Day convolution

alg-d
https://alg-d.com/math/kan_extension/

2026 年 1 月 4 日

$\langle V, \otimes, I\rangle$ を小さい[*1]対称モノイダル閉圏とする．関手 $F, G\colon V^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ に対して関手 $F \boxtimes G$ を合成

$$V^{\mathrm{op}} \times V^{\mathrm{op}} \xrightarrow{F\times G} \mathbf{Set}\times\mathbf{Set} \xrightarrow{\times} \mathbf{Set}$$

で定める．

定義. 関手 $\otimes\colon \widehat{V}\times\widehat{V} \to \widehat{V}$ を左 Kan 拡張 $(y\times y)^{\dagger}(y\circ\otimes)$ により定める．

$$\begin{tikzcd}
\widehat{V}\times\widehat{V} \arrow[drr, "\otimes"] & & \\
V\times V \arrow[u, "y\times y"] \arrow[u, phantom, shift left=4ex, "\Uparrow"] \arrow[r, "\otimes"'] & V \arrow[r, "y"'] & \widehat{V}
\end{tikzcd}$$

$F, G\colon V^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ に対する $F\otimes G\colon V^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ を F と G の **Day convolution** という．

Day convolution は各点左 Kan 拡張だから，$F, G, H \in \widehat{V}$ に対して

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{\widehat{V}}(F\otimes G, H) &\cong \mathrm{Hom}_{\widehat{V\times V}}(\mathrm{Hom}_{\widehat{V}\times\widehat{V}}(y\times y(-), \langle F, G\rangle), \mathrm{Hom}_{V}(y\circ\otimes(-), H)) \\
&\cong \mathrm{Hom}_{\widehat{V\times V}}(F\boxtimes G, H\circ\otimes) \\
&\cong \int_{\langle u,v\rangle\in(V\times V)^{\mathrm{op}}} \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(Fu\times Gv, H(u\otimes v)) \\
&\cong \int_{u\in V^{\mathrm{op}}}\int_{v\in V^{\mathrm{op}}} \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(Fu, \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(Gv, H(u\otimes v))) \\
&\cong \mathrm{Hom}_{\widehat{V}}(F-, \mathrm{Hom}_{\widehat{V}}(G\square, H(-\otimes\square)))
\end{aligned}$$

[*1] 小さくない場合を扱うにはどうすればよいかは「Universe Enlargement」の PDF を参照.

となる．即ち $-\otimes G\colon \widehat{V}\to\widehat{V}$ は右随伴を持つ．同様にして $F\otimes -$ も右随伴を持つ．従ってこれらはコエンドや copower と交換する．

Day convolution $F\otimes G$ はコエンドによる各点左 Kan 拡張によれば

$$\begin{aligned} F\otimes G &\cong \int^{\langle u,v\rangle\in V\times V} \mathrm{Hom}_{\widehat{V}\times\widehat{V}}(\langle y(u),y(v)\rangle,\langle F,G\rangle)\odot y(u\otimes v) \\ &\cong \int^{\langle u,v\rangle\in V\times V} (Fu\times Gv)\odot y(u\otimes v) \end{aligned}$$

で得られる．よって $F=y(z)$ の場合は

$$\begin{aligned} y(z)\otimes G &\cong \int^{\langle u,v\rangle\in V\times V} (\mathrm{Hom}_V(u,z)\times Gv)\odot y(u\otimes v) \\ &\cong \int^{v\in V}\int^{u\in V} \mathrm{Hom}_V(u,z)\odot(Gv\odot y(u\otimes v)) \\ &\cong \int^{v\in V} Gv\odot y(z\otimes v) \quad \text{(余米田の補題)} \end{aligned}$$

となる．従って

$$\begin{aligned} (F\otimes G)\otimes H &\cong \Big(\int^{\langle u,v\rangle\in V\times V} (Fu\times Gv)\odot y(u\otimes v)\Big)\otimes H \\ &\cong \int^{\langle u,v\rangle\in V\times V} (Fu\times Gv)\odot(y(u\otimes v)\otimes H) \\ &\cong \int^{\langle u,v\rangle\in V\times V} (Fu\times Gv)\odot\Big(\int^{w\in V} Hw\odot y((u\otimes v)\otimes w)\Big) \\ &\cong \int^{\langle u,v,w\rangle} (Fu\times Gv\times Hw)\odot y((u\otimes v)\otimes w) \end{aligned}$$

となる．同様にして

$$F\otimes(G\otimes H)\cong\int^{\langle u,v,w\rangle}(Fu\times Gv\times Hw)\odot y(u\otimes(v\otimes w))$$

である．よって $(F\otimes G)\otimes H\cong F\otimes(G\otimes H)$ が分かる．これは F,G,H について自然である．また $y(I)\otimes F\cong F$ と $F\otimes y(I)\cong F$ も分かり，これも F について自然である．更に V の coherence 条件から $\widehat{V}$ の coherence 条件も分かる．以上により

定理 1. Day convolution はモノイダル圏 $\langle\widehat{V},\otimes,y(I)\rangle$ を与える． □

更に V が対称であることから

$$\begin{aligned} F \otimes G &\cong \int^{\langle u,v\rangle \in V\times V} (Fu \times Gv) \odot y(u\otimes v) \\ &\cong \int^{\langle u,v\rangle \in V\times V} (Gv \times Fu) \odot y(v\otimes u) \cong G \otimes F \end{aligned}$$

となり，これにより $\widehat{V}$ も対称モノイダル閉圏であることが分かる．

定理 2. 米田埋込 $y\colon V \to \widehat{V}$ は strong モノイダル関手である．

証明. 上記で述べた式より

$$y(u) \otimes y(v) \cong \int^{v\in V} y(v) \times y(u\otimes v) \cong y(u\otimes v)$$

となり，これにより strong モノイダル関手である． □

米田埋込は極限と交換するから，この strong モノイダル関手 $y\colon V \to \widehat{V}$ も極限と交換する．(但しこの y は余極限と交換するとは限らない．)

参考文献

[1] G.M. Kelly, Basic Concepts of Enriched Category Theory, Cambridge University Press, Lecture Notes in Mathematics 64 (1982), section 3.11, 3.12, `http://tac.mta.ca/tac/reprints/articles/10/tr10abs.html`

[2] J. F. Kennison, On limit-preserving functors, Illinois J. Math. 12(1968), 616–619, `https://doi.org/10.1215/ijm/1256053963`

[3] nLab, Day convolution, `https://ncatlab.org/nlab/show/Day+convolution`