$, $E: C \rightarrow U$ を関手とする.

$$\begin{array}{ccc} & D & \\ & \uparrow F & \\ C & \xrightarrow{E} & U \end{array}$$

$d \in D$ に対してコマ圏 $F \downarrow d$ を考えれば次の図式を得る.

$$\begin{array}{ccccc} & \mathbb{1} & \xrightarrow{d} & D & \\ & \uparrow P_1 & \nearrow \sigma & \uparrow F & \\ F \downarrow d & \xrightarrow{P_0} & C & \xrightarrow{E} & U \end{array}$$

今, 左 Kan 拡張 $\langle P_1^\dagger(EP_0), \nu^d \rangle$, 即ち余極限 $\text{colim}(F \downarrow d \xrightarrow{P_0} C \xrightarrow{E} U)$ が存在すると仮定しよう. これを使って $Ld := \text{colim}(F \downarrow d \xrightarrow{P_0} C \xrightarrow{E} U)$ と定義する.

$$\begin{array}{ccccc} & \mathbb{1} & & & \\ & \uparrow P_1 & & Ld & \\ & \uparrow \nu^d & \uparrow & & \\ F \downarrow d & \xrightarrow{P_0} & C & \xrightarrow{E} & U \end{array}$$

次に射 $f: d \rightarrow d'$ に対して Lf を定める. $f: d \rightarrow d'$ は自然変換

$$\mathbb{1} \begin{array}{c} \xrightarrow{d'} \\ \uparrow f \\ \xrightarrow{d} \end{array} D$$

と同一視できることに注意する. コマ圏 $F \downarrow d$, $F \downarrow d'$ を考える.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{1} \xrightarrow{d} D & & \mathbb{1} \xrightarrow{d'} D \\ P_1 \uparrow \nearrow \sigma \uparrow F & & P'_1 \uparrow \nearrow \sigma' \uparrow F \\ F \downarrow d \xrightarrow{P_0} C & & F \downarrow d' \xrightarrow{P'_0} C \end{array}$$

左の図式と f を組み合わせて、次の図式が得られる。

$$\begin{array}{ccc}
 & \xrightarrow{d'} & D \\
 \mathbb{1} & \xrightarrow{f \uparrow} & \\
 P_1 \uparrow & \swarrow \sigma & \uparrow F \\
 F \downarrow d & \xrightarrow{P_0} & C
 \end{array}$$

コンマ圏 $F \downarrow d'$ の普遍性 (「コンマ圏」の PDF を参照) により関手 $H: F \downarrow d \rightarrow F \downarrow d'$ が存在して次の等号が成り立つ。

$$\begin{array}{ccc}
 & \xrightarrow{d'} & D \\
 P_1 \uparrow & \xrightarrow{P'_1} & \mathbb{1} \xrightarrow{f \uparrow} D \\
 & \swarrow \sigma' & \uparrow F \\
 F \downarrow d & \xrightarrow{P_0} & C \\
 & \swarrow H & \uparrow P'_0 \\
 & & F \downarrow d' \xrightarrow{P'_0} C
 \end{array}
 =
 \begin{array}{ccc}
 & \xrightarrow{d'} & D \\
 P_1 \uparrow & \xrightarrow{P'_1} & \mathbb{1} \xrightarrow{f \uparrow} D \\
 & \swarrow \sigma & \uparrow F \\
 F \downarrow d & \xrightarrow{P_0} & C
 \end{array}$$

今、余極限 $Ld = \operatorname{colim}(F \downarrow d \xrightarrow{P_0} C \xrightarrow{E} U)$, $Ld' = \operatorname{colim}(F \downarrow d' \xrightarrow{P'_0} C \xrightarrow{E} U)$ が存在するのであった。

$$\begin{array}{ccc}
 & \xrightarrow{\mathbb{1}} & U \\
 P_1 \uparrow & \xrightarrow{Ld} & \\
 & \swarrow \nu^d & \uparrow \\
 F \downarrow d & \xrightarrow{P_0} & C \xrightarrow{E} U
 \end{array}
 =
 \begin{array}{ccc}
 & \xrightarrow{Ld'} & U \\
 P_1 \uparrow & \xrightarrow{P'_1} & \mathbb{1} \xrightarrow{Ld'} U \\
 & \swarrow \nu^{d'} & \uparrow \\
 F \downarrow d & \xrightarrow{P_0} & C \xrightarrow{E} U \\
 & \swarrow H & \uparrow P'_0 \\
 & & F \downarrow d' \xrightarrow{P'_0} C
 \end{array}$$

故に左 Kan 拡張 $\langle Ld, \nu^d \rangle$ の普遍性により射 $Lf: Ld \rightarrow Ld'$ が存在して次の等式が成り立つ。

$$\begin{array}{ccc}
 & \xrightarrow{Ld'} & U \\
 P_1 \uparrow & \xrightarrow{Ld} & \\
 & \swarrow \nu^d & \uparrow \\
 F \downarrow d & \xrightarrow{P_0} & C \xrightarrow{E} U \\
 & \swarrow Lf & \uparrow \\
 & & F \downarrow d' \xrightarrow{P'_0} C
 \end{array}
 =
 \begin{array}{ccc}
 & \xrightarrow{Ld'} & U \\
 P_1 \uparrow & \xrightarrow{P'_1} & \mathbb{1} \xrightarrow{Ld'} U \\
 & \swarrow \nu^{d'} & \uparrow \\
 F \downarrow d & \xrightarrow{P_0} & C \xrightarrow{E} U \\
 & \swarrow H & \uparrow P'_0 \\
 & & F \downarrow d' \xrightarrow{P'_0} C
 \end{array}$$

このとき L は関手 $L: D \rightarrow U$ となり、 L が F に沿った E の左 Kan 拡張となることが分かる。このことは後で証明することにして認めてしまえば、次の定理が得られる。

定理 4. C, D, U を圏, $F: C \rightarrow D$, $E: C \rightarrow U$ を関手とする. 各 $d \in D$ に対して余極限 $\operatorname{colim}(F \downarrow d \xrightarrow{P_0} C \xrightarrow{E} U)$ が存在するならば, F に沿った E の左 Kan 拡張 $F^\dagger E$ が存在して $F^\dagger E(d) \cong \operatorname{colim}(F \downarrow d \xrightarrow{P_0} C \xrightarrow{E} U)$ となる.

C が小圏ならば $F \downarrow d$ も小圏となる. 故に次の系が得られる.

系 5. C, D, U を圏, $F: C \rightarrow D$ を関手とする. U が余完備で, C が小圏ならば, 任意の関手 $E: C \rightarrow U$ に対して左 Kan 拡張 $F^\dagger E$ が存在する. 故にこの場合 F^{-1} は左随伴を持ち $F^\dagger \dashv F^{-1}: U^C \rightarrow U^D$ となる. \square

\mathbf{Set} は余完備であったから次の系を得る.

系 6. C, D を小圏, $F: C \rightarrow D$ を関手とする. 任意の関手 $E: C^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$ に対して左 Kan 拡張 $F^\dagger E: D^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$ が存在する.

$$\begin{array}{ccc} & D^{\text{op}} & \\ & \uparrow F & \searrow F^\dagger E \\ C^{\text{op}} & \xrightarrow{E} & \mathbf{Set} \end{array}$$

故に随伴 $F^\dagger \dashv F^{-1}: \widehat{C} \rightarrow \widehat{D}$ が成り立つ*2. \square

右 Kan 拡張に関しても, 同様にして次の定理が得られる.

定理 7. C, D, U を圏として, $F: C \rightarrow D$, $E: C \rightarrow U$ を関手とする. 各 $d \in D$ に対して極限 $\lim(d \downarrow F \rightarrow C \xrightarrow{E} U)$ が存在するならば, F に沿った E の右 Kan 拡張 $F^\ddagger E$ が存在して $F^\ddagger E(d) \cong \lim(d \downarrow F \rightarrow C \xrightarrow{E} U)$ となる.

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{1} & \xrightarrow{d} & D & & \\ \uparrow & \searrow F & \uparrow & \searrow F^\ddagger E & \\ d \downarrow F & \longrightarrow & C & \xrightarrow{E} & U \end{array}$$

故に U が完備で C が小圏ならば $F^\ddagger E$ は存在する. 特に $F^{-1} \dashv F^\ddagger: \widehat{D} \rightarrow \widehat{C}$ が成り立つ. \square

*2 正確には $(F^{\text{op}})^\dagger \dashv (F^{\text{op}})^{-1}$ であるが, 単に $F^\dagger \dashv F^{-1}$ と書いている.

例 8. X, Y を集合, $f: X \rightarrow Y$ を写像とし, 逆像を考える写像 $f^{-1}: \mathcal{P}(Y) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ を考える. これは $(\mathcal{P}(X), \mathcal{P}(Y))$ を包含関係による順序で圏とみなしたとき 関手である. ここで圏 $\mathbf{2} = \{0 \rightarrow 1\}$ を考えると圏同型 $\mathcal{P}(X) \cong 2^X$ が成り立つが, このとき今考えている関手 f^{-1} は $2^Y \ni A \mapsto A \circ f \in 2^X$ で与えられる.

$$\begin{array}{ccc} & Y & \\ & \uparrow f & \searrow A \\ X & \xrightarrow{f^{-1}(A)} & \mathbf{2} \end{array}$$

つまりこの f^{-1} は, 写像 f を (離散圏 X, Y の間の) 関手 $f: X \rightarrow Y$ とみなしたときに得られる関手 $f^{-1}: 2^Y \rightarrow 2^X$ と一致している. 従って ($\mathbf{2}$ が余完備であることに注意して) 系 5 を適用すると, 関手 $f^{-1}: \mathcal{P}(Y) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ の左随伴関手が存在してそれは左 Kan 拡張 f^\dagger になることが分かる. これを各点左 Kan 拡張で計算してみよう.

$A: X \rightarrow \mathbf{2}$ に対して $f^\dagger A$ を求めるため, $d \in Y$ を取りコンマ圏 $f \downarrow d$ を考える.

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{1} & \xrightarrow{d} & Y & & \\ P_1 \uparrow & \swarrow & \uparrow f & & \\ f \downarrow d & \xrightarrow{P_0} & X & \xrightarrow{A} & \mathbf{2} \end{array}$$

コンマ圏の定義から $f \downarrow d = \{x \in X \mid f(x) = d\} = f^{-1}(d)$ は離散圏である. 故に

$$f^\dagger A(d) \cong \operatorname{colim}(f \downarrow d \xrightarrow{P_0} X \xrightarrow{A} \mathbf{2}) = \coprod_{x \in f^{-1}(d)} A(x)$$

となるから

$$f^\dagger A(d) = \begin{cases} 1 & (\text{ある } x \in f^{-1}(d) \text{ が存在して } A(x) = 1) \\ 0 & (\text{そうでないとき}) \end{cases}$$

である. 即ち $A \in \mathcal{P}(X)$ に対して $f^\dagger A = f(A)$ となる. 従って $f^{-1}: \mathcal{P}(Y) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ の左随伴関手は $f: \mathcal{P}(X) \ni A \mapsto f(A) \in \mathcal{P}(Y)$ である.

更に $\mathbf{2}$ は完備でもあるから, f^{-1} の右随伴関手 (= 右 Kan 拡張) も存在する. それを各点右 Kan 拡張により同様に計算してみると

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{1} & \xrightarrow{d} & Y & & \\ \uparrow & \swarrow & \uparrow f & & \\ d \downarrow f & \longrightarrow & X & \xrightarrow{A} & \mathbf{2} \end{array}$$

$$f^\ddagger A(d) \cong \lim(d \downarrow f \rightarrow X \xrightarrow{A} 2) = \prod_{x \in f^{-1}(d)} A(x)$$

となるから

$$f^\ddagger A(d) = \begin{cases} 0 & (\text{ある } x \in f^{-1}(d) \text{ が存在して } A(x) = 0) \\ 1 & (\text{そうでないとき}) \end{cases}$$

であり, $f^\ddagger A = Y \setminus f(X \setminus A) =: f_!(A)$ となることが分かる*³.

以上により, $f^{-1}: \mathcal{P}(Y) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ は左随伴, 右随伴の両方を持つ.

$$\begin{array}{ccc} & f & \\ & \curvearrowright & \\ \mathcal{P}(X) & \xleftarrow{f^{-1}} & \mathcal{P}(Y) \\ & \curvearrowleft & \\ & f_! & \end{array}$$

従って f^{-1} は余極限と極限の両方と交換する (「随伴関手」の PDF を参照). 特に次の等式が成り立つ.

$$f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B), \quad f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$$

一方で $f: \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(Y)$ は左随伴を持たない. それは f が極限と交換しないこと (例えば $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ とは限らない) から分かる. \square

例 9. 位相空間 X に対して, X の開集合全体がなす順序集合 \mathcal{O}_X を圏とみなす. X 上の前層とは関手 $P: \mathcal{O}_X^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$ のことであった (「例: 位相空間上の層」の PDF を参照). よって $\widehat{\mathcal{O}_X} := \mathbf{Set}^{\mathcal{O}_X^{\text{op}}}$ が X 上の前層がなす圏である.

X, Y を位相空間, $f: X \rightarrow Y$ を連続写像とする. このとき X 上の前層 P に対して, Y 上の前層 f_*P (即ち関手 $f_*P: \mathcal{O}_Y^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$) が

$$f_*P(U) := P(f^{-1}(U))$$

により定まる. これは関手 $f_*: \widehat{\mathcal{O}_X} \rightarrow \widehat{\mathcal{O}_Y}$ を定めることが分かる. これを順像関手と呼ぶ. この関手 f_* は左随伴関手 f^* を持つことが分かるので, それを逆像関手と呼ぶ.

左随伴 f^* が存在することが何故分かるのかというと, 多くの教科書では次のように書いてある. Y 上の前層 P に対して, X 上の前層 f^*P (即ち関手 $f^*P: \mathcal{O}_X^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$) が

$$f^*P(U) := \text{colim}_{V \supset f(U)} P(V) \tag{10}$$

*³ この $f_!(A)$ を small image と呼ぶ, らしい.

により定まる. これは関手 $f^*: \widehat{\mathcal{O}}_Y \rightarrow \widehat{\mathcal{O}}_X$ を定めることが分かり, 更に Hom について計算することで $f^* \dashv f_*$ も分かる. この説明は確かに正しいが, 定義 (10) がいきなり与えられており, 何故このような余極限を考えるのかよく分からない.

そこで関手 $F := (f^{-1})^{\text{op}}: \mathcal{O}_Y^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{O}_X^{\text{op}}$ を考える. 定義から $f_* = F^{-1}: \widehat{\mathcal{O}}_X \rightarrow \widehat{\mathcal{O}}_Y$ である.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_X^{\text{op}} & & \\ \uparrow f^{-1} =: F & \searrow P & \\ \mathcal{O}_Y^{\text{op}} & \xrightarrow{f_*(P)} & \mathbf{Set} \end{array}$$

故に系 6 から f_* は左随伴 F^\dagger を持つことが分かる (左随伴の一意性 (「随伴関手」の PDF を参照) から $F^\dagger \cong f^*$ である). $P \in \widehat{\mathcal{O}}_Y$ に対して $F^\dagger P$ を各点左 Kan 拡張で計算してみると次のようになる. $U \in \mathcal{O}_X$ を取りコマ圏 $F \downarrow U$ を考える.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{1} & \xrightarrow{U} & \mathcal{O}_X^{\text{op}} \\ P_1 \uparrow & \swarrow & \uparrow F \\ F \downarrow U & \xrightarrow{P_0} & \mathcal{O}_Y^{\text{op}} \xrightarrow{P} \mathbf{Set} \end{array}$$

$F^\dagger P(U) \cong \text{colim}(F \downarrow U \xrightarrow{P_0} \mathcal{O}_Y^{\text{op}} \xrightarrow{P} \mathbf{Set}) \cong \text{colim}_{\langle V, h \rangle \in F \downarrow U} P(V)$ となる. コマ圏の定義から

$$\begin{aligned} \langle V, h \rangle \in F \downarrow U &\iff h: F(V) \rightarrow U \text{ は } \mathcal{O}_X^{\text{op}} \text{ の射} \\ &\iff F(V) \supset U \\ &\iff f^{-1}(V) \supset U \\ &\iff V \supset f(U) \end{aligned}$$

となるので $F^\dagger P(U) \cong \text{colim}_{V \supset f(U)} P(V)$ となり定義 (10) の式が現れる. □

例 11. 各点左 Kan 拡張で書けない左 Kan 拡張は存在する. $C := \mathbb{1} = \{*\}$, $D := \mathbb{2} = \{0 \rightarrow 1\}$, $U = \{a, b\}$ とする. $F: \mathbb{1} \rightarrow \mathbb{2}$ を $F(*) := 1$, $E: \mathbb{1} \rightarrow U$ を $E(*) := a$ で定める.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{2} & & \\ \uparrow 1 & & \\ \mathbb{1} & \xrightarrow{a} & \{a, b\} \end{array}$$

関手 $2 \rightarrow U$ は Δa と Δb の 2 つしか存在しない. また自然変換 $a \Rightarrow \Delta b \circ 1$ は存在せず, $a \Rightarrow \Delta a \circ 1$ は唯 1 つ存在する. よって $1^\dagger a = \Delta a$ である. 一方, $0 \in 2$ に対して各点左 Kan 拡張を試みると

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{1} & \xrightarrow{0} & 2 \\ P_1 \uparrow & \swarrow & \uparrow 1 \\ 1 \downarrow 0 & \xrightarrow{P_0} & \mathbb{1} \xrightarrow{a} \{a, b\} \end{array}$$

$1 \downarrow 0 = \mathbb{0}$ だから, $\text{colim}(1 \downarrow 0 \xrightarrow{P_0} \mathbb{1} \xrightarrow{a} \{a, b\})$ は始対象となるが, $\{a, b\}$ は明らかに始対象を持たない. \square

さて, 残っていた証明を終わらせ, 定理 4 の証明を完成させよう.

定理 4 の証明. まず L が関手となることは普遍性から容易に分かる. L が F に沿った E の左 Kan 拡張になっていることを示すため, unit となる自然変換 $\eta: E \Rightarrow LF$ を定義する.

$$\begin{array}{ccc} D & & \\ F \uparrow & \searrow L & \\ C & \xrightarrow{E} & U \end{array}$$

$\eta \Uparrow$

$c \in C$ とすると $Fc \in D$ である. LFc は左 Kan 拡張

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{1} & & \\ P_1 \uparrow & \searrow LFc & \\ F \downarrow Fc & \xrightarrow{P_0} C \xrightarrow{E} & U \end{array}$$

$\nu_{Fc} \Uparrow$

で定義されるのであった. $\langle c, \text{id}_{Fc} \rangle \in F \downarrow Fc$ だから, $\nu_{\langle c, \text{id}_{Fc} \rangle}^{Fc}: Ec \rightarrow LFc$ となる. これを用いて $\eta_c: Ec \rightarrow LFc$ を $\eta_c := \nu_{\langle c, \text{id}_{Fc} \rangle}^{Fc}$ で定める. この η は自然変換である.

\therefore) $f: c \rightarrow c'$ に対して

$$\begin{array}{ccc} Ec & \xrightarrow{\nu_{\langle c, \text{id}_{Fc} \rangle}^{Fc}} & LFc \\ Ef \downarrow & & \downarrow LFf \\ Ec' & \xrightarrow{\nu_{\langle c', \text{id}_{Fc'} \rangle}^{Fc'}} & LFc' \end{array}$$

が可換であることを示せばよい。

まず LFf の定義から次の等式が成り立つ。

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{1} & \xrightarrow{LFc'} & U \\
 \uparrow P_1 & \nearrow LFf & \\
 F \downarrow Fc & \xrightarrow{LFc} & C \xrightarrow{E} U \\
 \uparrow \nu^{Fc} & & \\
 F \downarrow Fc & \xrightarrow{P_0} & C
 \end{array}
 =
 \begin{array}{ccc}
 \mathbb{1} & \xrightarrow{LFc'} & U \\
 \uparrow P_1 & \nearrow \nu^{Fc'} & \\
 F \downarrow Fc & \xrightarrow{F'} & C \xrightarrow{E} U \\
 \uparrow H & \nearrow P_0' & \\
 F \downarrow Fc & \xrightarrow{P_0} & C
 \end{array}$$

故に $\langle c, \text{id}_{Fc} \rangle \in F \downarrow Fc$ に対して $LFf \circ \nu_{\langle c, \text{id}_{Fc} \rangle}^{Fc} = \nu_{\langle c, Ff \rangle}^{Fc'}$ となる。ここで $\nu^{Fc'}$ が自然変換だから

$$\begin{array}{ccc}
 Fc & \xrightarrow{Ff} & Fc' \\
 Ff \downarrow & & \uparrow \text{id}_{Fc'} \\
 Fc' & &
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{ccc}
 Ec & \xrightarrow{\nu_{\langle c, Ff \rangle}^{Fc'}} & LFc' \\
 Ef \downarrow & & \downarrow \text{id}_{LFc'} \\
 Ec' & \xrightarrow{\nu_{\langle c', \text{id}_{Fc'} \rangle}^{Fc'}} & LFc'
 \end{array}$$

が可換である。故に $LFf \circ \nu_{\langle c, \text{id}_{Fc} \rangle}^{Fc} = \nu_{\langle c', \text{id}_{Fc'} \rangle}^{Fc'} \circ Ef$ となり示したい可換性が分かった。

普遍性を示すため、 $S: D \rightarrow U$, $\theta: E \Rightarrow SF$ とする。

$$\begin{array}{ccc}
 D & \xrightarrow{S} & U \\
 F \uparrow & \nearrow \theta & \\
 C & \xrightarrow{E} & U
 \end{array}$$

$d \in D$ を取りコマ圏を考えて、 θ と合わせると次の図式を得る。

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{1} & \xrightarrow{d} & D & \xrightarrow{S} & U \\
 P_1 \uparrow & \nearrow \sigma & F \uparrow & \nearrow \theta & \\
 F \downarrow d & \xrightarrow{P_0} & C & \xrightarrow{E} & U
 \end{array}$$

余極限 $\langle Ld, \nu^d \rangle$ の普遍性により $\tau_d: Ld \rightarrow Sd$ が一意に存在して次の等式が成り立つ。

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{1} & \xrightarrow{Sd} & U \\
 P_1 \uparrow & \nearrow \tau_d & \\
 \nu^d \uparrow & Ld & \\
 F \downarrow d & \xrightarrow{P_0} C \xrightarrow{E} & U
 \end{array}
 =
 \begin{array}{ccc}
 \mathbb{1} & \xrightarrow{d} D & \xrightarrow{S} U \\
 P_1 \uparrow & \swarrow \sigma & \uparrow F \\
 \theta \uparrow & & \\
 F \downarrow d & \xrightarrow{P_0} C \xrightarrow{E} & U
 \end{array}$$

この τ_d が自然変換 $\tau: L \Rightarrow S$ を定める。

\therefore) $f: d \rightarrow d'$ に対して

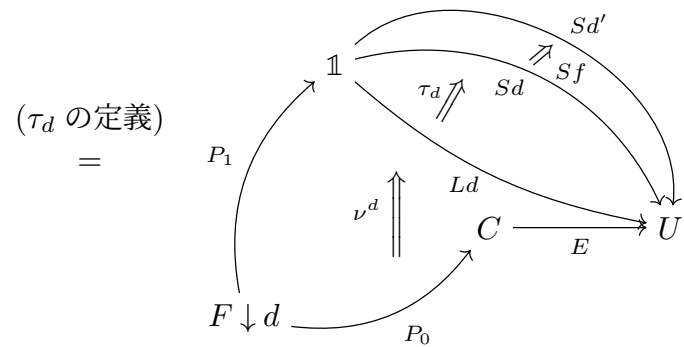
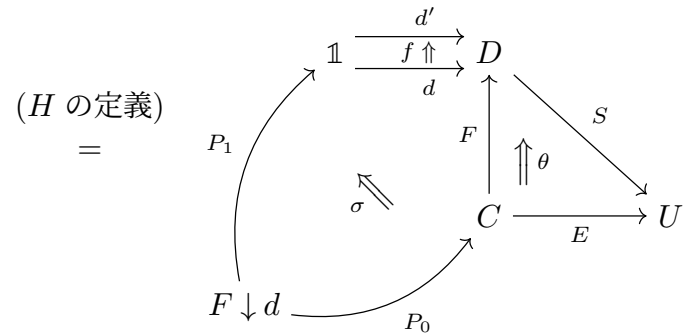
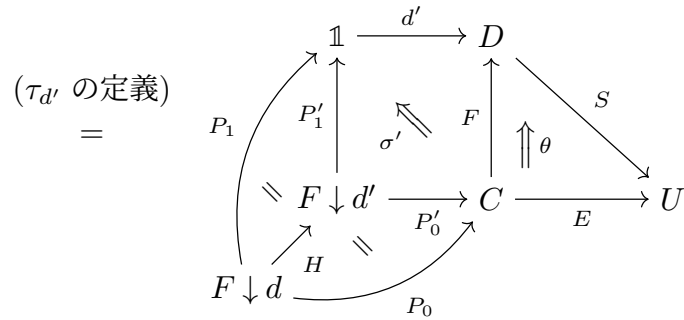
$$\begin{array}{ccc}
 Ld & \xrightarrow{\tau_d} & Sd \\
 Lf \downarrow & & \downarrow Sf \\
 Ld' & \xrightarrow{\tau_{d'}} & Sd'
 \end{array}
 \tag{12}$$

が可換であることを示せばよい。まず

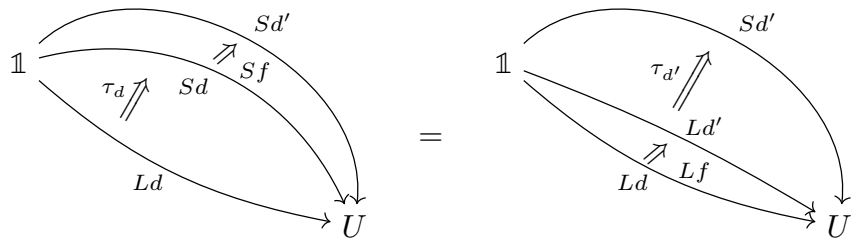
$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{1} & \xrightarrow{Sd'} & U \\
 P_1 \uparrow & \nearrow \tau_{d'} & \\
 \nu^d \uparrow & Ld' & \\
 Ld & \xrightarrow{Lf} & \\
 F \downarrow d & \xrightarrow{P_0} C \xrightarrow{E} & U
 \end{array}$$

(Lf の定義)

$$=
 \begin{array}{ccc}
 \mathbb{1} & \xrightarrow{Sd'} & U \\
 P_1 \uparrow & \nearrow \tau_{d'} & \\
 P_1' \uparrow & \nu^{d'} \uparrow & \\
 F \downarrow d' & \xrightarrow{P_0'} C \xrightarrow{E} & U \\
 H \nearrow & & \\
 F \downarrow d & \xrightarrow{P_0} C \xrightarrow{E} & U
 \end{array}$$



である．よって左 Kan 拡張 $\langle Ld, \nu^d \rangle$ の普遍性から



が成り立つ．即ち (12) の可換性が分かった．

このとき $c \in C$ に対して τ_{Fc} の定義より

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{1} & \xrightarrow{SFc} & U \\
 P_1 \uparrow & \nearrow \tau_{Fc} & \\
 \nu_{Fc} \uparrow & LFc & \\
 F \downarrow Fc & \xrightarrow{P_0} C & \xrightarrow{E} U
 \end{array}
 =
 \begin{array}{ccc}
 \mathbb{1} & \xrightarrow{Fc} & D & \xrightarrow{S} & U \\
 P_1 \uparrow & \sigma \swarrow & F \uparrow & \theta \uparrow & \\
 F \downarrow Fc & \xrightarrow{P_0} C & \xrightarrow{E} & U
 \end{array}$$

となるから, $\langle c, \text{id}_{Fc} \rangle \in F \downarrow Fc$ を考えれば

$$\tau_{Fc} \circ \eta_c = \tau_{Fc} \circ \nu_{\langle c, \text{id}_{Fc} \rangle}^{Fc} = \theta_c$$

が分かる. 従って $\tau_F \circ \eta = \theta$ である. 余極限 Ld の普遍性により, このような τ は一意だから, L は F に沿った E の左 Kan 拡張である. \square

定理 4 の形で得られる左 Kan 拡張を各点左 Kan 拡張という. 正確には次のように定義する.

定義. $F: C \rightarrow D$, $E: C \rightarrow U$, $T: D \rightarrow U$ を関手, $\eta: E \Rightarrow TF$ を自然変換とする.

$$\begin{array}{ccc}
 D & & \\
 F \uparrow & \searrow T & \\
 \eta \uparrow & & \\
 C & \xrightarrow{E} & U
 \end{array}$$

$\langle T, \eta \rangle$ が F に沿った E の各点左 Kan 拡張 (pointwise left Kan extension)

$\iff d \in D$ に対して

$$\mu^d := \begin{array}{ccc}
 \mathbb{1} & \xrightarrow{d} & D & \searrow T & \\
 P_1 \uparrow & \sigma \swarrow & F \uparrow & \eta \uparrow & \\
 F \downarrow d & \xrightarrow{P_0} C & \xrightarrow{E} & U
 \end{array}$$

と定義すると $\langle Td, \mu^d \rangle$ が P_1 に沿った EP_0 の左 Kan 拡張 (即ち $F \downarrow d \xrightarrow{P_0} C \xrightarrow{E} U$ の余極限) になる.

このように定義すると次の命題 13, 14 が成り立つ.

命題 13. 定理 4 の証明で定義した $\langle L, \eta \rangle$ は各点左 Kan 拡張である.

証明. $\mu^d = \nu^d$ を示せばよい. つまり $\langle c, f \rangle \in F \downarrow d$ に対して $(L\sigma \circ \eta_{P_0})_{\langle c, f \rangle} = \nu_{\langle c, f \rangle}^d$ を

示せばよい。まず L の定義より

$$\begin{array}{ccc}
 & \mathbb{1} & \\
 & \curvearrowright^{Ld} & \\
 & \nearrow^{Lf} & \\
 \nu^{Fc} \Uparrow & & \\
 F \downarrow Fc & C \xrightarrow{E} & U \\
 & \nwarrow_{LFc} & \\
 & &
 \end{array}
 =
 \begin{array}{ccc}
 & \mathbb{1} & \\
 & \curvearrowright^{Ld} & \\
 & \nearrow^{\nu^d} & \\
 \Uparrow & & \\
 F \downarrow Fc & F \downarrow d \rightarrow C \xrightarrow{E} & U \\
 & \nwarrow & \\
 & &
 \end{array}$$

となるから、 $\langle c, \text{id}_{Fc} \rangle$ 成分を考えると $Lf \circ \nu_{\langle c, \text{id}_{Fc} \rangle}^{Fc} = \nu_{\langle c, f \rangle}^d$ が分かる。よって

$$(L\sigma \circ \eta_{P_0})_{\langle c, f \rangle} = L(\sigma_{\langle c, f \rangle}) \circ \eta_c = Lf \circ \nu_{\langle c, \text{id}_{Fc} \rangle}^{Fc} = \nu_{\langle c, f \rangle}^d$$

である。 □

命題 14. 各点左 Kan 拡張は左 Kan 拡張である。

証明. $\langle T, \eta \rangle$ を F に沿った E の各点左 Kan 拡張とする。即ち

$$\mu^d := \begin{array}{ccc}
 \mathbb{1} & \xrightarrow{d} & D \\
 P_1 \uparrow & \swarrow \sigma & \uparrow F \\
 F \downarrow d & \xrightarrow{P_0} & C \xrightarrow{E} U \\
 & & \uparrow \eta \\
 & & U
 \end{array}$$

が $F \downarrow d \xrightarrow{P_0} C \xrightarrow{E} U$ の余極限になるから、定理 4 の証明の方法で関手 $L: D \rightarrow U$ を定義して $\beta_c := \mu_{\langle c, \text{id}_{Fc} \rangle}^{Fc}$ と定めれば、 $\langle L, \beta \rangle$ は F に沿った E の左 Kan 拡張になる (定義から $Ld = Td$ である)。また命題 13 の証明より

$$\mu^d = \begin{array}{ccc}
 \mathbb{1} & \xrightarrow{d} & D \\
 P_1 \uparrow & \swarrow \sigma & \uparrow F \\
 F \downarrow d & \xrightarrow{P_0} & C \xrightarrow{E} U \\
 & & \uparrow \beta \\
 & & U
 \end{array}$$

である。ここで左 Kan 拡張の普遍性より $\tau: L \Rightarrow T$ が一意に存在して

$$\begin{array}{ccc}
 D & \xrightarrow{T} & U \\
 F \uparrow & \searrow \tau & \\
 C & \xrightarrow{E} & U \\
 & & \uparrow \eta \\
 & & U
 \end{array}
 =
 \begin{array}{ccc}
 D & \xrightarrow{T} & U \\
 F \uparrow & \searrow \eta & \\
 C & \xrightarrow{E} & U \\
 & & \uparrow \eta \\
 & & U
 \end{array}$$

となるが

$$\begin{aligned}
 \mu^d &= \begin{array}{ccccc} & & \mathbb{1} & \xrightarrow{d} & D \\ & & \uparrow P_1 & & \uparrow F \\ & & \sigma & \swarrow & \uparrow \eta \\ & & F & \downarrow d & C \\ & & P_0 & \xrightarrow{E} & U \end{array} \quad \begin{array}{c} \curvearrowright T \\ \curvearrowright \tau \\ \curvearrowright L \end{array} \\
 &= \begin{array}{ccccc} & & \mathbb{1} & \xrightarrow{d} & D \\ & & \uparrow P_1 & & \uparrow F \\ & & \sigma & \swarrow & \uparrow \beta \\ & & F & \downarrow d & C \\ & & P_0 & \xrightarrow{E} & U \end{array} \quad \begin{array}{c} \curvearrowright T \\ \curvearrowright \tau \\ \curvearrowright L \end{array} \\
 &= \begin{array}{ccccc} & & \mathbb{1} & & \\ & & \uparrow P_1 & & \\ & & \mu^d & \uparrow & \\ & & F & \downarrow d & C \\ & & P_0 & \xrightarrow{E} & U \end{array} \quad \begin{array}{c} \curvearrowright Td \\ \curvearrowright \tau_d \\ \curvearrowright Ld \end{array}
 \end{aligned}$$

となるから、余極限 $\langle Ld, \mu^d \rangle$ の普遍性により $\tau_d = \text{id}$ が分かる。故に $L = T$, $\eta = \beta$ であるから $\langle L, \eta \rangle$ も F に沿った E の左 Kan 拡張である。 \square

定義. C, D, U, V を圏, $F: C \rightarrow D$, $E: C \rightarrow U$, $K: U \rightarrow V$ を関手として左 Kan 拡張 $\langle F^\dagger E, \eta \rangle$ が存在するとする。

$$\begin{array}{ccccc} & & D & & \\ & & \uparrow F & & \\ & & \eta & \uparrow & \\ & & C & \xrightarrow{E} & U \xrightarrow{K} V \\ & & & & \searrow F^\dagger E \end{array}$$

このとき K が左 Kan 拡張 $\langle F^\dagger E, \eta \rangle$ と交換する

$\iff K$ を合成して得られる次の図式も左 Kan 拡張となる (即ち, $\langle K \circ (F^\dagger E), K\eta \rangle$ が F に沿った KE の左 Kan 拡張になる)。

$$\begin{array}{ccccc} & & D & & \\ & & \uparrow F & & \\ & & K\eta & \uparrow & \\ & & C & \xrightarrow{E} & U \xrightarrow{K} V \\ & & & & \searrow K \circ (F^\dagger E) \end{array}$$

定理 15. $F: C \rightarrow D$, $E: C \rightarrow U$ とする。各点左 Kan 拡張 $\langle F^\dagger E, \eta \rangle$ が存在して、更に関手 $K: U \rightarrow V$ は余極限と交換するとする。このとき K は $\langle F^\dagger E, \eta \rangle$ と交換する。

証明. $\langle F^\dagger E, \eta \rangle$ が各点左 Kan 拡張だから, $d \in D$ に対して

$$\mu^d := \begin{array}{ccccc} & & \mathbb{1} & \xrightarrow{d} & D \\ & & \uparrow & & \uparrow \\ P_1 & & \nearrow \sigma & & F \\ & & F \downarrow d & \xrightarrow{P_0} & C \xrightarrow{E} U \\ & & & & \uparrow \eta \\ & & & & \uparrow \eta \end{array}$$

と定義すると $\langle F^\dagger E(d), \mu^d \rangle$ は $F \downarrow d \xrightarrow{P_0} C \xrightarrow{E} U$ の余極限である. K が余極限と交換するから $F \downarrow d \xrightarrow{P_0} C \xrightarrow{E} U \xrightarrow{K} V$ の余極限も存在して, それは $\langle K(F^\dagger E(d)), K\mu^d \rangle$ で与えられる. 即ち $\langle K \circ F^\dagger E, K\eta \rangle$ は各点左 Kan 拡張である. 故に命題 14 から $\langle K \circ F^\dagger E, K\eta \rangle$ は左 Kan 拡張となり, K は $\langle F^\dagger E, \eta \rangle$ と交換する. \square

3 随伴と Kan 拡張

命題 2 で Kan 拡張が随伴を与えることを説明したが, 逆に随伴は Kan 拡張で書くことができる (定理 17).

定義. $F: C \rightarrow D, E: C \rightarrow U$ を関手とする. F に沿った E の絶対左 Kan 拡張とは, F に沿った E の左 Kan 拡張であって, 任意の関手 $H: U \rightarrow V$ と交換するものをいう.

定義から明らかに次が成り立つ.

命題 16. $F: C \rightarrow D, E: C \rightarrow U, T: D \rightarrow U$ を関手, $\eta: E \Rightarrow TF$ を自然変換とする.

$$\begin{array}{ccc} D & & \\ \uparrow F & \searrow T & \\ C & \xrightarrow{E} & U \\ & \uparrow \eta & \end{array}$$

このとき $\langle T, \eta \rangle$ が F に沿った E の絶対左 Kan 拡張である

\iff 任意の圏 V と関手 $K: D \rightarrow V, H: U \rightarrow V$, 自然変換 $\theta: HE \Rightarrow KF$ に対して, ある自然変換 $\tau: HT \Rightarrow K$ が一意に存在して, 次の等式が成り立つ.

$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{K} & V \\ \uparrow F & \searrow \tau & \uparrow H \\ C & \xrightarrow{E} & U \\ & \uparrow \eta & \end{array} = \begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{K} & V \\ \uparrow F & \searrow \theta & \uparrow H \\ C & \xrightarrow{E} & U \end{array}$$

□

定理 17. 関手 $F: C \rightarrow D$ に対して以下の条件は同値である.

- (1) F は左随伴関手である.
- (2) F に沿った id_C の絶対左 Kan 拡張 $\langle F^\dagger \text{id}_C, \eta \rangle$ が存在する.
- (3) F に沿った id_C の左 Kan 拡張 $\langle F^\dagger \text{id}_C, \eta \rangle$ が存在し, F が左 Kan 拡張 $F^\dagger \text{id}_C$ と交換する.

$$\begin{array}{ccc}
 D & & D \\
 \uparrow F & \searrow F \circ (F^\dagger \text{id}_C) & \uparrow F \\
 C & \xrightarrow{\text{id}_C} C \xrightarrow{F} D & C \xrightarrow{\text{id}_C} C \xrightarrow{F} D \\
 \eta \Uparrow & \nearrow F^\dagger \text{id}_C & \nearrow F \eta \\
 & \nearrow \text{id} &
 \end{array}
 =
 \begin{array}{ccc}
 D & & D \\
 \uparrow F & & \uparrow F \\
 C & \xrightarrow{\text{id}_C} C \xrightarrow{F} D & C \xrightarrow{\text{id}_C} C \xrightarrow{F} D \\
 & \nearrow \text{id} & \nearrow F \eta \\
 & &
 \end{array}$$

またこのとき $F \dashv F^\dagger \text{id}_C$ であり η がその unit である.

証明. (1 \implies 2) $F \dashv G: C \rightarrow D$ を随伴として, その unit を η , counit を ε とする. 任意の圏 X と関手 $K: C \rightarrow X$, $H: D \rightarrow X$, 自然変換 $\theta: K \Rightarrow HF$ を取る.

$$\tau := \begin{array}{ccccc}
 D & \xrightarrow{\text{id}_D} & D & \xrightarrow{H} & X \\
 \searrow G & \nearrow \varepsilon & \uparrow F & \theta \Uparrow & \uparrow K \\
 C & \xrightarrow{\text{id}_C} & C & & C
 \end{array}$$

と定義すれば

$$\begin{array}{ccccc}
 D & \xrightarrow{H} & X & & D & \xrightarrow{\text{id}_D} & D & \xrightarrow{H} & X & & D & \xrightarrow{H} & X \\
 \uparrow F & \nearrow \tau & \uparrow K & & \uparrow F & \nearrow \varepsilon & \uparrow F & \theta \Uparrow & \uparrow K & & \uparrow F & \theta \Uparrow & \uparrow K \\
 C & \xrightarrow{\text{id}_C} & C & & C & \xrightarrow{\text{id}_C} & C & \xrightarrow{\text{id}_C} & C & & C & \xrightarrow{\text{id}_C} & C \\
 \eta \Uparrow & \nearrow G & & & \eta \Uparrow & \nearrow G & & & & & \theta \Uparrow & &
 \end{array}
 =
 \begin{array}{ccccc}
 D & \xrightarrow{H} & X & & D & \xrightarrow{H} & X \\
 \uparrow F & \nearrow \tau & \uparrow K & & \uparrow F & \theta \Uparrow & \uparrow K \\
 C & \xrightarrow{\text{id}_C} & C & & C & \xrightarrow{\text{id}_C} & C \\
 \eta \Uparrow & \nearrow G & & & & & &
 \end{array}$$

である. 逆に τ が

$$\begin{array}{ccccc}
 D & \xrightarrow{H} & X & & D & \xrightarrow{H} & X \\
 \uparrow F & \nearrow \tau & \uparrow K & & \uparrow F & \theta \Uparrow & \uparrow K \\
 C & \xrightarrow{\text{id}_C} & C & & C & \xrightarrow{\text{id}_C} & C \\
 \eta \Uparrow & \nearrow G & & & & & &
 \end{array}
 =
 \begin{array}{ccccc}
 D & \xrightarrow{H} & X & & D & \xrightarrow{H} & X \\
 \uparrow F & \nearrow \tau & \uparrow K & & \uparrow F & \theta \Uparrow & \uparrow K \\
 C & \xrightarrow{\text{id}_C} & C & & C & \xrightarrow{\text{id}_C} & C \\
 \eta \Uparrow & \nearrow G & & & & & &
 \end{array}$$

を満たせば

$$\begin{array}{ccc}
 D & \xrightarrow{H} & X \\
 \searrow G & \Uparrow \tau & \Uparrow K \\
 & & C
 \end{array}
 =
 \begin{array}{ccccc}
 D & \xrightarrow{\text{id}_D} & D & \xrightarrow{H} & X \\
 \searrow G & \Uparrow \varepsilon & \Uparrow F & \Uparrow \tau & \Uparrow K \\
 & & C & \xrightarrow{\text{id}_C} & C \\
 & & \Uparrow \eta & \Uparrow G &
 \end{array}
 =
 \begin{array}{ccccc}
 D & \xrightarrow{\text{id}_D} & D & \xrightarrow{H} & X \\
 \searrow G & \Uparrow \varepsilon & \Uparrow F & \Uparrow \theta & \Uparrow K \\
 & & C & \xrightarrow{\text{id}_C} & C
 \end{array}$$

となるから、このような τ は一意である。故に $\langle G, \eta \rangle$ は絶対左 Kan 拡張である。

(2 \implies 3) 明らか。

(3 \implies 1) F が $G := F^\dagger \text{id}_C$ と交換するから、 $\varepsilon: FG \Rightarrow \text{id}_D$ が一意に存在して次の等式が成り立つ。

$$\begin{array}{ccc}
 D & \xrightarrow{\text{id}_D} & D \\
 \uparrow F & \searrow \varepsilon & \Uparrow \varepsilon \\
 & & C \\
 & \Uparrow \eta & \Uparrow G \\
 C & \xrightarrow{\text{id}_C} & C
 \end{array}
 =
 \begin{array}{ccc}
 D & \xrightarrow{\text{id}_D} & D \\
 \uparrow F & \Uparrow \text{id}_F & \uparrow F \\
 C & \xrightarrow{\text{id}_C} & C
 \end{array}$$

故に後は $G\varepsilon \circ \eta_G = \text{id}_G$ を示せばよい。そのためには左 Kan 拡張 $\langle G, \eta \rangle$ の普遍性から

$$\begin{array}{ccc}
 D & \xrightarrow{\text{id}_D} & D \\
 \uparrow F & \searrow \varepsilon & \Uparrow \varepsilon \\
 & & C \\
 & \Uparrow \eta & \Uparrow G \\
 C & \xrightarrow{\text{id}_C} & C
 \end{array}
 =
 \begin{array}{ccc}
 D & \xrightarrow{\text{id}_D} & D \\
 \uparrow F & \searrow \eta & \Uparrow \text{id}_G \\
 & & C \\
 & \Uparrow \eta & \Uparrow G \\
 C & \xrightarrow{\text{id}_C} & C
 \end{array}$$

を示せばよいが、それは明らか。 □

この定理の具体例として、終対象を考えると次の系を得る。

系 18. 圏 C が終対象 1 を持つ $\iff \text{colim}(\text{id}_C)$ が存在する。

また、このとき $\text{colim}(\text{id}_C) \cong 1$ が成り立つ。

証明. 終対象 1 とは対角関手 $\Delta: C \rightarrow C^0 \cong \mathbf{1}$ の右随伴である。

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbf{1} & & \\
 \Delta \uparrow & \searrow 1 & \\
 C & \xrightarrow{\text{id}_C} & C
 \end{array}$$

(\implies) 終対象 1 , 即ち Δ の右随伴が存在するから、定理 17 より $\Delta^\dagger \text{id}_C$ が存在する。例 3 より $\Delta^\dagger \cong \text{colim}$ だから $\text{colim}(\text{id}_C)$ が存在して $\text{colim}(\text{id}_C) \cong 1$ となる。

(\Leftarrow) 定理 17 により Δ が $\Delta^\dagger \text{id}_C \cong \text{colim}(\text{id}_C)$ と交換することを示せばよいが、それは明らか. \square

\Rightarrow の証明で $\Delta^\dagger \cong \text{colim}$ が絶対左 Kan 拡張であることから、次の命題が分かる.

命題 19. $T: J \rightarrow C$ を関手とする. J が終対象 1 を持つならば、 T の余極限は存在して $\text{colim } T \cong T(1)$ となる.

証明. 系 18 で見た通り $\Delta^\dagger \text{id}_J = 1$ であり、これは絶対左 Kan 拡張である.

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{ccc}
 \uparrow \mathbb{1} & & \\
 \Delta \uparrow & \searrow 1 & \\
 J & \xrightarrow{\text{id}_J} & J \xrightarrow{T} C \\
 & \Uparrow & \\
 & &
 \end{array}
 & &
 \begin{array}{ccc}
 \uparrow \mathbb{1} & & \\
 \Delta \uparrow & \searrow T(1) & \\
 J & \xrightarrow{T} & C \\
 & \Uparrow & \\
 & &
 \end{array}
 \end{array}$$

よって $\text{colim } T \cong \Delta^\dagger T \cong T(1)$ である. \square

絶対右 Kan 拡張や絶対 Kan リフトも同様に定義できて、次の定理が成り立つ (証明は同様なので省略する).

定理 20. 関手 $G: D \rightarrow C$ に対して以下の条件は同値である.

- (1) G は右随伴関手である.
- (2) 絶対右 Kan 拡張 $\langle G^\dagger \text{id}_D, \varepsilon \rangle$ が存在する.
- (3) 右 Kan 拡張 $\langle G^\dagger \text{id}_D, \varepsilon \rangle$ が存在し、 G が $G^\dagger \text{id}_D$ と交換する.

$$\begin{array}{ccc}
 C & & \\
 \uparrow G & \searrow G^\dagger \text{id}_D & \\
 D & \xrightarrow{\text{id}_D} & D \xrightarrow{G} C \\
 & \Downarrow \varepsilon &
 \end{array}$$

またこのとき $G^\dagger \text{id}_D \dashv G$ であり ε がその counit である. \square

定理 21. 関手 $F: C \rightarrow D$ に対して以下の条件は同値である.

- (1) F は左随伴関手である.
- (2) 絶対右 Kan リフト $\langle F_\dagger \text{id}_D, \varepsilon \rangle$ が存在する.

(3) 右 Kan リフト $\langle F_{\dagger} \text{id}_D, \varepsilon \rangle$ が存在し, F が $F_{\dagger} \text{id}_D$ と交換する.

$$\begin{array}{ccc}
 & & C \\
 & \nearrow^{F_{\dagger} \text{id}_D} & \downarrow F \\
 C & \xrightarrow{F} D & \xrightarrow{\text{id}_D} D
 \end{array}$$

またこのとき $F \dashv F_{\dagger} \text{id}_D$ であり ε がその counit である. □

定理 22. 関手 $G: D \rightarrow C$ に対して以下の条件は同値である.

- (1) G は右随伴関手である.
- (2) 絶対左 Kan リフト $\langle G_{\dagger} \text{id}_C, \eta \rangle$ が存在する.
- (3) 左 Kan リフト $\langle G_{\dagger} \text{id}_C, \eta \rangle$ が存在し, G が $G_{\dagger} \text{id}_C$ と交換する.

$$\begin{array}{ccc}
 & & D \\
 & \nearrow^{G_{\dagger} \text{id}_C} & \downarrow G \\
 D & \xrightarrow{G} C & \xrightarrow{\text{id}_C} C
 \end{array}$$

またこのとき $G_{\dagger} \text{id}_C \dashv G$ であり η がその unit である. □

定理 23. 左随伴関手は左 Kan 拡張と交換する.

証明. $F: C \rightarrow D$, $E: C \rightarrow U$ を関手, $L \dashv R: U \rightarrow V$ を随伴関手として, 左 Kan 拡張 $\langle F^{\dagger} E, \eta \rangle$ が存在するとする.

$$\begin{array}{ccccc}
 D & & & & \\
 \uparrow F & \searrow^{F^{\dagger} E} & & & \\
 C & \xrightarrow{E} & U & \xrightleftharpoons[L]{L} & V \\
 & & \uparrow \eta & & \\
 & & C & &
 \end{array}$$

L が $F^{\dagger} E$ と交換することを示すため, 任意の $S: D \rightarrow V$ と $\theta: LE \Rightarrow SF$ を取る.

$$\begin{array}{ccccc}
 D & & & & \\
 \uparrow F & \searrow^{S} & & & \\
 C & \xrightarrow{E} & U & \xrightleftharpoons[L]{L} & V \\
 & & \uparrow \theta & & \\
 & & C & &
 \end{array}$$

$L \dashv R$ の unit を η' とすると、次の図式を得る.

$$\begin{array}{ccc}
 D & \xrightarrow{S} & V \\
 F \uparrow & \theta \Uparrow & L \nearrow \\
 C & \xrightarrow{E} U & \xrightarrow{\eta' \Uparrow} U \\
 & & \text{id}_U \searrow \\
 & & R \searrow
 \end{array}$$

左 Kan 拡張 $F^\dagger E$ の普遍性から、 $\sigma: F^\dagger E \Rightarrow RS$ が存在して次の等式が成り立つ.

$$\begin{array}{ccc}
 D & \xrightarrow{S} & V \\
 F \uparrow & F^\dagger E \searrow & \sigma \Uparrow \\
 C & \xrightarrow{E} U & \xrightarrow{\eta' \Uparrow} U \\
 & & \text{id}_U \searrow \\
 & & R \searrow
 \end{array}
 =
 \begin{array}{ccc}
 D & \xrightarrow{S} & V \\
 F \uparrow & \theta \Uparrow & L \nearrow \\
 C & \xrightarrow{E} U & \xrightarrow{\eta' \Uparrow} U \\
 & & \text{id}_U \searrow \\
 & & R \searrow
 \end{array}$$

$L \dashv R$ だから、定理 22 より $\langle L, \eta' \rangle$ は R に沿った id_U の絶対左 Kan リフトである. よって τ が存在して次の等式が成り立つ.

$$\begin{array}{ccc}
 D & \xrightarrow{S} & V \\
 F^\dagger E \searrow & \tau \Uparrow & L \nearrow \\
 U & \xrightarrow{\eta' \Uparrow} U & \xrightarrow{\text{id}_U} U \\
 & & R \searrow
 \end{array}
 =
 \begin{array}{ccc}
 D & \xrightarrow{S} & V \\
 F^\dagger E \searrow & \sigma \Uparrow & \\
 U & \xrightarrow{\text{id}_U} U & \xrightarrow{\text{id}_U} U \\
 & & R \searrow
 \end{array}$$

このとき

$$\begin{array}{ccc}
 D & \xrightarrow{S} & V \\
 F \uparrow & F^\dagger E \searrow & \tau \Uparrow \\
 C & \xrightarrow{E} U & \xrightarrow{\eta' \Uparrow} U \\
 & & \text{id}_U \searrow \\
 & & R \searrow
 \end{array}
 =
 \begin{array}{ccc}
 D & \xrightarrow{S} & V \\
 F \uparrow & F^\dagger E \searrow & \sigma \Uparrow \\
 C & \xrightarrow{E} U & \xrightarrow{\text{id}_U} U \\
 & & R \searrow
 \end{array}$$

$$=
 \begin{array}{ccc}
 D & \xrightarrow{S} & V \\
 F \uparrow & \theta \Uparrow & L \nearrow \\
 C & \xrightarrow{E} U & \xrightarrow{\eta' \Uparrow} U \\
 & & \text{id}_U \searrow \\
 & & R \searrow
 \end{array}$$

となるから、絶対左 Kan リフト $\langle L, \eta' \rangle$ の普遍性により

$$\begin{array}{ccc}
 D & \xrightarrow{S} & V \\
 F \uparrow & \searrow^{F^\dagger E} & \nearrow L \\
 C & \xrightarrow{E} & U \\
 \eta \uparrow & & \tau \uparrow
 \end{array}
 =
 \begin{array}{ccc}
 D & \xrightarrow{S} & V \\
 F \uparrow & \searrow^{\theta} & \nearrow L \\
 C & \xrightarrow{E} & U
 \end{array}$$

が分かる。後はこのような τ が一意であることを示せばよい。そこで τ' が

$$\begin{array}{ccc}
 D & \xrightarrow{S} & V \\
 F \uparrow & \searrow^{F^\dagger E} & \nearrow L \\
 C & \xrightarrow{E} & U \\
 \eta \uparrow & & \tau' \uparrow
 \end{array}
 =
 \begin{array}{ccc}
 D & \xrightarrow{S} & V \\
 F \uparrow & \searrow^{\theta} & \nearrow L \\
 C & \xrightarrow{E} & U
 \end{array}$$

を満たすとすると

$$\begin{array}{ccc}
 D & \xrightarrow{S} & V \\
 F \uparrow & \searrow^{F^\dagger E} & \nearrow L \\
 C & \xrightarrow{E} & U \xrightarrow{\text{id}_U} U \\
 \eta \uparrow & & \eta' \uparrow
 \end{array}
 =
 \begin{array}{ccc}
 D & \xrightarrow{S} & V \\
 F \uparrow & \searrow^{\theta} & \nearrow L \\
 C & \xrightarrow{E} & U \xrightarrow{\text{id}_U} U \\
 & & \eta' \uparrow
 \end{array}
 =
 \begin{array}{ccc}
 D & \xrightarrow{S} & V \\
 F \uparrow & \searrow^{F^\dagger E} & \nearrow R \\
 C & \xrightarrow{E} & U \xrightarrow{\text{id}_U} U \\
 \eta \uparrow & & \sigma \uparrow
 \end{array}$$

となるから、左 Kan 拡張 $F^\dagger E$ の普遍性により

$$\begin{array}{ccc}
 D & \xrightarrow{S} & V \\
 F^\dagger E \searrow & \nearrow L & \nearrow R \\
 U & \xrightarrow{\text{id}_U} & U
 \end{array}
 =
 \begin{array}{ccc}
 D & \xrightarrow{S} & V \\
 F^\dagger E \searrow & \nearrow \sigma & \nearrow R \\
 U & \xrightarrow{\text{id}_U} & U
 \end{array}$$

となり、故に絶対左 Kan リフト $\langle L, \eta' \rangle$ の普遍性から $\tau' = \tau$ である。 \square

※ 今回は図式を使って示したが, Hom の対応を見ることでも証明できる. というのも $L \dashv R: U \rightarrow V$ のとき $L \dashv R: U^C \rightarrow V^C$ だから (「随伴関手」の PDF を参照)

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{V^C}(LE, F^{-1}(S)) &= \mathrm{Hom}_{V^C}(LE, SF) \\ &\cong \mathrm{Hom}_{U^C}(E, RSF) \\ &= \mathrm{Hom}_{U^C}(E, F^{-1}(RS)) \\ &\cong \mathrm{Hom}_{U^D}(F^\dagger E, RS) \\ &\cong \mathrm{Hom}_{V^D}(L \circ F^\dagger E, S) \end{aligned}$$

となり $F^\dagger(LE) \cong L \circ F^\dagger E$ が分かる. 更に, この全単射による対応を計算することにより $L\eta$ が $F^\dagger(LE)$ の unit になっていることが分かる.

4 米田埋込と Kan 拡張

補題 24. $F: C \rightarrow D$, $E: C \rightarrow U$ を関手として $d \in D$ に対して関手 K を合成

$$F \downarrow d \xrightarrow{P_0} C \xrightarrow{E} U$$

で定める. このとき $u \in U$ について自然な全単射

$$\mathrm{Hom}_{UF \downarrow d}(K, \Delta u) \cong \mathrm{Hom}_{\hat{C}}(\mathrm{Hom}_D(F-, d), \mathrm{Hom}_U(E-, u))$$

が存在する*4.

証明. まず互いに逆な写像

$$\mathrm{Hom}_{UF \downarrow d}(K, \Delta u) \xrightleftharpoons[\zeta_u]{\xi_u} \mathrm{Hom}_{\hat{C}}(\mathrm{Hom}_D(F-, d), \mathrm{Hom}_U(E-, u))$$

を定義しよう. $\theta \in \mathrm{Hom}_{UF \downarrow d}(K, \Delta u)$ に対して写像

$$\xi_u(\theta)_c: \mathrm{Hom}_D(Fc, d) \rightarrow \mathrm{Hom}_U(Ec, u)$$

を $\xi_u(\theta)_c(f) := \theta_{\langle c, f \rangle}$ で定義する. この $\xi_u(\theta)$ は自然変換である.

*4 ここでの証明は「頑張ると全単射が構成できる」というものでよく分からないが, 実はこれは profunctor を使って説明することができる. 「ココンマ圏と profunctor」の PDF を参照

∴) $g: c \rightarrow c'$ を C の射とする. 次の図式が可換であることを示せばよい.

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Hom}_D(Fc, d) & \xrightarrow{\xi_u(\theta)_c} & \text{Hom}_U(Ec, u) & & f' \circ Fg & \xrightarrow{\xi_u(\theta)_c} & \theta_{\langle c, f' \circ Fg \rangle} \\
 \uparrow - \circ Fg & & \uparrow - \circ Eg & & \uparrow - \circ Fg & & \theta_{\langle c', f' \rangle} \circ Eg \\
 \text{Hom}_D(Fc', d) & \xrightarrow{\xi_u(\theta)_{c'}} & \text{Hom}_U(Ec', u) & & f' & \xrightarrow{\xi_u(\theta)_{c'}} & \theta_{\langle c', f' \rangle} \\
 & & & & & & \uparrow - \circ Eg
 \end{array}$$

そこで $f' \in \text{Hom}_D(Fc', d)$ として $f := f' \circ Fg$ と置く. このときコンマ圏の定義から $\langle c, f \rangle \in F \downarrow d$ かつ $\langle c', f' \rangle \in F \downarrow d$ であり $g: \langle c, f \rangle \rightarrow \langle c', f' \rangle$ は $F \downarrow d$ の射である. 今 $\theta: K \Rightarrow \Delta u: F \downarrow d \rightarrow U$ が自然変換だったから, 次の図式は可換である.

$$\begin{array}{ccc}
 Ec & \xrightarrow{\theta_{\langle c, f \rangle}} & u \\
 Eg \downarrow & & \downarrow \text{id}_u \\
 Ec' & \xrightarrow{\theta_{\langle c', f' \rangle}} & u
 \end{array}$$

即ち $\theta_{\langle c', f' \rangle} \circ Eg = \theta_{\langle c, f \rangle} = \theta_{\langle c, f' \circ Fg \rangle}$ となり, 示したい可換性が分かった.

故に ξ_u は写像 $\xi_u: \text{Hom}_{UF \downarrow d}(K, \Delta u) \rightarrow \text{Hom}_{\widehat{C}}(\text{Hom}_D(F-, d), \text{Hom}_U(E-, u))$ を与える.

次に $\beta \in \text{Hom}_{\widehat{C}}(\text{Hom}_D(F-, d), \text{Hom}_U(E-, u))$ に対して U の射

$$\zeta_u(\beta)_{\langle c, f \rangle}: K \langle c, f \rangle = Ec \rightarrow u$$

を $\zeta_u(\beta)_{\langle c, f \rangle} := \beta_c(f)$ で定める. これは自然変換 $\zeta_u(\beta): K \Rightarrow \Delta u$ を定める.

∴) $g: \langle c, f \rangle \rightarrow \langle c', f' \rangle$ を $F \downarrow d$ の射とする. 即ち $g: c \rightarrow c'$ は C の射で $f' \circ Fg = f$ となる. 次の図式が可換であることを示せばよい.

$$\begin{array}{ccc}
 Ec & \xrightarrow{\beta_c(f)} & u \\
 Eg \downarrow & & \downarrow \text{id}_u \\
 Ec' & \xrightarrow{\beta_{c'}(f')} & u
 \end{array}$$

β が自然変換だから次が可換である.

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Hom}_D(Fc, d) & \xrightarrow{\beta_c} & \text{Hom}_U(Ec, u) & f' \circ Fg = f \xrightarrow{\beta_c} \beta_c(f) \\
 \uparrow - \circ Fg & & \uparrow - \circ Eg & \uparrow - \circ Fg \quad \beta_{c'}(f') \circ Eg \\
 \text{Hom}_D(Fc', d) & \xrightarrow{\beta_{c'}} & \text{Hom}_U(Ec', u) & f' \xrightarrow{\beta_{c'}} \beta_{c'}(f') \\
 & & & \downarrow - \circ Eg
 \end{array}$$

故に $\beta_{c'}(f') \circ Eg = \beta_c(f)$ である.

このとき $\xi_u \circ \zeta_u = \text{id}$, $\zeta_u \circ \xi_u = \text{id}$ である.

\therefore まず $\theta: K \Rightarrow \Delta u$, $\langle c, f \rangle \in F \downarrow d$ に対して

$$(\zeta_u \circ \xi_u(\theta))_{\langle c, f \rangle} = \zeta_u(\xi_u(\theta))_{\langle c, f \rangle} = \xi_u(\theta)_c(f) = \theta_{\langle c, f \rangle}$$

だから $\zeta_u \circ \xi_u = \text{id}$ である. 次に $\beta: \text{Hom}_D(F-, d) \Rightarrow \text{Hom}_U(E-, u)$ に対して

$$(\xi_u \circ \zeta_u(\beta))_c(f) = \xi_u(\zeta_u(\beta))_c(f) = \zeta_u(\beta)_{\langle c, f \rangle} = \beta_c(f)$$

だから $\zeta_u \circ \xi_u = \text{id}$ である.

従って ξ_u は全単射である.

後は ξ_u が u について自然であることを示せばよい. ここで ξ_u のコドメインに出てくる

$$u \mapsto \text{Hom}_{\widehat{C}}(\text{Hom}_D(F-, d), \text{Hom}_U(E-, u))$$

という関手は正確に書くと

$$U \xrightarrow{y} \widehat{U} \xrightarrow{E^{-1}} \widehat{C} \xrightarrow{\text{Hom}_{\widehat{C}}(P, -)} \mathbf{Set} \quad (\text{但し } P := \text{Hom}_D(F-, d) \text{ と書いた})$$

という関手である. 従って ξ_u の自然性とは, U の射 $k: u \rightarrow v$ に対して次の図式が可換であることを意味している. (ここで $y(k): \text{Hom}_U(-, u) \Rightarrow \text{Hom}_U(-, v)$ は自然変換だから $E^{-1}(y(k)) = y(k)_E: \text{Hom}_U(E-, u) \Rightarrow \text{Hom}_U(E-, v)$ も自然変換である.)

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Hom}_{UF \downarrow d}(K, \Delta u) & \xrightarrow{\xi_u} & \text{Hom}_{\widehat{C}}(\text{Hom}_D(F-, d), \text{Hom}_U(E-, u)) \\
 (\Delta k) \circ - \downarrow & & \downarrow y(k)_E \circ - \\
 \text{Hom}_{UF \downarrow d}(K, \Delta v) & \xrightarrow{\xi_v} & \text{Hom}_{\widehat{C}}(\text{Hom}_D(F-, d), \text{Hom}_U(E-, v))
 \end{array}$$

故に $\theta \in \text{Hom}_{UF \downarrow d}(K, \Delta u)$ に対して等式 $\xi_v((\Delta k) \circ \theta) = y(k)_E \circ (\xi_u(\theta))$ を示せばよい.

それは $\langle c, f \rangle \in F \downarrow d$ に対して

$$\begin{aligned}\xi_v((\Delta k) \circ \theta)_c(f) &= ((\Delta k) \circ \theta)_{\langle c, f \rangle} = k \circ \theta_{\langle c, f \rangle} \\ (y(k)_E \circ (\xi_u(\theta)))_c(f) &= y(k)_{Ec}(\xi_u(\theta)_c(f)) = k \circ \theta_{\langle c, f \rangle}\end{aligned}$$

となるから分かる. □

定理 25. C, D, U を圏, $F: C \rightarrow D$, $E: C \rightarrow U$, $T: D \rightarrow U$ を関手とする. このとき以下の条件は同値である.

- (1) ある $\eta: E \Rightarrow TF$ が存在して $\langle T, \eta \rangle$ が F に沿った E の各点左 Kan 拡張になる.
- (2) ある $\eta: E \Rightarrow TF$ が存在して $\langle T, \eta \rangle$ が F に沿った E の左 Kan 拡張になり, 更に任意の $u \in U$ に対して $\text{Hom}_U(-, u): U \rightarrow \mathbf{Set}^{\text{op}}$ が $\langle T, \eta \rangle$ と交換する.
- (3) $d \in D$, $u \in U$ について自然な全単射

$$\text{Hom}_U(Td, u) \cong \text{Hom}_{\widehat{C}}(\text{Hom}_D(F-, d), \text{Hom}_U(E-, u))$$

が存在する.

証明. (1 \implies 2) $\text{Hom}_U(-, u): U \rightarrow \mathbf{Set}^{\text{op}}$ が余極限と交換する (「極限」の PDF を参照) から定理 15 より明らか.

(2 \implies 3) 左 Kan 拡張 $\langle T, \eta \rangle$ が存在して $\text{Hom}_U(-, u)$ がそれと交換するから, F に沿った $\text{Hom}_U(E-, u)$ の左 Kan 拡張も存在して, それは $\text{Hom}_U(T-, u)$ である.

$$\begin{array}{ccc} D & & \\ \uparrow F & \searrow F^\dagger(\text{Hom}_U(E-, u)) \cong \text{Hom}_U(T-, u) & \\ C & \xrightarrow{T} & U \xrightarrow{\text{Hom}(-, u)} \mathbf{Set}^{\text{op}} \\ & \xrightarrow{E} & \end{array}$$

つまり $S: D \rightarrow \mathbf{Set}^{\text{op}}$ について自然に

$$\text{Hom}_{(\mathbf{Set}^{\text{op}})^D}(\text{Hom}_U(T-, u), S) \cong \text{Hom}_{(\mathbf{Set}^{\text{op}})^C}(\text{Hom}_U(E-, u), SF)$$

である (これは u についても自然である). opposite を考えれば

$$\text{Hom}_{\widehat{D}}(S, \text{Hom}_U(T-, u)) \cong \text{Hom}_{\widehat{C}}(SF, \text{Hom}_U(E-, u))$$

を得る. 今 $S = y(d)$ とすれば, 米田の補題と合わせて

$$\text{Hom}_U(Td, u) \cong \text{Hom}_{\widehat{C}}(\text{Hom}_D(F-, d), \text{Hom}_U(E-, u))$$

を得る.

※ この証明によれば、各点左 Kan 拡張 $\langle T, \eta \rangle$ から得られる全単射

$$\varphi_{du}: \text{Hom}_U(Td, u) \rightarrow \text{Hom}_{\widehat{C}}(\text{Hom}_D(F-, d), \text{Hom}_U(E-, u))$$

は次のような写像になる. まず $k \in \text{Hom}_U(Td, u)$ とする. これに米田の補題で対応する自然変換を $\theta^k: y(d) \Rightarrow \text{Hom}_U(T-, u)$ とすれば, これは自然変換

$$\theta^k: \text{Hom}_U(T-, u) \Rightarrow \text{Hom}(-, d): D \rightarrow \mathbf{Set}^{\text{op}}$$

とみなすことができる. そこで

$$\Theta^k := \begin{array}{ccccc} & & D & \xrightarrow{\quad} & \text{Hom}_D(-, d) \\ & & \uparrow & \searrow T & \searrow \\ F & \uparrow \eta & & & \\ C & \xrightarrow{E} & U & \xrightarrow{\quad} & \mathbf{Set}^{\text{op}} \\ & & \uparrow \theta^k & & \\ & & & & \text{Hom}(-, u) \end{array}$$

とすれば写像として $\varphi_{du}(k)_c = \Theta_c^k: \text{Hom}_D(Fc, d) \rightarrow \text{Hom}_U(Ec, u)$ であることが証明から分かる. この Θ_c^k は $f \in \text{Hom}_D(Fc, d)$ に対して $Ec \xrightarrow{\eta_c} TFc \xrightarrow{\theta_{Fc}^k(f)} u$ を対応させる写像である. 米田の補題の証明を思い出せば $\theta_{Fc}^k(f) = k \circ Tf$ だから, 結局

$$\varphi_{du}(k)_c(f) = (Ec \xrightarrow{\eta_c} TFc \xrightarrow{Tf} Td \xrightarrow{k} u) \quad (26)$$

となる.

(3 \implies 1) 仮定 (3) で与えられている全単射を

$$\varphi_{du}: \text{Hom}_U(Td, u) \rightarrow \text{Hom}_{\widehat{C}}(\text{Hom}_D(F-, d), \text{Hom}_U(E-, u))$$

とすると $c \in C$ に対して $\psi^c := \varphi_{Fc, TFc}(\text{id}_{TFc}): \text{Hom}_D(F-, Fc) \Rightarrow \text{Hom}_U(E-, TFc)$ は自然変換である. そこで $\eta_c := \psi_c^c(\text{id}_{Fc}): Ec \rightarrow TFc$ と定める. これは c について自然である.

∴) C の射 $f: c \rightarrow c'$ に対して

$$\begin{array}{ccc} Ec & \xrightarrow{\eta_c} & TFc \\ Ef \downarrow & & \downarrow TFf \\ Ec' & \xrightarrow{\eta_{c'}} & TFc' \end{array}$$

が可換であることを示せばよい。まず ψ^c が自然変換だから次の図式が可換である。

$$\begin{array}{ccc}
\text{Hom}_D(Fc, Fc') & \xrightarrow{\psi_c^c} & \text{Hom}_U(Ec, TFc') & Ff & \xrightarrow{\psi_c^c} & \psi_c^c(Ff) \\
\uparrow -\circ Ff & & \uparrow -\circ Ef & \uparrow -\circ Ff & & \eta_{c'} \circ Ef \\
\text{Hom}_D(Fc', Fc') & \xrightarrow{\psi_{c'}^c} & \text{Hom}_U(Ec', TFc') & \text{id}_{Fc'} & \xrightarrow{\psi_{c'}^c} & \eta_{c'} \\
& & & & & \uparrow -\circ Ef
\end{array}$$

故に $\text{id}_{Fc'}$ の行き先を考えれば $\psi_c^c(Ff) = \eta_{c'} \circ Ef$ が分かる。

次に φ_{du} が $d \in D, u \in U$ について自然だから次の図式が可換である。

$$\begin{array}{ccc}
\text{Hom}_U(TFc, TFc) & \xrightarrow{\varphi_{Fc, TFc}} & \text{Hom}_{\widehat{C}}(\text{Hom}_D(F-, Fc), \text{Hom}_U(E-, TFc)) \\
TFf \circ - \downarrow & & \downarrow y(TFf)_E \circ - \\
\text{Hom}_U(TFc, TFc') & \xrightarrow{\varphi_{Fc, TFc'}} & \text{Hom}_{\widehat{C}}(\text{Hom}_D(F-, Fc), \text{Hom}_U(E-, TFc')) \\
-\circ TFf \uparrow & & \uparrow -\circ y(Ff)_F \\
\text{Hom}_U(TFc', TFc') & \xrightarrow{\varphi_{Fc', TFc'}} & \text{Hom}_{\widehat{C}}(\text{Hom}_D(F-, Fc'), \text{Hom}_U(E-, TFc'))
\end{array}$$

よって id_{TFc} と $\text{id}_{TFc'}$ の行き先を考えれば

$$y(TFf)_E \circ \psi_c^c = \varphi_{Fc, TFc'}(TFf) = \psi_c^c \circ y(Ff)_F$$

が分かる。この等式の c 成分を考えれば $y(TFf)_{Ec} \circ \psi_c^c = \psi_c^c \circ y(Ff)_{Fc}$ となるから id_{Fc} に適用することで $TFf \circ \eta_c = \psi_c^c(Ff)$ を得る。

以上により $TFf \circ \eta_c = \psi_c^c(Ff) = \eta_{c'} \circ Ef$ が分かる。

次に $h \in \text{Hom}_U(Td, u)$ とすると $\varphi_{du}(h): \text{Hom}_D(F-, d) \Rightarrow \text{Hom}_U(E-, u)$ は自然変換である。このとき $c \in C, f \in \text{Hom}_D(Fc, d)$ に対して $\varphi_{du}(h)_c(f) = h \circ Tf \circ \eta_c$ となる。

∴) まず φ_{du} が u について自然だから次の図式が可換である。

$$\begin{array}{ccc}
\text{Hom}_U(TFc, TFc) & \xrightarrow{\varphi_{Fc, TFc}} & \text{Hom}_{\widehat{C}}(\text{Hom}_D(F-, Fc), \text{Hom}_U(E-, TFc)) \\
(h \circ Tf) \circ - \downarrow & & \downarrow y(h \circ Tf)_E \circ - \\
\text{Hom}_U(TFc, u) & \xrightarrow{\varphi_{Fc, u}} & \text{Hom}_{\widehat{C}}(\text{Hom}_D(F-, Fc), \text{Hom}_U(E-, u))
\end{array}$$

よって id_{TFc} の行き先を考えれば $y(h \circ Tf)_E \circ \psi^c = \varphi_{Fc,u}(h \circ Tf)$ が分かる。従って

$$(y(h \circ Tf)_E \circ \psi^c)_c(\text{id}_{Fc}) = \varphi_{Fc,u}(h \circ Tf)_c(\text{id}_{Fc})$$

である。左辺を計算すると定義より

$$(y(h \circ Tf)_E \circ \psi^c)_c(\text{id}_{Fc}) = (h \circ Tf) \circ (\psi^c(\text{id}_{Fc})) = h \circ Tf \circ \eta_c$$

となる。一方右辺については、 φ_{du} が d について自然だから

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_U(TFc, u) & \xrightarrow{\varphi_{Fc,u}} & \text{Hom}_{\widehat{C}}(\text{Hom}_D(F-, Fc), \text{Hom}_U(E-, u)) \\ \uparrow - \circ Tf & & \uparrow - \circ y(f)_F \\ \text{Hom}_U(Td, u) & \xrightarrow{\varphi_{du}} & \text{Hom}_{\widehat{C}}(\text{Hom}_D(F-, d), \text{Hom}_U(E-, u)) \end{array}$$

が可換となり、 h の行き先を考えれば $\varphi_{Fc,u}(h \circ Tf) = \varphi_{du}(h) \circ y(f)_F$ が分かる。従って

$$\varphi_{Fc,u}(h \circ Tf)_c(\text{id}_{Fc}) = \varphi_{du}(h)_c(f)$$

である。以上により $\varphi_{du}(h)_c(f) = h \circ Tf \circ \eta_c$ が分かった。

さて、 $\langle T, \eta \rangle$ が F に沿った E の各点左 Kan 拡張となることを示そう。即ち

$$\mu^d := \begin{array}{ccccc} & & \mathbb{1} & \xrightarrow{d} & D \\ & & \uparrow & & \uparrow \\ P_1 & & \uparrow & \swarrow F & \uparrow \\ & & F & \downarrow d & \uparrow \eta \\ F & \downarrow d & \xrightarrow{P_0} & C & \xrightarrow{E} U \end{array}$$

が余極限になることを示す。 φ_{du} と補題 24 で定義した ζ_u を合成して、 $u \in U$ について自然な全単射

$$\begin{aligned} \text{Hom}_U(Td, u) & \xrightarrow{\varphi_{du}} \text{Hom}_{\widehat{C}}(\text{Hom}_D(F-, d), \text{Hom}_U(E-, u)) \\ & \xrightarrow{\zeta_u} \text{Hom}_{U \downarrow d} (F \downarrow d \xrightarrow{P_0} C \xrightarrow{E} U, \Delta u) \end{aligned}$$

を得る。従って $\text{colim}(F \downarrow d \xrightarrow{P_0} C \xrightarrow{E} U) \cong Td$ である。この余極限の余極限余錐は $\zeta_{Td}(\varphi_{d, Td}(\text{id}_{Td}))$ となるので、その $\langle c, f \rangle$ 成分を計算すると

$$\zeta_{Td}(\varphi_{d, Td}(\text{id}_{Td}))_{\langle c, f \rangle} = \varphi_{d, Td}(\text{id}_{Td})_c(f) = Tf \circ \eta_c = \mu_{\langle c, f \rangle}^d$$

となるから $\langle Td, \mu^d \rangle$ が $F \downarrow d \xrightarrow{P_0} C \xrightarrow{E} U$ の余極限である。□

※ 同様にして右 Kan 拡張についても次の条件が同値である。

- (1) ある $\varepsilon: TF \Rightarrow E$ が存在して $\langle T, \varepsilon \rangle$ が F に沿った E の各点右 Kan 拡張になる。
- (2) ある $\varepsilon: TF \Rightarrow E$ が存在して $\langle T, \varepsilon \rangle$ が F に沿った E の右 Kan 拡張になり、任意の $u \in U$ に対して $\text{Hom}_U(u, -): U \rightarrow \mathbf{Set}$ が $\langle T, \varepsilon \rangle$ と交換する。
- (3) $d \in D$, $u \in U$ について自然な全単射

$$\text{Hom}_U(u, Td) \cong \text{Hom}_{\mathbf{Set}^C}(\text{Hom}_D(d, F-), \text{Hom}_U(u, E-))$$

が存在する。

系 27. 絶対左 Kan 拡張は各点左 Kan 拡張である。 □

系 28. $F: C \rightarrow D$ が関手で C が小圏のとき、左 Kan 拡張 $F^\dagger y$ が存在する。

$$\begin{array}{ccc} D & & \\ \uparrow F & \searrow F^\dagger y & \\ C & \xrightarrow{y} & \widehat{C} \end{array}$$

これは $d \in D$ について自然に $F^\dagger y(d) \cong \text{Hom}_D(F-, d)$ となる。

証明. $T := (D \xrightarrow{y} \widehat{D} \xrightarrow{F^{-1}} \widehat{C})$ と定める。即ち $d \in D$ に対して $Td = \text{Hom}_D(F-, d)$ である。 $P \in \widehat{C}$ に対して米田の補題で得られる自然同型を $\chi_P: \text{Hom}_{\widehat{C}}(y-, P) \Rightarrow P$ とすると、全単射

$$\varphi_{dP} := \chi_P^{-1} \circ -: \text{Hom}_{\widehat{C}}(Td, P) \rightarrow \text{Hom}_{\widehat{C}}(\text{Hom}_D(F-, d), \text{Hom}_{\widehat{C}}(y-, P))$$

が得られる。これは $d \in D$, $P \in \widehat{C}$ について自然である。故に定理 25 より、ある η が存在して $\langle T, \eta \rangle$ が F に沿った y の各点左 Kan 拡張になる。 □

定理 25 の証明によればこの左 Kan 拡張の unit $\eta: y \Rightarrow TF$ は

$$\eta_c = \psi_c^c(\text{id}_{Fc}) \quad (\psi^c := \varphi_{Fc, TFc}(\text{id}_{TFc}))$$

で与えられる。ここで φ の定義より $\varphi_{Fc, TFc}(\text{id}_{TFc}) = \chi_{TFc}^{-1} \circ \text{id}_{TFc} = \chi_{TFc}^{-1}$ だから、つ

まり $\eta_c = \psi_c^c(\text{id}_{Fc}) = (\chi_{TFc}^{-1})_c(\text{id}_{Fc})$ となる.

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\widehat{C}}(y(c), TFc) & \xleftarrow{(\chi_{TFc}^{-1})_c} & \text{Hom}_D(Fc, Fc) \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ \eta_c = \psi_c^c(\text{id}_{Fc}) & \xleftarrow{\quad} & \text{id}_{Fc} \end{array}$$

即ち $\eta_c: y(c) \Rightarrow TFc$ は米田の補題で id_{Fc} に対応する自然変換である. 従って $a \in C$ に対して $(\eta_c)_a$ は

$$\begin{array}{ccc} (\eta_c)_a: \text{Hom}_C(a, c) & \longrightarrow & TFc(a) = \text{Hom}_D(Fa, Fc) \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ f & \longmapsto & TFc(f)(\text{id}_{Fc}) = \text{id}_{Fc} \circ Ff = Ff \end{array}$$

という写像になっている.

系 29. 小圏 C に対して $y^\dagger y \cong \text{id}_{\widehat{C}}$ である.

$$\begin{array}{ccc} \widehat{C} & & \\ \uparrow y & \searrow y^\dagger y \cong \text{id}_{\widehat{C}} & \\ C & \xrightarrow{y} & \widehat{C} \end{array}$$

証明. 系 28 と米田の補題により, $P \in \widehat{C}$ について自然な全単射

$$y^\dagger y(P) \cong \text{Hom}_{\widehat{C}}(y-, P) \cong P$$

が成り立つ. □

※ 系 28 の後に注意した事を使えば $\langle \text{id}_{\widehat{C}}, \text{id}_y \rangle$ が y に沿った y の左 Kan 拡張になっていることが分かる.

系 30. 任意の $P \in \widehat{C}$ に対して, ある $T: J \rightarrow C$ が存在して $P \cong \text{colim}(J \xrightarrow{T} C \xrightarrow{y} \widehat{C})$ となる (即ち小圏 C 上の前層は表現可能関手の余極限で書ける).

証明. 系 29 により $y^\dagger y(P) \cong P$ であるが, 一方各点左 Kan 拡張

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{1} & \xrightarrow{P} & \widehat{C} & & \\ P_1 \uparrow & \swarrow \sigma & \uparrow y & \searrow y^\dagger y \cong \text{id} & \\ y \downarrow P & \xrightarrow{P_0} & C & \xrightarrow{y} & \widehat{C} \end{array}$$

により $P \cong y^\dagger y(P) \cong \text{colim}(y \downarrow P \xrightarrow{P_0} C \xrightarrow{y} \widehat{C})$ である. □

補題 31. $F: C \rightarrow D$ が忠実充満で $c \in C, d \in D$ が $Fc \cong d$ を満たすとき $F \downarrow d$ は終対象を持つ.

証明. $f: Fc \rightarrow d$ を同型射とする. このとき $\langle c, f \rangle \in F \downarrow d$ が終対象であることを示せばよい.

そこでまず $\langle c', g \rangle \in F \downarrow d$ を任意に取る. このとき $f^{-1} \circ g: Fc' \rightarrow Fc$ である. 今 F が充満だから, ある $h: c' \rightarrow c$ が存在して $Fh = f^{-1} \circ g$ となる.

$$\begin{array}{ccccc}
 & c & & Fc & \xrightarrow{f} & d \\
 & \uparrow h & & \uparrow Fh & & \nearrow g \\
 & c' & & Fc' & &
 \end{array}$$

このとき $h: \langle c', g \rangle \rightarrow \langle c, f \rangle$ は $F \downarrow d$ の射である. F が忠実だから, このような h は一意である. 従って $\langle c, f \rangle \in F \downarrow d$ は終対象である. □

命題 32. $P \in \widehat{C}$ が表現可能 \iff コンマ圏 $y \downarrow P$ が終対象を持つ.

証明. (\implies) $P \cong y(c)$ とすると, y が忠実充満だから補題 31 より $y \downarrow P$ は終対象を持つ.

(\impliedby) コンマ圏 $y \downarrow P$ が終対象 $\langle c, \theta \rangle$ を持つとすれば, 命題 19 と系 30 の証明により $P \cong \text{colim}(y \downarrow P \xrightarrow{P_0} C \xrightarrow{y} \widehat{C}) \cong y(c)$ である. □

定理 33. $F: C \rightarrow D, E: C \rightarrow U$ を関手として各点左 Kan 拡張 $F^\dagger E, y^\dagger E$ が存在するとする. (\widehat{C} が余完備なので各点左 Kan 拡張 $F^\dagger y$ も存在する.)

$$\begin{array}{ccc}
 D & & D \\
 \uparrow F & \searrow F^\dagger E & \xrightarrow{F^\dagger y} \widehat{C} \\
 C & \xrightarrow{E} U & \nearrow y \\
 & & \downarrow y^\dagger E \\
 & & U
 \end{array}$$

このとき $y^\dagger E \circ F^\dagger y \cong F^\dagger E$ である.

証明. $d \in D$, $u \in U$ について自然に

$$\begin{aligned} \text{Hom}_U(y^\dagger E(F^\dagger y(d)), u) &\cong \text{Hom}_{\widehat{C}}(\text{Hom}_{\widehat{C}}(y(-), F^\dagger y(d)), \text{Hom}_U(E(-), u)) \\ &\cong \text{Hom}_{\widehat{C}}(F^\dagger y(d), \text{Hom}_U(E(-), u)) \\ &\cong \text{Hom}_{\widehat{C}}(\text{Hom}_D(F(-), d), \text{Hom}_{\widehat{C}}(y(-), \text{Hom}_U(E(-), u))) \\ &\cong \text{Hom}_{\widehat{C}}(\text{Hom}_D(F(-), d), \text{Hom}_U(E(-), u)) \end{aligned}$$

となるから, 定理 25 より $y^\dagger E \circ F^\dagger y$ は F に沿った E の各点左 Kan 拡張である. 故に $y^\dagger E \circ F^\dagger y \cong F^\dagger E$ である. \square

定理 34. 関手 $F: C \rightarrow D$ に対して $F^\dagger \circ y \cong yF$ である.

$$\begin{array}{ccc} \widehat{C} & \xrightarrow{F^\dagger} & \widehat{D} \\ y \uparrow & & \uparrow y \\ C & \xrightarrow{F} & D \end{array}$$

(従って $a \in C$ に対して $F^\dagger(\text{Hom}_C(-, a)) \cong \text{Hom}_D(-, Fa)$ となり, 表現可能関手の左 Kan 拡張は表現可能関手である.)

証明. $c \in C$, $P \in \widehat{D}$ について自然に

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\widehat{D}}(y(F(c)), P) &\cong P(F(c)) \cong \text{Hom}_{\widehat{C}}(y(c), PF) = \text{Hom}_{\widehat{C}}(y(c), F^{-1}P) \\ &\cong \text{Hom}_{\widehat{D}}(F^\dagger(y(c)), P) \end{aligned}$$

であるから米田の補題により $y(F(c)) \cong F^\dagger(y(c))$ である. これは $c \in C$ について自然だから (「米田の補題」の PDF を参照) $F^\dagger \circ y \cong yF$ である. \square

系 35. $y^\dagger(\text{Hom}_C(a, -)) \cong \text{ev}_a$ である.

証明. 定理 34 の F として $y^{\text{op}}: C^{\text{op}} \rightarrow (\widehat{C})^{\text{op}}$ を取れば

$$y^\dagger(\text{Hom}_C(a, -)) \cong \text{Hom}_{\widehat{C}}(y(a), -) \cong \text{ev}_a$$

となる. \square

定理 36. $\langle F^\dagger E, \eta \rangle$ が各点左 Kan 拡張で F が忠実充満のとき η は同型である.

$$\begin{array}{ccc} D & & \\ \uparrow F & \searrow F^\dagger E & \\ C & \xrightarrow{E} & U \end{array}$$

$\eta \uparrow$

(つまりこの場合の左 Kan 拡張 $F^\dagger E$ は E の「拡張」になっている.)

証明. $\langle F^\dagger E, \eta \rangle$ が各点左 Kan 拡張だから

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{1} & \xrightarrow{Fc} & D \\
 P_1 \uparrow & \swarrow \sigma & \uparrow F \\
 F \downarrow (Fc) & \xrightarrow{P_0} & C \xrightarrow{E} U \\
 & & \uparrow \eta \\
 & & F \downarrow (Fc)
 \end{array} \xrightarrow{F^\dagger E}
 \quad (37)$$

は余極限を与える. 今 F が忠実充満関手だから補題 31 (の証明) より $F \downarrow (Fc)$ は終対象 $\langle c, \text{id}_{Fc} \rangle$ を持つ. よって命題 19 により $\text{colim}(F \downarrow (Fc) \xrightarrow{P_0} C \xrightarrow{E} U) \cong Ec$ となる. 命題 19 の証明によれば, 合成

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{1} & & \\
 P_1 \uparrow & \swarrow \langle c, \text{id}_{Fc} \rangle & \\
 F \downarrow (Fc) & \xrightarrow{\text{id}} & F \downarrow (Fc) \xrightarrow{P_0} C \xrightarrow{E} U
 \end{array}$$

が $F \downarrow (Fc) \xrightarrow{P_0} C \xrightarrow{E} U$ の余極限を与える. 左 Kan 拡張の普遍性により τ が存在して

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{1} & \xrightarrow{F^\dagger E(Fc)} & U \\
 P_1 \uparrow & \swarrow \langle c, \text{id}_{Fc} \rangle & \uparrow \tau \\
 F \downarrow (Fc) & \xrightarrow{\text{id}} & F \downarrow (Fc) \xrightarrow{P_0} C \xrightarrow{E} U
 \end{array}
 =
 \begin{array}{ccc}
 \mathbb{1} & \xrightarrow{Fc} & D \\
 P_1 \uparrow & \swarrow \sigma & \uparrow F \\
 F \downarrow (Fc) & \xrightarrow{P_0} & C \xrightarrow{E} U \\
 & & \uparrow \eta \\
 & & F \downarrow (Fc)
 \end{array}$$

となる. 図式 (37) も左 Kan 拡張なので τ は同型である. この両辺の $\langle c, \text{id}_{Fc} \rangle$ 成分を考えることで $\tau_* \circ E(\text{id}_c) = \eta_c$ を得る. よって η は同型である. \square

逆に

定理 38. $\langle F^\dagger y, \eta \rangle$ を左 Kan 拡張とする. η が同型ならば F は忠実充満である.

$$\begin{array}{ccc}
 D & & \\
 F \uparrow & \swarrow F^\dagger y & \\
 C & \xrightarrow{y} & \widehat{C} \\
 & & \uparrow \eta
 \end{array}$$

証明. $T := (D \xrightarrow{y} \widehat{C} \xrightarrow{F^{-1}} \widehat{C})$ と定める. 系 28 より, ある η' が存在して $\langle T, \eta' \rangle$ は F に沿った y の左 Kan 拡張になる. 系 28 の後の注意によれば η' は

$$(\eta'_c)_a = F: \text{Hom}_C(a, c) \rightarrow \text{Hom}_D(Fa, Fc) = TFc(a) \quad (39)$$

となっている。ここで $\langle F^\dagger y, \eta \rangle$ も左 Kan 拡張だから自然同型 $\tau: F^\dagger y \Rightarrow T$ が一意に存在して

$$\begin{array}{ccc}
 D & \xrightarrow{\quad T \quad} & \hat{C} \\
 \uparrow F & \nearrow \tau \uparrow & \\
 C & \xrightarrow{\quad y \quad} & \hat{C} \\
 & \eta \uparrow \uparrow F^\dagger y &
 \end{array}
 =
 \begin{array}{ccc}
 D & \xrightarrow{\quad T \quad} & \hat{C} \\
 \uparrow F & \nearrow \eta' \uparrow & \\
 C & \xrightarrow{\quad y \quad} & \hat{C}
 \end{array}$$

となる。 η と τ が自然同型だから η' も自然同型であり、故に (39) は全単射である。よって F は忠実充満である。 \square

系 40. $F: C \rightarrow D$ が忠実充満

$\iff E: C \rightarrow U$ が関手のとき、各点左 Kan 拡張 $\langle F^\dagger E, \eta \rangle$ が存在するならば η は自然同型である。 \square

定理 41. $F: C \rightarrow D$ を関手とすれば $F^\dagger, F^\ddagger: \hat{C} \rightarrow \hat{D}$ が得られる (系 6)。このとき次の条件は同値である。

- (1) F が忠実充満である。
- (2) F^\dagger が忠実充満である。
- (3) F^\ddagger が忠実充満である。

証明. (1 \implies 2) 随伴 $F^\dagger \dashv F^{-1}$ の unit を η とすれば「 F^\dagger が忠実充満 $\iff \eta$ が同型」であった。仮定 (1) により F が忠実充満だから η が同型となり (定理 36), F^\dagger も忠実充満である。

(2 \implies 1) 定理 34 により $F^\dagger \circ y \cong yF$ である。仮定 (2) より F^\dagger が忠実充満で、 y も忠実充満だから $F^\dagger \circ y \cong yF$ も忠実充満である。よって F も忠実充満と分かる。

(2 \iff 3) 一般に $F \dashv G \dashv H$ のとき「 F が忠実充満 $\iff H$ が忠実充満」であった。よって $F^\dagger \dashv F^{-1} \dashv F^\ddagger$ より分かる。 \square

定義. $F: C \rightarrow D$ を関手とする。

- (1) F が strongly generating $\iff F^\dagger y$ が conservative^{*5}である。

^{*5} 関手 G が conservative とは、 Gf が同型射ならば f が同型射になることをいう。詳細は「自然変換・圏同値」の PDF を参照。

(2) F が稠密 (dense) $\iff \langle \text{id}_D, \text{id}_F \rangle$ が F に沿った F の各点左 Kan 拡張となる.

$$\begin{array}{ccc} D & & \\ \uparrow F & \searrow \text{id}_D & \\ C & \xrightarrow{F} & D \end{array}$$

例 42. 米田埋込は稠密である (系 29). □

定理 43. 関手 $F: C \rightarrow D$ に対して次の条件は同値である.

- (1) F が稠密である.
- (2) ある自然同型 $\eta: F \Rightarrow F$ が存在して, $\langle \text{id}_D, \eta \rangle$ が F に沿った F の各点左 Kan 拡張となる.
- (3) $F^\dagger y: D \rightarrow \widehat{C}$ が忠実充満である.

証明. (1 \implies 2) 定義から明らか.

(2 \implies 3) 系 28 より $F^\dagger y \cong (D \xrightarrow{y} \widehat{D} \xrightarrow{F^{-1}} \widehat{C})$ である. y が忠実充満なので, $F^\dagger y$ が忠実充満であることを示すには (y により $D \subset \widehat{D}$ と見なして) $F^{-1}|_D: D \rightarrow \widehat{C}$ が忠実充満であることを示せばよい.

定理 25 より, 各点左 Kan 拡張 $\langle \text{id}_D, \eta \rangle$ は $y(d)$ と交換するから

$$\begin{array}{ccc} D & & \\ \uparrow F & \searrow \text{id} & \\ C & \xrightarrow{F} & D \end{array} \xrightarrow{y(d)} \mathbf{Set}^{\text{op}} = \begin{array}{ccc} D & & \\ \uparrow F & \searrow y(d) & \\ C & \xrightarrow{F^{-1}(y(d))} & D \end{array} \xrightarrow{y(d)\eta} \mathbf{Set}^{\text{op}}$$

$\langle y(d), y(d)\eta \rangle$ が F に沿った $y(d) \circ F = F^{-1}(y(d))$ の左 Kan 拡張となる. 従って任意の $\theta: y(d) \circ F \Rightarrow y(d') \circ F$ に対して, ある $\tau: y(d) \Rightarrow y(d')$ が一意に存在して

$$\begin{array}{ccc} D & & \\ \uparrow F & \searrow y(d') & \\ C & \xrightarrow{F} & D \end{array} \xrightarrow{y(d)} \mathbf{Set}^{\text{op}} = \begin{array}{ccc} D & & \\ \uparrow F & \searrow y(d') & \\ C & \xrightarrow{F} & D \end{array} \xrightarrow{\theta} \mathbf{Set}^{\text{op}}$$

となる. これは言い換えれば

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\widehat{D}}(y(d), y(d')) &\xrightarrow{F^{-1}} \text{Hom}_{\widehat{C}}(F^{-1}(y(d)), F^{-1}(y(d'))) \\ &\xrightarrow{-\circ(y(d)\eta)} \text{Hom}_{\widehat{C}}(F^{-1}(y(d)), F^{-1}(y(d'))) \end{aligned}$$

が全単射ということである。 η が同型だから $- \circ (y(d)\eta)$ は全単射である。 故に

$$F^{-1}: \text{Hom}_{\widehat{D}}(y(d), y(d')) \rightarrow \text{Hom}_{\widehat{C}}(F^{-1}(y(d)), F^{-1}(y(d')))$$

も全単射であり、従って $F^{-1}|_D: D \rightarrow \widehat{C}$ は忠実充満である。

(3 \implies 1) $T := (D \xrightarrow{y} \widehat{D} \xrightarrow{F^{-1}} \widehat{C})$ と定める。 仮定 (3) と定理 28 から T は忠実充満である。 故に全単射

$$T_{dd'}: \text{Hom}_D(d, d') \rightarrow \text{Hom}_{\widehat{C}}(\text{Hom}_D(F-, d), \text{Hom}_D(F-, d'))$$

が得られる。 これは $d, d' \in D$ について自然だから定理 25 より、ある $\eta: F \rightrightarrows F$ が存在して $\langle \text{id}_D, \eta \rangle$ が F に沿った F の各点左 Kan 拡張になる。 定理 25 の証明によれば、この η は

$$\eta_c := \psi_c^c(\text{id}_{F_c}) \quad (\psi^c := T_{F_c, F_c}(\text{id}_{F_c}))$$

により得られる。 T が関手だから $\psi^c = \text{id}_{\text{Hom}_D(F-, F_c)}$ である。 故に

$$\eta_c = \psi_c^c(\text{id}_{F_c}) = \text{id}_{F_c}$$

となるから $\eta = \text{id}_F$ が分かる。 □

命題 44. 稠密関手は strongly generating である。

証明. 忠実充満関手は conservative であるから、strongly generating の定義と定理 43 の条件 (3) より明らか。 □

5 普遍随伴

定理 45. C を小圏、 U を圏、 $F: C \rightarrow U$ を関手として各点左 Kan 拡張 $y^\dagger F$ が存在するとする。 このとき随伴 $y^\dagger F \dashv F^\dagger y$ が成り立つ。 (\widehat{C} が余完備なので $F^\dagger y$ は存在する。)

$$\begin{array}{ccc}
 & \widehat{C} & \\
 & \swarrow & \searrow \\
 y & & y^\dagger F \\
 \uparrow & & \downarrow \\
 C & \xrightarrow{F} & U \\
 & & \uparrow \\
 & & F^\dagger y
 \end{array}$$

証明. $y^\dagger F$ が各点左 Kan 拡張だから, $P \in \widehat{C}$, $u \in U$ について自然に

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_U(y^\dagger F(P), u) &\cong \mathrm{Hom}_{\widehat{C}}(\mathrm{Hom}_{\widehat{C}}(y-, P), \mathrm{Hom}_U(F-, u)) && \text{(定理 25)} \\ &\cong \mathrm{Hom}_{\widehat{C}}(P, \mathrm{Hom}_U(F-, u)) && \text{(米田の補題)} \\ &\cong \mathrm{Hom}_{\widehat{C}}(P, F^\dagger y(u)) && \text{(系 28)} \end{aligned}$$

となるので $y^\dagger F \dashv F^\dagger y$ である. □

逆に任意の随伴 $L \dashv R: \widehat{C} \rightarrow U$ はこのようにして得られる. 即ち

定理 46. C を小圏, U を圏, $L \dashv R: \widehat{C} \rightarrow U$ を随伴とする. このとき関手 $F: C \rightarrow U$ が存在して $y^\dagger F \cong L$, $F^\dagger y \cong R$ となる.

証明. $F := L \circ y: C \rightarrow U$ とする. 系 28 より $y^\dagger y$ は各点左 Kan 拡張である. 左随伴関手 L は余極限と交換するから, 定理 15 より $y^\dagger y$ と交換する. よって $y^\dagger F$ も存在して

$$L \circ (y^\dagger y) \cong y^\dagger (L \circ y) = y^\dagger F$$

$$\begin{array}{ccc} \widehat{C} & & \widehat{C} \\ \uparrow y & \searrow y^\dagger y & \uparrow y \\ C & \xrightarrow{y} \widehat{C} \xrightarrow{L} U & C \xrightarrow{L \circ y = F} U \\ \uparrow \cong & & \uparrow \cong \\ C & & C \end{array} = \begin{array}{ccc} \widehat{C} & & \widehat{C} \\ \uparrow y & \searrow L \circ (y^\dagger y) \cong y^\dagger F & \uparrow y \\ C & \xrightarrow{L \circ y = F} U & C \end{array}$$

となる. このとき系 29 により

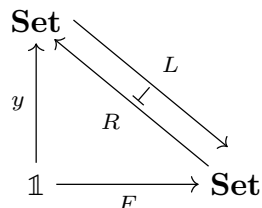
$$y^\dagger F \cong L \circ (y^\dagger y) \cong L \circ \mathrm{id} = L$$

である. また定理 15 の証明より $y^\dagger F$ は各点左 Kan 拡張だから, 定理 45 から $L \dashv F^\dagger y$ となる. 故に随伴の一意性から $R \cong F^\dagger y$ である. □

※ この随伴 $y^\dagger F \dashv F^\dagger y$ を, twitter 等で一部の人が普遍随伴と呼んでいる. 一般に広く使われている名称は無いようだが, 例えば nlab では nerve and realization [4] というページがある.

例 47. $C = \mathbb{1}$ とすれば $\widehat{\mathbb{1}} = \mathbf{Set}$ だから, 随伴 $L \dashv R: \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Set}$ に対して $F := L \circ y$

とすれば, 定理 46 (の証明) より



$L \cong y^\dagger F$, $R \cong F^\dagger y$ である. $x := F(*) \in \mathbf{Set}$ と置けば, $a \in \mathbf{Set}$ について自然に

$$R(a) \cong F^\dagger y(a) \cong \mathbf{Hom}_{\mathbf{Set}}(F-, a) \cong \mathbf{Hom}_{\mathbf{Set}}(x, a)$$

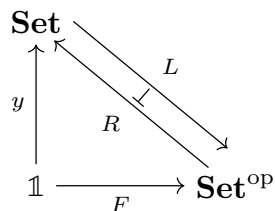
だから $R \cong \mathbf{Hom}_{\mathbf{Set}}(x, -)$ である. 一方 $L(a) \cong y^\dagger F(a) \cong \mathbf{colim}(y \downarrow a \rightarrow \mathbf{1} \xrightarrow{F} \mathbf{Set})$ であって $y \downarrow a \cong a$ となるから

$$L(a) \cong \coprod_{b \in a} x \cong a \times x$$

により $L \cong - \times x$ である. 故に, 任意の随伴 $\mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Set}$ は $- \times x \dashv \mathbf{Hom}_{\mathbf{Set}}(x, -)$ の形をしている.

また $F: \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Set}$ を圏同値とすると, これは右随伴となるから, ある $x \in \mathbf{Set}$ を使って $F \cong \mathbf{Hom}_{\mathbf{Set}}(x, -)$ と書ける. これが余極限と交換するためには $x = 1$ でなければならないから $F \cong \mathbf{id}_{\mathbf{Set}}$ である. 即ち圏同値 $\mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Set}$ は自明なものしかない. \square

例 48. $L \dashv R: \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Set}^{\text{op}}$ を随伴とする. $F := L \circ y: \mathbf{1} \rightarrow \mathbf{Set}^{\text{op}}$ と定義すれば, 定理 46 (の証明) より $L \cong y^\dagger F$, $R \cong F^\dagger y$ である.



よって $x := F(*)$ とすれば $R \cong \mathbf{Hom}_{\mathbf{Set}^{\text{op}}}(x, -) \cong \mathbf{Hom}_{\mathbf{Set}}(-, x)$ が得られる. また任意の $a, b \in \mathbf{Set}$ に対して

$$\begin{aligned} \mathbf{Hom}_{\mathbf{Set}}(a, \mathbf{Hom}_{\mathbf{Set}}(b, x)) &\cong \mathbf{Hom}_{\mathbf{Set}}(a \times b, x) \\ &\cong \mathbf{Hom}_{\mathbf{Set}}(b, \mathbf{Hom}_{\mathbf{Set}}(a, x)) \\ &\cong \mathbf{Hom}_{\mathbf{Set}^{\text{op}}}(\mathbf{Hom}_{\mathbf{Set}}(a, x), b) \end{aligned}$$

だから $\text{Hom}_{\text{Set}}(-, x) \dashv \text{Hom}_{\text{Set}}(-, x)$ である。従って $L \cong \text{Hom}_{\text{Set}}(-, x) = R$ となることが分かる*6。 \square

例 49. 小圏 J に対して随伴 $\Delta \dashv \text{lim}: \text{Set} \rightarrow \text{Set}^J$ が成り立つ。よって $F := \Delta \circ y$ と置けば、 $T \in \text{Set}^J$ に対して $\text{lim } T \cong F^\dagger y(T) \cong \text{Hom}_{\text{Set}^J}(F(*), T)$ である。

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Set} & & \\
 \uparrow y & \swarrow \Delta & \\
 \mathbb{1} & \xrightarrow{F} & \text{Set}^J
 \end{array}$$

$F(*) = \Delta(y(*)) \cong \Delta \mathbb{1}$ だから $\text{lim } T \cong \text{Hom}(\Delta \mathbb{1}, T)$ が分かる。 \square

例 50. $F: C \rightarrow D$ を関手とすると、例 6 より $F^\dagger \dashv F^{-1}: \widehat{C} \rightarrow \widehat{D}$ である。定理 46 (の証明) により、 $E := F^\dagger \circ y$ とすれば $F^\dagger \cong y^\dagger E$ である。定理 34 より $E \cong yF$ だから $F^\dagger \cong y^\dagger(yF)$ である。また定理 45 より $F^{-1} \cong (yF)^\dagger y$ である。

$$\begin{array}{ccc}
 \widehat{C} & \xrightarrow{F^\dagger} & \widehat{D} \\
 \uparrow y & \xleftarrow{F^{-1}} & \uparrow y \\
 C & \xrightarrow{F} & D
 \end{array}$$

\square

定義. 対象 $a \in C$ が small projective $\iff \text{Hom}_C(a, -)$ が余連続である。

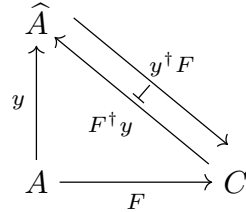
定理 51. 圏 C が、ある小圏 A を使って $C \simeq \widehat{A}$ と書ける $\iff C$ が余完備で、小さい充満部分圏 $A \subset C$ が存在して、包含関手 $F: A \rightarrow C$ が strongly generating で、任意の $a \in A$ が small projective である。

証明. (\implies) $C \simeq \widehat{A}$ のとき、 C は余完備で、米田埋込 $y: A \rightarrow C$ により $A \subset C$ は充満部分圏と見なせる。また $y^\dagger y \cong \text{id}$ は明らかに余連続かつ conservative である。

(\impliedby) 仮定の充満部分圏と包含関手 $F: A \rightarrow C$ を取る。 C が余完備だから、定理 45 に

*6 より正確に書けば $L \cong R^{\text{op}}$ である。

より普遍随伴 $y^\dagger F \dashv F^\dagger y: \widehat{A} \rightarrow C$ を得る.



$F^\dagger y$ が本質的全射かつ忠実充満であることを示せばよい. そのためにまず $F^\dagger y$ が余連続であることを示す.

$\therefore c \in C$ に対して $F^\dagger y(c) \cong \text{Hom}_C(F-, c)$ である. よって

$$\text{Hom}_C(F-, \text{colim}_j c_j) \cong \text{colim}_j \text{Hom}_C(F-, c_j)$$

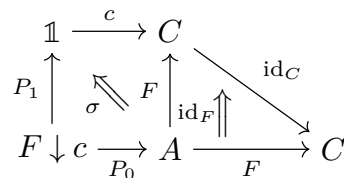
を示せばよい. \widehat{A} の余極限は各点ごとに計算すればよいから, 各対象 $a \in A$ に対して $\text{Hom}_C(a, \text{colim}_j c_j) \cong \text{colim}_j \text{Hom}_C(a, c_j)$ を示せばよい. ところがいま $a \in A$ は small projective なのでこれは成り立つ.

本質的全射であることを示すため, $P \in \widehat{A}$ を取る. 系 30 により $P \cong \text{colim}_j y(a_j)$ と書ける. $c := \text{colim}_j F(a_j) \in C$ と置けば, $F^\dagger y$ が余連続だから系 28 を使って

$$\begin{aligned} F^\dagger y(c) &\cong \text{Hom}_C(F-, c) \cong \text{Hom}_C(F-, \text{colim}_j F(a_j)) \\ &\cong \text{colim}_j \text{Hom}_C(F-, F(a_j)) \cong \text{colim}_j \text{Hom}_A(-, a_j) \\ &= \text{colim}_j y(a_j) \cong P \end{aligned}$$

となり, $F^\dagger y$ は本質的全射である.

$F^\dagger y$ が忠実充満であることを示す. そのためには定理 43 より F が稠密であることを示せばよい. 即ち $c \in C$ に対して



が余極限を与えることを示す. まず C が余完備なので $F \downarrow c \xrightarrow{P_0} A \xrightarrow{F} C$ の余極限が存在

するから、それを $\langle s, \mu \rangle$ とする。余極限の普遍性から $h: s \rightarrow c$ が存在して

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{1} & \xrightarrow{c} & C \\
 P_1 \uparrow & \nearrow h & \uparrow F \\
 F \downarrow c & \xrightarrow{P_0} & A \xrightarrow{F} C \\
 & \mu \uparrow & \uparrow s
 \end{array}
 \quad = \quad
 \begin{array}{ccc}
 \mathbb{1} & \xrightarrow{c} & C \\
 P_1 \uparrow & \nearrow \sigma & \uparrow F \\
 F \downarrow c & \xrightarrow{P_0} & A \xrightarrow{F} C \\
 & & \uparrow \text{id}_F \\
 & & \uparrow \text{id}_C
 \end{array}
 \quad (52)$$

となる。今 $F^\dagger y$ が余連続だから

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{1} & \xrightarrow{F^\dagger y(s)} & \widehat{A} \\
 P_1 \uparrow & \nearrow (F^\dagger y)\mu & \uparrow \\
 F \downarrow c & \xrightarrow{P_0} & A \xrightarrow{F} C \xrightarrow{F^\dagger y} \widehat{A}
 \end{array}
 \quad (53)$$

も余極限である。 $F^\dagger y$ の unit を η とすると、系 28 の証明より $\langle F^\dagger y, \eta \rangle$ は各点左 Kan 拡張なので

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{1} & \xrightarrow{c} & C \\
 P_1 \uparrow & \nearrow \sigma & \uparrow F \\
 F \downarrow c & \xrightarrow{P_0} & A \xrightarrow{y} \widehat{A} \\
 & & \uparrow \eta \\
 & & \uparrow F^\dagger y
 \end{array}$$

は余極限である。一方でこの図式は

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{1} & \xrightarrow{c} & C \\
 P_1 \uparrow & \nearrow \sigma & \uparrow F \\
 F \downarrow c & \xrightarrow{P_0} & A \xrightarrow{y} \widehat{A} \\
 & & \uparrow \eta \\
 & & \uparrow F^\dagger y
 \end{array}
 \quad = \quad
 \begin{array}{ccc}
 \mathbb{1} & \xrightarrow{c} & C \\
 P_1 \uparrow & \nearrow \sigma & \uparrow F \\
 F \downarrow c & \xrightarrow{P_0} & A \xrightarrow{F} C \xrightarrow{F^\dagger y} \widehat{A} \\
 & & \uparrow \text{id}_F \\
 & & \uparrow \text{id}_C \\
 & & \uparrow \eta
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{1} & \xrightarrow{c} & C \\
 P_1 \uparrow & \nearrow h & \uparrow F \\
 F \downarrow c & \xrightarrow{P_0} & A \xrightarrow{E} C \xrightarrow{F^\dagger y} \widehat{A} \\
 & & \uparrow \mu \\
 & & \uparrow s \\
 & & \uparrow \eta
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
= \begin{array}{c} \mathbb{1} \\ \uparrow P_1 \\ F \downarrow c \end{array} \begin{array}{c} \xrightarrow{(F^\dagger y)\mu} \\ \uparrow \\ \xrightarrow{P_0} \end{array} \begin{array}{c} A \\ \xrightarrow{E} \\ \eta \uparrow \end{array} \begin{array}{c} C \\ \xrightarrow{F^\dagger y} \\ \uparrow \end{array} \hat{A} \\
\begin{array}{c} \xrightarrow{F^\dagger y(c)} \\ \nearrow F^\dagger y(h) \\ \searrow F^\dagger y(s) \end{array} \\
\text{--- } y \text{ ---}
\end{array}$$

と変形できる. 今 F が忠実充満だから定理 36 より η は同型である. (53) が余極限だったから, その普遍性により $F^\dagger y(h)$ は同型になる. 今 F が strongly generating だから h も同型である. 故に (52) の右辺も余極限となる. \square

定理 54. 小圏 C 上の前層 P に対して圏同値 $\widehat{y \downarrow P} \simeq \widehat{C}/P$ が成り立つ. (特に $a \in C$ に対して $P := y(a)$ の場合を考えると, $y \downarrow y(a) \cong C/a$ だから $\widehat{C}/a \simeq \widehat{C}/y(a)$ となる.)

証明. コンマ圏の定義を考えれば $y \downarrow P$ は充満部分圏 $y \downarrow P \subset \widehat{C}/P$ とみなせる. この包含関手を $F: y \downarrow P \rightarrow \widehat{C}/P$ とする. また米田埋込 $y \downarrow P \rightarrow \widehat{y \downarrow P}$ をここでは区別のため z と書く. 定理 51 (の証明) によれば

- (1) \widehat{C}/P が余完備である.
- (2) 包含関手 $F: y \downarrow P \rightarrow \widehat{C}/P$ が strongly generating である.
- (3) 任意の対象 $x \in y \downarrow P$ が small projective である.

を示せば圏同値 $\widehat{y \downarrow P} \simeq \widehat{C}/P$ が分かる.

$$\begin{array}{ccc}
\widehat{y \downarrow P} & & \\
\uparrow z & \swarrow z^\dagger F & \\
y \downarrow P & \xrightarrow{F} & \widehat{C}/P
\end{array}$$

(1) \widehat{C} が余完備だから, 余完備な圏 U と対象 $u \in U$ に対して U/u が余完備であることを示せばよい. そのために J を小圏として $T: J \rightarrow U/u$ を関手とする. $U/u \cong \text{id}_U \downarrow u$ はコンマ圏だから次の図式が得られる.

$$\begin{array}{ccccc}
& & \mathbb{1} & \xrightarrow{u} & U \\
& & \uparrow P_1 & \swarrow \sigma & \uparrow \text{id}_U \\
J & \xrightarrow{T} & U/u & \xrightarrow{P_0} & U
\end{array}$$

U が余完備だから $P_0T: J \rightarrow U$ の余極限 $\langle a, \mu \rangle$ が存在する. この余極限の普遍性により, 射 $h: a \rightarrow u$ が存在して次の等号が成り立つ.

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{1} & \xrightarrow{u} & U \\
 P_1T \uparrow & \nearrow h & \uparrow \\
 J & \xrightarrow{T} U/u \xrightarrow{P_0} & U \\
 & \mu \uparrow a & \\
 & & \nearrow h
 \end{array}
 =
 \begin{array}{ccc}
 \mathbb{1} & \xrightarrow{u} & U \\
 P_1T \uparrow & \nearrow \sigma_T & \uparrow \\
 J & \xrightarrow{T} U/u \xrightarrow{P_0} & U
 \end{array}$$

即ち $j \in J$ に対して $h \circ \mu_j = \sigma_{Tj}$ であり, μ_j は U/u の射 $\mu_j: \langle P_0Tj, \sigma_{Tj} \rangle \rightarrow \langle a, h \rangle$ となる.

$$\begin{array}{ccc}
 P_0Tj & \xrightarrow{\sigma_{Tj}} & u \\
 \mu_j \downarrow & & \nearrow h \\
 a & &
 \end{array}$$

これは言い換えると $\mu_j: Tj \rightarrow \langle a, h \rangle$ ということである. 即ち自然変換 $\mu: T \Rightarrow \Delta \langle a, h \rangle$ となる.

後は $\langle \langle a, h \rangle, \mu \rangle$ が T の余極限となることを示せばよい. そのために $\theta: T \Rightarrow \Delta \langle b, g \rangle$ を自然変換とすると, 次の実線の可換図式が得られる.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & P_0Tj & \xrightarrow{\theta_j} & b \\
 & & \mu_j \searrow & & \nearrow l \\
 & & a & & \\
 & & \mu_i \searrow & & \nearrow \\
 & & P_0Ti & \xrightarrow{\theta_i} & b \\
 & & \sigma_{Tj} \searrow & & \nearrow h \\
 & & u & & \nearrow g \\
 & & \sigma_{Ti} \searrow & & \nearrow
 \end{array}$$

余極限 $\langle a, \mu \rangle$ の普遍性により, 点線の射 l が存在して $l \circ \mu_i = \theta_i$ となる. このとき $\langle a, \mu \rangle$ の普遍性により $g \circ l = h$ である. 故に l は U/u の射 $l: \langle a, h \rangle \rightarrow \langle b, g \rangle$ を与える. 再び $\langle a, \mu \rangle$ の普遍性から, このような l は明らかに一意である. 以上により $\langle \langle a, h \rangle, \mu \rangle$ が余極限となることが分かった.

(2) まず \widehat{C}/P の対象 $\langle Q, \tau \rangle$ に対して $F^\dagger z(\langle Q, \tau \rangle) \cong \text{Hom}_{\widehat{C}/P}(-, \langle Q, \tau \rangle) \in \widehat{y \downarrow P}$ は次で与えられる.

- $\langle a, \theta \rangle \in y \downarrow P$ を対象とする. つまり $\theta: y(a) \Rightarrow P$ である. 米田の補題よりこのは元 $u \in Pa$ と対応する (以下, この対応により初めから $\langle a, u \rangle$ を $y \downarrow P$ の対象と

みなすことにする). このとき $\text{Hom}_{\widehat{C}/P}(\langle a, u \rangle, \langle Q, \tau \rangle) \cong \{s \in Qa \mid \tau_a(s) = u\}$ である.

$$\begin{array}{ccccc}
 y(a) & \longrightarrow & Q & & \text{Hom}_C(a, a) & \longrightarrow & Qa & & \text{id}_a & \longrightarrow & s \\
 & \searrow & \swarrow & & \searrow & \swarrow & & & \searrow & \swarrow & \\
 & & P & & Pa & & & & u & &
 \end{array}$$

- $y \downarrow P$ の射 $f: \langle a, u \rangle \rightarrow \langle b, v \rangle$ に対して

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Hom}_{\widehat{C}/P}(f, \langle Q, \tau \rangle): \{s \in Qb \mid \tau_b(s) = v\} & \longrightarrow & \{t \in Qa \mid \tau_a(t) = u\} \\
 \Downarrow & & \Downarrow \\
 s & \longmapsto & Qf(s)
 \end{array}$$

次に $\beta: \langle Q, \tau \rangle \rightarrow \langle R, \rho \rangle$ を \widehat{C}/P の射とすると $F^\dagger z(\beta)$ は自然変換であり, その $\langle a, u \rangle$ 成分は

$$\begin{array}{ccc}
 F^\dagger z(\beta)_{\langle a, u \rangle}: \{s \in Qa \mid \tau_a(s) = u\} & \longrightarrow & \{t \in Ra \mid \rho_a(t) = u\} \\
 \Downarrow & & \Downarrow \\
 s & \longmapsto & \beta_a(s)
 \end{array}$$

で与えられる.

$F^\dagger z$ が conservative であることを示すため, $F^\dagger z(\beta)$ が自然同型であるとする. つまり各 $\langle a, u \rangle \in y \downarrow P$ に対して $F^\dagger z(\beta)_{\langle a, u \rangle}$ は全単射である. このとき $a \in C$ に対して $\beta_a: Qa \rightarrow Ra$ が全単射であることを示せばよい.

単射であることを示すため $s, t \in Qa$ が $\beta_a(s) = \beta_a(t)$ を満たすとする. このとき

$$\tau_a(s) = \rho_a \circ \beta_a(s) = \rho_a \circ \beta_a(t) = \tau_a(t)$$

である. よって $u := \tau_a(s)$ とすると $s, t \in \text{dom}(F^\dagger z(\beta)_{\langle a, u \rangle})$ であり

$$F^\dagger z(\beta)_{\langle a, u \rangle}(s) = \beta_a(s) = \beta_a(t) = F^\dagger z(\beta)_{\langle a, u \rangle}(t)$$

だから $F^\dagger z(\beta)_{\langle a, u \rangle}$ の単射性により $s = t$ が分かる.

全射であることを示すため $t \in Ra$ とする. $u := \rho_a(t)$ とすれば $t \in \text{cod}(F^\dagger z(\beta)_{\langle a, u \rangle})$ である. 故に $s \in \text{dom}(F^\dagger z(\beta)_{\langle a, u \rangle})$ が存在して $F^\dagger z(\beta)_{\langle a, u \rangle}(s) = t$ とできる. このとき明らかに $\beta_a(s) = t$ である.

- (3) $\langle a, u \rangle \in y \downarrow P$ に対して $\text{Hom}_{\widehat{C}/P}(\langle a, u \rangle, -)$ が余連続であることを示す.

J を小圏として $T: J \rightarrow \widehat{C}/P$ を関手とする. $i \in J$ に対して $T(i) = \langle Q^i, \tau^i \rangle$ と書き, $\text{colim } T = \langle \langle R, \rho \rangle, \mu \rangle$ と書くことにする. つまり

$$\begin{array}{ccc} \langle Q^i, \tau^i \rangle & \xrightarrow{\mu_i} & \langle R, \rho \rangle \\ \downarrow & \nearrow & \\ \langle Q^j, \tau^j \rangle & \xrightarrow{\mu_j} & \end{array}$$

が余極限を与えている. このとき図式

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\widehat{C}/P}(\langle a, u \rangle, \langle Q^i, \tau^i \rangle) & \xrightarrow{\text{Hom}_{\widehat{C}/P}(\langle a, u \rangle, \mu_i)} & \text{Hom}_{\widehat{C}/P}(\langle a, u \rangle, \langle R, \rho \rangle) \\ \downarrow & \nearrow & \\ \text{Hom}_{\widehat{C}/P}(\langle a, u \rangle, \langle Q^j, \tau^j \rangle) & \xrightarrow{\text{Hom}_{\widehat{C}/P}(\langle a, u \rangle, \mu_j)} & \end{array}$$

が $\text{colim } \text{Hom}_{\widehat{C}/P}(\langle a, u \rangle, T-)$ を与えることを示せばよい. 上記で計算した通り, この図式は

$$\begin{array}{ccc} \{s \in Q^i a \mid \tau_a^i(s) = u\} & \xrightarrow{(\mu_i)_a} & \{s \in Ra \mid \rho_a(s) = u\} \\ \downarrow & \nearrow & \\ \{s \in Q^j a \mid \tau_a^j(s) = u\} & \xrightarrow{(\mu_j)_a} & \end{array} \quad (55)$$

である. ここで (1) で示した通り $R = \text{colim}_i Q^i$ であり, ρ はその普遍性により得られる射である. 次の (i)(ii) の場合に (55) が余極限を与えることを示せばよい.

(i) J が離散圏の場合, 図式 (55) は次のようになる.

$$\begin{array}{ccc} \{s \in Q^i a \mid \tau_a^i(s) = u\} & \xrightarrow{(\mu_i)_a} & \left\{ s \in \prod_{i \in J} Q^i a \mid \rho_a(s) = u \right\} \\ \uparrow & \nearrow & \\ \{s \in Q^j a \mid \tau_a^j(s) = u\} & \xrightarrow{(\mu_j)_a} & \end{array}$$

ρ の取り方から明らかに $\left\{ s \in \prod_{i \in J} Q^i a \mid \rho_a(s) = u \right\} = \prod_{i \in J} \{s \in Q^i a \mid \tau_a^i(s) = u\}$ だからこの場合は良い.

(ii) $J = (j \leftarrow i \rightarrow k)$ の場合, 図式 (55) は次のようになる.

$$\begin{array}{ccc}
 & \{s \in Q^j a \mid \tau_a^j(s) = u\} & \xrightarrow{(\mu_j)_a} \\
 \{s \in Q^i a \mid \tau_a^i(s) = u\} & \searrow & \{s \in Ra \mid \rho_a(s) = u\} \\
 & \{s \in Q^k a \mid \tau_a^k(s) = u\} & \xrightarrow{(\mu_k)_a}
 \end{array}$$

ここで $Ra = (Q^j a \amalg Q^k a) / \sim$ であり, ρ の取り方から

$$\{s \in Ra \mid \rho_a(s) = u\} = (\{s \in Q^j a \mid \tau_a^j(s) = u\} \amalg \{s \in Q^k a \mid \tau_a^k(s) = u\}) / \sim$$

となるからこの場合も良い. □

※ (1) の証明で, 余極限 $\langle a, \mu \rangle$ から自然変換 $\mu: T \Rightarrow \Delta \langle a, h \rangle$ を得る操作は圏論的によく分からないように見えるが, これは実は「コマ圏の 2 次元的普遍性」で説明できる. (2 次元的普遍性については「2-category での極限」の PDF を参照.)

まず h の定義の図式は書き換えると

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{1} & \xrightarrow{u} & U \\
 P_1 T \uparrow & \swarrow \Delta h & \uparrow \text{id}_U \\
 J & \xrightarrow{\Delta a} & U \\
 P_0 T \uparrow & \swarrow \mu & \uparrow
 \end{array}
 =
 \begin{array}{ccc}
 \mathbb{1} & \xrightarrow{u} & U \\
 P_1 T \uparrow & \swarrow \sigma_T & \uparrow \text{id}_U \\
 J & \xrightarrow{\text{id}} & U \\
 P_0 T \uparrow & \swarrow & \uparrow
 \end{array}$$

となるが, ここで σ_T と Δh については次の等式が成り立つ.

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{1} & \xrightarrow{u} & U \\
 P_1 T \uparrow & \swarrow \sigma & \uparrow \text{id}_U \\
 U/u & \xrightarrow{P_0} & U \\
 J \uparrow & \swarrow T & \uparrow \\
 P_0 T & &
 \end{array}
 =
 \begin{array}{ccc}
 \mathbb{1} & \xrightarrow{u} & U \\
 P_1 T \uparrow & \swarrow \sigma_T & \uparrow \text{id}_U \\
 J & \xrightarrow{P_0 T} & U
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{1} & \xrightarrow{u} & U \\
 P_1 T \uparrow & \swarrow \sigma & \uparrow \text{id}_U \\
 U/u & \xrightarrow{P_0} & U \\
 J \uparrow & \swarrow \Delta \langle a, h \rangle & \uparrow \\
 P_0 T & \xrightarrow{\Delta a} &
 \end{array}
 =
 \begin{array}{ccc}
 \mathbb{1} & \xrightarrow{u} & U \\
 P_1 T \uparrow & \swarrow \Delta h & \uparrow \text{id}_U \\
 J & \xrightarrow{\Delta a} & U
 \end{array}$$

即ち $\sigma_T, \Delta h$ に 1 次元的普遍性で対応するのはそれぞれ $T, \Delta\langle a, h \rangle$ である. 従ってコ
ンマ圏の 2 次元的普遍性により, ある $\nu: T \Rightarrow \Delta\langle a, h \rangle$ が存在して

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{c} \Delta\langle a, h \rangle \\ \begin{array}{ccc} J & \xrightarrow{\quad} & U/u \xrightarrow{P_0} U \\ \uparrow \nu & \nearrow & \\ T & & \end{array} \end{array} & = & \begin{array}{c} \Delta a \\ \begin{array}{ccc} J & \xrightarrow{\quad} & U \\ \uparrow \mu & \nearrow & \\ P_0 T & & \end{array} \end{array} \\
 \\
 \begin{array}{c} \mathbb{1} \\ P_1 \uparrow \\ U/u \\ \begin{array}{ccc} \Delta\langle a, h \rangle & \begin{array}{ccc} \uparrow \nu & \nearrow & \\ \leftarrow & & \\ T & & \end{array} \\ J \end{array} \end{array} & = & \begin{array}{c} \mathbb{1} \\ \begin{array}{ccc} \uparrow & \nearrow & \\ P_1 T & \begin{array}{ccc} \text{id} & \leftarrow & \\ \leftarrow & & \\ P_1 T & & \end{array} & \uparrow \\ J \end{array} \end{array}
 \end{array}$$

となる. この $\nu: T \Rightarrow \Delta\langle a, h \rangle$ が T の余極限を与えることを示せばよい. そこで自然
変換 $\theta: T \Rightarrow \Delta\langle b, g \rangle$ を取る. σ と θ の水平合成を 2 通りの合成で考えれば

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{c} \mathbb{1} \xrightarrow{u} U \\ \begin{array}{ccc} P_1 T & \begin{array}{ccc} \uparrow & \nearrow & \\ \Delta g & \leftarrow & \\ \uparrow & & \\ J & \begin{array}{ccc} \uparrow P_0 \theta & \nearrow & \\ \Delta b & \leftarrow & \\ P_0 T & & \end{array} & \uparrow \\ \text{id}_U \end{array} \end{array} \end{array} & = & \begin{array}{c} \mathbb{1} \xrightarrow{u} U \\ \begin{array}{ccc} P_1 T & \begin{array}{ccc} \uparrow & \nearrow & \\ \sigma_T & \leftarrow & \\ \uparrow & & \\ J & \begin{array}{ccc} \uparrow P_0 \theta & \nearrow & \\ \text{id} & \leftarrow & \\ P_0 T & & \end{array} & \uparrow \\ \text{id}_U \end{array} \end{array} \end{array}
 \end{array}$$

を得る. 一方で $\langle a, \mu \rangle$ の普遍性により次の l が取れる.

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{c} \mathbb{1} \\ \begin{array}{ccc} P_1 T & \begin{array}{ccc} \uparrow & \nearrow & \\ b & \leftarrow & \\ \uparrow l & & \\ J & \begin{array}{ccc} \uparrow \mu & \nearrow & \\ a & \leftarrow & \\ T & & \end{array} & \uparrow \\ U/u \xrightarrow{P_0} U \end{array} \end{array} \end{array} & = & \begin{array}{c} \mathbb{1} \\ \begin{array}{ccc} P_1 T & \begin{array}{ccc} \uparrow & \nearrow & \\ b & \leftarrow & \\ P_0 \theta & \leftarrow & \\ J & \begin{array}{ccc} \uparrow P_0 \theta & \nearrow & \\ U/u & \leftarrow & \\ T & & \end{array} & \uparrow \\ U \end{array} \end{array} \end{array}
 \end{array}$$

このとき

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{c} \mathbb{1} \xrightarrow{u} U \\ \begin{array}{ccc} P_1 T & \begin{array}{ccc} \uparrow & \nearrow & \\ \Delta g & \leftarrow & \\ \uparrow \Delta l & & \\ J & \begin{array}{ccc} \uparrow \mu & \nearrow & \\ \Delta a & \leftarrow & \\ P_0 T & & \end{array} & \uparrow \\ \text{id}_U \end{array} \end{array} \end{array} & = & \begin{array}{c} \mathbb{1} \xrightarrow{u} U \\ \begin{array}{ccc} P_1 T & \begin{array}{ccc} \uparrow & \nearrow & \\ \Delta g & \leftarrow & \\ \uparrow P_0 \theta & & \\ J & \begin{array}{ccc} \uparrow P_0 \theta & \nearrow & \\ \Delta b & \leftarrow & \\ P_0 T & & \end{array} & \uparrow \\ \text{id}_U \end{array} \end{array} \end{array}
 \end{array}$$

$$= \begin{array}{ccc} \mathbb{1} & \xrightarrow{u} & U \\ \uparrow & \nearrow \sigma_T & \uparrow \text{id}_U \\ P_1 T & \xleftarrow{\text{id}} P_1 T & \\ \uparrow & & \uparrow \\ J & & U \\ \searrow & & \nearrow \\ & P_0 T & \end{array} = \begin{array}{ccc} \mathbb{1} & \xrightarrow{u} & U \\ \uparrow & \nearrow \Delta h & \uparrow \text{id}_U \\ P_1 T & \xleftarrow{\text{id}} P_1 T & \\ \uparrow & & \uparrow \\ J & \xrightarrow{\Delta a} & U \\ \searrow & \nearrow \mu & \nearrow \\ & P_0 T & \end{array}$$

となるから、 $\langle a, \mu \rangle$ の普遍性により

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{1} & \xrightarrow{u} & U \\ \uparrow & \nearrow \Delta g & \uparrow \text{id}_U \\ P_1 T & \xleftarrow{\Delta b} P_1 T & \\ \uparrow & & \uparrow \\ J & \xrightarrow{\Delta a} & U \\ \searrow & \nearrow \Delta l & \nearrow \\ & P_0 T & \end{array} = \begin{array}{ccc} \mathbb{1} & \xrightarrow{u} & U \\ \uparrow & \nearrow \Delta h & \uparrow \text{id}_U \\ P_1 T & \xleftarrow{\text{id}} P_1 T & \\ \uparrow & & \uparrow \\ J & \xrightarrow{\Delta a} & U \end{array}$$

が得られる。故に2次元的普遍性から、ある $\xi: \Delta\langle a, h \rangle \Rightarrow \Delta\langle b, g \rangle$ が存在して

$$\begin{array}{ccc} \Delta\langle b, g \rangle & & \\ \uparrow \xi & \xrightarrow{P_0} & U \\ \Delta\langle a, h \rangle & \xrightarrow{U/u} & U \end{array} = \begin{array}{ccc} \Delta b & & \\ \uparrow \Delta l & \xrightarrow{\Delta a} & U \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{1} & & \\ P_1 \uparrow & & \\ U/u & & \\ \Delta\langle b, g \rangle \left(\begin{array}{c} \uparrow \xi \\ \xleftarrow{\Delta a} \end{array} \right) \Delta\langle a, h \rangle & & \\ J & & \end{array} = \begin{array}{ccc} \mathbb{1} & & \\ \uparrow & & \\ P_1 T & \xleftarrow{\text{id}} P_1 T & \\ \uparrow & & \\ J & & \end{array}$$

となる。このとき

$$\begin{array}{ccc} \Delta\langle b, g \rangle & & \\ \uparrow \xi & \xrightarrow{P_0} & U \\ \Delta\langle a, h \rangle & \xrightarrow{U/u} & U \\ \uparrow \nu & & \\ T & & \end{array} = \begin{array}{ccc} \Delta b & & \\ \uparrow \Delta l & \xrightarrow{\Delta a} & U \\ \uparrow \mu & & \\ P_0 T & & \end{array}$$

$$= \begin{array}{ccc} \Delta b & & \\ \uparrow P_0 \theta & & \\ P_0 T & & \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \mathbb{1} \\
 P_1 \uparrow \\
 U/u \\
 \Delta\langle a, h \rangle \\
 \xi \leftarrow \uparrow \nu \leftarrow \\
 J
 \end{array}
 \xrightarrow{\Delta\langle b, g \rangle}
 \begin{array}{c}
 \mathbb{1} \\
 P_1 T \uparrow \\
 P_1 T \\
 \text{id} \leftarrow \uparrow \text{id} \leftarrow \\
 J
 \end{array}
 =
 \begin{array}{c}
 \mathbb{1} \\
 P_1 T \uparrow \\
 P_1 T \\
 \text{id} \leftarrow \uparrow \text{id} \leftarrow \\
 J
 \end{array}$$

だから 2 次元の普遍性 (一意性) により

$$\begin{array}{c}
 \Delta\langle b, g \rangle \\
 \uparrow \xi \\
 J \xrightarrow{\Delta\langle a, h \rangle} U/u \\
 \uparrow \nu \\
 T
 \end{array}
 =
 \begin{array}{c}
 \Delta\langle b, g \rangle \\
 \uparrow \theta \\
 J \xrightarrow{\quad} U/u \\
 T
 \end{array}$$

が分かる.

参考文献

- [1] S. Mac Lane, Categories for the Working Mathematician, Springer, 2nd ed. 1978 版 (1998)
- [2] ft_math さんによる圏論祭, 2012 年 12 月 8 日, https://alg-d.com/math/ft_math/
- [3] ft_math さんによる圏論祭, 2013 年 12 月 7 日・8 日, https://alg-d.com/math/ft_math/
- [4] nLab, nerve and realization, <https://ncatlab.org/nlab/show/nerve+and+realization>