

# 随伴関手定理

alg-d

[https://alg-d.com/math/kan\\_extension/](https://alg-d.com/math/kan_extension/)

2025年1月20日

左随伴関手は余極限と交換するのであった(「随伴関手」のPDFを参照)。では逆に、余極限と交換する関手は左随伴になるのだろうか？ある条件の下であればこれが成り立つ、という定理が随伴関手定理である。これを理解する上で重要なのが「随伴はKan拡張である」という事実(定理1)である。

## 1 一般随伴関手定理

定理 1. 関手  $F: C \rightarrow D$  に対して以下の条件は同値である。

- (1)  $F$  は左随伴関手である。
- (2)  $F$  に沿った  $\text{id}_C$  の絶対左 Kan 拡張  $\langle F^\dagger \text{id}_C, \eta \rangle$  が存在する。
- (3)  $F$  に沿った  $\text{id}_C$  の左 Kan 拡張  $\langle F^\dagger \text{id}_C, \eta \rangle$  が存在し、 $F$  が左 Kan 拡張  $F^\dagger \text{id}_C$  と交換する。

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{ccccc}
 & D & & & \\
 & \swarrow & & & \\
 & & F^\dagger \text{id}_C & & \\
 & \eta \Uparrow & & & \\
 C & \xrightarrow{\text{id}_C} & C & \xrightarrow{F} & D \\
 & & \nearrow \text{id} & & \\
 & & & & F \circ (F^\dagger \text{id}_C)
 \end{array}
 & = &
 \begin{array}{ccccc}
 & D & & & \\
 & \swarrow & & & \\
 & & F^\dagger \text{id}_C & & \\
 & \Uparrow F\eta & & & \\
 C & \xrightarrow{\text{id}_C} & C & \xrightarrow{F} & D \\
 & & & & F \circ (F^\dagger \text{id}_C) \cong F^\dagger F
 \end{array}
 \end{array}$$

またこのとき  $F \dashv F^\dagger \text{id}_C$  であり  $\eta$  がその unit である。

証明. 「Kan 拡張」のPDFを参照。 □

命題 2.  $F: J \rightarrow C$  を関手とする。  $J$  が終対象 1 を持つならば、  $F$  の余極限は存在して  $\text{colim } F \cong F(1)$  となる。

証明. 「Kan 拡張」の PDF を参照. □

命題 2 における終対象の性質を一般化したものが終関手である (例 6 も参照).

定義. 関手  $K: I \rightarrow J$  が終関手 (final functor<sup>\*1</sup>)

$\iff C$  を圏,  $F: J \rightarrow C$  を関手とする. もし余極限  $\operatorname{colim} FK$  が存在すれば  $\operatorname{colim} F$  も存在して, 普遍性から得られる射  $\operatorname{colim} FK \rightarrow \operatorname{colim} F$  が同型を与える.

補題 3.  $F: C \rightarrow D, E: C \rightarrow U$  で, 左 Kan 拡張  $\langle F^\dagger E, \eta \rangle$  が存在すると仮定する.

$$\begin{array}{ccc}
 D & & \\
 \uparrow F & \searrow F^\dagger E & \\
 C & \xrightarrow{E} & U
 \end{array}$$

$\eta \Uparrow$

このとき  $G: D \rightarrow B$  に対して

左 Kan 拡張  $\langle (GF)^\dagger E, \sigma \rangle$  が存在する  $\iff$  左 Kan 拡張  $\langle G^\dagger(F^\dagger E), \tau \rangle$  が存在する.

$$\begin{array}{ccc}
 B & & B \\
 \uparrow G & \searrow (GF)^\dagger E & \uparrow G & \searrow G^\dagger(F^\dagger E) \\
 D & & D & & \\
 \uparrow F & \Uparrow \sigma & \uparrow F & \Uparrow \tau & \\
 C & \xrightarrow{E} & U & & C & \xrightarrow{E} & U \\
 & & & & \uparrow \eta & & 
 \end{array}$$

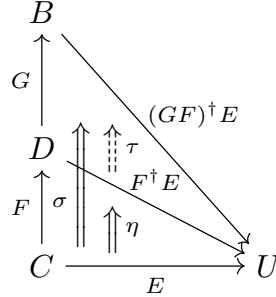
更に, これらが存在するとき  $(GF)^\dagger E \cong G^\dagger(F^\dagger E)$  である.

証明. ( $\implies$ ) 左 Kan 拡張  $\langle (GF)^\dagger E, \sigma \rangle$  が存在するとする.  $\langle F^\dagger E, \eta \rangle$  の普遍性により

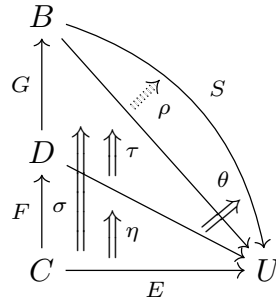
---

<sup>\*1</sup> cofinal functor と呼んでいる文献もあるので注意が必要.

$\tau: F^\dagger E \Rightarrow (GF)^\dagger E \circ G$  が存在して,  $\sigma = \tau_F \circ \eta$  となる.

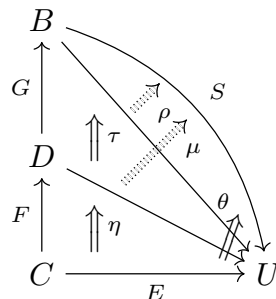


$\langle (GF)^\dagger E, \tau \rangle$  が  $G$  に沿った  $F^\dagger E$  の左 Kan 拡張であることを示せばよい. 任意の関手  $S: B \rightarrow U$  と  $\theta: F^\dagger E \Rightarrow SG$  を取る.



$(GF)^\dagger E$  の普遍性から,  $\rho: (GF)^\dagger E \Rightarrow S$  が一意に存在して  $\rho_{GF} \circ \sigma = \theta_F \circ \eta$  となる.  $\sigma = \tau_F \circ \eta$  だったから  $\rho_{GF} \circ \tau_F \circ \eta = \theta_F \circ \eta$  である. よって左 Kan 拡張  $F^\dagger E$  の普遍性から  $\rho_G \circ \tau = \theta$  となる. 従って  $\langle (GF)^\dagger E, \tau \rangle$  が  $G$  に沿った  $F^\dagger E$  の左 Kan 拡張である.

( $\Leftarrow$ ) 左 Kan 拡張  $\langle G^\dagger(F^\dagger E), \tau \rangle$  が存在するとする.  $\langle G^\dagger(F^\dagger E), \tau_F \circ \eta \rangle$  が  $GF$  に沿った  $E$  の左 Kan 拡張であることを示せばよい. 任意の関手  $S: B \rightarrow U$  と  $\theta: E \Rightarrow SGF$  を取る.



$F^\dagger E$  の普遍性から  $\mu: F^\dagger E \Rightarrow SG$  が一意に存在して  $\mu_F \circ \eta = \theta$  となる. よって  $G^\dagger(F^\dagger E)$  の普遍性から  $\rho: G^\dagger(F^\dagger E) \Rightarrow S$  が一意に存在して  $\rho_G \circ \tau = \mu$  となる. このと

き  $\rho_{GF} \circ (\tau_F \circ \eta) = \theta$  である。従って  $\langle G^\dagger(F^\dagger E), \tau_F \circ \eta \rangle$  が  $GF$  に沿った  $E$  の左 Kan 拡張である。  $\square$

命題 4. 右随伴関手は終関手である。(よって右随伴の例として終対象を考えれば命題 2 が得られる。)

証明.  $L \dashv K: J \rightarrow I$  を随伴,  $F: J \rightarrow C$  を関手とする.  $FK$  の余極限  $\langle \text{colim } FK, \mu \rangle$  が存在したとすると, この  $\langle \text{colim } FK, \mu \rangle$  は  $!: I \rightarrow \mathbb{1}$  に沿った  $FK$  の左 Kan 拡張である. 一方で  $K \cong L^\dagger \text{id}_C$  は絶対左 Kan 拡張であるから, 次の図式全体は  $! = ! \circ L$  に沿った  $F = F \circ \text{id}_J$  の左 Kan 拡張を与える (補題 3).

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathbb{1} & & & & \\
 \uparrow & & & & \\
 ! & & & & \\
 \uparrow & & & & \\
 I & & & & \\
 \uparrow & & & & \\
 L & & & & \\
 \uparrow & & & & \\
 J & \xrightarrow{\text{id}_J} & J & \xrightarrow{F} & C \\
 \uparrow \eta & & \uparrow K & & \\
 & & & & \text{colim } FK
 \end{array}$$

それは  $\text{colim } F$  であったから, 普遍性から得られる射  $\text{colim } FK \rightarrow \text{colim } F$  が同型となることが分かる。  $\square$

終関手は圏の連結性を使って特徴付けることができる (命題 5).

定義.  $C$  を圏,  $a, b \in C$  を対象とする.  $a$  と  $b$  を結ぶ zigzag とは

$$a \rightarrow c_0 \leftarrow c_1 \rightarrow \cdots \leftarrow c_{n-1} \rightarrow c_n \leftarrow b$$

の形の図式のことをいう。

定義. 圏  $C$  が連結  $\iff C \neq \emptyset$  で, 任意の対象  $a, b \in C$  を結ぶ zigzag が存在する。

命題 5.  $I$  を小圏,  $J$  を圏,  $K: I \rightarrow J$  を関手とする. このとき以下の条件は同値である。

- (1)  $K$  は終関手である。
- (2)  $F: J \rightarrow \mathbf{Set}$  を関手とする ( $I$  が小圏だから  $\text{colim } FK$  が存在することに注意). このとき  $\text{colim } F$  も存在して, 普遍性から得られる射  $\text{colim } FK \rightarrow \text{colim } F$  が同型を与える。
- (3) 任意の  $j \in J$  に対して  $\text{colim } \text{Hom}_J(j, K-)$   $\cong 1$  である。
- (4) 任意の  $j \in J$  に対して  $j \downarrow K$  が連結である。

証明. (1  $\implies$  2) 終関手の定義から明らか.

(2  $\implies$  3)  $j \in J$  として  $F := \text{Hom}_J(j, -): J \rightarrow \mathbf{Set}$  と置く. このとき  $a \in \mathbf{Set}$  について自然に

$$\text{Hom}_{\mathbf{Set}}(\text{colim } F, a) \cong \text{Hom}_{\mathbf{Set}^J}(F, \Delta a) \cong \Delta a(j) = a \cong \text{Hom}_{\mathbf{Set}}(1, a)$$

となるから  $\text{colim } F \cong 1$  である. 従って仮定 (2) により

$$\text{colim } \text{Hom}_J(j, K-) = \text{colim } FK \cong \text{colim } F \cong 1$$

となる

(3  $\implies$  4)  $j \in J$  とする. 仮定 (3) より  $\text{colim } \text{Hom}_J(j, K-) \cong 1$  であるが, これは  $\mathbf{Set}$  での余極限だから同値関係  $\sim$  を使って

$$\text{colim } \text{Hom}_J(j, K-) \cong \left( \coprod_{i \in I} \text{Hom}_J(j, Ki) \right) / \sim$$

と書ける. これが 1 になるためには, ある  $i \in I$  に対して  $\text{Hom}_J(j, Ki) \neq \emptyset$  でなければならない. 従って  $j \downarrow K \neq \emptyset$  である. 更に  $\text{colim } \text{Hom}_J(j, K-) \cong 1$  となるためには任意の  $f \in \text{Hom}_J(j, Ki_0)$ ,  $g \in \text{Hom}_J(j, Ki_1)$  に対して  $f \sim g$  とならなければならない. よって  $j \downarrow K$  が連結となることが分かる.

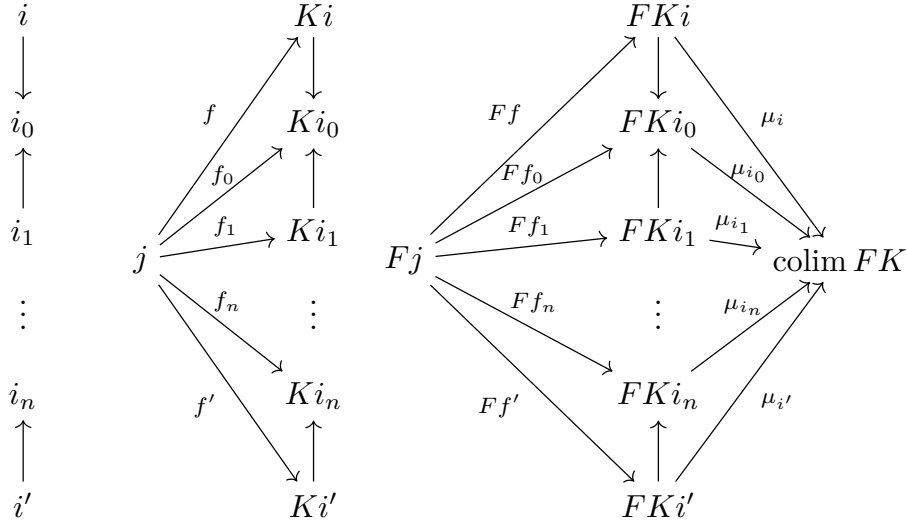
(4  $\implies$  1)  $C$  を圏,  $F: J \rightarrow C$  を関手として余極限  $\langle \text{colim } FK, \mu \rangle$  が存在するとする.  $i \in I$  に対して  $\mu_i: FK_i \rightarrow \text{colim } FK$  は  $C$  の射である.  $j \in J$  を取る.  $j \downarrow K \neq \emptyset$  だから, ある対象  $\langle i, f \rangle \in j \downarrow K$  が存在する. この  $i$  と  $f$  を使って  $\tau_j := \mu_i \circ Ff: Fj \rightarrow \text{colim } FK$  と定める.

$$i \quad j \xrightarrow{f} Ki \quad Fj \xrightarrow{Ff} FK_i \xrightarrow{\mu_i} \text{colim } FK$$

この  $\tau_j$  は well-defined である.

$\therefore \langle i, f \rangle, \langle i', f' \rangle \in j \downarrow K$  に対して  $\mu_i \circ Ff = \mu_{i'} \circ Ff'$  を示せばよい.  $j \downarrow K$  が連結だから zigzag  $\langle i, f \rangle \rightarrow \langle i_0, f_0 \rangle \leftarrow \langle i_1, f_1 \rangle \rightarrow \cdots \rightarrow \langle i_n, f_n \rangle \leftarrow \langle i', f' \rangle$  が存在する.

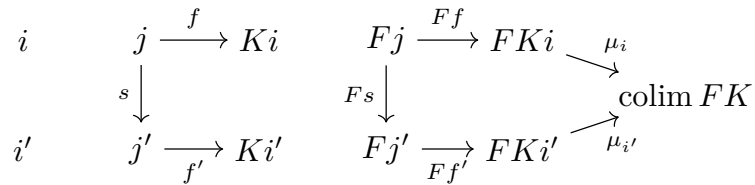
このとき次の図式は可換である。



故に  $\mu_i \circ Ff = \mu_{i'} \circ Ff'$  である。

この  $\tau_j$  は自然変換  $\tau: F \Rightarrow \Delta(\text{colim } FK)$  を定める。

$\therefore$ )  $s: j \rightarrow j'$  とする.  $\langle i, f \rangle \in j \downarrow K$ ,  $\langle i', f' \rangle \in j' \downarrow K$  を任意に取れば  $\tau_j = \mu_i \circ Ff$ ,  $\tau_{j'} = \mu_{i'} \circ Ff'$  となる。



このとき well-defined の証明と同様に連結性から  $\mu_i \circ Ff = \mu_{i'} \circ Ff' \circ Fs$  となることが分かる。故に  $\tau$  は自然変換である。

この  $\tau$  が  $F$  から  $\Delta$  への普遍射を与えることを示せばよい。そのために  $a \in C$  を対象として  $\theta: F \Rightarrow \Delta a$  を自然変換とする。このとき  $\theta_K: FK \Rightarrow \Delta a$  は自然変換である。故に余極限  $\langle \text{colim } FK, \mu \rangle$  の普遍性から射  $h: \text{colim } FK \rightarrow a$  が存在して、 $i \in I$  に対して

$h \circ \mu_i = \theta_{Ki}$  となる.

$$\begin{array}{ccc}
 i & FK_i & \\
 \downarrow t & \downarrow Ft & \nearrow \mu_i \\
 i' & FK_{i'} & \text{colim } FK \xrightarrow{h} a \\
 & \nearrow \mu_{i'} & \searrow \theta_{Ki'} \\
 & & \theta_{Ki}
 \end{array}$$

よって  $\tau$  の定義と  $\theta_j$  の自然性から  $h \circ \tau_j = h \circ \mu_i \circ Ff = \theta_{Ki} \circ Ff = \theta_j$  が分かる.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & \theta_j & & \\
 & & & & \downarrow & & \\
 i & & j \xrightarrow{f} Ki & & Fj \xrightarrow{Ff} FK_i & \xrightarrow{\mu_i} & \text{colim } FK \xrightarrow{h} a \\
 & & & & \downarrow \tau_j & & \downarrow \theta_j \\
 & & & & & & 
 \end{array}$$

また  $\text{colim } FK$  の普遍性から  $h$  の一意性も分かり、 $\tau$  は  $F$  から  $\Delta$  への普遍射である.  $\square$

**例 6.** 圏  $C$  の対象  $c \in C$  に対して関手  $K: \mathbb{1} \rightarrow C$  を  $K(*) := c$  により定めると

$$c \in C \text{ が終対象である} \iff K \text{ が終関手である.}$$

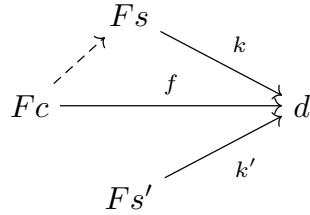
**証明.** ( $\implies$ )  $c \in C$  を終対象とすると、任意の  $a \in C$  に対して  $a \downarrow K = \mathbb{1}$  が連結だから命題 5 により  $K$  は終関手である.

( $\impliedby$ )  $a \in C$  とすると、 $K$  の定義より  $a \downarrow K$  は離散圏であって  $a \downarrow K = \text{Hom}_C(a, c)$  となる. 今  $K$  が終関手だから  $a \downarrow K$  は連結なので  $|\text{Hom}_C(a, c)| = 1$  しかあり得ない. よって  $a$  から  $c$  への射は唯 1 つであり、 $c$  は終対象である.  $\square$

さて、いよいよ本題の随伴関手定理を示していく.

**定理 7 (一般随伴関手定理).**  $C, D$  を圏、 $C$  は余完備で関手  $F: C \rightarrow D$  は余連続であるとする. 更に、任意の  $d \in D$  に対してある集合  $S \subset \text{Ob}(F \downarrow d)$  が存在して次を満たすとする (この条件を解集合条件 (solution set condition) と呼ぶ).

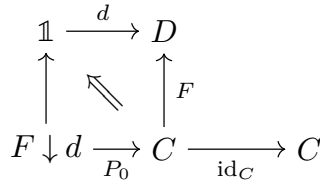
任意の  $\langle c, f \rangle \in F \downarrow d$  に対してある  $\langle s, k \rangle \in S$  と射  $\langle c, f \rangle \rightarrow \langle s, k \rangle$  が存在する.



このとき  $F$  は左随伴関手である.

証明. 各  $d \in D$  に対して  $\text{colim}(F \downarrow d \xrightarrow{P_0} C)$  が存在することを示せばよい.

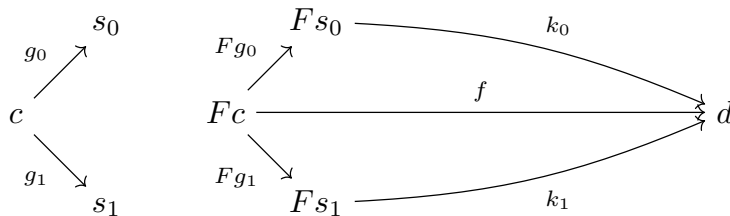
∴) 余極限  $\text{colim}(F \downarrow d \xrightarrow{P_0} C) = \text{colim}(F \downarrow d \xrightarrow{P_0} C \xrightarrow{\text{id}_C} C)$  が存在したとする.



このとき各点左 Kan 拡張  $F^\dagger \text{id}_C$  が存在する. 今  $F$  が余連続だから,  $F$  は  $F^\dagger \text{id}_C$  と交換する. 従って定理 1 により  $F$  は左随伴関手である.

$d \in D$  とする. 解集合条件を満たす集合  $S \subset \text{Ob}(F \downarrow d)$  を取り,  $S \subset F \downarrow d$  を充満部分圏とみなす.  $K: S \rightarrow F \downarrow d$  を包含関手とすれば,  $S$  が集合で  $C$  は余完備だから, 余極限  $\text{colim}(S \xrightarrow{K} F \downarrow d \xrightarrow{P_0} C)$  が存在する. 従って, 後は  $K$  が終関手であることを示せば  $\text{colim}(F \downarrow d \xrightarrow{P_0} C)$  の存在が分かる.

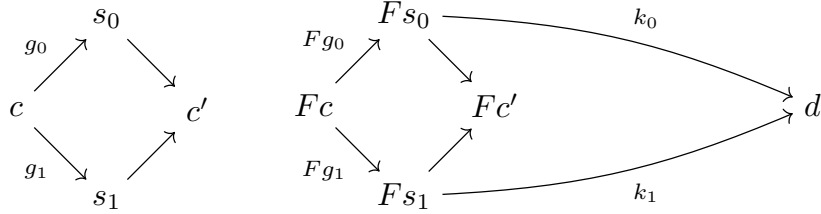
$\langle c, f \rangle \in F \downarrow d$  とする.  $\langle c, f \rangle \downarrow K$  が連結であることを示せばよい. まず, 解集合条件から明らかに  $\langle c, f \rangle \downarrow K \neq \emptyset$  である. 次に  $\langle \langle s_0, k_0 \rangle, g_0 \rangle, \langle \langle s_1, k_1 \rangle, g_1 \rangle \in \langle c, f \rangle \downarrow K$  とする. 即ち  $g_0: \langle c, f \rangle \rightarrow \langle s_0, k_0 \rangle$ ,  $g_1: \langle c, f \rangle \rightarrow \langle s_1, k_1 \rangle$  である.



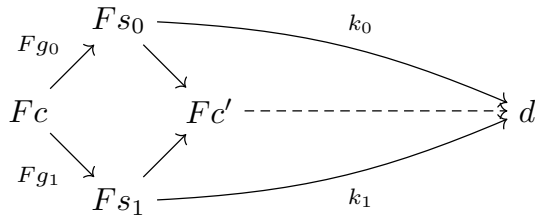
$C$  が余完備だから, 左の図式の pushout  $c'$  が存在する. また  $F$  が余連続だから,  $Fc'$  も



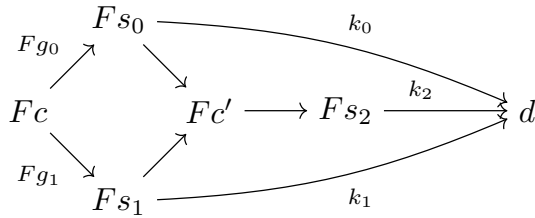
pushout である.



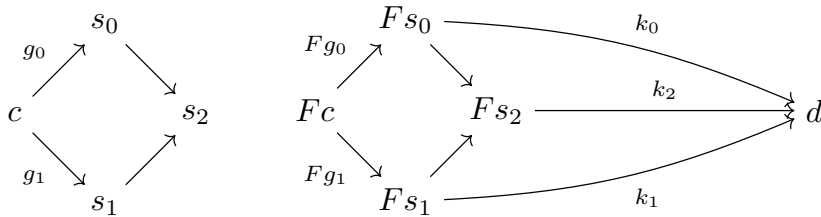
よって pushout の普遍性により, 点線の射  $Fc' \rightarrow d$  が一意に存在して可換となる.



解集合条件により, この射  $Fc' \rightarrow d$  はある  $\langle s_2, k_2 \rangle \in S$  を使って  $Fc' \rightarrow Fs_2 \xrightarrow{k_2} d$  と書ける.



このとき次の図式を得る.



この図式は可換である. 故に  $\langle c, f \rangle \downarrow K$  が連結であることが分かる. □

## 2 特殊随伴関手定理

$C$  を圏として,  $c \in C$  に対して充満部分圏  $\text{Epi}_c \subset c \downarrow \text{id}_C$  を

$$\text{Ob}(\text{Epi}_c) := \{ \langle a, f \rangle \in c \downarrow \text{id}_C \mid f: c \rightarrow a \text{ はエピ射} \}$$

で定める.

**命題 8.**  $\text{Epi}_c$  は (集合とは限らない) 前順序になる. 即ち, 任意の  $\langle a, f \rangle, \langle b, g \rangle \in \text{Epi}_c$  に対して  $|\text{Hom}_{\text{Epi}_c}(\langle a, f \rangle, \langle b, g \rangle)| \leq 1$  である.

**証明.**  $\text{Epi}_c$  の射  $\langle a, f \rangle \rightarrow \langle b, g \rangle$  とは,  $C$  の射  $h: a \rightarrow b$  であって

$$\begin{array}{ccc} & c & \\ f \swarrow & & \searrow g \\ a & \xrightarrow{h} & b \end{array}$$

が可換になるものである.  $f$  がエピ射だから, このような  $h$  は高々 1 つしか存在しない. 即ち  $|\text{Hom}_{\text{Epi}_c}(\langle a, f \rangle, \langle b, g \rangle)| \leq 1$  である.  $\square$

$\text{Quot}_c \subset \text{Epi}_c$  を骨格として次のように定義する.

**定義.** 圏  $C$  が well-copowered

$\iff$  任意の  $c \in C$  に対して  $\text{Quot}_c$  は順序集合になる.

**例 9.** 小圏  $C$  は well-copowered である.

**証明.**  $c \downarrow \text{id}_C$  が小圏になるから  $\text{Epi}_c$  も小圏 (即ち前順序集合) となり, 従って  $\text{Quot}_c$  は順序集合である.  $\square$

**例 10.**  $\mathbf{Set}$  は well-copowered である.

**証明.**  $x \in \mathbf{Set}$  に対して  $E_x := \{ R \subset x \times x \mid R \text{ は同値関係} \}$  と定める.  $R \in E_x$  に対して  $f_R: x \rightarrow x/R$  を標準全射として  $Q_x := \{ \langle x/R, f_R \rangle \mid R \in E_x \}$  とすれば, これは充満部分圏  $Q_x \subset \text{Epi}_x$  を定める. この  $Q_x$  は  $\text{Epi}_x$  の骨格である.

∴) まず  $Q_x$  が骨格的であることを示す. そのために  $R, R' \in E_x$  が  $\text{Epi}_x$  における同型  $\langle x/R, f_R \rangle \cong \langle x/R', f_{R'} \rangle$  を満たすとする. 即ち, 全単射  $h: x/R \rightarrow x/R'$  が存在して

$$\begin{array}{ccc} & x & \\ f_R \swarrow & & \searrow f_{R'} \\ x/R & \xrightarrow[h]{\sim} & x/R' \end{array}$$

が可換となる。このとき  $R = R'$  であることが容易に分かり、 $Q_x$  は骨格的である。

後は任意の  $\langle z, f \rangle \in \text{Epi}_x$  に対して、ある  $R \in E_x$  が存在して  $\langle z, f \rangle \cong \langle x/R, f_R \rangle$  であることを示せばよい。2項関係  $R \subset x \times x$  を

$$aRb \iff f(a) = f(b)$$

で定義すると、この  $R$  は同値関係である。  $h: x/R \rightarrow z$  を  $h([a]) := f(a)$  で定義すると、これは well-defined であり

$$\begin{array}{ccc} & x & \\ f_R \swarrow & & \searrow f \\ x/R & \xrightarrow{h} & z \end{array}$$

が可換となる。この  $h$  は全単射だから  $\langle z, f \rangle \cong \langle x/R, f_R \rangle$  である。

そこで  $\text{Quot}_x = Q_x$  としてよい。このとき  $Q_x$  は集合だから、**Set** は well-copowered である。 □

**定義.**  $S \subset \text{Ob}(C)$  が generating set

$\iff S$  は集合であり、任意の  $f, g: a \rightarrow b$  に対して次が成り立つ。

$f \neq g$  ならば、ある  $s \in S$  と  $h: s \rightarrow a$  が存在して  $f \circ h \neq g \circ h$  となる。

**定義.** 対象  $c \in C$  が generator  $\iff \{c\} \subset \text{Ob}(C)$  が generating set である。

**例 11.**  $1 = \{*\}$  を 1 元集合とするとき、 $1 \in \mathbf{Set}$  は generator である。

**証明.**  $f, g: a \rightarrow b$  を写像として  $f \neq g$  とする。即ち、ある  $x \in a$  が存在して  $f(x) \neq g(x)$  である。このとき写像  $h: 1 \rightarrow a$  を  $h(*) := x$  で定義すれば  $f \circ h \neq g \circ h$  である。 □

※ この generator や generating set という言葉は広く使われているが、一般には特に何かを「生成」しているわけではない。なので *nLab* [2] 等では generator という言葉は使わず、separator という言葉が使われている。

**補題 12.**  $C, D, U$  を圏で  $U$  は well-copowered かつ余完備とする。  $F: C \rightarrow D$  と  $S, T: C \rightarrow U$  を関手、  $\varphi: S \Rightarrow T$  をエピな自然変換とする。このとき左 Kan 拡張

$F^\dagger S$  が存在するならば  $F^\dagger T$  も存在する.

$$\begin{array}{ccc}
 D & & \\
 \uparrow F & \searrow F^\dagger S & \\
 C & \xrightarrow{S} & U \\
 & \downarrow \varphi & \\
 & \xrightarrow{T} & 
 \end{array}$$

証明. 定理 7 のときと同じく,  $d \in D$  に対して  $\text{colim}(F \downarrow d \xrightarrow{P_0} C \xrightarrow{T} U)$  が存在することを示せばよい. まず  $U$  が余完備だから  $F^\dagger S$  は各点左 Kan 拡張であり, 従って

$$\mu^d := \begin{array}{ccccc}
 & & \mathbb{1} & \xrightarrow{d} & D \\
 & & \uparrow & & \uparrow \\
 P_1 & & \uparrow & \swarrow \sigma & \uparrow F \\
 & & F \downarrow d & \xrightarrow{P_0} & C \\
 & & & & \uparrow \eta \\
 & & & & U
 \end{array} \xrightarrow{F^\dagger S}$$

が余極限  $\text{colim}(F \downarrow d \xrightarrow{P_0} C \xrightarrow{S} U)$  を与える. このとき  $P_0$  と自然変換  $\varphi: S \Rightarrow T$  を合わせて  $\varphi_{P_0}: SP_0 \Rightarrow TP_0$  を得る. 今  $U$  が余完備だから,  $\langle c, f \rangle \in F \downarrow d$  に対して pushout

$$\begin{array}{ccc}
 F^\dagger S(d) & \xrightarrow{\psi_{\langle c, f \rangle}} & K\langle c, f \rangle \\
 \mu_{\langle c, f \rangle}^d \uparrow & & \uparrow \\
 Sc & \xrightarrow{\varphi_c} & Tc
 \end{array}$$

が取れる. これは関手  $K: F \downarrow d \rightarrow U$  と自然変換  $\psi: \Delta(F^\dagger S(d)) \Rightarrow K$  を定める.

∴  $F \downarrow d$  の射  $k: \langle c, f \rangle \rightarrow \langle c', f' \rangle$  に対して, pushout の普遍性から次の点線の射が得られる.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & F^\dagger S(d) & \xrightarrow{\psi_{\langle c', f' \rangle}} & K\langle c', f' \rangle \\
 & & \uparrow \text{id} & & \uparrow \\
 & & F^\dagger S(d) & \xrightarrow{\psi_{\langle c, f \rangle}} & K\langle c, f \rangle \\
 & & \uparrow & & \uparrow \\
 \mu_{\langle c, f \rangle}^d \uparrow & & Sc' & \xrightarrow{\varphi_{c'}} & Tc' \\
 & \nearrow S_k & & & \nearrow T_k \\
 Sc & \xrightarrow{\varphi_c} & Tc & & 
 \end{array}$$

これにより  $K$  は関手,  $\psi$  は自然変換になる.

仮定から  $\varphi_c$  はエピ射で、エピ射の pushout はエピ射だから、 $\psi_c$  もエピ射である。よって  $\langle K\langle c, f \rangle, \psi_c \rangle \in \text{Quot}_{F^\dagger S(d)}$  としてよい。仮定より  $U$  が well-copowered かつ余完備だから、 $\text{Quot}_{F^\dagger S(d)}$  において余直積  $\langle v, g \rangle := \coprod_{\langle c, f \rangle \in F \downarrow d} K\langle c, f \rangle$  を取ることができる。

$$\begin{array}{ccccc}
 & & F^\dagger S(d) & \longrightarrow & K\langle c', f' \rangle \\
 & \nearrow & \uparrow & & \uparrow \\
 & & F^\dagger S(d) & \longrightarrow & K\langle c, f \rangle \\
 & \nearrow & \uparrow & & \uparrow \\
 & & S_{c'} & \xrightarrow{\varphi_{c'}} & T_{c'} \\
 & \nearrow & \uparrow & & \uparrow \\
 S_c & \xrightarrow{\varphi_c} & T_c & & 
 \end{array}
 \xrightarrow{v}$$

この  $v$  が余極限  $\text{colim}(F \downarrow d \xrightarrow{P_0} C \xrightarrow{T} U)$  を与えることを示そう。そのために任意の  $\theta: TP_0 \Rightarrow \Delta w$  を取る。

$$\begin{array}{ccccc}
 & & F^\dagger S(d) & \longrightarrow & K\langle c', f' \rangle \\
 & \nearrow & \uparrow & & \uparrow \\
 & & F^\dagger S(d) & \longrightarrow & K\langle c, f \rangle \\
 & \nearrow & \uparrow & & \uparrow \\
 & & S_{c'} & \xrightarrow{\varphi_{c'}} & T_{c'} \\
 & \nearrow & \uparrow & & \uparrow \\
 S_c & \xrightarrow{\varphi_c} & T_c & & 
 \end{array}
 \xrightarrow{v}$$

$\theta_{\langle c', f' \rangle}$   
 $\theta_{\langle c, f \rangle}$

このとき  $\theta \circ \varphi: SP_0 \Rightarrow \Delta w$  が得られるから、普遍性により  $F^\dagger S(d) \rightarrow w$  が得られる。よって pushout の普遍性から  $K\langle c, f \rangle \rightarrow w$  が得られる。よって  $v$  の普遍性から  $v \rightarrow w$  が得られる。以上により  $v \cong \text{colim}(F \downarrow d \xrightarrow{P_0} C \xrightarrow{T} U)$  である。  $\square$

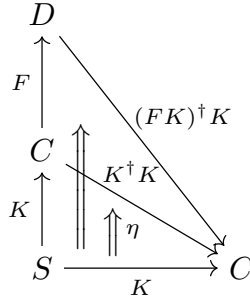
**定理 13** (特殊随伴関手定理).  $C, D$  が圏で、 $C$  は well-copowered かつ余完備で、generating set  $S \subset \text{Ob}(C)$  を持つとする。このとき関手  $F: C \rightarrow D$  に対して

$$F \text{ が余連続である} \iff F \text{ が左随伴関手である.}$$

証明. ( $\Leftarrow$ ) 明らか.

( $\Rightarrow$ ) 左 Kan 拡張  $F^\dagger \text{id}_C$  が存在することを示せばよい.

generating set  $S \subset \text{Ob}(C)$  を充満部分圏とみなし,  $K: S \rightarrow C$  を包含関手とする.  $S$  が集合で  $C$  が余完備だから左 Kan 拡張  $K^\dagger K$ ,  $(FK)^\dagger K$  が存在する.



故に補題 3 より  $F^\dagger(K^\dagger K)$  も存在して,  $F^\dagger(K^\dagger K) \cong (FK)^\dagger K$  が成り立つ.  $K^\dagger K$  の普遍性により  $\tau: K^\dagger K \Rightarrow \text{id}_C$  が一意に存在して次の等式が成り立つ.

$$\begin{array}{ccc}
 C & \xrightarrow{\text{id}_C} & C \\
 K \uparrow & \nearrow \tau & \searrow \\
 S & \xrightarrow{K} & C \\
 \eta \uparrow & \nearrow K^\dagger K & \\
 \end{array}
 =
 \begin{array}{ccc}
 C & \xrightarrow{\text{id}_C} & C \\
 K \uparrow & \nearrow \text{id}_K & \searrow \\
 S & \xrightarrow{K} & C \\
 \eta \uparrow & \nearrow K^\dagger K & \\
 \end{array}$$

この  $\tau$  はエピ射である.

$\therefore c \in C$  に対して  $\tau_c: K^\dagger K(c) \rightarrow c$  がエピ射であることを示せばよい. そこで  $u, v: c \rightarrow d$  を取り  $u \neq v$  とする.  $u \circ \tau_c \neq v \circ \tau_c$  を示せばよい.

$S$  が generating set だったから, ある  $s \in S$  と  $g: s \rightarrow c$  が存在して  $u \circ g \neq v \circ g$  となる. このとき  $\langle s, g \rangle \in K \downarrow c$  である. このとき

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{1} & \xrightarrow{c} & C \\
 P_1 \uparrow & \nearrow \sigma & \searrow \\
 K \downarrow c & \xrightarrow{P_0} & S \\
 \eta \uparrow & \nearrow K^\dagger K & \\
 \end{array}
 \xrightarrow{\text{id}_C}
 \begin{array}{ccc}
 C & \xrightarrow{\text{id}_C} & C \\
 K \uparrow & \nearrow \tau & \searrow \\
 S & \xrightarrow{K} & C \\
 \eta \uparrow & \nearrow K^\dagger K & \\
 \end{array}
 =
 \begin{array}{ccc}
 \mathbb{1} & \xrightarrow{c} & C \\
 P_1 \uparrow & \nearrow \sigma & \searrow \\
 K \downarrow c & \xrightarrow{P_0} & S \\
 \eta \uparrow & \nearrow K^\dagger K & \\
 \end{array}
 \xrightarrow{\text{id}_C}
 \begin{array}{ccc}
 C & \xrightarrow{\text{id}_C} & C \\
 K \uparrow & \nearrow \text{id}_K & \searrow \\
 S & \xrightarrow{K} & C \\
 \eta \uparrow & \nearrow K^\dagger K & \\
 \end{array}$$

だから,  $\langle s, g \rangle$  成分を考えると  $\tau_c \circ K^\dagger K(g) \circ \eta_s = g$  を得る. 故に

$$u \circ \tau_c \circ K^\dagger K(g) \circ \eta_s = u \circ g \neq v \circ g = v \circ \tau_c \circ K^\dagger K(g) \circ \eta_s$$

となるから  $u \circ \tau_c \neq v \circ \tau_c$  でなければならない.

$$\begin{array}{ccc}
 D & & \\
 \uparrow F & \nearrow F^\dagger(K^\dagger K) & \\
 C & \xrightarrow{K^\dagger K} & C \\
 & \downarrow \varphi & \\
 & \xrightarrow{\text{id}_C} & 
 \end{array}$$

よって補題 12 により  $F^\dagger \text{id}_C$  が存在する. □

### 3 双対版

双対的に, 以下の定理も成り立つ (証明は同様である).

定義. 圏  $C$  が well-powered  $\iff C^{\text{op}}$  が well-copowered である.

定義.  $S \subset \text{Ob}(C)$  が cogenerating set  $\iff S \subset \text{Ob}(C^{\text{op}})$  が generating set である.

定義.  $c \in C$  が cogenerator  $\iff c \in C^{\text{op}}$  が generator である.

定理 14 (一般随伴関手定理).  $C, D$  を圏,  $D$  は完備で関手  $G: D \rightarrow C$  は連続であるとする. 更に, 任意の  $c \in C$  に対してある集合  $S \subset \text{Ob}(c \downarrow G)$  が存在して次を満たすとする. (この条件を解集合条件と呼ぶ)

任意の  $\langle d, f \rangle \in c \downarrow G$  に対してある  $\langle s, k \rangle \in S$  と射  $\langle s, k \rangle \rightarrow \langle d, f \rangle$  が存在する

$$\begin{array}{ccc}
 & & Gs \\
 & \nearrow k & \searrow \text{---} \\
 c & \xrightarrow{f} & Gd \\
 & \searrow k' & \nearrow \\
 & & Gs'
 \end{array}$$

このとき  $G$  は右随伴関手である. □

定理 15 (特殊随伴関手定理).  $C, D$  が圏で,  $D$  は well-powered かつ完備で, cogenerating set  $S \subset \text{Ob}(D)$  を持つとする. このとき関手  $G: D \rightarrow C$  に対して

$G$  が連続である  $\iff G$  が右随伴関手である.

□

例 16.  $\mathbf{Top}$  を位相空間と連続写像がなす圏,  $\mathbf{CptHaus} \subset \mathbf{Top}$  をコンパクト Hausdorff 空間がなす充満部分圏とする.  $\mathbf{CptHaus}$  は well-powered かつ完備であり包含関手  $U: \mathbf{CptHaus} \rightarrow \mathbf{Top}$  は連続である. 閉区間  $[0, 1] \in \mathbf{CptHaus}$  は cogenerator である.

∴  $f, g: X \rightarrow Y$  を  $\mathbf{CptHaus}$  の射で  $f \neq g$  とする. 即ちある  $x \in X$  が存在して  $f(x) \neq g(x)$  となる. このとき Urysohn の補題により, ある連続写像  $h: Y \rightarrow [0, 1]$  が存在して

$$h(f(x)) = 0, \quad h(g(x)) = 1$$

となる. 即ち  $h \circ f \neq h \circ g$  である.

故に特殊随伴関手定理により  $U$  は左随伴関手  $F: \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{CptHaus}$  を持つ.  $X \in \mathbf{Top}$  に対して  $F(X) \in \mathbf{CptHaus}$  を  $X$  の Stone-Čech コンパクト化という.  $\square$

また, 関手の表現可能性について次の定理が分かる.

定理 17.  $D$  を完備な圏,  $G: D \rightarrow \mathbf{Set}$  を連続な関手で解集合条件を満たすとする. このとき  $G$  は表現可能関手である.

証明. 一般随伴関手定理により  $G$  は左随伴関手  $F: \mathbf{Set} \rightarrow D$  を持つ. このとき  $d \in D$  と  $1 \in \mathbf{Set}$  に対して  $\mathrm{Hom}_D(F(1), -) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(1, G-) \cong G$  である. 故に  $G$  は表現可能関手である.  $\square$

定理 18.  $D$  は well-powered かつ完備な圏で, cogenerating set  $S \subset \mathrm{Ob}(D)$  を持つとする. このとき関手  $G: D \rightarrow \mathbf{Set}$  に対して以下は同値である.

- (1)  $G$  が連続である.
- (2)  $G$  が右随伴関手である.
- (3)  $G$  が表現可能関手である.

証明.  $1 \iff 2$  は特殊随伴関手定理である.

(2  $\implies$  3)  $G$  の左随伴関手を  $F: \mathbf{Set} \rightarrow D$  とすれば  $1 \in \mathbf{Set}$  に対して

$$\mathrm{Hom}_D(F(1), -) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(1, G-) \cong G$$

である. 故に  $G$  は表現可能関手である.

(3  $\implies$  1) 表現可能関手  $\mathrm{Hom}_D(d, -)$  は連続だから明らか.  $\square$

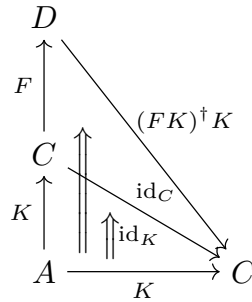
定理 19.  $C$  を余完備な圏,  $D$  を圏とする.  $A \subset C$  を小さい稠密部分圏とするとき



関手  $F: C \rightarrow D$  が余連続である  $\iff F$  が左随伴関手である.

証明. ( $\Leftarrow$ ) 明らか.

( $\Rightarrow$ ) 左 Kan 拡張  $F^{\dagger} \text{id}_C$  が存在することを示せばよい. 包含関手  $K: A \rightarrow C$  が稠密だから  $K^{\dagger} K \cong \text{id}_A$  である. また  $A$  が小圏で  $C$  が余完備だから  $(FK)^{\dagger} K$  も存在する.



故に補題 3 より  $F^{\dagger} \text{id}_C$  も存在する. □

## 参考文献

- [1] E. J. Dubuc, Kan Extensions in Enriched Category Theory, Lecture Notes in Mathematics 145 (1970), (Proposition III.2.2, Theorem III.2.2), <https://link.springer.com/book/10.1007/BFb0060485>
- [2] nLab, separator, <https://ncatlab.org/nlab/show/separator>