コンマ対象による各点 Kan 拡張

alg-d
https://alg-d.com/math/kan_extension/

2025 年 9 月 10 日

この PDF では，任意の $a_0 \xrightarrow{f} b \xleftarrow{g} a_1$ に対してコンマ対象 $f\downarrow g$ が存在すると仮定しておく．すると通常の圏論の場合に倣って，2-category $\mathcal{C}$ における各点 Kan 拡張を次のように定義することができる．(後の区別のため，これを c-各点 Kan 拡張と呼ぶ．)

定義. $a, b, c \in \mathcal{C}$ を対象，$f\colon a \to b$, $g\colon a \to c$, $l\colon b \to c$ を 1-morphism, $\eta\colon g \Rightarrow l \circ f$ を 2-morphism とする．$\langle l, \eta\rangle$ が f に沿った g の c-各点左 Kan 拡張とは，任意の 1-morphism $j\colon x \to b$ に対して，コンマ対象 $f\downarrow j$ を考えたとき合成

$$\begin{tikzcd}
x \arrow[r, "j"] & b \arrow[dr, "l"] & \\
f\downarrow j \arrow[u] \arrow[r] \arrow[ur, phantom, "\Nwarrow"] & a \arrow[u, "f"] \arrow[r, "g"'] \arrow[ur, phantom, "\eta\Uparrow"] & c
\end{tikzcd}$$

が左 Kan 拡張になることをいう．

この c-各点 Kan 拡張について説明するのがこの PDF の目的である．

1 復習

以下の命題については「2-category での随伴・Kan 拡張・忠実充満」の PDF を参照.

系 1. $f\colon a_0\to b$, $g\colon a_1\to b$ を 1-morphism としてコンマ対象 $f\downarrow g$ が存在するとする．

$$\begin{tikzcd}
a_1 \arrow[r, "g"] & b \\
f\downarrow g \arrow[u, "p_1"] \arrow[r, "p_0"'] \arrow[ur, phantom, "\Nwarrow\theta"] & a_0 \arrow[u, "f"']
\end{tikzcd}$$

このとき f が右随伴を持つならば p_1 も右随伴を持ち，g が左随伴を持つならば p_0 も左随伴を持つ． □

命題 2. $f\colon a\to b$ を 1-morphism として，コンマ対象 $f\downarrow f$，$\mathrm{id}_a\downarrow\mathrm{id}_a$ が存在するとする．

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "f"] & b \\
f\downarrow f \arrow[u, "p_1"] \arrow[r, "p_0"'] \arrow[ur, phantom, "\Nwarrow\kappa"] & a \arrow[u, "f"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "\mathrm{id}_a"] & a \\
\mathrm{id}_a\downarrow\mathrm{id}_a \arrow[u, "q_1"] \arrow[r, "q_0"'] \arrow[ur, phantom, "\Nwarrow\beta"] & a \arrow[u, "\mathrm{id}_a"']
\end{tikzcd}$$

このとき

$$f \text{ が忠実充満} \iff 1 \text{ 次元的普遍性で得られる } h\colon \mathrm{id}_a\downarrow\mathrm{id}_a\to f\downarrow f \text{ が同型．}$$

$$\begin{tikzcd}
 & a \arrow[rr, "f"] & & b \\
 & f\downarrow f \arrow[u, "p_1"] \arrow[r, "p_0"'] \arrow[ur, phantom, "\Nwarrow\alpha"] & a \arrow[ur, "f"'] & \\
\mathrm{id}_a\downarrow\mathrm{id}_a \arrow[uur, bend left, "q_1"] \arrow[ur, dashed, "h"'] \arrow[urr, bend right, "q_0"'] & & &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
 & a \arrow[r, "\mathrm{id}_a"] & a \arrow[r, "f"] & b \\
 & & a \arrow[u, "\mathrm{id}_a"] \arrow[ur, "f"'] \arrow[ur, phantom, "\Uparrow\mathrm{id}_f"] & \\
\mathrm{id}_a\downarrow\mathrm{id}_a \arrow[uur, bend left, "q_1"] \arrow[urr, bend right, "q_0"'] \arrow[ur, phantom, "\Nwarrow\beta"] & & &
\end{tikzcd}$$

□

2 c-各点 Kan 拡張

命題 3. **CAT** における c-各点左 Kan 拡張は (通常の圏論における) 各点 Kan 拡張と一致する．

証明.「ココンマ圏と profunctor」の PDF を参照． □

c-各点左 Kan 拡張は (通常の圏論における) 各点左 Kan 拡張と同様の性質を持っているので，まずはそれを示していこう．

そのために $f\colon a \to b$ として，コンマ対象 $\langle f\downarrow \mathrm{id}_b, p_0, p_1, \theta\rangle$ を考える．コンマ対象の 1 次元的普遍性により，次の 1-morphism $i^f\colon a \to f\downarrow \mathrm{id}_b$ が得られる．

$$
\begin{tikzcd}
 & b \arrow[r, "\mathrm{id}_b"] & b \\
 & f\downarrow \mathrm{id}_b \arrow[u, "p_1"] \arrow[r, "p_0"'] \arrow[ur, phantom, "\Uparrow\kappa"] & a \arrow[u, "f"'] \\
x \arrow[ur, dashed, "i^f"'] \arrow[uur, bend left, "f"] \arrow[urr, bend right, "\mathrm{id}_a"'] \arrow[ur, phantom, shift left=3, "="] \arrow[ur, phantom, shift right=3, "="']
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
 & b \arrow[r, "\mathrm{id}_b"] & b \\
 & \arrow[phantom, "\Uparrow\mathrm{id}_f"] & a \arrow[u, "f"'] \\
x \arrow[uur, bend left, "f"] \arrow[urr, bend right, "\mathrm{id}_a"']
\end{tikzcd}
$$

補題 4. $a \xrightarrow{j} x \xleftarrow{k} b$ のコンマ対象を $\langle j\downarrow k, q_0, q_1, \kappa'\rangle$ として，次の図式が可換であるとする．

$$
\begin{tikzcd}
 & b \\
 & j\downarrow k \arrow[u, "q_1"] \arrow[r, "q_0"'] & a \\
a \arrow[ur, "s"'] \arrow[uur, bend left, "f"] \arrow[urr, bend right, "\mathrm{id}_a"']
\end{tikzcd}
$$

このとき

$$
\begin{tikzcd}
 & b \\
 & j\downarrow k \arrow[u, "q_1"] \arrow[r, "q_0"'] & a \\
f\downarrow \mathrm{id}_b \arrow[ur, dashed, "t"'] \arrow[uur, bend left, "p_1"] \arrow[urr, bend right, "p_0"']
\end{tikzcd}
$$

を可換にする $t\colon f\downarrow \mathrm{id}_b \to j\downarrow k$ が一意に存在して $t\circ i^f = s$ を満たす．

$$
\begin{tikzcd}
 & & b \\
 & & j\downarrow k \arrow[u, "q_1"] \arrow[r, "q_0"'] & a \\
 & f\downarrow \mathrm{id}_b \arrow[ur, dashed, "t"'] \arrow[uur, bend left, "p_1"] \arrow[urr, bend right, "p_0"'] \arrow[u, phantom, "="] \arrow[r, phantom, "="] & & \\
a \arrow[ur, "i^f"'] \arrow[uuurr, bend left, "f"] \arrow[uurrr, bend right, "\mathrm{id}_a"'] \arrow[u, phantom, "="] \arrow[r, phantom, "="]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & & b \\
 & & j\downarrow k \arrow[u, "q_1"] \arrow[r, "q_0"'] & a \\
 & & & \\
a \arrow[uurr, "s"'] \arrow[uuurr, bend left, "f"] \arrow[uurrr, bend right, "\mathrm{id}_a"'] \arrow[uur, phantom, "="] \arrow[urr, phantom, "="]
\end{tikzcd}
$$

証明. $j\downarrow k$ の 1 次元的普遍性から，次の等式を満たす $t\colon f\downarrow \mathrm{id}_b \to j\downarrow k$ が一意に存在する．

$$
\begin{tikzcd}
{} & b \arrow[r, "\mathrm{id}_b"] & b \arrow[r, "k"] & x \\
 & {} \arrow[r, phantom, "="] & j\downarrow k \arrow[u, "q_1"] \arrow[r, "q_0"'] \arrow[ur, phantom, "\Leftarrow\kappa'"] & a \arrow[u, "j"'] \\
f\downarrow\mathrm{id}_b \arrow[uur, bend left, "p_1"] \arrow[urr, dashed, "t"] \arrow[r, "p_0"'] & a \arrow[urr, bend right, "\mathrm{id}_a"'] \arrow[ur, phantom, "="] & &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
{} & b \arrow[r, "\mathrm{id}_b"] & b \arrow[r, "k"] & x \\
 & {} \arrow[r, phantom, "="] & j\downarrow k \arrow[u, "q_1"] \arrow[r, "q_0"'] \arrow[ur, phantom, "\Leftarrow\kappa'"] & a \arrow[u, "j"'] \\
f\downarrow\mathrm{id}_b \arrow[uur, bend left, "p_1"] \arrow[r, "p_0"'] \arrow[ur, phantom, "\Leftarrow\kappa"] & a \arrow[uur, bend left, "f"] \arrow[ur, "s"'] \arrow[urr, bend right, "\mathrm{id}_a"'] \arrow[urr, phantom, "="] & &
\end{tikzcd}
$$

このとき

$$
\begin{tikzcd}
{} & & b \arrow[r, "\mathrm{id}_b"] & b \arrow[r, "k"] & x \\
 & & {} \arrow[r, phantom, "="] & j\downarrow k \arrow[u, "q_1"] \arrow[r, "q_0"'] \arrow[ur, phantom, "\Leftarrow\rho"] & a \arrow[u, "j"'] \\
 & f\downarrow\mathrm{id}_b \arrow[uur, bend left, "p_1"] \arrow[urr, "t"] \arrow[r, "p_0"'] & a \arrow[urr, bend right, "\mathrm{id}_a"'] \arrow[ur, phantom, "="] & & \\
a \arrow[uuurr, bend left, "f"] \arrow[ur, "i^f"'] \arrow[urr, bend right, "\mathrm{id}_a"'] \arrow[u, phantom, "="] \arrow[urr, phantom, "="] & & & &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
{} & & b \arrow[r, "\mathrm{id}_b"] & b \arrow[r, "k"] & x \\
 & & {} \arrow[r, phantom, "="] & j\downarrow k \arrow[u, "q_1"] \arrow[r, "q_0"'] \arrow[ur, phantom, "\Leftarrow\kappa'"] & a \arrow[u, "j"'] \\
 & f\downarrow\mathrm{id}_b \arrow[uur, bend left, "p_1"] \arrow[r, "p_0"'] \arrow[ur, phantom, "\Leftarrow\kappa"] & a \arrow[uur, bend left, "f"] \arrow[ur, "s"'] \arrow[urr, bend right, "\mathrm{id}_a"'] \arrow[urr, phantom, "="] & & \\
a \arrow[uuurr, bend left, "f"] \arrow[ur, "i^f"'] \arrow[urr, bend right, "\mathrm{id}_a"'] \arrow[u, phantom, "="] \arrow[urr, phantom, "="] & & & &
\end{tikzcd}
$$

$$
=
\begin{tikzcd}
{} & & b \arrow[r, "\mathrm{id}_b"] & b \arrow[r, "k"] & x \\
 & & {} \arrow[r, phantom, "="] & j\downarrow k \arrow[u, "q_1"] \arrow[r, "q_0"'] \arrow[ur, phantom, "\Leftarrow\kappa'"] & a \arrow[u, "j"'] \\
 & {} \arrow[ur, phantom, "\Leftarrow\mathrm{id}_f"] & a \arrow[uur, bend left, "f"] \arrow[ur, "s"'] \arrow[urr, bend right, "\mathrm{id}_a"'] \arrow[urr, phantom, "="] & & \\
a \arrow[uuurr, bend left, "f"] \arrow[urr, bend right, "\mathrm{id}_a"'] & & & &
\end{tikzcd}
$$

より $t\circ i^f = s$ が分かる． □

例 5. $\mathcal{C} = \mathbf{Cat}$ で $a = \mathbb{1}$ の場合の補題 4 を考える．つまり $\mathbb{1} \xrightarrow{x} X \xleftarrow{K} B$ のコンマ圏

$x\downarrow K$ を取って可換図式

$$\begin{tikzcd}
 & B & \\
 & x\downarrow K \arrow[u, "Q_1"] \arrow[r, "Q_0"'] & \mathbb{1} \\
\mathbb{1} \arrow[ur, "S"'] \arrow[uur, bend left, "b"] \arrow[urr, bend right, "\mathrm{id}_{\mathbb{1}}"'] & &
\end{tikzcd}$$

を考える．コンマ圏により得られる span なので $B \xleftarrow{Q_1} x\downarrow K \xrightarrow{Q_0} \mathbb{1}$ は two-sided discrete fibration である[*1]．よって $Q_1\colon x\downarrow K \to B$ は discrete opfibration になる．従って $B \xleftarrow{Q_1} x\downarrow K \xrightarrow{Q_0} \mathbb{1}$ は関手 $F\colon B \to \mathbf{Set}$ と同一視できる．これは $a \in B$ に対して $Fa := \{u \in x\downarrow K \mid Q_1 u = a\}$ で与えられる．故にこの場合の関手 S は Fb の元と同一視できる．

このとき補題 4 により得られる

$$\begin{tikzcd}
 & B & \\
 & x\downarrow K \arrow[u, "Q_1"] \arrow[r, "Q_0"'] & \mathbb{1} \\
b\downarrow \mathrm{id}_B \arrow[ur, dashed, "T"'] \arrow[uur, bend left, "P_1"] \arrow[urr, bend right, "P_0"'] & &
\end{tikzcd}$$

を考える．先程と同様に $B \xleftarrow{P_1} b\downarrow\mathrm{id}_B \xrightarrow{P_0} \mathbb{1}$ も関手 $B \to \mathbf{Set}$ と同一視できるが，これは Hom 関手 $\mathrm{Hom}_B(-,b)\colon B \to \mathbf{Set}$ である．従って T は自然変換 $\mathrm{Hom}_B(-,b) \Rightarrow F$ と同一視できる．

補題 4 が言っているのは S と T が 1 対 1 に対応するということだから，つまり全単射

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}^B}(\mathrm{Hom}_B(-,b), F) \cong Fb$$

が得られる．即ち補題 4 は米田の補題の一般化になっている． $\square$

補題 6. $j\colon a \to x$，$k\colon b \to x$ とする．このとき，任意の $\theta\colon j \Rightarrow k \circ f$ に対して，ある

[*1] fibration については詳しくは「fibration」の PDF を参照.

$\zeta\colon j\circ p_0 \Rightarrow k\circ p_1$ が一意に存在して，次の等式が成り立つ．

$$
\begin{tikzcd}
& b \arrow[r, "k"] & x \\
& f\downarrow\mathrm{id}_b \arrow[u, "p_1"] \arrow[r, "p_0"'] \arrow[ur, phantom, "\Nwarrow\zeta"] & a \arrow[u, "j"'] \\
x \arrow[uur, bend left, "f"] \arrow[ur, "i^f"'] \arrow[urr, bend right, "\mathrm{id}_a"'] & &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
& b \arrow[r, "k"] & x \\
& \arrow[ur, phantom, "\Nwarrow\theta"] & a \arrow[u, "j"'] \\
x \arrow[uur, bend left, "f"] \arrow[urr, bend right, "\mathrm{id}_a"'] & &
\end{tikzcd}
$$

更にこのとき $f^\dagger j = \langle k,\theta\rangle \iff p_1^\dagger(j\circ p_0) = \langle k,\zeta\rangle$ である．

証明. $\kappa\colon j\Rightarrow k\circ f$ として $\langle j\downarrow k, q_0, q_1, \kappa'\rangle$ をコンマ対象とする．$j\downarrow k$ の 1 次元的普遍性により，次の等式を満たす $s\colon a\to j\downarrow k$ が一意に存在する．

$$
\begin{tikzcd}
& b \arrow[r, "k"] & x \\
& j\downarrow k \arrow[u, "q_1"] \arrow[r, "q_0"'] \arrow[ur, phantom, "\Nwarrow\kappa'"] & a \arrow[u, "j"'] \\
a \arrow[uur, bend left, "f"] \arrow[ur, dashed, "s"'] \arrow[urr, bend right, "\mathrm{id}_a"'] & &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
& b \arrow[r, "k"] & x \\
& \arrow[ur, phantom, "\Nwarrow\theta"] & a \arrow[u, "j"'] \\
a \arrow[uur, bend left, "f"] \arrow[urr, bend right, "\mathrm{id}_a"'] & &
\end{tikzcd}
$$

よって補題 4 により $t\colon f\downarrow\mathrm{id}_b \to j\downarrow k$ が一意に存在して次の等式が成り立つ．

$$
\begin{tikzcd}
& & b \arrow[r, "k"] & x \\
& & j\downarrow k \arrow[u, "q_1"] \arrow[r, "q_0"'] \arrow[ur, phantom, "\Nwarrow\kappa'"] & a \arrow[u, "j"'] \\
& f\downarrow\mathrm{id}_b \arrow[ur, dashed, "t"'] \arrow[uur, bend left, "p_1"] \arrow[urr, bend right, "p_0"'] & & \\
a \arrow[ur, "i^f"'] \arrow[uuurr, bend left, "f"] \arrow[uuurrr, bend right, "\mathrm{id}_a"'] & & &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
& b \arrow[r, "k"] & x \\
& j\downarrow k \arrow[u, "q_1"] \arrow[r, "q_0"'] \arrow[ur, phantom, "\Nwarrow\kappa'"] & a \arrow[u, "j"'] \\
a \arrow[uur, bend left, "f"] \arrow[ur, "s"'] \arrow[urr, bend right, "\mathrm{id}_a"'] & &
\end{tikzcd}
$$

よって $\zeta := \kappa' \bullet t$ とすれば

$$
\begin{tikzcd}
& b \arrow[r, "k"] & x \\
& f\downarrow\mathrm{id}_b \arrow[u, "p_1"] \arrow[r, "p_0"'] \arrow[ur, phantom, "\Nwarrow\zeta"] & a \arrow[u, "j"'] \\
a \arrow[uur, bend left, "f"] \arrow[ur, "i^f"'] \arrow[urr, bend right, "\mathrm{id}_a"'] & &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
& b \arrow[r, "k"] & x \\
& \arrow[ur, phantom, "\Nwarrow\theta"] & a \arrow[u, "j"'] \\
a \arrow[uur, bend left, "f"] \arrow[urr, bend right, "\mathrm{id}_a"'] & &
\end{tikzcd}
$$

を満たす．このような ζ は明らかに一意である．

次に $f^\dagger j = \langle k, \theta \rangle$ として，任意の $\sigma\colon j \circ p_0 \Rightarrow r \circ p_1$ を取る．

$$
\begin{tikzcd}
b \arrow[r, bend left, "r"] & x \\
f\downarrow\mathrm{id}_b \arrow[u, "p_1"] \arrow[r, "p_0"'] \arrow[ur, phantom, "\Nwarrow\alpha"] & a \arrow[u, "j"']
\end{tikzcd}
$$

すると $f^\dagger j = \langle k, \theta \rangle$ の普遍性により，ある $\tau\colon k \Rightarrow r$ が一意に存在して

$$
\begin{tikzcd}
& b \arrow[r, "k"'] \arrow[r, bend left=60, "r"] \arrow[r, phantom, bend left=30, "\Uparrow\tau"] & x \\
& & a \arrow[u, "j"'] \\
a \arrow[uur, bend left, "f"] \arrow[urr, bend right, "\mathrm{id}_a"'] \arrow[uurr, phantom, "\Nwarrow\theta"] & &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
& b \arrow[r, bend left, "r"] & x \\
& f\downarrow\mathrm{id}_b \arrow[u, "p_1"] \arrow[r, "p_0"'] \arrow[ur, phantom, "\Nwarrow\sigma"] & a \arrow[u, "j"'] \\
a \arrow[uur, bend left, "f"] \arrow[ur, "i^f"'] \arrow[urr, bend right, "\mathrm{id}_a"'] \arrow[uu, phantom, "="] \arrow[urr, phantom, "="] & &
\end{tikzcd}
$$

となる．このとき

$$
\begin{tikzcd}
& b \arrow[r, bend left, "r"] & x \\
& f\downarrow\mathrm{id}_b \arrow[u, "p_1"] \arrow[r, "p_0"'] \arrow[ur, phantom, "\Nwarrow\sigma"] & a \arrow[u, "j"'] \\
a \arrow[uur, bend left, "f"] \arrow[ur, "i^f"'] \arrow[urr, bend right, "\mathrm{id}_a"'] \arrow[uu, phantom, "="] \arrow[urr, phantom, "="] & &
\end{tikzcd}
\quad
\begin{tikzcd}
& b \arrow[r, "k"'] \arrow[r, bend left=60, "r"] \arrow[r, phantom, bend left=30, "\Uparrow\tau"] & x \\
& & a \arrow[u, "j"'] \\
a \arrow[uur, bend left, "f"] \arrow[urr, bend right, "\mathrm{id}_a"'] \arrow[uurr, phantom, "\Nwarrow\theta"] & &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
& b \arrow[r, "k"'] \arrow[r, bend left=60, "r"] \arrow[r, phantom, bend left=30, "\Uparrow\tau"] & x \\
& f\downarrow\mathrm{id}_b \arrow[u, "p_1"] \arrow[r, "p_0"'] \arrow[ur, phantom, "\Nwarrow\zeta"] & a \arrow[u, "j"'] \\
a \arrow[uur, bend left, "f"] \arrow[ur, "i^f"'] \arrow[urr, bend right, "\mathrm{id}_a"'] \arrow[uu, phantom, "="] \arrow[urr, phantom, "="] & &
\end{tikzcd}
$$

となるから，前半で示した ζ の一意性と同様の議論を j, r に対して行えば

$$
\begin{tikzcd}
b \arrow[r, "k"'] \arrow[r, bend left=60, "r"] \arrow[r, phantom, bend left=30, "\Uparrow\tau"] & x \\
f\downarrow\mathrm{id}_b \arrow[u, "p_1"] \arrow[r, "p_0"'] \arrow[ur, phantom, "\Nwarrow\zeta"] & a \arrow[u, "j"']
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
b \arrow[r, bend left, "r"] & x \\
f\downarrow\mathrm{id}_b \arrow[u, "p_1"] \arrow[r, "p_0"'] \arrow[ur, phantom, "\Nwarrow\sigma"] & a \arrow[u, "j"']
\end{tikzcd}
$$

が分かる．このような τ の一意性も $f^\dagger j$ の普遍性より分かるから，$p_1^\dagger(j \circ p_0) = \langle k, \zeta \rangle$ が分かった．

逆向きも同様にわかる． $\square$

定理 7. c-各点左 Kan 拡張は左 Kan 拡張である．

証明． $f\colon a\to b$, $g\colon a\to c$, $l\colon b\to c$ を 1-morphism，$\eta\colon g\Rightarrow l\circ f$ を 2-morphism として，$\langle l,\eta\rangle$ を f に沿った g の c-各点左 Kan 拡張とする．このとき

$$
\begin{tikzcd}
b \arrow[r, "\mathrm{id}_b"] & b \arrow[dr, "l"] & \\
f\downarrow \mathrm{id}_b \arrow[u, "p_1"] \arrow[r, "p_0"'] \arrow[ur, phantom, "\Nwarrow\theta"] & a \arrow[u, "f"'] \arrow[r, "g"'] \arrow[ur, phantom, "\eta\Uparrow"] & c
\end{tikzcd}
$$

は左 Kan 拡張である．よって補題 6 を

$$
\begin{tikzcd}
& b \arrow[r, "l"] & c \\
& j\downarrow \mathrm{id}_b \arrow[u, "p_1"] \arrow[r, "p_0"'] \arrow[ur, phantom, "\Nwarrow\zeta"] & a \arrow[u, "g"'] \\
a \arrow[uur, bend left, "f"] \arrow[ur, "i^j"'] \arrow[urr, bend right, "\mathrm{id}_a"'] & &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
& b \arrow[r, "l"] & c \\
& \arrow[ur, phantom, "\Nwarrow\eta"] & a \arrow[u, "g"'] \\
a \arrow[uur, bend left, "f"] \arrow[urr, bend right, "\mathrm{id}_a"'] & &
\end{tikzcd}
$$

に適用すれば $f^\dagger g=\langle l,\eta\rangle$ である． □

命題 8. $f\colon a\to b$, $g\colon a\to c$ を 1-morphism として f は右随伴を持つとする．このとき左 Kan 拡張 $\langle f^\dagger g,\eta\rangle$ が存在する (「2-category」の PDF を参照) が，この左 Kan 拡張は c-各点左 Kan 拡張である．

$$
\begin{tikzcd}
b \arrow[dr, "f^\dagger g"] & \\
a \arrow[u, "f"] \arrow[r, "g"'] \arrow[ur, phantom, "\eta\Uparrow"] & c
\end{tikzcd}
$$

証明． $j\colon x\to b$ に対してコンマ対象 $f\downarrow j$ を考えたとき，命題 1 より p_1 は右随伴を持つ．

$$
\begin{tikzcd}
x \arrow[r, "j"] & b \arrow[dr, "f^\dagger g"] & \\
f\downarrow j \arrow[u, "p_1"] \arrow[r, "p_0"'] \arrow[ur, phantom, "\Nwarrow"] & a \arrow[u, "f"'] \arrow[r, "g"'] \arrow[ur, phantom, "\eta\Uparrow"] & c
\end{tikzcd}
$$

故に p_1 に沿った $g\circ p_0$ の左 Kan 拡張は存在する．$p_1\dashv v$ とすれば $p_1^\dagger(g\circ p_0)=g\circ p_0\circ v$ である．$f\dashv u$ とすれば，命題 1 の証明から $u\circ j=p_0\circ v$ となる．また $f^\dagger g=g\circ u$ だったから $(f^\dagger g)\circ j=g\circ u\circ j=g\circ p_0\circ v=p_1^\dagger(g\circ p_0)$ となる． □

命題 9. $f\colon a \to b$, $g\colon a \to c$ を 1-morphism として c-各点左 Kan 拡張 $\langle f^\dagger g, \eta\rangle$ が存在するとする．

$$\begin{tikzcd} b \arrow[dr, "f^\dagger g"] & \\ a \arrow[u, "f"] \arrow[r, "g"'] \arrow[ur, phantom, "\eta\Uparrow"] & c \end{tikzcd}$$

f が忠実充満ならば η は同型である．

証明. $f^\dagger g$ が c-各点左 Kan 拡張だから，次の図式は左 Kan 拡張である．

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "f"] & b \arrow[dr, "f^\dagger g"] & \\ f\downarrow f \arrow[u] \arrow[r] \arrow[ur, phantom, "\Leftarrow"] & a \arrow[u, "f"] \arrow[r, "g"'] \arrow[ur, phantom, "\eta\Uparrow"] & c \end{tikzcd}$$

f が忠実充満だから命題 2 より $f\downarrow f \cong \mathrm{id}_a \downarrow \mathrm{id}_a$ となり，次の図式も左 Kan 拡張である．

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "f"] & b \arrow[dr, "f^\dagger g"] & \\ \mathrm{id}_a\downarrow \mathrm{id}_a \arrow[u] \arrow[r] \arrow[ur, phantom, "\Leftarrow"] & a \arrow[u, "f"] \arrow[r, "g"'] \arrow[ur, phantom, "\eta\Uparrow"] & c \end{tikzcd}$$

よって補題 6 により $\mathrm{id}_a^\dagger g = \langle f^\dagger g \circ f, \eta\rangle$ である．一方 $\mathrm{id}_a^\dagger g = \langle g, \mathrm{id}_g\rangle$ だから，η は同型でなければならない． $\square$

以上のようにコンマ対象を使って各点 Kan 拡張を定義したが，実はこの定義には問題がある．「豊穣圏」の PDF で各点 Kan 拡張を定義したが，この各点 Kan 拡張は V-豊穣圏がなす 2-category V-**Cat** における c-各点 Kan 拡張と一致しない場合があるのである．それは次の例から分かる．

例 10. **Cat**-豊穣圏 (即ち strict 2-category) $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ を次の図式で定義する．

$$\mathcal{A} \quad := \quad \begin{tikzcd} i \arrow[r, bend left, "k"] \arrow[r, bend right, "l"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow"] & j \end{tikzcd}, \qquad \mathcal{B} \quad := \quad \begin{tikzcd} a \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "g"'] & b \end{tikzcd}.$$

Cat-関手 $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$ は次の 4 つである．

$$
\begin{tikzcd}
G_a\colon i \arrow[r, bend left, "k"] \arrow[r, bend right, "l"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow"] & j & \longmapsto & a \arrow[r, bend left, "\mathrm{id}_a"] \arrow[r, bend right, "\mathrm{id}_a"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\mathrm{id}"] & a
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
G_b\colon i \arrow[r, bend left, "k"] \arrow[r, bend right, "l"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow"] & j & \longmapsto & b \arrow[r, bend left, "\mathrm{id}_b"] \arrow[r, bend right, "\mathrm{id}_b"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\mathrm{id}"] & b
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
G_f\colon i \arrow[r, bend left, "k"] \arrow[r, bend right, "l"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow"] & j & \longmapsto & a \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "f"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\mathrm{id}"] & b
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
G_g\colon i \arrow[r, bend left, "k"] \arrow[r, bend right, "l"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow"] & j & \longmapsto & a \arrow[r, bend left, "g"] \arrow[r, bend right, "g"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\mathrm{id}"] & b
\end{tikzcd}
$$

これらの間の **Cat**-自然変換は，$G_a \Rightarrow G_f, G_g$ と $G_f, G_g \Rightarrow G_b$ の 4 つと，その合成である．$\mathbb{1} := \{*\}$ として **Cat**-関手 $F\colon \mathbb{1} \to \mathcal{A}$，$E\colon \mathbb{1} \to \mathcal{B}$ を $F(*) := i$，$E(*) := a$ で定める．このとき左 Kan 拡張 $F^\dagger E$ が存在して $F^\dagger E = G_a$ である．また

$$
\begin{aligned}
\mathbf{Cat}(\mathcal{A}(i,i), \mathcal{B}(a,a)) &\cong \mathbf{Cat}(\mathbb{1}, \mathbb{1}) \cong \mathbb{1} \\
\mathbf{Cat}(\mathcal{A}(i,i), \mathcal{B}(a,b)) &\cong \mathbf{Cat}(\mathbb{1}, \{f,g\}) \cong \{f,g\} \\
\mathbf{Cat}(\mathcal{A}(i,j), \mathcal{B}(a,a)) &\cong \mathbf{Cat}(\mathbb{2}, \mathbb{1}) \cong \mathbb{1} \\
\mathbf{Cat}(\mathcal{A}(i,j), \mathcal{B}(a,b)) &\cong \mathbf{Cat}(\mathbb{2}, \{f,g\}) \cong \{f,g\}
\end{aligned}
$$

だから

$$
\begin{aligned}
\widehat{\mathbb{1}}(\mathcal{A}(F-, d), \mathcal{B}(E-, u)) &\cong \mathbf{Cat}(\mathcal{A}(i,d), \mathcal{B}(a,u)) \\
&\cong \mathcal{B}(a,u) \\
&\cong \mathcal{B}(F^\dagger E(d), u)
\end{aligned}
$$

となり $F^\dagger E$ は (**Cat**-関手の意味で) 各点左 Kan 拡張である．

一方，$K\colon \mathbb{1} \to \mathcal{A}$ を $K(*) := b$ で定める．

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{1} \arrow[r, "K"] & \mathcal{A} \arrow[dr, "F^\dagger E"] & \\
F \downarrow K \arrow[u, "P_1"] \arrow[r, "P_0"'] \arrow[ur, phantom, "\Nwarrow"] & \mathbb{1} \arrow[u, "F"'] \arrow[r, "E"'] \arrow[u, phantom, shift left=3, "\eta\Uparrow"] & \mathcal{B}
\end{tikzcd}
$$

ここで $F\downarrow K$ は次で定まる 2-category である．

- $\mathrm{Ob}(F\downarrow K)=\{k,l\}$ である．
- 1-morphism は $k\Rightarrow l$ と id のみである．
- 2-morphism は id のみである．

$S\colon \mathbb{1}\to\mathcal{B}$ を $S(*):=b$ で定める．**Cat**-自然変換 $\theta\colon E\circ P_0\Rightarrow S\circ P_1$ を $\theta_k:=f$，$\theta_l:=g$ で定めれば，この図式が左 Kan 拡張でないことが分かる．即ち $F^{\dagger}E$ は c-各点 Kan 拡張ではない． □

そこで豊穣圏論での各点 Kan 拡張を一般化するような各点 Kan 拡張を 2-category において定義することが以降の目標である．

参考文献

[1] Ross Street, Fibrations and Yoneda's Lemma in a 2-category, Lecture Notes in Mathematics 420, Springer-Verlag (1974), 104–133