Hilbert 空間がなす圏の特徴付け

alg-d
https://alg-d.com/math/kan_extension/

2025 年 7 月 13 日

この PDF では Hilbert 空間がなす圏の特徴付けを紹介する．先に答えを書いてしまうと，次を満たすダガーモノイダル圏 V は $\mathbf{Hilb}_{\mathbb{R}}$ か $\mathbf{Hilb}_{\mathbb{C}}$ と圏同値になる (定理 30).

(1) I は simple かつ generator である．
(2) V は有限ダガー双積とダガー equalizer を持つ．
(3) 任意のダガーモノ射は，ある射のダガー核になる．(ダガー核条件)
(4) $DM \subset V$ をダガーモノ射のなす部分圏とする．P が有向順序で $T\colon P \to DM$ が関手ならば，T の余極限が存在する．

これらの条件は純粋に圏論的な条件であって，ノルムや距離のようなものは一切現れていないところが不思議な点だと思う．

目次

1　半環について

まず最初に半環など使用する用語についてまとめる．

定義. 半環 (semiring) とは $R = \langle R, +, \cdot, 0, 1\rangle$ であって以下の条件を満たすものをいう.

(1) $\langle R, +, 0\rangle$ は可換モノイドである.
(2) $\langle R, \cdot, 1\rangle$ はモノイドである.
(3) $\alpha, \beta, \gamma \in R$ に対して $(\alpha+\beta)\gamma = \alpha\gamma + \beta\gamma$, $\alpha(\beta+\gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$ である.
(4) $\alpha \in R$ に対して $0\alpha = 0 = \alpha 0$ である.

定義. R を半環とする.

(1) R が可除半環 (division semiring)
$\Longleftrightarrow$ 任意の $\alpha \in R$ に対して, ある $y \in R$ が存在して $\alpha\beta = 1 = \beta\alpha$ となる.
(2) R が zerosumfree
$\Longleftrightarrow$ $\alpha, \beta \in R$ に対して「$\alpha + \beta = 0$ ならば $\alpha = \beta = 0$」である.
(3) R が斜体 (skew field)
$\Longleftrightarrow$ R が可除半環かつ $0 \neq 1$ で, 任意の $\alpha \in R$ に対してある $\beta \in R$ が存在して $\alpha + \beta = 0$ となる.

命題 1. R が可除半環で zerosumfree でないならば, R は斜体である.

証明. zerosumfree でないとすると, ある $a, b \in R \setminus \{0\}$ により $a + b = 0$ となる. (従って $0 \neq 1$ である.) このとき任意の $\alpha \in R$ に対して

$$\alpha + \alpha a^{-1} b = \alpha a^{-1}(a+b) = 0$$

となるから R は斜体である. □

定義. 半環 R 上の対合 (involution) とは関数 $(-)^*\colon R \to R$ であって, $\alpha, \beta \in R$ に対して以下が成り立つものをいう.

$$\alpha^{**} = \alpha, \quad (\alpha+\beta)^* = \alpha^* + \beta^*, \quad (\alpha\beta)^* = \beta^*\alpha^*, \quad 0^* = 0$$

定義. R を半環とする. 右 R-半加群 (right R-semimodule) とは, 右作用の与えられた可換モノイド M であって, $\alpha, \beta \in R$, $x, y \in M$ に対して以下が成り立つものをいう.

$$(x+y)\alpha = x\alpha + y\alpha, \quad x(\alpha+\beta) = x\alpha + x\beta, \quad (x\alpha)\beta = x(\alpha\beta), \quad x1 = x$$

定義. K を斜体とする. 右 K-半加群 M が右 K-線型空間 $\Longleftrightarrow$ M がアーベル群である.

定義. K を斜体, $*$ を K 上の対合, $\mathcal{H}$ を右 K-線型空間とする. $\mathcal{H}$ 上の Hermite 形式とは写像 $\langle \cdot | \cdot \rangle\colon \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to K$ で以下の条件を満たすものをいう.

(1) $\alpha, \beta \in K$ と $x, y, z \in \mathcal{H}$ に対して $\langle x\alpha + y\beta | z \rangle = \langle x|z \rangle \alpha + \langle y|z \rangle \beta$ である．

(2) $x, y \in \mathcal{H}$ に対して $\langle x|y \rangle^* = \langle y|x \rangle$ である．

(3)「任意の $x \in \mathcal{H}$ に対して $\langle x|y \rangle = 0$」ならば $y = 0$ である．

$\mathcal{H}$ と $\langle \cdot | \cdot \rangle$ の組を Hermite 空間という．

定義. $\mathcal{H}$ を Hermite 空間とする．

(1) 部分集合 $S \subset \mathcal{H}$ が正規直交系 $\iff$ 任意の $x, y \in S$ に対して

$$\langle x|y \rangle = \begin{cases} 0 & (x = y \text{ のとき}) \\ 1 & (x \neq y \text{ のとき}) \end{cases}$$

(2) 部分集合 $S \subset \mathcal{H}$ に対して $S^\perp := \{x \in \mathcal{H} \mid \text{任意の } y \in S \text{ に対して } \langle x|y \rangle = 0\}$ と書く．

(3) 部分線型空間 $M \subset \mathcal{H}$ が閉部分空間 $\Leftrightarrow$ $M^{\perp\perp} = M$ である．

(4) $\mathcal{H}$ が orthomodular $\iff$ 閉部分空間 $M \subset \mathcal{H}$ に対して $M + M^\perp = \mathcal{H}$ である．

(5) $\mathcal{H}$ が内積空間
$\iff$ 任意の $x \in \mathcal{H}$ に対して $\langle x|x \rangle \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ であり，更に「$\langle x|x \rangle = 0 \iff x = 0$」である．

(6) $\mathcal{H}$ が内積空間のとき，$x \in \mathcal{H}$ に対して $\|x\| := \sqrt{\langle x|x \rangle}$ を x のノルムという．

(7) $K \cong \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ とする．$\mathcal{H}$ が Hilbert 空間
$\iff$ $\mathcal{H}$ は内積空間で，ノルムについて完備である．

(8) $\mathcal{H}$ を Hilbert 空間とする．$B \subset \mathcal{H}$ が正規直交基底
$\iff$ B は正規直交系で，任意の $x \in \mathcal{H}$ に対して次が成り立つ．

「任意の $b \in B$ に対して $\langle b|x \rangle = 0$」ならば $x = 0$ である．

定義. $\mathcal{H}, \mathcal{H}'$ を内積空間，$T \colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}'$ を線型写像とする．

(1) T が有界 $\iff$ $\|T\| := \sup\{\|T(x)\| \mid x \in \mathcal{H},\ \|x\| \leq 1\} < \infty$ である．

(2) T の随伴とは，線型写像 $T^\dagger \colon \mathcal{H}' \to \mathcal{H}$ であって

$$\text{任意の } x \in \mathcal{H}',\ y \in \mathcal{H} \text{ に対して } \langle T^\dagger(x)|y \rangle = \langle x|T(y) \rangle$$

となるものをいう．

(3) T がユニタリ写像
$\iff$ T は全単射で，更に $x, y \in \mathcal{H}$ に対して $\langle T(x)|T(y) \rangle = \langle x|y \rangle$ である．

命題 2. $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ として $T\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}'$ を K 上の Hilbert 空間の間の線型写像とする．このとき T が随伴を持てば T は有界である．

証明. [1] Theorem 2.3.9. を参照. $\square$

定理 3. K 上の Hermite 空間 $\mathcal{H}$ が orthomodular で正規直交列 $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ が存在するとする．このとき K は $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ のいずれかと同型であり $\mathcal{H}$ は Hilbert 空間である．

証明. [2] を参照. $\square$

定理 4. $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ として $\mathcal{H}$ を K 上の無限次元 Hilbert 空間とする．このとき有界線型写像 $T\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ に対して，ユニタリ写像 $U_0, \cdots, U_n\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ と $\alpha_0, \cdots, \alpha_n \in K$ が存在して $T = \alpha_0 U_0 + \cdots + \alpha_n U_n$ となる．

証明. [1] Appendix を参照. $\square$

2 ダガー圏について

定義. C を圏とする．以下の条件を満たす関手 $(-)^\dagger\colon C^{\mathrm{op}} \to C$ をダガーという[*1]．

(1) 対象 $a \in C$ に対して $a^\dagger = a$ である．
(2) $(-)^{\dagger\dagger} = \mathrm{id}_C$ である．

ダガーが与えられた圏をダガー圏 (dagger category) という．

例 5. $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ に対して，K 上の Hilbert 空間と有界線型写像がなす圏を $\mathbf{Hilb}_K$ と書く．任意の射 $T \in \mathbf{Hilb}_K$ に対して随伴 $T^\dagger$ が存在することが分かる．これにより $\mathbf{Hilb}_K$ はダガー圏となる． $\square$

定義. $f\colon a \to b$ をダガー圏 C の射とする．

(1) $f\colon u \to v$ がダガーモノ射 $\iff f^\dagger \circ f = \mathrm{id}_u$ となる．
(2) $f\colon u \to v$ がダガーエピ射 $\iff f \circ f^\dagger = \mathrm{id}_v$ となる．
(3) $f\colon u \to v$ がダガー同型 $\iff f$ がダガーモノ射かつダガーエピ射である．

次の性質は定義から明らかである．

[*1] この PDF では Kan 拡張は登場しないため，† は常にダガーを表している．

- ダガーモノ射はモノ射で，ダガーエピ射はエピ射である．
- ダガー同型は同型である．
- f がダガーモノ射ならば，$f^\dagger$ はダガーエピ射である．
- f がダガーエピ射ならば，$f^\dagger$ はダガーモノ射である．

定義． C を零対象を持つ圏とする．
C の射 f が零エピ射 $\Longleftrightarrow$ $g \circ f = 0$ ならば $g = 0$ である．

明らかにエピ射は零エピ射である．

定義． $f, g \colon a \to b$ をダガー圏 C の射とする．
$e \colon c \to a$ が f と g のダガー equialized $\Longleftrightarrow$ e が f と g の equalizer であり，かつ e はダガーモノ射である．

定義． C を零対象を持つダガー圏として f を C の射とする．f と 0 のダガー equalizer を f のダガー核という．ここでは f のダガー核を単に $\ker(f)$ で表す．ダガー余核も同様に定義する．

定義． ダガー圏 C がダガー equalizer を持つ
$\Longleftrightarrow$ C の任意の射 $f, g \colon a \to b$ に対して，f と g のダガー equalizer が存在する．

定義． ダガー圏 C がダガー核を持つ
$\Longleftrightarrow$ C は零対象を持ち，C の任意の射 f に対してダガー核 $\ker(f)$ が存在する．

ダガー coequalizer とダガー余核についても同様に定義する．

命題 6． C をダガー核を持つダガー圏とする．このとき $f \colon a \to b$ に対して $\operatorname{coker}(f) := \ker(f^\dagger)^\dagger$ と定義すればこれはダガー余核になる．

証明．ダガー核がダガーモノ射なので $\operatorname{coker}(f)$ はダガーエピ射である．よって $\operatorname{coker}(f)$ が余核であることを示せばよい．そこで $g \colon b \to c$ が $g \circ f = 0$ を満たすとする．$f^\dagger \circ g^\dagger = 0$ だから $\ker(f^\dagger)$ の普遍性により，次の点線の射 h が得られる．

$$\begin{tikzcd}
a & b \arrow[l, "f^\dagger"'] & \bullet \arrow[l, "\ker(f^\dagger)"'] \\
& & c \arrow[ul, "g^\dagger"] \arrow[u, dashed, "h"']
\end{tikzcd}$$

これに † を適用すれば次の図式が得られる．

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "f"] & b \arrow[r, "\mathrm{coker}(f)"] \arrow[dr, "g"'] & \bullet \arrow[d, dashed, "h^\dagger"] \\ & & c \end{tikzcd}$$

一意性も容易に分かるから $\mathrm{coker}(f)$ は余核である． □

命題 7. C をダガー核を持つダガー圏とする．このとき $f\colon a \to b$ に対してダガーモノ射 i と零エピ射 e が存在して $f = i \circ e$ となる．

証明. $i := \ker(\mathrm{coker}(f))$ とする．核の普遍性から

$$\begin{tikzcd} & \bullet \arrow[dr, "i = \ker(\mathrm{coker}(f))"] & \\ a \arrow[ur, dashed, "e"] \arrow[r, "f"'] & b \arrow[r, "\mathrm{coker}(f)"'] & \bullet \end{tikzcd}$$

$f = i \circ e$ となる e が得られる．これが零エピ射であることを示せばよい．そこで g が $g \circ e = 0$ を満たすとする．i がダガーモノ射だから $i^\dagger \circ f = i^\dagger \circ i \circ e = e$ である．このとき

$$f^\dagger \circ (i \circ g^\dagger) = (g \circ i^\dagger \circ f)^\dagger = (g \circ e)^\dagger = 0^\dagger = 0$$

となる．よって $\ker(f^\dagger)$ の普遍性により次の点線の射 k が得られる．

$$\begin{tikzcd} & \bullet \arrow[dl, "e^\dagger"'] \arrow[dr, "i"] & & \bullet \arrow[ll, "g^\dagger"'] \arrow[d, dashed, "k"] \\ a & & b \arrow[ll, "f^\dagger"] & \bullet \arrow[l, "\ker(f^\dagger)"] \end{tikzcd}$$

$\ker(f^\dagger)$ はダガーモノ射だから

$$k = \ker(f^\dagger)^\dagger \circ \ker(f^\dagger) \circ k = \ker(f^\dagger)^\dagger \circ i \circ g^\dagger = \mathrm{coker}(f) \circ i \circ g^\dagger = 0$$

となる．故に $i \circ g^\dagger = \ker(f^\dagger) \circ k = 0$ が分かる．i がモノ射だから $g^\dagger = 0$，従って $g = 0$ である． □

命題 8. C を零対象とダガー equalizer を持つダガー圏とする．このとき零エピ射はエピ射である．

証明. $f\colon a \to b$ を零エピ射とする．f がエピ射であることを示すため，$g, h\colon b \to c$ が $g \circ f = h \circ f$ を満たすとする．$m\colon d \to b$ を g と h のダガー equalizer として $\mathrm{coker}(m)$ を考える (命題 6 によりこれは取れる).

$$\begin{tikzcd} & d \arrow[dr, "m"] & & \\ a \arrow[ur, dashed, "k"] \arrow[rr, "f"'] & & b \arrow[r, shift left, "g"] \arrow[r, shift right, "h"'] \arrow[dr, "\mathrm{coker}(m)"'] & c \\ & & & \bullet \end{tikzcd}$$

$g \circ f = h \circ f$ より，点線の射 k が一意に存在して可換となる．このとき

$$\mathrm{coker}(m) \circ f = \mathrm{coker}(m) \circ m \circ k = 0$$

で e が零エピ射だから $\mathrm{coker}(m) = 0$ が分かる．よって m は同型射であり $g = h$ となる． $\square$

定義. C がダガー核条件を満たす
$\iff$ C は零対象を持つダガー圏で，任意のダガーモノ射 $f\colon a \to b$ に対して，ある射 $g\colon b \to c$ が存在して，f は g のダガー核になる.

命題 9. C をダガー equalizer を持つダガー圏として，更にダガー核条件を満たすとする．このとき $f\colon a \to b$ に対して次の条件は同値である.

(1) f はエピ射である.
(2) f は零エピ射である.
(3) $\mathrm{coker}(f) = !\colon b \to 0$ である.

証明. $1 \iff 2$ は命題 8 である.

($1 \implies 3$) $f\colon a \to b$ をエピ射とすれば $!\colon b \to 0$ は f の余核である．これは明らかにダガーエピ射だから $\mathrm{coker}(f) = !$ である.

($3 \implies 1$) $\mathrm{coker}(f) = !$ として，$g, h\colon b \to c$ が $g \circ f = h \circ f$ を満たすとする．m を g と h のダガー equalizer とすれば，普遍性により次の点線の射 k が得られる.

$$\begin{tikzcd} & \bullet \arrow[dr, "m"] & & \\ a \arrow[ur, dashed, "k"] \arrow[rr, "f"'] & & b \arrow[r, shift left, "g"] \arrow[r, shift right, "h"'] & c \end{tikzcd}$$

m がダガーモノ射だから，ダガー核条件によりある s を使って $m = \ker(s)$ と書ける．このとき $s \circ f = s \circ m \circ k = 0$ となるから，$\mathrm{coker}(f) = !$ の普遍性により $s = 0$ である．

$$\begin{tikzcd}
 & \bullet \arrow[dr, "m=\ker(s)"] & & \\
a \arrow[ur, "k"] \arrow[rr, "f"'] & & b \arrow[r, shift left, "g"] \arrow[r, shift right, "h"'] \arrow[d, "\mathrm{coker}(f)=!"'] \arrow[dr, "s"] & c \\
 & & 0 \arrow[r, dashed, "!"'] & \bullet
\end{tikzcd}$$

よって $m = \ker(s)$ は同型である．故に $g = h$ となる． □

定義. ダガー圏 C の射 $p\colon a \to a$ が射影 $\iff p^\dagger \circ p = p$ である．

命題 10. $p\colon a \to a$ が射影 $\iff p \circ p = p$ かつ $p^\dagger = p$ である．

証明. $(\Longrightarrow)$ まず

$$p^\dagger = (p^\dagger \circ p)^\dagger = p^\dagger \circ p^{\dagger\dagger} = p^\dagger \circ p = p$$

である．よって $p \circ p = p^\dagger \circ p = p$ となる．

$(\Longleftarrow)$ $p^\dagger \circ p = p \circ p = p$ である． □

命題 11. $\mathrm{Proj}_a := \{p\colon a \to a \mid p \text{ は射影}\}$ は

$$p \le q \iff q \circ p = p$$

により順序集合になる．

証明. まず $p \le p$ は命題 10 より明らかである．

次に $p \le q$ かつ $q \le p$ とすると

$$p = q \circ p = q^\dagger \circ p^\dagger = (p \circ q)^\dagger = q^\dagger = q$$

である．

最後に $p \le q$ かつ $q \le r$ とすると $r \circ p = r \circ q \circ p = q \circ p = p$ である． □

命題 12. 任意の部分集合 $X \subset \mathrm{Proj}_a$ は上限 $\sup X \in \mathrm{Proj}_a$ を持つ．

証明. [1] を参照． □

定義. C をダガー圏，$a, b \in C$ を対象とする．a と b の双積[*2]

$$a \underset{p_0}{\overset{i_0}{\rightleftarrows}} a \oplus b \underset{p_1}{\overset{i_1}{\leftrightarrows}} b$$

がダガー双積 $\Longleftrightarrow p_0^\dagger = i_0$，$p_1^\dagger = i_1$ である．

定義. ダガー圏 C が有限ダガー双積を持つ
$\Longleftrightarrow C$ が零対象を持ち，更に任意の $a, b \in C$ のダガー双積が存在する．

命題 13. $f\colon a \to a'$，$g\colon b \to b'$ をダガー圏 C の射として，ダガー双積 $a \oplus b$ と $a' \oplus b'$ が存在するとする．双積の性質により射 $f \oplus g\colon a \oplus b \to a' \oplus b'$ が得られる．このとき $(f \oplus g)^\dagger = f^\dagger \oplus g^\dagger$ である．

証明. $f \oplus g$ は次の普遍性で得られる射である．

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[d, "f"'] & a \oplus b \arrow[l, "p_0"'] \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "f\oplus g"] & b \arrow[d, "g"] \\
a' & a' \oplus b' \arrow[l, "p_0"] \arrow[r, "p_1"'] & b'
\end{tikzcd}$$

よってこの図式に $\dagger$ を適用すれば

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "i_0"] & a \oplus b & b \arrow[l, "i_1"'] \\
a' \arrow[u, "f^\dagger"] \arrow[r, "i_0"'] & a' \oplus b' \arrow[u, "(f\oplus g)^\dagger"'] & b' \arrow[l, "i_1"] \arrow[u, "g^\dagger"']
\end{tikzcd}$$

となる．よって $(f \oplus g)^\dagger = f^\dagger \oplus g^\dagger$ である． □

3　体を得る方法

純粋に圏論的な条件から $\mathbb{R}$ や $\mathbb{C}$ が出てくるのが不思議な点であるが，この節ではこれがどのようにして出てくるか解説する．

命題 14. C を有限双積を持つ圏とする．

[*2] 双積については「双積・弱完全圏」の PDF を参照.

(1) $a \in C$ に対して $\mathrm{Hom}_C(a,a)$ は半環である．

(2) $a,b \in C$ に対して $\mathrm{Hom}_C(a,b)$ は右 $\mathrm{Hom}_C(a,a)$-半加群である．

証明. 有限双積を持つ圏は **CMon**-豊穣圏とみなせる．これにより $\mathrm{Hom}_C(a,a)$ は半環であり，更に $\mathrm{Hom}_C(a,b)$ は右 $\mathrm{Hom}_C(a,a)$-半加群である． $\square$

命題 15. C が有限ダガー双積を持つダガー圏ならば $\mathrm{Hom}_C(a,a)$ は対合を持つ半環である．

証明. まず命題 14 より $\mathrm{Hom}_C(a,a)$ は半環である．このときダガー $(-)^\dagger\colon C^{\mathrm{op}} \to C$ は関数 $(-)^\dagger\colon \mathrm{Hom}_C(a,a) \to \mathrm{Hom}_C(a,a)$ を与えるが，これは

$$f^{\dagger\dagger} = f, \quad (f+g)^\dagger = f^\dagger + g^\dagger, \quad (g \circ f)^\dagger = f^\dagger \circ g^\dagger, \quad 0^\dagger = 0$$

を満たす．よってダガーは $\mathrm{Hom}_C(a,a)$ 上の対合になる． $\square$

定義. C を零対象を持つ圏とするとき，対象 $a \in C$ が simple とは次の条件を満たすことをいう．

(1) $\mathrm{id}_a \neq 0$ である．

(2) モノ射 $f\colon b \to a$ は零射でなければ同型である．

命題 16. C を有限ダガー双積とダガー equalizer を持つダガー圏として，$c_0 \in C$ を simple とする．

(1) $\mathrm{Hom}_C(c_0,c_0)$ は対合を持つ可除半環である．

(2) 更に C がダガー核条件を満たすならば，$\mathrm{Hom}_C(c_0,c_0)$ は斜体である．

証明. (1) 命題 15 より $\mathrm{Hom}_C(c_0,c_0)$ は対合を持つ半環である．よって可除性を示せばよい．そのためには任意の $f \in \mathrm{Hom}_C(c_0,c_0) \setminus \{0\}$ が同型射であることを示せばよい．

まず命題 7 からダガーモノ射 $i\colon a \to c_0$ と零エピ射 $e\colon c_0 \to a$ を使って $f = i \circ e$ と書ける．このとき c_0 が simple だから i は零射か同型である．零射だとすると $f = 0$ になってしまうので，$f \neq 0$ より i は同型と分かる．すると f も零エピ射である．命題 8 より f はエピ射である．このとき $f^\dagger\colon c_0 \to c_0$ はモノ射であることが分かる．よって再び simple 性から $f^\dagger \neq 0$ は同型射である．故に $f = f^{\dagger\dagger}$ は同型射である．

(2) 命題 1 により，$\mathrm{Hom}_C(c_0,c_0)$ が zerosumfree でないことを示せば斜体であることが分かる．そこで zerosumfree であると仮定する．$\nabla\colon c_0 \oplus c_0 \to c_0$ を余対角射として，

f_i で合成

$$a \xrightarrow{\ker(\nabla)} c_0 \oplus c_0 \xrightarrow{p_i} s$$

を表すことにする．$f_0 + f_1 = 0$ である．このとき

$$0 = (f_0 + f_1) \circ f_0^\dagger = f_0 \circ f_0^\dagger + f_1 \circ f_0^\dagger$$

となるから，R が zerosumfree であることより $f_0 \circ f_0^\dagger = 0$ が分かる．よって $f_0 = 0$ となるから $f_1 = 0$ であり，故に $\ker(\nabla) = 0$ となる．従って命題 9 (の双対) により ∇ はモノ射である．このとき ∇ の取り方から $i_0 = i_1$ となり矛盾する． □

以下 C は命題 16 の条件を満たすとする．即ち $K := \mathrm{Hom}_C(c_0, c_0)$ は対合を持つ斜体である．更に追加で次の条件を仮定する．

(1) c_0 は generator である．
(2) 部分圏 $DM \subset C$ を次により定める．
- $\mathrm{Ob}(DM) := \mathrm{Ob}(C)$ とする．
- $\mathrm{Mor}(DM) := \{f \in \mathrm{Mor}(C) \mid f$ はダガーモノ射 $\}$ とする．

このとき P が有向順序で $T\colon P \to DM$ が関手ならば，余極限 $\operatorname{colim} T$ が存在する．

$a \in C$ に対して $\mathcal{H}_a := \mathrm{Hom}_C(c_0, a)$ と書く．$\mathcal{H}_a$ は K 上の線型空間である．

命題 17. $x, y \in \mathcal{H}_a$ に対して $\langle x|y\rangle := y^\dagger \circ x \in K$ と定義すれば $\mathcal{H}_a$ は Hermite 空間になる．

証明. (1) $\alpha, \beta \in K$ と $x, y, z \in \mathcal{H}_a$ に対して

$$\begin{aligned}\langle x\alpha + y\beta|z\rangle &= z^\dagger \circ (x \circ \alpha + y \circ \beta) \\ &= z^\dagger \circ x \circ \alpha + z^\dagger \circ y \circ \beta \\ &= \langle x|z\rangle\alpha + \langle y|z\rangle\beta\end{aligned}$$

(2) $x, y \in \mathcal{H}_a$ に対して $\langle x|y\rangle^\dagger = (y^\dagger \circ x)^\dagger = x^\dagger \circ y = \langle y|x\rangle$ である．

(3) $y \in \mathcal{H}_a$ が「任意の $x \in \mathcal{H}_a$ に対して $\langle x|y\rangle = 0$」を満たすとする．即ち $y^\dagger \circ x = 0$ となるから，s が generator であることにより $y^\dagger = 0$ である．従って $y = 0$ である． □

定義. 射影 $p\colon a \to a$ に対して $p \circ \mathcal{H}_a := \{p \circ x \mid x \in \mathcal{H}_a\} \subset \mathcal{H}_a$ と定める．これは明らかに部分線型空間である．

命題 18. $x \in p \circ \mathcal{H}_a \iff p \circ x = x$ である．

証明. ($\Longrightarrow$) $x \in p \circ \mathcal{H}_a$ とすると，ある $y \in \mathcal{H}_a$ により $x = p \circ y$ と書ける．このとき

$$p \circ x = p \circ (p \circ y) = (p \circ p) \circ y = p \circ y = x$$

である．

($\Longleftarrow$) 明らか． $\square$

命題 19. $p \circ \mathcal{H}_x \subset \mathcal{H}_a$ は閉部分空間である．

証明. まず任意の $x \in \mathcal{H}_a$ に対して

$$\begin{aligned} x \in (p \circ \mathcal{H}_a)^\perp &\iff \text{任意の } y \in p \circ \mathcal{H}_a \text{に対して } \langle x|y \rangle = 0 \\ &\iff \text{任意の } z \in \mathcal{H}_a \text{に対して } \langle x|p \circ z \rangle = 0 \end{aligned}$$

であり $\langle x|p \circ z \rangle = (p \circ z)^\dagger \circ x = z^\dagger \circ p \circ x = \langle p \circ x|z \rangle$ となるから

$$\begin{aligned} x \in (p \circ \mathcal{H}_a)^\perp &\iff \text{任意の } z \in \mathcal{H}_a \text{に対して } \langle p \circ x|z \rangle = 0 \\ &\iff p \circ x = 0 \\ &\iff (1 - p) \circ x = x \end{aligned}$$

となる．ここで

$$\begin{aligned} (1-p)^2 &= 1 - 2p + p^2 = 1 - 2p + p = 1 - p \\ (1-p)^\dagger &= 1^\dagger - p^\dagger = 1 - p \end{aligned}$$

となるから $1 - p$ は射影である．よって命題 18 より

$$x \in (p \circ \mathcal{H}_a)^\perp \iff x \in (1 - p) \circ \mathcal{H}_a$$

が分かる．即ち $(p \circ \mathcal{H}_a)^\perp = (1 - p) \circ \mathcal{H}_a$ である．よって $(p \circ \mathcal{H}_a)^{\perp\perp} = p \circ \mathcal{H}_a$ となるので $p \circ \mathcal{H}_a \subset \mathcal{H}_a$ は閉部分空間である． $\square$

命題 20. $C_a := \{M \subset \mathcal{H}_a \mid M \text{ は閉部分空間 } \}$ とすると $\mathrm{Proj}_a \ni p \mapsto p \circ \mathcal{H}_a \in C_a$ は順序同型である．

証明. まず $p \leq q$ とすると $q \circ p = p$ だから

$$p \circ \mathcal{H}_a = \{p \circ x \mid x \in \mathcal{H}_a\} = \{q \circ p \circ x \mid x \in \mathcal{H}_a\} \subset q \circ \mathcal{H}_a$$

である．逆に $p \circ \mathcal{H}_a \subset q \circ \mathcal{H}_a$ とすると，$p \in p \circ \mathcal{H}_a \subset q \circ \mathcal{H}_a$ だから命題 18 より $q \circ p = p$ である．

後は $p \mapsto p \circ \mathcal{H}_a$ が全射であることを示せばよい．そのために $M \subset \mathcal{H}_a$ を閉部分空間とする．$X := \{p \in \mathrm{Proj}_a \mid p \circ \mathcal{H}_a \subset M\}$ とすると，命題 12 により上限 $p_M := \sup X$ が存在する．このとき $p_M \circ \mathcal{H}_a = M$ を示す．

まず $x \in M$ とする．命題 7 によりダガーモノ射 i と零エピ射 e により $x = i \circ e$ と書ける．このとき $p_x := i \circ i^\dagger$ とすれば $p_x \circ \mathcal{H}_a \subset M$ である．

$\because$) $y \in \mathcal{H}_a$ とする．M が閉部分空間だから $p_x \circ y \in M^{\perp\perp}$ を示せばよい．そこで $z \in M^\perp$ とする．$\langle z|x \rangle = 0$ より $0 = x^\dagger \circ z = e^\dagger \circ i^\dagger \circ z$ である．e が零エピ射 (即ち $e^\dagger$ が零モノ射) だから $i^\dagger \circ z = 0$ が分かる．よって

$$\langle z|p_x \circ y \rangle = y^\dagger \circ p_x^\dagger \circ z = y^\dagger \circ i \circ i^\dagger \circ z = 0$$

となる．z は任意だったから $p_x \circ y \in M^{\perp\perp}$ である．

よって $p_x \leq p_M$ となる．よって i がダガーモノ射より

$$x = i \circ e = i \circ i^\dagger \circ i \circ e = p_x \circ x \in p_x \circ \mathcal{H}_a \subset p_M \circ \mathcal{H}_a$$

となるから $M \subset p_M \circ \mathcal{H}_a$ が分かった．

$p_M \circ \mathcal{H}_a \subset M$ を示すため $x \in \mathcal{H}_a$ とする．M は閉部分空間だから $p_M \circ x \in M^{\perp\perp}$ を示せばよい．そこで任意の $y \in M^\perp$ を取る．命題 7 によりダガーモノ射 i と零エピ射 e により $y = i \circ e$ と書ける．このとき $i^\dagger \circ p_M = 0$ である．

$\because$) $p \in X$ とすると $y^\dagger \circ p = 0$ である．

$\because$) $z \in \mathcal{H}_a$ とすると $p \circ z \in p \circ \mathcal{H}_a \subset M$ だから $\langle p \circ z|y \rangle = 0$ である．つまり $y^\dagger \circ p \circ z = 0$ となる．z は任意だったから，s が generator であることより $y^\dagger \circ p = 0$ である．

このとき $e^\dagger \circ i^\dagger \circ p = 0$ で e が零エピ射 (即ち $e^\dagger$ が零モノ射) だから $i^\dagger \circ p = 0$ である．よって $\ker(i^\dagger)$ の普遍性により，次の点線の射 h が得られる．

$$\begin{tikzcd}
& \bullet \arrow[dr, "\ker(i^\dagger)"] & & \\
a \arrow[ur, dashed, "h"] \arrow[rr, "p"'] & & a \arrow[r, "i^\dagger"] & \bullet
\end{tikzcd}$$

$q := \ker(i^\dagger) \circ (\ker(i^\dagger))^\dagger$ と定めると，$\ker(i^\dagger)$ がダガーモノ射であることより

$$q \circ p = \ker(i^\dagger) \circ (\ker(i^\dagger))^\dagger \circ \ker(i^\dagger) \circ h = \ker(i^\dagger) \circ h = p$$

となるから $p \leq q$ である．

$p \in X$ は任意だったから $p_M \leq q$ が分かる．即ち $q \circ p_M = p_M$ である．故に

$$i^\dagger \circ p_M = i^\dagger \circ q \circ p_M = i^\dagger \circ \ker(i^\dagger) \circ (\ker(i^\dagger))^\dagger \circ p_M = 0$$

である．

よって $\langle p_M \circ x | y \rangle = y^\dagger \circ p_M \circ x = e^\dagger \circ i^\dagger \circ p_M \circ x = 0$ となる．故に $p_M \circ x \in M^{\perp\perp}$ である． □

命題 21. $\mathcal{H}_a$ は orthomodular である．

証明. $M \subset \mathcal{H}_a$ を閉部分空間とする．命題 20 よりある射影 p を使って $M = p \circ \mathcal{H}_a$ と書ける．このとき命題 19 の証明により $M^\perp = (1-p) \circ \mathcal{H}_a$ である．よって任意の $x \in \mathcal{H}_a$ に対して $x = (p \circ x) + ((1-p) \circ x) \in M + M^\perp$ だから $\mathcal{H}_a = M + M^\perp$ となる． □

命題 22. $\mathcal{H}_u$ が正規直交列を持つような $u \in C$ が存在する．

証明. まず X を集合，$\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(X) := \{F \subset X \mid |F| < \infty\}$ とする．$F \in \mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(X)$ に対して c_0^F で c_0 の $|F|$ 個のダガー双積を表す ($|F| = 1$ のときは $c_0^F := c_0$ とする)．$\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(X)$ を包含関係で順序集合とみなして，$F \subset G$ のとき普遍性で定まる射を $i_{FG} \colon c_0^F \to c_0^G$ とする．これは関手 $T \colon \mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(X) \to DM$ を定める．よって $c_0^X := \operatorname{colim} T$ が存在する．標準的な射を $\mu_F \colon c_0^F \to c_0^X$ と書く．μ_F は DM の射だからダガーモノ射である (即ち $\mu_F^\dagger \circ \mu_F = \mathrm{id}$ となる)．

ここで X として $\mathbb{N}$ を取り，$x_n := \mu_{\{n\}} \colon c_0 = c_0^{\{n\}} \to c_0^{\mathbb{N}}$ とすれば $x_n \in \mathcal{H}_{c_0^{\mathbb{N}}}$ である．このとき $n \neq m$ に対して

$$\begin{aligned}
\langle x_n, x_n \rangle &= x_n^\dagger \circ x_n = \mathrm{id}_I = 1 \\
\langle x_n, x_m \rangle &= x_m^\dagger \circ x_n \\
&= (\mu_{\{n,m\}} \circ i_{\{m\}\{n,m\}})^\dagger \circ (\mu_{\{n,m\}} \circ i_{\{n\}\{n,m\}}) \\
&= i_{\{m\}\{n,m\}}^\dagger \circ \mu_{\{n,m\}}^\dagger \circ \mu_{\{n,m\}} \circ i_{\{n\}\{n,m\}} \\
&= i_{\{m\}\{n,m\}}^\dagger \circ i_{\{n\}\{n,m\}} = 0
\end{aligned}$$

となるから $\{x_n\}_{n=0}^\infty$ が正規直交列である． □

定理 23. K は $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ のいずれかと同型である．

証明. 定理 22 より $\mathcal{H}_{c_0^{\mathbb{N}}}$ は orthomodular かつ正規直交列 $\{x_n\}_{n=0}^\infty$ を持つ．よって定理 3

を使えばよい． □

定理 24. $a \in C$ に対して $\mathcal{H}_a$ は K 上の Hilbert 空間である．

証明. ダガー双積 $a \oplus c_0^{\mathbb{N}}$ を考える．$i_1 \colon c_0^{\mathbb{N}} \to a \oplus c_0^{\mathbb{N}}$ により単射

$$\mathcal{H}_a = \mathrm{Hom}_C(c_0, a) \xrightarrow{i_1 \circ -} \mathrm{Hom}_C(c_0, a \oplus c_0^{\mathbb{N}}) = \mathcal{H}_{a \oplus c_0^{\mathbb{N}}}$$

が得られる．これにより $\mathcal{H}_{c_0^{\mathbb{N}}} \subset \mathcal{H}_{a \oplus c_0^{\mathbb{N}}}$ を部分空間とみなせば，$\mathcal{H}_{a \oplus c_0^{\mathbb{N}}}$ も正規直交列を持つことになるので定理 3 により $\mathcal{H}_{a \oplus c_0^{\mathbb{N}}}$ は Hilbert 空間である．

次に $i_0 \colon a \to a \oplus c_0^{\mathbb{N}}$ を考えれば，これにより $\mathcal{H}_a \subset \mathcal{H}_{a \oplus c_0^{\mathbb{N}}}$ となる．$\mathcal{H}_a$ が正規直交列を持てば，再び定理 3 により $\mathcal{H}_a$ は Hilbert 空間である．もし正規直交列を持たないならば，$\mathcal{H}_a$ は Hilbert 空間の有限次元部分空間ということになるので，この場合も $\mathcal{H}_a$ は Hilbert 空間である． □

命題 25. $\mathrm{Hom}_C(c_0, -)$ は関手 $C \to \mathbf{Hilb}_K$ を定める．

証明. C の射 $f \colon a \to b$ に対して $f \circ - \colon \mathcal{H}_a \to \mathcal{H}_b$ が $\mathbf{Hilb}_K$ の射であることを示せばよい．$f \circ -$ の線型性は明らかだから有界性を示す．$x \in \mathcal{H}_b$，$y \in \mathcal{H}_a$ に対して

$$\langle f^\dagger \circ x | y \rangle = y^\dagger \circ f^\dagger \circ x = (f \circ y)^\dagger \circ x = \langle x | f \circ y \rangle$$

だから $f^\dagger \circ -$ は $f \circ -$ の随伴である．よって命題 2 により $f \circ -$ は有界である． □

命題 26. $\mathrm{Hom}_C(c_0, -) \colon C \to \mathbf{Hilb}_K$ はダガーと交換する．

証明. 命題 25 の証明から明らか． □

定理 27. $\mathrm{Hom}_C(c_0, -) \colon C \to \mathbf{Hilb}_K$ は圏同値である．

証明. (忠実) c_0 が generator だから明らか．

(本質的全射) $\mathcal{H}$ を Hilbert 空間として，$B \subset \mathcal{H}$ を正規直交基底とする．このとき $\mathcal{H}_{c_0^B}$ において $\{\mu_{\{u\}} \mid u \in B\} \subset \mathcal{H}_{c_0^B}$ は命題 22 の証明と同様にして正規直交系である．これが $\mathcal{H}_{c_0^B}$ の正規直交基底になることを示せば $\mathcal{H}_{c_0^B} \cong \mathcal{H}$ が分かる．そこで $f \in \mathcal{H}_{c_0^B}$ が「任意の $u \in B$ に対して $\langle \mu_{\{u\}} | f \rangle = 0$」を満たすとする．$F \subset B$ を有限部分集合とする．任意の $u \in F$ に対して

$$f^\dagger \circ \mu_F \circ i_{\{u\}F} = f^\dagger \circ \mu_{\{u\}} = \langle \mu_{\{u\}} | f \rangle = 0$$

である．よって普遍性により $f^\dagger \circ \mu_F = 0$ が分かる．よってダガー核 $\ker(f^\dagger)$ の普遍性に

より次の点線の射 h_F が取れる．

$$
\begin{tikzcd}
& s \arrow[dr, "\ker(f^\dagger)"] & & \\
c_0^F \arrow[ur, dashed, "h_F"] \arrow[rr, "\mu_F"'] & & c_0^B \arrow[r, "f^\dagger"'] & c_0
\end{tikzcd}
$$

このとき $F \subset G$ に対して $h_G \circ i_{FG} = h_F$ である．

∵) $\ker(f^\dagger) \circ h_G \circ i_{FG} = \mu_G \circ i_{FG} = \mu_F = \ker(f^\dagger) \circ h_F$ である．

$$
\begin{tikzcd}
c_0^G \arrow[drr, bend left, "h_G"] \arrow[drrr, "\mu_G"] & & & \\
& & s \arrow[r, "\ker(f^\dagger)"] & c_0^B \\
c_0^F \arrow[uu, "i_{FG}"] \arrow[urr, bend right, "h_F"'] \arrow[urrr, "\mu_F"'] & & &
\end{tikzcd}
$$

よって $\ker(f^\dagger)$ がモノ射だから $h_G \circ i_{FG} = h_F$ である．

従って次の点線の射 $h\colon c_0^B \to a$ が存在して可換となる．

$$
\begin{tikzcd}
c_0^G \arrow[dr, "\mu_G"] \arrow[drr, bend left, "h_G"] \arrow[drrr, "\mu_G"] & & & \\
& c_0^B \arrow[r, dashed, "h"] & s \arrow[r, "\ker(f^\dagger)"] & c_0^B \\
c_0^F \arrow[uu, "i_{FG}"] \arrow[ur, "\mu_F"] \arrow[urr, bend right, "h_F"'] \arrow[urrr, "\mu_F"'] & & &
\end{tikzcd}
$$

このとき $\ker(f^\dagger) \circ h = \mathrm{id}_{c_0^B}$ となるから $\ker(f^\dagger)$ はエピ射である．よって $\ker(f^\dagger)$ は同型となり $f^\dagger = 0$ となる．即ち $f = 0$ である．

(充満) $\mathrm{Hom}_C(c_0, -)\colon \mathrm{Hom}_C(a, b) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{Hilb}_K}(\mathcal{H}_a, \mathcal{H}_b)$ が全射であることを示す．まず本質的全射の証明により，$B \subset \mathcal{H}_a$ を正規直交基底とすれば $\mathcal{H}_{c_0^B} \cong \mathcal{H}_a$ である．このとき $c_0^B \cong a$ となる．

∵) $u \in B$ とすると $u\colon c_0 \to a$ である．これにより有限部分集合 $F \subset B$ に対して $c_0^F \to a$ が定まる．よって c_0^B の普遍性により，ダガーモノ射 $h\colon c_0^B \to a$ が一意に存

在して

$$\begin{tikzcd}
c_0^G \arrow[dr, "\mu_G"] \arrow[drr, bend left] & & \\
& c_0^B \arrow[r, dashed, "h"] & a \\
c_0^F \arrow[uu, "i_{FG}"] \arrow[ur, "\mu_F"'] \arrow[urr, bend right] & &
\end{tikzcd}$$

が可換となる．即ち $h \circ \mu_{\{u\}} = u$ である．このとき $T := \mathrm{Hom}_C(c_0, h \circ h^\dagger)$ とすると，任意の $u \in B$ に対して

$$T(u) = h \circ h^\dagger \circ u = h \circ h^\dagger \circ h \circ \mu_{\{u\}} = h \circ \mu_{\{u\}} = u$$

となるから $T = \mathrm{id}_{\mathcal{H}_a}$ である．$\mathrm{Hom}_C(c_0,)$ が忠実だから $h \circ h^\dagger = \mathrm{id}_a$，即ち h がダガーエピ射と分かる．よって $h\colon c_0^B \to a$ は同型である．

よって $a = c_0^B$ としてよい．同様にして $b = c_0^{B'}$ としておく．$T\colon \mathcal{H}_a \to \mathcal{H}_b$ を有界線型関数とする．

(i) $a = b$ の場合．定理 4 により T はユニタリ写像としてよい．このとき $u \in B$ に対して

$$T(\mu_{\{u\}})^\dagger \circ T(\mu_{\{u\}}) = \langle T(\mu_{\{u\}}) | T(\mu_{\{u\}}) \rangle = \langle \mu_{\{u\}} | \mu_{\{u\}} \rangle = \mathrm{id}$$

となるから $T(\mu_{\{u\}})$ はダガーモノ射である．よってこれから普遍性により $h\colon c_0^B \to a$ が得られる．

$$\begin{tikzcd}
c_0^G \arrow[dr, "\mu_G"] \arrow[drr, bend left] & & \\
& c_0^B \arrow[r, dashed, "h"] & a \\
c_0^F \arrow[uu, "i_{FG}"] \arrow[ur, "\mu_F"'] \arrow[urr, bend right] & &
\end{tikzcd}$$

即ち任意の $u \in B$ に対して $h \circ \mu_{\{u\}} = T(\mu_{\{u\}})$ である．よって $\mathrm{Hom}_C(c_0, h) = T$ が分かる．即ち $\mathrm{Hom}_C(c_0, -)\colon \mathrm{Hom}_V(a, a) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{Hilb}_K}(\mathcal{H}_a, \mathcal{H}_a)$ は全射である．

(ii) $|B| \leq |B'|$ の場合．単射 $B \to B'$ を取れば，ここから普遍性により $h\colon c_0^B \to c_0^{B'}$ が得られる．このとき $T \circ \mathrm{Hom}_C(c_0, h^\dagger)\colon \mathcal{H}_b \to \mathcal{H}_b$ である．よって (i) により，ある

$k\colon b \to b$ が存在して $T \circ \mathrm{Hom}_C(I, h^\dagger) = \mathrm{Hom}_C(c_0, k)$ となる．このとき

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{H}_a \arrow[rr, "\mathrm{Hom}_C(c_0,\mathrm{id})"] \arrow[dr, "\mathrm{Hom}_C(c_0,h)"'] & & \mathcal{H}_a \arrow[dr, "T"] & \\
& \mathcal{H}_b \arrow[ur, "\mathrm{Hom}_C(c_0,h^\dagger)"] \arrow[rr, "\mathrm{Hom}_C(c_0,k)"'] & & \mathcal{H}_b
\end{tikzcd}$$

が可換だから $T = \mathrm{Hom}_C(c_0, k \circ h)$ である．

(iii) $|B| > |B'|$ の場合．$T^\dagger\colon \mathcal{H}_b \to \mathcal{H}_a$ だから，(ii) によりある $k\colon b \to a$ が存在して $T^\dagger = \mathrm{Hom}_C(c_0, k)$ となる．このとき $\mathrm{Hom}_C(c_0, k^\dagger) = \mathrm{Hom}_C(c_0, k)^\dagger = T$ である． □

4　モノイダル構造について

定義. V がダガーモノイダル圏
$\Longleftrightarrow$ V はダガー圏かつモノイダル圏で，次の条件が成り立つ．

(1) α, λ, ρ の成分が全てダガー同型である．
(2) V の射 f, g に対して $(f \otimes g)^\dagger = f^\dagger \otimes g^\dagger$ である．

定義. V が対称ダガーモノイダル圏
$\Longleftrightarrow$ V はダガーモノイダル圏で，そのモノイダル構造が対称モノイダル圏である．

命題 28. V がモノイダル圏のとき $\mathrm{Hom}_V(I, I)$ は可換モノイドである．

証明. $f, g\colon I \to I$ に対して次の図式は可換である．

$$\begin{tikzcd}
I \arrow[rr, "f"] & & I \arrow[rr, "g"] & & I \\
& & I \otimes I \arrow[u, "\lambda=\rho"'] \arrow[drr, "g\otimes\mathrm{id}_I"] & & \\
I \otimes I \arrow[uu, "\lambda"] \arrow[urr, "\mathrm{id}_I\otimes f"] \arrow[rrrr, "g\otimes f"] \arrow[drr, "g\otimes\mathrm{id}_I"'] \arrow[dd, "\rho"'] & & & & I \otimes I \arrow[uu, "\rho"'] \arrow[dd, "\lambda"] \\
& & I \otimes I \arrow[d, "\lambda=\rho"] \arrow[urr, "\mathrm{id}_I\otimes f"'] & & \\
I \arrow[rr, "g"'] & & I \arrow[rr, "f"'] & & I
\end{tikzcd}$$

従って $g \circ f = f \circ g$ である． □

命題 29. V がモノイダル圏で有限双積を持つとき，$\mathrm{Hom}_V(I,I)$ は可換半環である．

証明. 命題 14 より $\mathrm{Hom}_V(I,I)$ は半環である．命題 28 よりこれは可換である． □

定理 30. V をダガーモノイダル圏として，以下の条件を満たすとする．

(1) I は simple かつ generator である．
(2) V は有限ダガー双積とダガー equalizer を持つ．
(3) V はダガー核条件を満たす．
(4) P が有向順序で $T\colon P \to DM$ が関手ならば，余極限 $\mathrm{colim}\, T$ が存在する．

このとき $V \simeq \mathbf{Hilb}_{\mathbb{R}}$ または $V \simeq \mathbf{Hilb}_{\mathbb{C}}$ である．

証明. 定理 27 により $V \simeq \mathbf{Hilb}_K$，$K = \mathrm{Hom}_V(I,I)$ で K は $\mathbb{R},\mathbb{C},\mathbb{H}$ のいずれかであるが，命題 29 より $\mathbb{R},\mathbb{C}$ のどちらかである． □

定理 31. 定理 30 の圏同値 $\mathrm{Hom}_V(I,-)\colon V \to \mathbf{Hilb}_K$ は strong モノイダル関手である．更に $u,v \in V$ に対して同型 $\varphi\colon \mathcal{H}_u \otimes \mathcal{H}_v \to \mathcal{H}_{u\otimes v}$ はダガー同型である．

証明. $x \in \mathcal{H}_u$，$y \in \mathcal{H}_v$ に対して $T(x,y)$ を合成

$$I \cong I \otimes I \xrightarrow{x\otimes y} u \otimes v$$

で定義すれば，$T\colon \mathcal{H}_u \times \mathcal{H}_v \to \mathcal{H}_{u\otimes v}$ となる．これは明らかに双線型である．また

$$\begin{aligned}
\|T(x,y)\|^2 = \langle T(x,y)|T(x,y)\rangle &= T(x,y)^\dagger \circ T(x,y) \\
&= (I \cong I \otimes I \xrightarrow{x\otimes y} u \otimes v \xrightarrow{x^\dagger\otimes y^\dagger} I \otimes I \cong I) \\
&= (I \cong I \otimes I \xrightarrow{(x^\dagger\circ x)\otimes(y^\dagger\circ y)} I \otimes I \cong I) \\
&= \langle x|x\rangle\langle y|y\rangle = \|x\|^2\|y\|^2
\end{aligned}$$

となるから T は有界である．よって有界線型写像 $\varphi_{uv}\colon \mathcal{H}_u \otimes \mathcal{H}_v \to \mathcal{H}_{u\otimes v}$ が得られる．また定義から $\mathrm{Hom}_V(I,I) = K$ である．よって $\psi := \mathrm{id}_K\colon K \to \mathcal{H}_I$ とすれば，φ,ψ により $\mathrm{Hom}_V(I,-)$ が strong モノイダル関手になることが分かる．φ_{uv} がダガー同型であることも分かる． □

参考文献

[1] Shay Tobin, Characterisations for the category of Hilbert spaces, `https://doi.org/10.25949/25286476.v1`

[2] M. P. Solèr, Characterization of hilbert spaces by orthomodular spaces, `https://doi.org/10.1080/00927879508825218`

[3] C. Heunen and A. Kornell, Axioms for the category of Hilbert spaces, `https://arxiv.org/abs/2109.07418`

[4] S. S. Holland Jr. Orthomodularity in infinite dimensions; a theorem of M. Solèr. Bulletin of the American Mathematical Society, 32:205–234 (1995)

[5] C. Heunen, 圏論による量子計算のモデルと論理, 共立出版 (2018), `https://www.amazon.co.jp/dp/4320124367`