

圏論とは何か

alg-d

https://alg-d.com/math/kan_extension/

2025年1月12日

このPDFでは圏の定義と例を使って、圏論がどういうものなのかを紹介する。

目次

1	圏論とは	1
2	圏の例	6
3	関手の例	10

1 圏論とは

「 $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ と $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ は (加法群として) 同型か？」という問題を考える。これはもちろん同型ではない。何故かというと $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ は 4 つの元からなる集合で、 $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ は 5 つの元からなる集合だから、つまりそもそも濃度が違う (=全単射が無い) から、同型になりえない。これは少し難しく言えば

群として同型 \implies 集合として同型 (濃度が同じと言うことを、あえてこう書く)

という命題の対偶を考えていることになる。

もう少し難しい例を出すと、位相空間には「基本群」という概念がある。位相空間 X に対して基本群と呼ばれる群 $\pi(X)$ が構成される。(あとで書くように厳密には少し違うが、今は気にしないことにする。) この「基本群」は次を満たす。

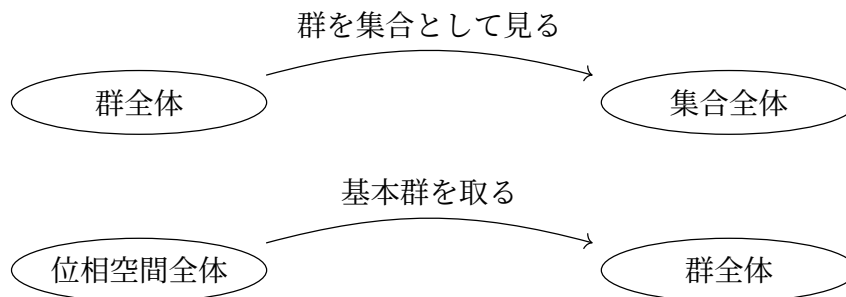
位相空間が同型 (=同相) \implies 基本群が同型

式で書けば

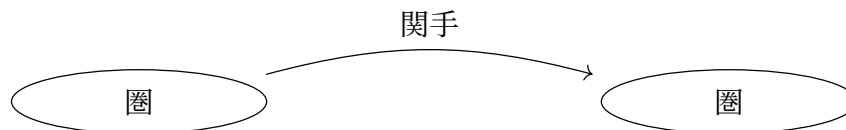
$$X \cong Y \implies \pi(X) \cong \pi(Y)$$

という命題が成り立つことになる。故に位相空間が同相かどうか調べるには、まず基本群を調べればよい。(基本群が同型でなければ、元の位相空間は同相ではない。)

この状況を一般化したものが圏論である。絵で書けば



が先の2つの例であるが、これを一般化したものが「圏」と「関手」になる。



定義. 圏 (category) C とは2つの (集合とは限らない) 集まり $\text{Ob}(C)$, $\text{Mor}(C)$ の組であって、以下の条件をみたすものをいう。なお元 $a \in \text{Ob}(C)$ を対象 (object), $f \in \text{Mor}(C)$ を射 (morphism) と呼ぶ。

- (1) 各 $f \in \text{Mor}(C)$ に対して、ドメイン (domain) と呼ばれる対象 $\text{dom}(f) \in \text{Ob}(C)$ とコドメイン (codomain) と呼ばれる対象 $\text{cod}(f) \in \text{Ob}(C)$ が定められている。
 $\text{dom}(f) = a$, $\text{cod}(f) = b$ であることを $f: a \rightarrow b$ や $a \xrightarrow{f} b$ と書いて表す。また対象 $a, b \in \text{Ob}(C)$ に対して $\text{Hom}_C(a, b) := \{f \in \text{Mor}(C) \mid f: a \rightarrow b\}$ と書く。
- (2) 2つの射 $f, g \in \text{Mor}(C)$ が $\text{cod}(f) = \text{dom}(g)$ を満たすとき、 f と g の合成射と呼ばれる射 $g \circ f$ が定められていて、 $\text{dom}(g \circ f) = \text{dom}(f)$, $\text{cod}(g \circ f) = \text{cod}(g)$ を満たす。(つまり $f: a \rightarrow b$, $g: b \rightarrow c$ のとき $g \circ f: a \rightarrow c$ である。)
- (3) 射の合成は結合律を満たす。即ち、 $f: a \rightarrow b$, $g: b \rightarrow c$, $h: c \rightarrow d$ に対して $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$ が成り立つ。
- (4) 各 $a \in \text{Ob}(C)$ に対して、恒等射と呼ばれる射 $\text{id}_a: a \rightarrow a$ が存在して、射の合成に関する単位元となる。即ち $f: a \rightarrow b$ に対して $f \circ \text{id}_a = f$, $\text{id}_b \circ f = f$ である。

文脈から明らかな場合、 $a \in \text{Ob}(C)$, $f \in \text{Mor}(C)$ を単に $a \in C$, $f \in C$ と書くことがある。また id_a を 1_a などと書く文献もある。

定義を見ると、圏は「集合と写像」を意識して定義されていることが分かると思う。なので一番基本的な例は次に出す「集合と写像のなす圏」である。

例 1. 集合を対象、写像を射とすれば圏になる。この圏を **Set** で表す。より詳しく書けば以下のようなになる。

- $\text{Ob}(\mathbf{Set}) :=$ 「全ての集合の集まり」と定める。
- $\text{Mor}(\mathbf{Set}) := \{f \mid f \text{ はある集合 } X \text{ からある集合 } Y \text{ への写像}\}$ と定める。
- X から Y への写像 f に対して $\text{dom}(f) := X$, $\text{cod}(f) := Y$ と定める。
- 射の合成 $g \circ f$ は通常の写像の合成で定める。勿論この合成は結合律を満たす。
- 集合 X に対して恒等射 id_X を恒等写像 $X \rightarrow X$ で定める。勿論 $f \circ \text{id} = f$, $\text{id} \circ g = g$ を満たす。

以上により圏 **Set** が得られた。 □

同じようにして、以下のような圏が得られる。

例 2. 群を対象、群準同型を射とすれば圏になる。この圏を **Grp** で表す。(恒等写像は群準同型であること、群準同型の合成が群準同型になること、に注意すればよい。) □

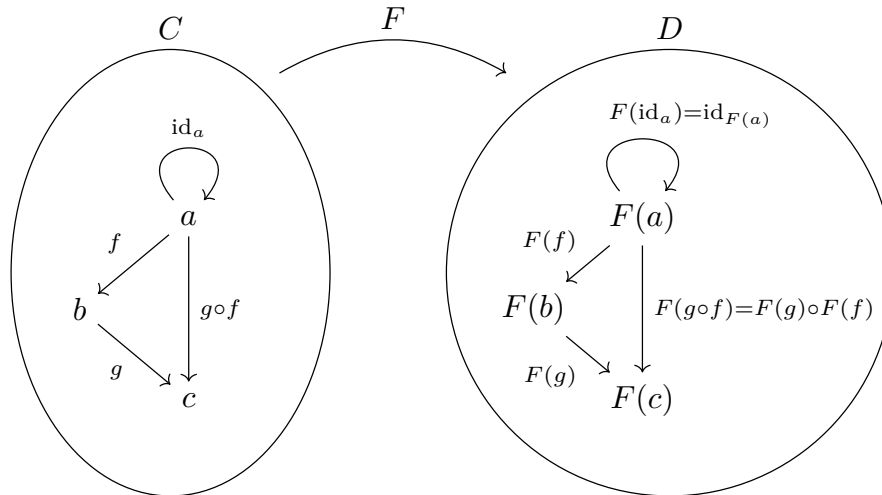
例 3. 位相空間を対象、連続写像を射とすれば圏になる。この圏を **Top** で表す。 □

次に関手を定義する。これは圏の「準同型」とでも言うべきものである。

定義. C, D を圏とする。 C から D への関手 (functor) $F: C \rightarrow D$ とは $a \in \text{Ob}(C)$ に $F(a) \in \text{Ob}(D)$ を、 $f \in \text{Mor}(C)$ に $F(f) \in \text{Mor}(D)$ を対応させる関数であって、以下を満たすものである。

- (1) $f: a \rightarrow b$ のとき $F(f): F(a) \rightarrow F(b)$ である。
(即ち $\text{dom}(F(f)) = F(\text{dom}(f))$, $\text{cod}(F(f)) = F(\text{cod}(f))$ となる。)
- (2) $\text{cod}(f) = \text{dom}(g)$ のとき $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$ である。
- (3) $a \in C$ に対して $F(\text{id}_a) = \text{id}_{F(a)}$ である。

この定義を絵で書くと次のようになる。



$F(a), F(f)$ の括弧を省略して Fa, Ff と書くこともある。

例 4. $U: \mathbf{Grp} \rightarrow \mathbf{Set}$ を以下のように定義する。

- 群 $\langle G, \cdot \rangle \in \mathbf{Grp}$ に対して $U(\langle G, \cdot \rangle) := G$ と定める^{*1}。即ち、群 G に対してその「演算を忘れた」集合 G を与える。
- 群準同型 $f: G \rightarrow G'$ に対して $U(f) := f$ と定める。(群準同型は写像であることに注意する。)

このように定めれば明らかに U は関手である。このような構造を忘れる関手 U を一般に忘却関手 (forgetful functor) と呼ぶ。 □

最初に指摘したように $f \in \mathbf{Mor}(\mathbf{Grp})$ が群の同型写像ならば $U(f) \in \mathbf{Mor}(\mathbf{Set})$ が集合の同型写像 (即ち全単射) となるのであるが、実はこの性質は一般の関手に対して成り立つ (命題 8)。それを示すため、一般の圏 C における同型を定義する。

定義. C を圏, $a, b \in C$ を対象とする。

(1) C の射 $f: a \rightarrow b$ が同型射

\iff ある射 $g: b \rightarrow a$ が存在して $g \circ f = \text{id}_a, f \circ g = \text{id}_b$ となる。

(2) a と b が同型 ($a \cong b$ で表す) \iff ある同型射 $f: a \rightarrow b$ が存在する。

^{*1} ここでは順序対を $\langle \cdot, \cdot \rangle$ を使って表している。つまり群というのは集合 G と演算 \cdot の組だったから、それをここでは $\langle G, \cdot \rangle$ と書いている。順序対は (a, b) のように (\cdot, \cdot) を使う人も多いが、このサイトの PDF では一貫して $\langle \cdot, \cdot \rangle$ を使い $\langle a, b \rangle$ のように書く。

$f: a \rightarrow b$ を同型射とすると, $g: b \rightarrow a$ で $g \circ f = \text{id}_a$, $f \circ g = \text{id}_b$ を満たすものは唯一つしかないことが容易に分かる (群において逆元が一意的なと同じである). そこでこの g を f の逆射といい, f^{-1} で表す.

例 5. 圏 **Set** における同型射 $f: a \rightarrow b$ とは全単射のことである. またこのとき f の逆射 $f^{-1}: b \rightarrow a$ は f の逆写像である. □

例 6. 圏 **Grp** における同型射とは, 群同型写像のことである. □

例 7. 圏 **Top** における同型射とは, 同相写像のことである. □

命題 8. C, D を圏, $F: C \rightarrow D$ を関手とする. このとき $f: a \rightarrow b$ が C の同型射ならば, $F(f): F(a) \rightarrow F(b)$ も D の同型射である (特に $F(f)^{-1} = F(f^{-1})$ となる). 従って $a \cong b$ ならば $F(a) \cong F(b)$ である.

証明. $f: a \rightarrow b$ を同型射とすると $f^{-1} \circ f = \text{id}_a$ かつ $f \circ f^{-1} = \text{id}_b$ である. これらに関手 F を適用すれば $F(f^{-1}) \circ F(f) = \text{id}_{F(a)}$ と $F(f) \circ F(f^{-1}) = \text{id}_{F(b)}$ を得る. 故に $F(f): F(a) \rightarrow F(b)$ は同型射であり, $F(f)^{-1} = F(f^{-1})$ となる. □

例 9. G, G' を群, $U: \mathbf{Grp} \rightarrow \mathbf{Set}$ を忘却関手とすると, 群の同型 $G \cong G'$ が成り立てば $U(G) \cong U(G')$ である. □

例 10. 位相空間 X と点 $x \in X$ の組 $\langle X, x \rangle$ を基点付き位相空間と呼ぶ. 基点付き位相空間の圏 **Top*** を以下のように定める.

- 基点付き位相空間を対象とする.
- 射 $\langle X, x \rangle \rightarrow \langle Y, y \rangle$ は連続写像 $f: X \rightarrow Y$ であって, $f(x) = y$ を満たすものである.
- 射の合成 $g \circ f$ は通常の写像の合成で定める.

基点付き位相空間 $\langle X, x \rangle$ に対して, 基本群 (ホモトピー群) と呼ばれる群 $\pi_1(X, x)$ が定義される*2. このとき連続写像 $f: X \rightarrow Y$ に対して準同型 $\pi_1(f): \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(Y, f(x))$ が定まり,

$$\pi_1(g \circ f) = \pi_1(g) \circ \pi_1(f), \quad \pi_1(\text{id}_X) = \text{id}_{\pi_1(X, x)}$$

を満たすのであった. 即ち $\pi_1: \mathbf{Top}_* \rightarrow \mathbf{Grp}$ は関手となることが分かる. よって同相写

*2 基本群の定義について知りたい場合は「例: 基本亜群」の PDF を参照.

像 $f: X \rightarrow Y$ が存在すれば同型 $\pi_1(X, x) \cong \pi_1(Y, f(x))$ が成り立つ。 \square

初めに述べた通り基本群は位相空間が同相かどうかを判断する道具を与えるのであるが、その性質は例 10 の通り関手の性質から来ている。従って基本群に限らず、何らかの圏 C と関手 $F: \mathbf{Top} \rightarrow C$ を構成することができれば、この F を使って位相空間が同相かどうかを判断することができる*3。勿論これは \mathbf{Top} に限らず、例えば \mathbf{Grp} に対しても同様のことがいえる。そこでより一般に、圏や関手についての性質を調べようというのが圏論である。

2 圏の例

さて、今まで出てきた圏は全て対象が「集合に構造が入ったもの」で、射が「写像」であった。しかし、圏はこのようなものとは限らない。圏の定義を満たしてさえいけばよいからである。

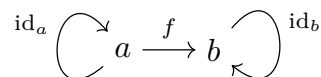
例 11. $\text{Ob}(C) = \text{Mor}(C) := \emptyset$ と定めると、この C は明らかに圏の条件を満たす。この圏を空圏 (empty category) といい $\mathbb{0}$ で表す。 \square

例 12. 対象を唯 1 つ $*$ だけとし、射も恒等射 id_* だけとすれば、これも明らかに圏となる。これを 1 点圏 (one-point category) もしくは終圏 (terminal category) といい $\mathbb{1}$ で表す。 $\mathbb{1}$ は絵で書けば



のようになる。 \square

例 13. 対象を 2 つ a, b として、射は恒等射 (id_a と id_b) 以外は $f: a \rightarrow b$ 唯 1 つだけとする。即ち絵で書けば

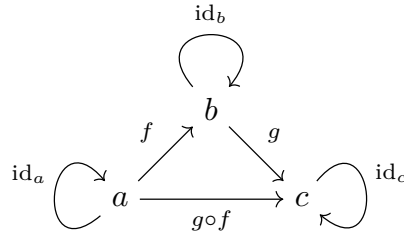


のようになる。これも圏となることが分かる。これを $\mathbb{2}$ で表す*4。 \square

*3 実際このような関手を構成するためにホモロジーやコホモロジー等様々なものが考えられている。

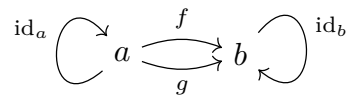
*4 この圏は interval category や walking arrow と呼ばれることがあるようだ。

例 14. 対象を 3 つ a, b, c として, 射は恒等射 ($\text{id}_a, \text{id}_b, \text{id}_c$) 以外は $f: a \rightarrow b, g: b \rightarrow c$ とその合成 $g \circ f: a \rightarrow c$ だけとする. 絵で書けば

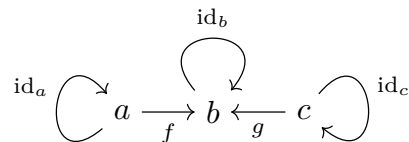


のようになる. これも圏となることが分かる. これを $\mathbf{3}$ で表す. □

例 15. もう最初から絵で描くことにすれば



や



も圏となる. これらの圏は記号でそれぞれ \Rightarrow や $\cdot \rightarrow \cdot \leftarrow \cdot$ と表すことがある. □

例 16. X を集合とする. このとき $\text{Ob}(C) := X$ で射は恒等射のみとすれば, C は明らかに圏となる. これを離散圏 (discrete category) という. 通常, 集合はこの方法で圏とみなす.

例 17. $\langle X, \leq \rangle$ を順序集合とする. このとき

- $\text{Ob}(C) := X$ とする.
- $a, b \in X$ が $a \leq b$ を満たすとき, これに対して f_{ab} という記号を新しく用意する.
- $a, b \in X$ に対して $\text{Hom}_C(a, b) := \begin{cases} \{f_{ab}\} & (a \leq b \text{ のとき}) \\ \emptyset & (\text{それ以外の場合}) \end{cases}$

と定義すると C は圏になる. それを示すため, 射の合成と恒等射を定義しよう.

まず恒等射であるが、 $a \in X$ に対して $a \leq a$ だから、定義より射 $a \rightarrow a$ は唯 1 つ存在して、それは f_{aa} である。よって $\text{id}_a := f_{aa}$ と定義するしかない。

次に合成を定義するため、 $f: a \rightarrow b$ と $g: b \rightarrow c$ を射とする。定義から、射が存在するためには $a \leq b$, $b \leq c$ でなければならない。また勿論 $f = f_{ab}$, $g = f_{bc}$ である。このとき $a \leq c$ だから a から c への射は唯 1 つ $f_{ac}: a \rightarrow c$ が存在する。そこで $f_{bc} \circ f_{ab} := f_{ac}$ と定義する。

この定義が圏の条件を満たすことは容易に分かる。こうして順序集合は圏とみなすことができる。

逆に圏 C が次を満たすとする。

- $\text{Ob}(C)$ は集合である。
- $a, b \in C$ に対して $|\text{Hom}_C(a, b)| \leq 1$ である。

このとき集合 $X := \text{Ob}(C)$ に 2 項関係 R を

$$aRb \iff |\text{Hom}_C(a, b)| = 1$$

で定めれば、 $\langle X, R \rangle$ は前順序集合^{*5}になる。前順序集合は順序集合と同じやり方で圏と見なせるから、前順序集合を「 $\text{Ob}(C)$ が集合で、 $|\text{Hom}_C(a, b)| \leq 1$ となる圏」と同一視することができる。□

例 18. 実は「圏と関手」も圏をなす。つまり、

- 圏を対象とする。
- 圏 C から圏 D への射とは関手 $C \rightarrow D$ のこととする。
- 関手 $F: C \rightarrow D$, $G: D \rightarrow E$ に対して合成関手 $G \circ F: C \rightarrow E$ を次で定義する。
($G \circ F$ を単に GF と書くことが多い。)
 - ★ $a \in C$ に対して $G \circ F(a) := G(F(a))$ とする。
 - ★ C の射 $f: a \rightarrow b$ に対して $G \circ F(f) := G(F(f))$ とする。
- 圏 C に対して恒等射 $\text{id}_C: C \rightarrow C$ を次で定義する (この id_C を恒等関手と呼ぶ)。
 - ★ $a \in C$ に対して $\text{id}_C(a) := a$ とする。
 - ★ C の射 $f: a \rightarrow b$ に対して $\text{id}_C(f) := f$ とする。

と定義すると、これは圏となることが分かる。この圏を **CAT** と書く。

^{*5} 反射律と推移律を満たすもの (つまり順序の定義から反対称律を除いたもの) を前順序 (preorder) という。

※ 「全ての集合の集まり」を集合だとみなすと矛盾してしまうように、「全ての圏の集まり」を圏とみなすのも、集合論的に危ない所があり、厳密には気をつけて扱わないと矛盾してしまう。ただ、特に必要がなければ、圏論をやる時にそういう集合論の技術的なことを気にしてもしょうがない(仮に気にするとしても、ある程度圏論のことを理解した後で気にすればいいと思うので、今ここを読んでいる段階で気にすることではないと考える)と思うので、このサイトの圏論の PDF では基本的にそういうことにはあまり気を配らず、素朴に扱うことにする。ちなみにこのような点を厳密に扱う方法の1つとしては、Grothendieck 宇宙というものを採用する方法などが知られている。

これを使うことで圏の同型を「圏 **CAT** における同型」として定義することができる。つまり圏 C と圏 D が同型 (記号で $C \cong D$ と書く) とは

$$\text{ある関手 } F: C \rightarrow D, G: D \rightarrow C \text{ が存在して } GF = \text{id}_C, FG = \text{id}_D$$

となることである。このような F と G が存在すれば、 C の対象や射と D の対象や射が 1 対 1 に綺麗に対応することになる。よって C と D が同型というのは「圏としての形が同じ」ということである。□

例 19. 通常、集合論では自然数 n を $n := \{0, 1, \dots, n-1\}$ により定義する^{*6}。通常の大小関係によって順序を入れれば、 n は順序集合となる。従って、例 17 の方法により n を圏と見なすことができる。特に $0, 1, 2, 3$ は圏とみなせる。これらの圏は、既に述べた圏 $0, 1, 2, 3$ と同型である。□

※ この同型があるので、例 13 においては 2 の対象を a, b と書いたが、他の PDF では $0, 1$ と書いている。

例 20. M をモノイド^{*7}とする。このとき以下のように定めると C は圏になることが分かる。

- 対象は唯 1 つ $*$ だけとする。
- $\text{Hom}_C(*, *) := M$ とする。つまり M の元が射である。
- 射の合成をモノイド M の積で定める。

^{*6} この本では 0 を自然数に含めるものとする。

^{*7} 群の定義から逆元の存在を除いたものをモノイド (monoid) という。

- 恒等射 id_* は M の単位元のこととする.

こうしてモノイドから対象が唯一つの圏を得ることができる. 逆に対象が唯一つ $*$ のみの圏 C に対して $M := \text{Hom}_C(*, *)$ として, M の 2 項演算を射の合成で定義すれば, モノイドが得られる. この見方で, モノイドは対象が唯一つの圏と同一視することができる.

※ これは厳密には嘘である. というのも一般に対象が唯一つ $*$ のみの圏 C を考えたとき, $\text{Hom}_C(*, *)$ が集合となるとは限らないからである.

一般に, 任意の $a, b \in C$ に対して $\text{Hom}_C(a, b)$ が集合となる圏を局所小圏 (locally small category) という (局所小であることを圏の定義に入れる流儀もある). この言葉を使えば, モノイドとは対象が唯一つの局所小圏のこと, ということになる. ところで当サイトの PDF 内で考える圏は殆どが局所小圏である. そこで当サイトの PDF では, 特に断らなくても基本的には圏は局所小圏であるものとする. (例 18 でも注意した通り, 当サイトの PDF ではこのような集合論的なことはあまり気にしないということである.)

この見方でモノイド M を圏 C と見なすとき, C の射 f が同型であるとは f が (モノイド M の元として) 逆元を持つことである. 従って, 群とは対象が唯一つで全ての射が同型となる圏であると言える. \square

3 関手の例

圏の例をいろいろ見たので, 今度は関手の例を見てみよう.

例 21. X, Y を集合, $f: X \rightarrow Y$ を写像とする. $F(X) := \mathcal{P}(X)$ を冪集合として, 写像 $Ff: \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(Y)$ を「像」で定める. 即ち, $S \subset X$ に対して

$$Ff(S) := \{f(a) \mid a \in S\}$$

である. これにより $F: \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Set}$ は関手となる. \square

例 22. 集合 X, Y を離散圏と見なす (例 16). このとき, X の射は恒等射しかないから, 関手 $X \rightarrow Y$ は写像 $X \rightarrow Y$ と同一視することができる. \square

例 23. 順序集合 $\langle X, \leq_X \rangle, \langle Y, \leq_Y \rangle$ を圏とみなし (例 17), $F: \langle X, \leq_X \rangle \rightarrow \langle Y, \leq_Y \rangle$ という関手を考える. すると $a, b \in X$ に対して「 $a \leq_X b$ ならば $Fa \leq_Y Fb$ 」が成り立つ.

∴ $a \leq_X b$ とする. このとき射 $f: a \rightarrow b$ が存在する. よって $Ff: Fa \rightarrow Fb$ であ

る。即ち $Fa \leq_Y Fb$ でなければならない。

即ちこの関手は順序を保つ写像を与える。逆に、順序を保つ写像 $F: X \rightarrow Y$ があれば、これは関手 $F: \langle X, \leq_X \rangle \rightarrow \langle Y, \leq_Y \rangle$ を定めることも容易に分かる。よってこの場合、関手とは順序を保つ写像のことである。

特に具体例として、順序集合 \mathbb{N}, \mathbb{R} (順序は通常的大小関係とする) を圏とみなしたものを単に \mathbb{N}, \mathbb{R} と書いて、関手 $F: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ を考える。 $n \in \mathbb{N}$ に対して $x_n := F(n)$ と書くと $x := \{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ は実数列であるが、 F が関手だから「 $n \leq m$ ならば $x_n \leq x_m$ 」が成り立つ。即ち x は \mathbb{R} の単調増加列である。逆に $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ が \mathbb{R} の単調増加列であれば、 $F(n) := x_n$ とすればこれは関手 $F: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ を定める。つまりこの場合の関手は \mathbb{R} の単調増加列と同一視することができる。 \square

例 24. モノイド M, N を圏とみなす (例 20) とき、関手 $M \rightarrow N$ とはモノイド準同型のことである。 \square

例 25. モノイド M を圏とみなしたものを C とする。関手 $F: C \rightarrow \mathbf{Set}$ を考える。 C の対象は 1 つだけなのでそれを $*$ とする。つまり $\text{Ob}(C) = \{*\}$ である。このとき $X := F(*)$ は集合である。 C の定義より $\text{Hom}_C(*, *) = M$ だから、 $m \in M$ に対して $Fm: X = F(*) \rightarrow F(*) = X$ は写像である。 $x \in X$ に対して $mx := Fm(x)$ と書くことにする。今 F は関手だから、 $m, n \in M$ に対して $F(mn) = Fm \circ Fn$ である。故に

$$(mn)x = F(mn)(x) = (Fm \circ Fn)(x) = Fm(Fn(x)) = m(nx)$$

となる。また単位元 $e \in M$ に対して $Fe = \text{id}_{F(*)} = \text{id}_X$ だから $ex = Fe(x) = \text{id}_X(x) = x$ である。

以上により、演算 $M \times X \ni \langle m, x \rangle \mapsto mx \in X$ によりモノイド M は集合 X に左から作用している。逆に、モノイド M が集合 X に左から作用していれば、関手 $F: C \rightarrow \mathbf{Set}$ を定めることが分かる。こうして関手 $F: C \rightarrow \mathbf{Set}$ を左 M -集合 X と同一視することができる。 \square

位相空間 X に対して $F(X)$ で「 X 上の複素数値連続関数全体がなす集合」を表すことにする。このとき、連続写像 $f: X \rightarrow Y$ に対して写像 $Ff: F(Y) \rightarrow F(X)$ が、 $g \in F(Y)$

に対して $Ff(g) := g \circ f$ で定義できる.

$$\begin{array}{ccc} F(Y) & \xrightarrow{Ff} & F(X) \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ (Y \xrightarrow{g} \mathbb{C}) & \longmapsto & (X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} \mathbb{C}) \end{array}$$

この F は関手にはならない. というのも「 $f: X \rightarrow Y$ に対して $Ff: F(Y) \rightarrow F(X)$ 」と, 射の向きが逆になっているからである. ただ, 逆向きになることを除くと, 関手と似たような条件を満たしている. 即ち

- $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z$ に対して $F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$ である.
- $F(\text{id}_X) = \text{id}_{F(X)}$ である.

このような逆向きになる「関手」を反変関手という. 正式に定義すると次のようになる.

定義. C, D を圏とする. C から D への反変関手 (contravariant functor) $F: C \rightarrow D$ とは $a \in \text{Ob}(C)$ に $F(a) \in \text{Ob}(D)$ を, $f \in \text{Mor}(C)$ に $F(f) \in \text{Mor}(D)$ を対応させる関数であって, 以下を満たすものである.

- (1) $f: a \rightarrow b$ のとき $F(f): F(b) \rightarrow F(a)$ である.
- (2) $\text{cod}(f) = \text{dom}(g)$ のとき $F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$ である.
- (3) $a \in C$ に対して $F(\text{id}_a) = \text{id}_{F(a)}$ である.

反変関手に対して, 通常の間手を共変関手 (covariant functor) と呼ぶ.

例 26. 上で定義した $F: \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Set}$ は反変関手である. □

例 27. X, Y を集合, $f: X \rightarrow Y$ を写像とする. $F(X) := \mathcal{P}(X)$ を冪集合として, 写像 $Ff: \mathcal{P}(Y) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ を「逆像」で定める. 即ち, $S \subset Y$ に対して

$$Ff(S) := f^{-1}(S) = \{a \in X \mid f(a) \in S\}$$

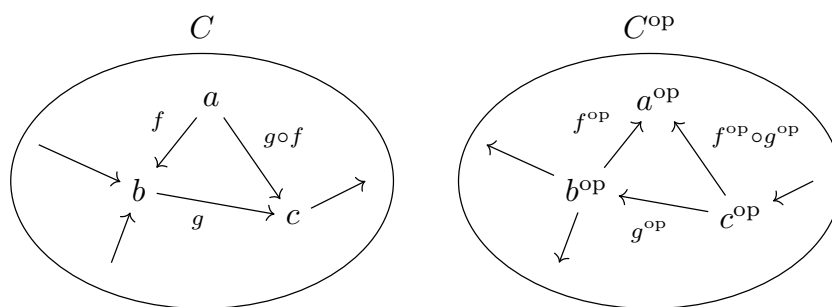
である. これにより $F: \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Set}$ は反変関手となる. □

このように圏論には「共変関手」と「反変関手」の2つがあるのだが, 実はこの2つの違いを意識する必要はあまりない. というのも, 反変関手は共変関手と見なせるからである.

定義. C を圏とする. このとき C^{op} を以下のように定める.

- 対象 $a \in C$ に対して新しい対象 a^{op} を用意し, $\text{Ob}(C^{\text{op}}) := \{a^{\text{op}} \mid a \in \text{Ob}(C)\}$ と定める.
- 射 $f \in C$ に対して新しい射 f^{op} を用意し, $\text{Mor}(C^{\text{op}}) := \{f^{\text{op}} \mid f \in \text{Mor}(C)\}$ と定める.
- $\text{dom}(f^{\text{op}}) := \text{cod}(f)^{\text{op}}$, $\text{cod}(f^{\text{op}}) := \text{dom}(f)^{\text{op}}$ と定める. 即ち $f: a \rightarrow b$ のとき $f^{\text{op}}: b^{\text{op}} \rightarrow a^{\text{op}}$ である.
- $f^{\text{op}}: a^{\text{op}} \rightarrow b^{\text{op}}$, $g^{\text{op}}: b^{\text{op}} \rightarrow c^{\text{op}}$ に対して射の合成 $g^{\text{op}} \circ f^{\text{op}}: a^{\text{op}} \rightarrow c^{\text{op}}$ を $g^{\text{op}} \circ f^{\text{op}} := (f \circ g)^{\text{op}}$ で定める.
- $\text{id}_{a^{\text{op}}} := \text{id}_a^{\text{op}}$ とする.

この C^{op} が圏の定義を満たすことは容易に分かる. これを圏 C の反転圏 (opposite category) などと呼ぶ. 絵で書けば, 次のように「射の向きを全て反対にした圏」である.



通常は, $a^{\text{op}}, f^{\text{op}}$ などと一々書かず, a^{op} を単に a , f^{op} を単に f と表す.

この C^{op} を使えば, 反変関手 $C \rightarrow D$ とは共変関手 $C^{\text{op}} \rightarrow D$ のことである. なので以降, 反変関手という言葉は使わず, また共変関手を単に関手と呼ぶ.

例 28. 順序集合 $\langle X, \leq \rangle$ を例 17 のようにして圏とみなしたものを C と書く. このとき C^{op} は順序集合 $\langle X, \geq \rangle$ を圏とみなしたものと同型である. □

例 29. 例 23 と同様にして関手 $F: \mathbb{N}^{\text{op}} \rightarrow \mathbb{R}$ を考えると, これは \mathbb{R} の単調減少列と同一視できる. □

例 30. 群 G を圏とみなして C と書くと C^{op} は G の逆転群である. □

例 31. モノイド M を圏とみなしたとき, 関手 $M \rightarrow \mathbf{Set}$ を左 M -集合と同一視したのと同様にして, 関手 $M^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$ を右 M -集合と同一視することができる. □

例 32. $F: C \rightarrow D$ を関手とすると, 関手 $F^{\text{op}}: C^{\text{op}} \rightarrow D^{\text{op}}$ が以下のようにして定

まる.

- $a^{\text{op}} \in \text{Ob}(C^{\text{op}})$ に対して $F^{\text{op}}(a^{\text{op}}) := F(a)^{\text{op}}$ とする.
- $f^{\text{op}} \in \text{Mor}(C^{\text{op}})$ に対して $F^{\text{op}}(f^{\text{op}}) := F(f)^{\text{op}}$ とする.

関手 F^{op} を単に F と書くことも多い.

□