

comma bicategory

alg-d

https://alg-d.com/math/kan_extension/

2025 年 9 月 12 日

$\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1, \mathcal{B}$ を bicategory, $F: \mathcal{A}_0 \rightarrow \mathcal{B}$, $G: \mathcal{A}_1 \rightarrow \mathcal{B}$ を pseudofunctor とする. bicategory $F \downarrow^\ell G$ を以下により定める. ($F \downarrow^\ell G$ を lax comma bicategory という.)

- $\text{Ob}(F \downarrow^\ell G) := \{\langle a_0, a_1, f_a \rangle \mid a_0 \in \mathcal{A}_0, a_1 \in \mathcal{A}_1, f_a: Fa_0 \rightarrow Ga_1\}$ とする.
- $a = \langle a_0, a_1, f_a \rangle$ から $b = \langle b_0, b_1, f_b \rangle$ への 1-morphism は 3 つ組 $g = \langle g_0: a_0 \rightarrow b_0, g_1: a_1 \rightarrow b_1, \beta_g: f_b \circ Fg_0 \Rightarrow Gg_1 \circ f_a \rangle$ とする.

$$\begin{array}{ccc} Fa_0 & \xrightarrow{f_a} & Ga_1 \\ Fg_0 \downarrow & \nearrow \beta_g & \downarrow Gg_1 \\ Fb_0 & \xrightarrow{f_b} & Gb_1 \end{array}$$

- $g = \langle g_0, g_1, \beta_g \rangle$ から $h = \langle h_0, h_1, \beta_h \rangle$ への 2-morphism は 2 つ組 $\theta = \langle \theta_0: g_0 \Rightarrow h_0, \theta_1: g_1 \Rightarrow h_1 \rangle$ であって等式

$$Fg_0 \left(\begin{array}{ccc} Fa_0 & \xrightarrow{f_a} & Ga_1 \\ \nearrow \beta_g & & \downarrow Gg_1 \\ Fb_0 & \xrightarrow{f_b} & Gb_1 \end{array} \right) \theta_1 Gg_1 = Fg_0 \left(\begin{array}{ccc} Fa_0 & \xrightarrow{f_a} & Ga_1 \\ \theta_0 \Rightarrow & & \nearrow \beta_h \\ Fb_0 & \xrightarrow{f_b} & Gb_1 \end{array} \right) Gh_1$$

を満たすものとする.

- $F \downarrow^\ell G$ の垂直合成は $\mathcal{B}$ における垂直合成とする. 即ち $\theta: g \Rightarrow h$, $\sigma: h \Rightarrow k$ を 2-morphism とするとき $\sigma * \theta := \langle \sigma_0 * \theta_0, \sigma_1 * \theta_1 \rangle$ と定める. $\sigma * \theta$ が 2-morphism

になっていることは

$$\begin{array}{ccc}
\begin{array}{c}
Fa_0 \xrightarrow{f_a} Ga_1 \\
\left(\begin{array}{ccc}
\swarrow_{\beta_g} & Gg_1 & \left(\begin{array}{c} \theta_1 \downarrow \sigma_1 \\ Gh_1 \end{array} \right) \\
\searrow & & \searrow
\end{array} \right) \\
Fb_0 \xrightarrow{f_b} Gb_1
\end{array}
& = &
\begin{array}{c}
Fa_0 \xrightarrow{f_a} Ga_1 \\
\left(\begin{array}{ccc}
\theta_0 \downarrow & \swarrow_{\beta_h} & Gh_1 \downarrow \sigma_1 \\
Fh_0 & & Gb_1
\end{array} \right) \\
Fb_0 \xrightarrow{f_b} Gb_1
\end{array}
\end{array}$$

から分かる.

- この垂直合成により明らかに $F \downarrow^\ell G(a, b)$ は圏となる。
- $g: a \rightarrow b$, $h: b \rightarrow c$ を $F \downarrow^\ell G$ の 1-morphism とするとき, その合成を $h \circ g := \langle h_0 \circ g_0, h_1 \circ g_1, \beta_{h \circ g} \rangle$ により定める. ここで $\beta_{h \circ g}$ は次の図式の合成である.

$$\begin{array}{ccccc}
& & Fa_0 & \xrightarrow{f_a} & Ga_1 \\
& & \downarrow Fg_0 & \nearrow \beta_g & \downarrow Gg_1 \\
F(h_0 \circ g_0) & \xRightarrow{\varphi^{-1}} & Fb_0 & \xrightarrow{f_b} & Gb_1 \xRightarrow{\varphi} G(h_1 \circ g_1) \\
& & \downarrow Fh_0 & \nearrow \beta_h & \downarrow Gh_1 \\
& & Fc_0 & \xrightarrow{f_c} & Gc_1
\end{array}$$

- $F \downarrow^\ell G$ の水平合成は $\mathcal{B}$ における水平合成とすれば関手

$$\bullet: F \downarrow^\ell G(b, c) \times F \downarrow^\ell G(a, b) \rightarrow F \downarrow^\ell G(a, c)$$

が定まる.

- $a \xrightarrow{g} b \xrightarrow{h} c \xrightarrow{k} d$ に対して $\alpha'_{khg}: (k \circ h) \circ g \Rightarrow k \circ (h \circ g)$ を $\langle F(\alpha_{k_0 h_0 g_0}), G(\alpha_{k_1 h_1 g_1}) \rangle$

により定める.

$$\begin{array}{ccc}
 Fa_0 & \xrightarrow{f_a} & Ga_1 \\
 \downarrow Fg_0 & \nearrow \beta_g & \downarrow Gg_1 \\
 Fb_0 & \xrightarrow{f_b} & Gb_1 \\
 \downarrow F(k_0 \circ h_0) & \nearrow \beta_{h \circ k} & \downarrow G(k_1 \circ h_1) \\
 Fd_0 & \xrightarrow{f_d} & Gd_1
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 \xrightarrow{G(k_1 \circ (h_1 \circ g_1))} \\
 \xrightarrow{G(\alpha_{k_1 h_1 g_1})}
 \end{array}$$

$$= \quad
 \begin{array}{ccc}
 & Fa_0 & \xrightarrow{f_a} Ga_1 \\
 & \downarrow F(h_0 \circ g_0) & \nearrow \beta_{h \circ g} \\
 & Fc_0 & \xrightarrow{f_c} Gc_1 \\
 & \downarrow Fk_0 & \nearrow \beta_k \\
 & Fd_0 & \xrightarrow{f_d} Gd_1
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 \xrightarrow{F(\alpha_{k_0 h_0 g_0})} \\
 \xrightarrow{F((k_0 \circ h_0) \circ g_0)}
 \end{array}$$

この α' は次の自然同型を定める.

$$\begin{array}{ccc}
 F \downarrow^\ell G(c, d) \times F \downarrow^\ell G(b, c) \times F \downarrow^\ell G(a, b) & & \\
 \swarrow \bullet \times \text{id} & & \searrow \text{id} \times \bullet \\
 F \downarrow^\ell G(b, d) \times F \downarrow^\ell G(a, b) & \xrightarrow[\alpha']{\sim} & F \downarrow^\ell G(c, d) \times F \downarrow^\ell G(a, c) \\
 \searrow \bullet & & \swarrow \bullet \\
 & F \downarrow^\ell G(a, d) &
 \end{array}$$

- $a \in F \downarrow^\ell G$ に対して $\text{id}_a := \langle \text{id}_{a_0}, \text{id}_{a_1}, \beta_{\text{id}_a} \rangle$ と定める. ここで β_{id_a} は次の図式の

合成である.

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{ccccc}
 & & Fa_0 & \xrightarrow{f_a} & Ga_1 \\
 & \swarrow \psi^{-1} & \downarrow \text{id} & \nearrow f_a & \downarrow \text{id} \\
 F(\text{id}_{a_0}) & \xRightarrow{\quad} & & & \\
 & \searrow \lambda_{fa} & \nearrow \rho_{fa}^{-1} & & \\
 & & Fa_0 & \xrightarrow{f_a} & Ga_1 \\
 & & \downarrow f_a & & \\
 & & & & G(\text{id}_{a_1})
 \end{array}
 \end{array}$$

- $g: a \rightarrow b$ に対して $\lambda'_g: \text{id}_b \circ g \Rightarrow g$ と $\rho'_g: g \circ \text{id}_a \Rightarrow g$ を

$$\lambda'_g := \langle F(\lambda_{g_0}), G(\lambda_{g_1}) \rangle$$

$$\rho'_g := \langle F(\rho_{g_0}), G(\rho_{g_1}) \rangle$$

により定める.

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{ccccc}
 Fa_0 & \xrightarrow{f_a} & Ga_1 & & \\
 Fg_0 \downarrow & \nearrow \beta_g & \downarrow Gg_1 & & \\
 Fb_0 & \xrightarrow{f_b} & Gb_1 & \xRightarrow{G(\lambda_{g_1})} & \\
 F(\text{id}) \downarrow & \nearrow \beta_{\text{id}_b} & \downarrow G(\text{id}) & & \\
 Fb_0 & \xrightarrow{f_b} & Gb_1 & \leftarrow &
 \end{array}
 G(h_1 \circ g_1) & = &
 \begin{array}{ccccc}
 Fa_0 & \xrightarrow{f_a} & Ga_1 & & \\
 \begin{array}{c} F(\lambda_{g_0}) \\ \xRightarrow{\quad} \\ Fg_0 \end{array} \downarrow & \nearrow \beta_g & \downarrow Gg_1 & & \\
 Fb_0 & \xrightarrow{f_b} & Gb_1 & &
 \end{array}
 \end{array}$$

- $\mathcal{B}$ が bicategory だから, 上で定義した α', λ', ρ' は coherence 条件を満たすことが分かる.
- 以上により $F \downarrow^\ell G$ は bicategory である.

定義. 上の定義における β_g を同型に限定して得られる局所充満部分 bicategory $F \downarrow^{\text{ps}} G \subset F \downarrow^\ell G$ を pseudo comma bicategory という.

定義. 上の定義における β_g を id に限定して得られる局所充満部分 bicategory $F \downarrow G \subset F \downarrow^\ell G$ を strict comma bicategory という.

定義. $\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1, \mathcal{B}$ を strict 2-category, $F: \mathcal{A}_0 \rightarrow \mathcal{B}$, $G: \mathcal{A}_1 \rightarrow \mathcal{B}$ を strict 2-functor とする. このとき定義から明らかに $F \downarrow^\ell G$ は strict 2-category である. 故に $F \downarrow^{\text{ps}} G$ と $F \downarrow G$ も strict 2-category である. これをそれぞれ lax comma 2-category, pseudo comma 2-category, strict comma 2-category という.

命題 1. strict comma 2-category は strict 2-category **CAT-CAT** におけるコンマ対象である.

証明. $F: \mathcal{A}_0 \rightarrow \mathcal{B}$, $G: \mathcal{A}_1 \rightarrow \mathcal{B}$ を strict 2-functor とする. strict comma 2-category $F \downarrow G$ の定義から明らかに, 射影によって strict 2-functor $P_0: F \downarrow G \rightarrow \mathcal{A}_0$, $P_1: F \downarrow G \rightarrow \mathcal{A}_1$ と strict natural transformation $\kappa: FP_0 \Rightarrow GP_1$ が得られる.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}_1 & \xrightarrow{G} & \mathcal{B} \\ P_1 \uparrow & \swarrow \kappa & \uparrow F \\ F \downarrow G & \xrightarrow{P_0} & \mathcal{A}_0 \end{array}$$

(1 次元の普遍性) 次の図式を考える.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}_1 & \xrightarrow{G} & \mathcal{B} \\ Q_1 \uparrow & \swarrow \sigma & \uparrow F \\ \mathcal{X} & \xrightarrow{Q_0} & \mathcal{A}_0 \end{array}$$

strict 2-functor $H: \mathcal{X} \rightarrow F \downarrow G$ を次のように定義する.

- 対象 $x \in \mathcal{X}$ に対して $Hx := \langle Q_0x, Q_1x, \sigma_x \rangle \in F \downarrow G$ とする.
- $\mathcal{X}$ の 1-morphism $f: x \rightarrow z$ に対して $Hf := \langle Q_0f, Q_1f \rangle$ とする.
- $\mathcal{X}$ の 2-morphism $\beta: f \Rightarrow g: x \rightarrow z$ に対して $H\beta := \langle Q_0\beta, Q_1\beta \rangle$ とする.

このとき定義から明らかに $P_0H = Q_0$, $P_1H = Q_1$, $\kappa \bullet H = \sigma$ である. 故に次の等式が成り立つ.

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{c} \mathcal{A}_1 \xrightarrow{G} \mathcal{B} \\ \uparrow P_1 \quad \swarrow \kappa \quad \uparrow F \\ \mathcal{X} \xrightarrow{Q_0} F \downarrow G \xrightarrow{P_0} \mathcal{A}_0 \\ \uparrow H \\ \mathcal{X} \end{array} & = & \begin{array}{c} \mathcal{A}_1 \xrightarrow{G} \mathcal{B} \\ \uparrow Q_1 \quad \swarrow \sigma \quad \uparrow F \\ \mathcal{X} \xrightarrow{Q_0} \mathcal{A}_0 \end{array} \end{array}$$

このような H は明らかに一意である.

(2 次元の普遍性) strict 2-functor $H, H': \mathcal{X} \rightarrow F \downarrow G$ に対して次の等式が成り立つと

する.

$$\begin{array}{ccc}
 & \mathcal{A}_1 & \xrightarrow{G} \mathcal{B} \\
 & \uparrow P_1 & \nwarrow \kappa \\
 P_1 H' & \nearrow \theta_1 & F \downarrow \\
 & \mathcal{A}_0 & \xrightarrow{P_0} \mathcal{A}_0 \\
 \mathcal{X} & \xrightarrow{H} & \mathcal{X} \\
 & \nwarrow P_0 H & \\
 & \mathcal{A}_0 & \xrightarrow{P_0} \mathcal{A}_0
 \end{array}
 =
 \begin{array}{ccc}
 & \mathcal{A}_1 & \xrightarrow{G} \mathcal{B} \\
 & \uparrow P_1 & \nwarrow \kappa \\
 P_1 H' & \nearrow \theta_0 & F \downarrow \\
 & \mathcal{A}_0 & \xrightarrow{P_0} \mathcal{A}_0 \\
 \mathcal{X} & \xrightarrow{H'} & \mathcal{X} \\
 & \nwarrow P_0 H & \\
 & \mathcal{A}_0 & \xrightarrow{P_0} \mathcal{A}_0
 \end{array}$$

対象 $x \in \mathcal{X}$ に対して $Hx = \langle P_0 Hx, P_1 Hx, \kappa_{Hx} \rangle$, $H'x = \langle P_0 H'x, P_1 H'x, \kappa_{H'x} \rangle$ であるから $G(\theta_1)_x \circ \kappa_{Hx} = \kappa_{H'x} \circ F(\theta_0)_x$ となる. 即ち $\beta_x := \langle (\theta_0)_x, (\theta_1)_x \rangle: Hx \rightarrow H'x$ は $F \downarrow G$ の 1-morphism である.

$$\begin{array}{ccc}
 FP_0 Hx & \xrightarrow{\kappa_{Hx}} & GP_1 Hx \\
 F(\theta_0)_x \downarrow & & \downarrow G(\theta_1)_x \\
 FP_0 H'x & \xrightarrow{\kappa_{H'x}} & GP_1 H'x
 \end{array}$$

これは strict natural transformation $\beta: H \Rightarrow H'$ を定める.

∴) まず 1-morphism $f: x \rightarrow z$ に対して次の図式が可換であることを示す.

$$\begin{array}{ccc}
 Hx & \xrightarrow{\beta_x} & H'x \\
 Hf \downarrow & & \downarrow H'f \\
 Hz & \xrightarrow{\beta_z} & H'z
 \end{array}$$

これが可換というのは定義より

$$\begin{array}{ccc}
 P_0 Hx & \xrightarrow{(\theta_0)_x} & P_0 H'x \\
 P_0 Hf \downarrow & & \downarrow P_0 H'f \\
 P_0 Hz & \xrightarrow{(\theta_0)_z} & P_0 H'z
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{ccc}
 P_1 Hx & \xrightarrow{(\theta_1)_x} & P_1 H'x \\
 P_1 Hf \downarrow & & \downarrow P_1 H'f \\
 P_1 Hz & \xrightarrow{(\theta_1)_z} & P_1 H'z
 \end{array}$$

が可換ということだが, これは θ_0, θ_1 が strict natural transformation だから可換である.

同様にして 2-morphism $\gamma: f \Rightarrow g: x \rightarrow z$ に対して

$$\begin{array}{ccc}
 Hx & \xrightarrow{\beta_x} & H'x \\
 Hg \left(\begin{array}{c} \xrightarrow{H\gamma} \\ \xleftarrow{Hf} \end{array} \right) & \parallel & H'f \\
 Hz & \xrightarrow{\beta_z} & H'z
 \end{array} = \begin{array}{ccc}
 Hx & \xrightarrow{\beta_x} & H'x \\
 Hg \left(\begin{array}{c} \parallel \\ \xrightarrow{H'g} \end{array} \right) & \left(\begin{array}{c} \xrightarrow{H'\gamma} \\ \xleftarrow{H'f} \end{array} \right) & H'f \\
 Hz & \xrightarrow{\beta_z} & H'z
 \end{array}$$

も分かるから, β は strict natural transformation である.

このとき定義から明らかに

$$\begin{array}{c} \mathcal{A}_1 \\ \uparrow P_1 \\ H' \xrightarrow{F} G \xrightarrow{H} \mathcal{X} \end{array} \xrightarrow{\beta} \begin{array}{c} \mathcal{A}_1 \\ \uparrow P_1 \\ H' \xrightarrow{f} g \xrightarrow{H} \mathcal{X} \end{array} \xrightarrow{\theta_1} \begin{array}{c} \mathcal{A}_0 \\ \xrightarrow{P_0} \\ H' \xrightarrow{F} G \xrightarrow{H} \mathcal{X} \end{array} \xrightarrow{\beta} \begin{array}{c} \mathcal{A}_0 \\ \xrightarrow{P_0} \\ H' \xrightarrow{F} G \xrightarrow{H} \mathcal{X} \end{array} \xrightarrow{\theta_0} \begin{array}{c} \mathcal{A}_0 \\ \xrightarrow{P_0} \\ H' \xrightarrow{F} G \xrightarrow{H} \mathcal{X} \end{array}$$

が成り立つ. □