

コンマ対象による各点 Kan 拡張

alg-d

https://alg-d.com/math/kan_extension/

2025 年 9 月 10 日

この PDF では、任意の $a_0 \xrightarrow{f} b \xleftarrow{g} a_1$ に対してコンマ対象 $f \downarrow g$ が存在すると仮定しておく。すると通常の圏論の場合に倣って、2-category \mathcal{C} における各点 Kan 拡張を次のように定義することができる。(後の区別のため、これを c -各点 Kan 拡張と呼ぶ。)

定義. $a, b, c \in \mathcal{C}$ を対象, $f: a \rightarrow b, g: a \rightarrow c, l: b \rightarrow c$ を 1-morphism, $\eta: g \Rightarrow l \circ f$ を 2-morphism とする. $\langle l, \eta \rangle$ が f に沿った g の c -各点左 Kan 拡張とは, 任意の 1-morphism $j: x \rightarrow b$ に対して, コンマ対象 $f \downarrow j$ を考えたとき合成

$$\begin{array}{ccccc} x & \xrightarrow{j} & b & & \\ \uparrow & \swarrow & \uparrow & \searrow & \\ f \downarrow j & \longrightarrow & a & \xrightarrow{g} & c \end{array}$$

が左 Kan 拡張になることをいう。

この c -各点 Kan 拡張について説明するのがこの PDF の目的である。

1 復習

以下の命題については「2-category での随伴・Kan 拡張・忠実充満」の PDF を参照。

系 1. $f: a_0 \rightarrow b$, $g: a_1 \rightarrow b$ を 1-morphism としてコンマ対象 $f \downarrow g$ が存在するとする.

$$\begin{array}{ccc} a_1 & \xrightarrow{g} & b \\ p_1 \uparrow & \swarrow \theta & \uparrow f \\ f \downarrow g & \xrightarrow[p_0]{} & a_0 \end{array}$$

このとき f が右随伴を持つならば p_1 も右随伴を持ち, g が左随伴を持つならば p_0 も左随伴を持つ. □

命題 2. $f: a \rightarrow b$ を 1-morphism として, コンマ対象 $f \downarrow f$, $\text{id}_a \downarrow \text{id}_a$ が存在するとする.

$$\begin{array}{ccc} a & \xrightarrow{f} & b \\ p_1 \uparrow & \swarrow \kappa & \uparrow f \\ f \downarrow f & \xrightarrow[p_0]{} & a \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} a & \xrightarrow{\text{id}_a} & a \\ q_1 \uparrow & \swarrow \beta & \uparrow \text{id}_a \\ \text{id}_a \downarrow \text{id}_a & \xrightarrow[q_0]{} & a \end{array}$$

このとき

f が忠実充満 \iff 1 次元的普遍性で得られる $h: \text{id}_a \downarrow \text{id}_a \rightarrow f \downarrow f$ が同型.

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{ccc} & a & \xrightarrow{f} & b \\ & p_1 \uparrow & & \uparrow f \\ & \swarrow \alpha & & \\ & f \downarrow f & \xrightarrow[p_0]{} & a \\ & \uparrow h & & \uparrow \\ \text{id}_a \downarrow \text{id}_a & & & \end{array} & = & \begin{array}{ccc} & a & \xrightarrow{\text{id}_a} & a & \xrightarrow{f} & b \\ & q_1 \uparrow & & \uparrow \text{id}_a & & \uparrow f \\ & \swarrow \beta & & \uparrow \text{id}_f & & \\ & \text{id}_a \downarrow \text{id}_a & \xrightarrow[q_0]{} & a & & \end{array} \end{array}$$

□

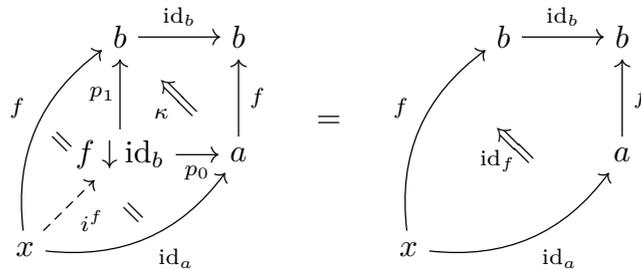
2 c-各点 Kan 拡張

命題 3. CAT における c-各点左 Kan 拡張は (通常の圏論における) 各点 Kan 拡張と一致する.

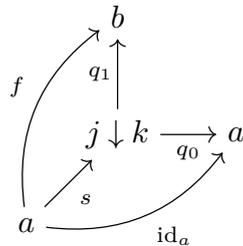
証明. 「ココンマ圏と profunctor」の PDF を参照. □

c-各点左 Kan 拡張は (通常の圏論における) 各点左 Kan 拡張と同様の性質を持っているので, まずはそれを示していこう.

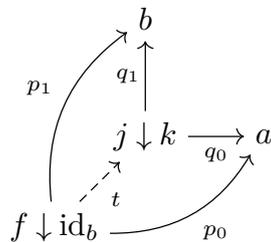
そのために $f: a \rightarrow b$ として, コンマ対象 $\langle f \downarrow \text{id}_b, p_0, p_1, \theta \rangle$ を考える. コンマ対象の 1 次元的普遍性により, 次の 1-morphism $i^f: a \rightarrow f \downarrow \text{id}_b$ が得られる.



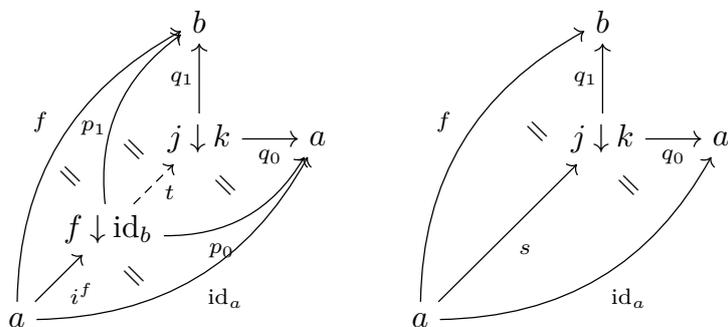
補題 4. $a \xrightarrow{j} x \xleftarrow{k} b$ のコンマ対象を $\langle j \downarrow k, q_0, q_1, \kappa' \rangle$ として, 次の図式が可換であると
する.



このとき



を可換にする $t: f \downarrow \text{id}_b \rightarrow j \downarrow k$ が一意に存在して $t \circ i^f = s$ を満たす.



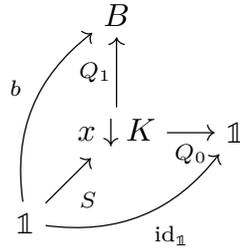
証明. $j \downarrow k$ の 1 次元的普遍性から, 次の等式を満たす $t: f \downarrow \text{id}_b \rightarrow j \downarrow k$ が一意に存在する.

このとき

より $t \circ i^f = s$ が分かる. □

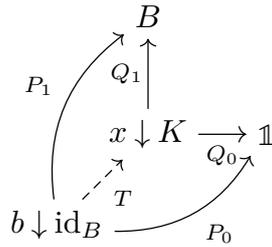
例 5. $\mathcal{C} = \mathbf{Cat}$ で $a = \mathbb{1}$ の場合の補題 4 を考える. つまり $\mathbb{1} \xrightarrow{x} X \xleftarrow{K} B$ のコマ圏

$x \downarrow K$ を取って可換図式



を考える. コンマ圏により得られる span なので $B \xleftarrow{Q_1} x \downarrow K \xrightarrow{Q_0} 1$ は two-sided discrete fibration である*¹. よって $Q_1: x \downarrow K \rightarrow B$ は discrete opfibration になる. 従って $B \xleftarrow{Q_1} x \downarrow K \xrightarrow{Q_0} 1$ は関手 $F: B \rightarrow \mathbf{Set}$ と同一視できる. これは $a \in B$ に対して $Fa := \{u \in x \downarrow K \mid Q_1 u = a\}$ で与えられる. 故にこの場合の関手 S は Fb の元と同一視できる.

このとき補題 4 により得られる



を考える. 先程と同様に $B \xleftarrow{P_1} b \downarrow id_B \xrightarrow{P_0} 1$ も関手 $B \rightarrow \mathbf{Set}$ と同一視できるが, これは Hom 関手 $\text{Hom}_B(-, b): B \rightarrow \mathbf{Set}$ である. 従って T は自然変換 $\text{Hom}_B(-, b) \Rightarrow F$ と同一視できる.

補題 4 が言っているのは S と T が 1 対 1 に対応するということだから, つまり全単射

$$\text{Hom}_{\mathbf{Set}^B}(\text{Hom}_B(-, b), F) \cong Fb$$

が得られる. 即ち補題 4 は米田の補題の一般化になっている. □

補題 6. $j: a \rightarrow x, k: b \rightarrow x$ とする. このとき, 任意の $\theta: j \Rightarrow k \circ f$ に対して, ある

*¹ fibration については詳しくは「fibration」の PDF を参照.

$\zeta: j \circ p_0 \Rightarrow k \circ p_1$ が一意に存在して、次の等式が成り立つ。

更にこのとき $f^\dagger j = \langle k, \theta \rangle \iff p_1^\dagger(j \circ p_0) = \langle k, \zeta \rangle$ である。

証明. $\kappa: j \Rightarrow k \circ f$ として $\langle j \downarrow k, q_0, q_1, \kappa' \rangle$ をコンマ対象とする. $j \downarrow k$ の 1 次元的普遍性により、次の等式を満たす $s: a \rightarrow j \downarrow k$ が一意に存在する。

よって補題 4 により $t: f \downarrow \text{id}_b \rightarrow j \downarrow k$ が一意に存在して次の等式が成り立つ。

よって $\zeta := \kappa' \bullet t$ とすれば

を満たす. このようなくは明らかに一意である.

次に $f^\dagger j = \langle k, \theta \rangle$ として, 任意の $\sigma: j \circ p_0 \Rightarrow r \circ p_1$ を取る.

$$\begin{array}{ccc}
 & r & \\
 & \curvearrowright & \\
 b & & x \\
 p_1 \uparrow & \swarrow \alpha & \uparrow j \\
 f \downarrow \text{id}_b & \xrightarrow{p_0} & a
 \end{array}$$

すると $f^\dagger j = \langle k, \theta \rangle$ の普遍性により, ある $\tau: k \Rightarrow r$ が一意に存在して

$$\begin{array}{ccc}
 & r & \\
 & \curvearrowright & \\
 b & \xrightarrow{k} & x \\
 p_1 \uparrow & \swarrow \sigma & \uparrow j \\
 f \downarrow \text{id}_b & \xrightarrow{p_0} & a \\
 \uparrow i^f & & \\
 a & \xrightarrow{\text{id}_a} & a
 \end{array}
 \quad \theta \quad = \quad
 \begin{array}{ccc}
 & r & \\
 & \curvearrowright & \\
 b & \xrightarrow{k} & x \\
 p_1 \uparrow & \swarrow \sigma & \uparrow j \\
 f \downarrow \text{id}_b & \xrightarrow{p_0} & a \\
 \uparrow i^f & & \\
 a & \xrightarrow{\text{id}_a} & a
 \end{array}$$

となる. このとき

$$\begin{array}{ccc}
 & r & \\
 & \curvearrowright & \\
 b & \xrightarrow{k} & x \\
 p_1 \uparrow & \swarrow \sigma & \uparrow j \\
 f \downarrow \text{id}_b & \xrightarrow{p_0} & a \\
 \uparrow i^f & & \\
 a & \xrightarrow{\text{id}_a} & a
 \end{array}
 \quad \theta \quad = \quad
 \begin{array}{ccc}
 & r & \\
 & \curvearrowright & \\
 b & \xrightarrow{k} & x \\
 p_1 \uparrow & \swarrow \zeta & \uparrow j \\
 f \downarrow \text{id}_b & \xrightarrow{p_0} & a \\
 \uparrow i^f & & \\
 a & \xrightarrow{\text{id}_a} & a
 \end{array}$$

となるから, 前半で示した ζ の一意性と同様の議論を j, r に対して行えば

$$\begin{array}{ccc}
 & r & \\
 & \curvearrowright & \\
 b & \xrightarrow{k} & x \\
 p_1 \uparrow & \swarrow \zeta & \uparrow j \\
 f \downarrow \text{id}_b & \xrightarrow{p_0} & a
 \end{array}
 \quad = \quad
 \begin{array}{ccc}
 & r & \\
 & \curvearrowright & \\
 b & & x \\
 p_1 \uparrow & \swarrow \sigma & \uparrow j \\
 f \downarrow \text{id}_b & \xrightarrow{p_0} & a
 \end{array}$$

が分かる. このような τ の一意性も $f^\dagger j$ の普遍性より分かるから, $p_1^\dagger(j \circ p_0) = \langle k, \zeta \rangle$ が分かった.

逆向きも同様にわかる. □

定理 7. c -各点左 Kan 拡張は左 Kan 拡張である.

証明. $f: a \rightarrow b$, $g: a \rightarrow c$, $l: b \rightarrow c$ を 1-morphism, $\eta: g \Rightarrow l \circ f$ を 2-morphism とし
て, $\langle l, \eta \rangle$ を f に沿った g の c -各点左 Kan 拡張とする. このとき

$$\begin{array}{ccccc}
 b & \xrightarrow{\text{id}_b} & b & & \\
 p_1 \uparrow & \lrcorner & \uparrow f & \nearrow l & \\
 & \theta & & \eta \Uparrow & \\
 f \downarrow \text{id}_b & \xrightarrow{p_0} & a & \xrightarrow{g} & c
 \end{array}$$

は左 Kan 拡張である. よって補題 6 を

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{ccccc}
 & & b & \xrightarrow{l} & c \\
 & & \uparrow p_1 & \lrcorner & \uparrow g \\
 f \nearrow & & & \zeta & \\
 & & j \downarrow \text{id}_b & \xrightarrow{p_0} & a \\
 & \swarrow i^j & & & \\
 a & & & & \\
 & & & & \text{id}_a
 \end{array}
 & = &
 \begin{array}{ccccc}
 & & b & \xrightarrow{l} & c \\
 & & \uparrow & \lrcorner & \uparrow g \\
 f \nearrow & & & \eta & \\
 & & a & \xrightarrow{\text{id}_a} & a \\
 & & & & \text{id}_a
 \end{array}
 \end{array}$$

に適用すれば $f^\dagger g = \langle l, \eta \rangle$ である. □

命題 8. $f: a \rightarrow b$, $g: a \rightarrow c$ を 1-morphism として f は右随伴を持つとする. このとき
左 Kan 拡張 $\langle f^\dagger g, \eta \rangle$ が存在する (「2-category」の PDF を参照) が, この左 Kan 拡張は
 c -各点左 Kan 拡張である.

$$\begin{array}{ccc}
 b & & \\
 f \uparrow & \searrow f^\dagger g & \\
 a & \xrightarrow{g} & c \\
 & \eta \Uparrow &
 \end{array}$$

証明. $j: x \rightarrow b$ に対してコンマ対象 $f \downarrow j$ を考えたとき, 命題 1 より p_1 は右随伴を持つ.

$$\begin{array}{ccccc}
 x & \xrightarrow{j} & b & & \\
 p_1 \uparrow & \lrcorner & \uparrow f & \nearrow f^\dagger g & \\
 & & & \eta \Uparrow & \\
 f \downarrow j & \xrightarrow{p_0} & a & \xrightarrow{g} & c
 \end{array}$$

故に p_1 に沿った $g \circ p_0$ の左 Kan 拡張は存在する. $p_1 \dashv v$ とすれば $p_1^\dagger(g \circ p_0) = g \circ p_0 \circ v$
である. $f \dashv u$ とすれば, 命題 1 の証明から $u \circ j = p_0 \circ v$ となる. また $f^\dagger g = g \circ u$ だっ
たから $(f^\dagger g) \circ j = g \circ u \circ j = g \circ p_0 \circ v = p_1^\dagger(g \circ p_0)$ となる. □

命題 9. $f: a \rightarrow b, g: a \rightarrow c$ を 1-morphism として c -各点左 Kan 拡張 $\langle f^\dagger g, \eta \rangle$ が存在するとする.

$$\begin{array}{ccc} & b & \\ & \nearrow f^\dagger g & \\ f \uparrow & & \\ a & \xrightarrow{g} & c \end{array}$$

f が忠実充満ならば η は同型である.

証明. $f^\dagger g$ が c -各点左 Kan 拡張だから, 次の図式は左 Kan 拡張である.

$$\begin{array}{ccccc} & a & \xrightarrow{f} & b & \\ & \uparrow & & \uparrow & \nearrow f^\dagger g \\ & & \swarrow f & & \\ f \downarrow f & \rightarrow & a & \xrightarrow{g} & c \end{array}$$

f が忠実充満だから命題 2 より $f \downarrow f \cong \text{id}_a \downarrow \text{id}_a$ となり, 次の図式も左 Kan 拡張である.

$$\begin{array}{ccccc} & a & \xrightarrow{f} & b & \\ & \uparrow & & \uparrow & \nearrow f^\dagger g \\ & & \swarrow f & & \\ \text{id}_a \downarrow \text{id}_a & \rightarrow & a & \xrightarrow{g} & c \end{array}$$

よって補題 6 により $\text{id}_a^\dagger g = \langle f^\dagger g \circ f, \eta \rangle$ である. 一方 $\text{id}_a^\dagger g = \langle g, \text{id}_g \rangle$ だから, η は同型でなければならない. \square

以上のようにコンマ対象を使って各点 Kan 拡張を定義したが, 実はこの定義には問題がある. 「豊穡圏」の PDF で各点 Kan 拡張を定義したが, この各点 Kan 拡張は V -豊穡圏がなす 2-category $V\text{-Cat}$ における c -各点 Kan 拡張と一致しない場合があるのである. それは次の例から分かる.

例 10. Cat -豊穡圏 (即ち strict 2-category) \mathcal{A}, \mathcal{B} を次の図式で定義する.

$$\mathcal{A} := \begin{array}{ccc} & i & \xrightarrow{k} \\ & \Downarrow & \\ & j & \xrightarrow{l} \end{array}, \quad \mathcal{B} := \begin{array}{ccc} & a & \xrightarrow{f} \\ & & \\ & a & \xrightarrow{g} \\ & & b \end{array}$$

Cat-関手 $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ は次の 4 つである.

$$\begin{array}{ccc}
 G_a: i \begin{array}{c} \xrightarrow{k} \\ \Downarrow \\ \xrightarrow{l} \end{array} j & \mapsto & a \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{id}_a} \\ \Downarrow \text{id} \\ \xrightarrow{\text{id}_a} \end{array} a \\
 G_b: i \begin{array}{c} \xrightarrow{k} \\ \Downarrow \\ \xrightarrow{l} \end{array} j & \mapsto & b \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{id}_b} \\ \Downarrow \text{id} \\ \xrightarrow{\text{id}_b} \end{array} b \\
 G_f: i \begin{array}{c} \xrightarrow{k} \\ \Downarrow \\ \xrightarrow{l} \end{array} j & \mapsto & a \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \Downarrow \text{id} \\ \xrightarrow{f} \end{array} b \\
 G_g: i \begin{array}{c} \xrightarrow{k} \\ \Downarrow \\ \xrightarrow{l} \end{array} j & \mapsto & a \begin{array}{c} \xrightarrow{g} \\ \Downarrow \text{id} \\ \xrightarrow{g} \end{array} b
 \end{array}$$

これらの間の **Cat**-自然変換は, $G_a \Rightarrow G_f, G_g$ と $G_f, G_g \Rightarrow G_b$ の 4 つと, その合成である. $\mathbb{1} := \{*\}$ として **Cat**-関手 $F: \mathbb{1} \rightarrow \mathcal{A}$, $E: \mathbb{1} \rightarrow \mathcal{B}$ を $F(*) := i$, $E(*) := a$ で定める. このとき左 Kan 拡張 $F^\dagger E$ が存在して $F^\dagger E = G_a$ である. また

$$\begin{aligned}
 \mathbf{Cat}(\mathcal{A}(i, i), \mathcal{B}(a, a)) &\cong \mathbf{Cat}(\mathbb{1}, \mathbb{1}) \cong \mathbb{1} \\
 \mathbf{Cat}(\mathcal{A}(i, i), \mathcal{B}(a, b)) &\cong \mathbf{Cat}(\mathbb{1}, \{f, g\}) \cong \{f, g\} \\
 \mathbf{Cat}(\mathcal{A}(i, j), \mathcal{B}(a, a)) &\cong \mathbf{Cat}(\mathbb{2}, \mathbb{1}) \cong \mathbb{1} \\
 \mathbf{Cat}(\mathcal{A}(i, j), \mathcal{B}(a, b)) &\cong \mathbf{Cat}(\mathbb{2}, \{f, g\}) \cong \{f, g\}
 \end{aligned}$$

だから

$$\begin{aligned}
 \widehat{\mathbb{1}}(\mathcal{A}(F-, d), \mathcal{B}(E-, u)) &\cong \mathbf{Cat}(\mathcal{A}(i, d), \mathcal{B}(a, u)) \\
 &\cong \mathcal{B}(a, u) \\
 &\cong \mathcal{B}(F^\dagger E(d), u)
 \end{aligned}$$

となり $F^\dagger E$ は (**Cat**-関手の意味で) 各点左 Kan 拡張である.

一方, $K: \mathbb{1} \rightarrow \mathcal{A}$ を $K(*) := b$ で定める.

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{1} & \xrightarrow{K} & \mathcal{A} \\
 P_1 \uparrow & \swarrow F & \uparrow F^\dagger E \\
 F \downarrow K & \xrightarrow{P_0} & \mathbb{1} \xrightarrow{E} \mathcal{B} \\
 & & \uparrow \eta
 \end{array}$$

ここで $F \downarrow K$ は次で定まる 2-category である.

- $\text{Ob}(F \downarrow K) = \{k, l\}$ である.
- 1-morphism は $k \Rightarrow l$ と id のみである.
- 2-morphism は id のみである.

$S: \mathbb{1} \rightarrow \mathcal{B}$ を $S(*) := b$ で定める. \mathbf{Cat} -自然変換 $\theta: E \circ P_0 \Rightarrow S \circ P_1$ を $\theta_k := f$, $\theta_l := g$ で定めれば, この図式が左 Kan 拡張でないことが分かる. 即ち $F^\dagger E$ は c-各点 Kan 拡張ではない. \square

そこで豊穡圏論での各点 Kan 拡張を一般化するような各点 Kan 拡張を 2-category において定義することが以降の目標である.

参考文献

- [1] Ross Street, Fibrations and Yoneda's Lemma in a 2-category, Lecture Notes in Mathematics 420, Springer-Verlag (1974), 104–133