# コンマ圏

alg-d
https://alg-d.com/math/kan_extension/

2025 年 2 月 11 日

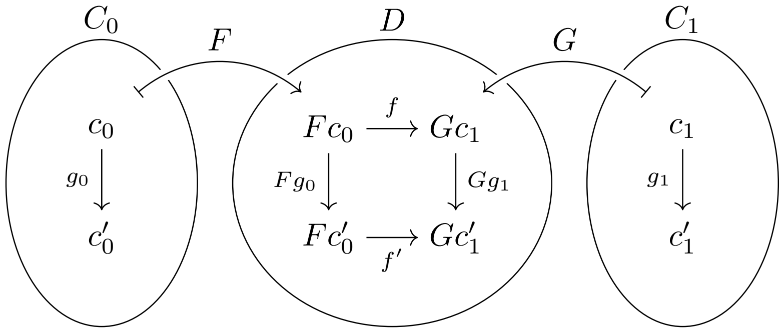
第 0 章「圏の構成例」の PDF で，直積などの圏を構成する方法について紹介したが，実はより重要な構成方法がある．それがコンマ圏である．

**定義.** $C_0, C_1, D$ を圏，$F\colon C_0 \to D$，$G\colon C_1 \to D$ を関手とする．以下のようにして定まる圏をコンマ圏 (comma category) といい，$F \downarrow G$ と書く[*1]．

- $F \downarrow G$ の対象は組 $\langle c_0, c_1, f \rangle$ であり以下を満たすものである．
  (1) $c_0$ は $C_0$ の対象である．
  (2) $c_1$ は $C_1$ の対象である．
  (3) $f\colon Fc_0 \to Gc_1$ は $D$ の射である．
- $F{\downarrow}G$ の射 $\langle c_0, c_1, f \rangle \to \langle c'_0, c'_1, f' \rangle$ とは組 $\langle g_0, g_1 \rangle$ であり以下を満たすものである．
  (1) $g_0\colon c_0 \to c'_0$ は $C_0$ の射である．
  (2) $g_1\colon c_1 \to c'_1$ は $C_1$ の射である．

[*1] コンマ圏が登場した頃は，$F \downarrow G$ を $(F, G)$ とコンマを使った記号で表し，それでコンマ圏と呼ばれていたが，この ( , ) という記号は他でもよく使い紛らわしいため，今の記号に変わった，という経緯があるらしい．また $F \downarrow G$ を $F/G$ などと書いている文献もある．

(3) $Gg_1 \circ f = f' \circ Fg_0$ である．




**例 1.** $D = C_0 = C$，$C_1 = \mathbb{1} = \{*\}$ として $F\colon C \to C$ を恒等関手 $\mathrm{id}_C$，$G\colon \mathbb{1} \to C$ を $G(*) = c$ で定まる関手とすれば，$F \downarrow G \cong C/c$ である．つまりコンマ圏はスライス圏の一般化と言える． □

**例 2.** $D := \mathbb{1}$ として，$F\colon C_0 \to \mathbb{1}$，$G\colon C_1 \to \mathbb{1}$ を一意に定まる関手とすれば，コンマ圏は $F \downarrow G \cong C_0 \times C_1$ となる． □

**例 3.** 圏 $C$ に対して $\mathrm{id}_C \downarrow \mathrm{id}_C \cong C^2$ である． □

**例 4.** $F\colon \mathbf{Set} \to \mathbf{Set}$ を $x \in \mathbf{Set}$ に対して $F(x) := x \times x$ で定まる関手とする．このとき $\mathbf{Graph} := \mathrm{id}_{\mathbf{Set}} \downarrow F$ を有向グラフの圏という．(通常の有向グラフの定義を知っている人は，この定義が通常の定義と一致していることはすぐ分かるであろう．) □

**例 5.** $C$ を圏として $P \in \widehat{C}$ を取る．$P$ を関手 $\mathbb{1} \to \widehat{C}$ とみなしたとき，コンマ圏 $y \downarrow P$ を $P$ の要素の圏 (category of elements) という．記号では $\mathrm{el}(P)$，$\displaystyle\int_C P$ などで表すことがある．

コンマ圏 $y \downarrow P$ の対象は，対象 $c \in C$，$* \in \mathbb{1}$ と自然変換 $\theta\colon y(c) \Rightarrow P$ の 3 つ組であるが，米田の補題から $\theta\colon y(c) \Rightarrow P$ は元 $x \in Pc$ と同一視することができる．よって

$$\mathrm{Ob}(y \downarrow P) = \{\langle c, x\rangle \mid c \in \mathrm{Ob}(C),\ x \in Pc\}$$

とみなすことが出来る．このとき $y \downarrow P$ の射 $\langle c, x\rangle \to \langle c', x'\rangle$ は $f\colon c \to c'$ で $Pf(x') = x$ となるものである．

次に関手 $1\colon \mathbb{1} \to \mathbf{Set}$ を $1(*) := 1$ で定める．今度は $P$ を関手 $C^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ とみなす．するとコンマ圏 $1 \downarrow P$ の対象は $* \in \mathbb{1}$，$c \in C^{\mathrm{op}}$，$f\colon 1 \to Pc$ の 3 つ組であるから

$$\mathrm{Ob}(1 \downarrow P) = \{\langle c, x\rangle \mid c \in \mathrm{Ob}(C),\ x \in Pc\} = \mathrm{Ob}(y \downarrow P)$$

とみなせる．一方で $1\mathbin{\downarrow}P$ の射 $\langle c,x\rangle\to\langle c',x'\rangle$ は $C^{\mathrm{op}}$ の射 $f\colon c\to c'$ (即ち $C$ の射 $f\colon c'\to c$) であって $Pf(x)=x'$ となるものである．従って $(1\mathbin{\downarrow}P)^{\mathrm{op}}\cong y\mathbin{\downarrow}P$ となることが分かる． □

**命題 6.** $(F\mathbin{\downarrow}G)^{\mathrm{op}}=G^{\mathrm{op}}\mathbin{\downarrow}F^{\mathrm{op}}$ である．

*証明.* $(F\mathbin{\downarrow}G)^{\mathrm{op}}$ の射 $\langle c_0,c_1,f\rangle\to\langle c'_0,c'_1,f'\rangle$ とは $\langle g_0,g_1\rangle$ であって次を可換にするものである．

$$\begin{tikzcd} c_0 \\ c'_0 \arrow[u, "g_0"] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} Fc_0 \arrow[r, "f"] & Gc_1 \\ Fc'_0 \arrow[u, "Fg_0"] \arrow[r, "f'"'] & Gc'_1 \arrow[u, "Gg_1"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} c_1 \\ c'_1 \arrow[u, "g_1"] \end{tikzcd}$$

一方 $G^{\mathrm{op}}\mathbin{\downarrow}F^{\mathrm{op}}$ の射 $\langle c_1,c_0,f\rangle\to\langle c'_1,c'_0,f'\rangle$ とは $\langle g_1,g_0\rangle$ であって次を可換にするものである．

$$\begin{tikzcd} c_1 \\ c'_1 \arrow[u, "g_1"] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} Gc_1 & Fc_0 \arrow[l, "f"'] \\ Gc'_1 \arrow[u, "Gg_1"] & Fc'_0 \arrow[l, "f'"] \arrow[u, "Fg_0"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} c_0 \\ c'_0 \arrow[u, "g_0"] \end{tikzcd}$$

よって $(F\mathbin{\downarrow}G)^{\mathrm{op}}=G^{\mathrm{op}}\mathbin{\downarrow}F^{\mathrm{op}}$ が分かる． □

$C_0,C_1,D$ を圏，$F\colon C_0\to D$，$G\colon C_1\to D$ を関手とする．コンマ圏 $F\mathbin{\downarrow}G$ を考えると，関手 $P_0\colon F\mathbin{\downarrow}G\to C_0$，$P_1\colon F\mathbin{\downarrow}G\to C_1$ と自然変換 $\sigma\colon F\circ P_0\Rightarrow G\circ P_1$ が以下のように定まる．

$$\begin{tikzcd} C_1 \arrow[r, "G"] & D \\ F\mathbin{\downarrow}G \arrow[u, "P_1"] \arrow[r, "P_0"'] \arrow[ur, phantom, "\Nwarrow\sigma"] & C_0 \arrow[u, "F"'] \end{tikzcd}$$

- $\langle c_0,c_1,f\rangle\in\mathrm{Ob}(F\mathbin{\downarrow}G)$ に対して $P_0\langle c_0,c_1,f\rangle:=c_0$，$\langle g_0,g_1\rangle\in\mathrm{Mor}(F\mathbin{\downarrow}G)$ に対して $P_0\langle g_0,g_1\rangle:=g_0$.
- $\langle c_0,c_1,f\rangle\in\mathrm{Ob}(F\mathbin{\downarrow}G)$ に対して $P_1\langle c_0,c_1,f\rangle:=c_1$，$\langle g_0,g_1\rangle\in\mathrm{Mor}(F\mathbin{\downarrow}G)$ に対して $P_1\langle g_0,g_1\rangle:=g_1$.
- $\langle c_0,c_1,f\rangle\in\mathrm{Ob}(F\mathbin{\downarrow}G)$ に対して $\sigma_{\langle c_0,c_1,f\rangle}:=f$.

コンマ圏の重要な性質は，この $\langle F\downarrow G, P_0, P_1, \sigma\rangle$ がある種の普遍性を持つ事である[*2].

**命題 7.** $C_0, C_1, D$ を圏，$F\colon C_0 \to D$，$G\colon C_1 \to D$ を関手として，上記のように関手 $P_0\colon F\downarrow G \to C_0$，$P_1\colon F\downarrow G \to C_1$ と自然変換 $\sigma\colon F\circ P_0 \Rightarrow G\circ P_1$ を定める．このとき，別の組 $\langle X, Q_0, Q_1, \theta\rangle$ が同じ条件，即ち

- $X$ は圏である．
- $Q_0\colon X \to C_0$ は関手である．
- $Q_1\colon X \to C_1$ は関手である．
- $\theta\colon F\circ Q_0 \Rightarrow G\circ Q_1$ は自然変換である．

$$
\begin{tikzcd}
C_1 \arrow[r, "G"] & D \\
X \arrow[u, "Q_1"] \arrow[r, "Q_0"'] \arrow[ur, phantom, "\Nwarrow \theta"] & C_0 \arrow[u, "F"']
\end{tikzcd}
$$

を満たすならば，関手 $H\colon X \to F\downarrow G$ が一意に存在して以下を満たす．

(1) $P_0\circ H = Q_0$，$P_1\circ H = Q_1$ である．
(2) 次の自然変換の等式が成り立つ．

$$
\begin{tikzcd}
 & C_1 \arrow[r, "G"] & D \\
 & F\downarrow G \arrow[u, "P_1"] \arrow[r, "P_0"'] \arrow[ur, phantom, "\Nwarrow \sigma"] & C_0 \arrow[u, "F"'] \\
X \arrow[ur, dashed, "H"'] \arrow[uur, bend left, "Q_1"] \arrow[urr, bend right, "Q_0"'] & &
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
 & C_1 \arrow[r, "G"] & D \\
 & \Nwarrow \theta & C_0 \arrow[u, "F"'] \\
X \arrow[uur, bend left, "Q_1"] \arrow[urr, bend right, "Q_0"'] & &
\end{tikzcd}
$$

**証明**. $Q_0\colon X \to C_0$，$Q_1\colon X \to C_1$ を関手，$\theta\colon F\circ Q_0 \Rightarrow G\circ Q_1$ を自然変換とする．関手 $H\colon X \to F\downarrow G$ を

- 対象 $x \in X$ に対して $H(x) := \langle Q_0(x), Q_1(x), \theta_x\rangle$ とする．
- 射 $f \in X$ に対して $H(f) := \langle Q_0(f), Q_1(f)\rangle$ とする．

で定める．このとき明らかに条件 (1)(2) を満たす．またこの条件を満たす $H$ は明らかにこれしかない． □

[*2] コンマ圏が満たすべき「正しい」普遍性については第 3 章で述べる．「2-category での極限」の PDF を参照．

**例 8.** $F, G\colon C \to D$ を関手とするとき，自然変換 $\theta\colon F \Rightarrow G$ と「関手 $H\colon C \to F{\downarrow}G$ で $P_0 H = \mathrm{id}$，$P_1 H = \mathrm{id}$ を満たすもの」は 1 対 1 に対応する (次の図式を参照).

$$
\begin{tikzcd}
 & C \arrow[r, "G"] & D \\
 & F{\downarrow}G \arrow[u, "P_1"] \arrow[r, "P_0"'] \arrow[ur, phantom, "\Leftarrow\!\!\!\!\nwarrow \sigma"] & C \arrow[u, "F"'] \\
C \arrow[uur, bend left, "\mathrm{id}"] \arrow[ur, dashed, "H"'] \arrow[urr, bend right, "\mathrm{id}"'] \arrow[u, phantom, "\parallel"] \arrow[r, phantom, "\parallel"] & &
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
 & C \arrow[r, "G"] & D \\
 & \arrow[ur, phantom, "\theta"] & C \arrow[u, "F"'] \\
C \arrow[uur, bend left, "\mathrm{id}"] \arrow[urr, bend right, "\mathrm{id}"'] & &
\end{tikzcd}
$$

□