数学基礎論 (数理論理学) 入門

alg-d
https://alg-d.com/math/ac/

2025 年 2 月 7 日

目次

1　はじめに

この PDF では数学基礎論 (数理論理学) の入門解説を行う．数学基礎論とは，一言で言えば「数学を数学的に考える」ものである．つまり，数学に出てくる〈命題〉や〈証明〉などを数学的にキチンと定義して，これらが持つ性質について考えようというのが数学基礎論になる．なぜこのようなことを考えるのか，というのは歴史的には数学の基礎がどうと

かいう話があるのだが (なので数学基礎論と呼ばれている[*1])，その話はここではしない．というのも当サイトの読者であれば数学基礎論を学ぶ大きなモチベーションがあるはずだからである．そのモチベーションとは

$$\text{(ある定理が) 選択公理なしでは証明できないことを証明する} \tag{1}$$

ということだ．数学をやっていると例えば

- 可算和定理[*2]は選択公理なしには証明できない
- Hahn-Banach の定理は選択公理なしには証明できない
- Lebesgue 非可測集合の存在は選択公理なしには証明できない

のような主張がしばしば現れる．これらは「選択公理なしの証明は知られていないし，見た感じ選択公理は避けられなさそうだから，選択公理なしには証明できないだろう」というふわっとした主張ではなく，数学的にちゃんとした定理である．つまり，例えば「可算和定理は選択公理なしには証明できない」ことは数学的に証明されている．「命題とは何か」「選択公理なしとは何か」「証明できるとは何か」というようなことが数学的に厳密に定義されていなければ，このような主張は証明できないので，数学基礎論という話が重要になるわけである．

ところでこの PDF の最終的な目標は (1) である[*3]が，「選択公理なし」というのは，逆に言えば何なら使っていいのかという話になる．そこで通常使われるのが ZF と呼ばれる公理系である．これは Zermelo と Fraenkel という数学者によって導入された「集合論の公理系」で，これに含まれる公理のみを使ってよいとするのである．つまり (1) を正確に書くと

$$\text{(ある定理が) ZF では証明できないことを証明する}$$

となる．そこでこの PDF では，まずは第 2 節で ZF と ZF における〈証明〉の定義を説明する．

実は数学基礎論ではより一般に，ZF という集合論の公理系だけでなく，例えば群論や自然数論などの様々な理論やそこでの〈証明〉を定義することもできるが，最初は簡単の

[*1] 歴史的にはそうなのだが，現在では「数学の基礎」という話とは関係なく研究されている話題も多く数学基礎論という名称は実態と乖離している，ということもあり数理論理学と呼ばれることも多い.

[*2] X_n が可算集合ならば $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$ も可算集合，という定理.

[*3] ただしこれは非常に難しいのでこの PDF ではそこまでたどり着けない．この PDF では「証明できないことを証明する方法」のアイデアを説明するところまでになる.

ためとりあえず ZF に絞って説明をすることにする．このようなより一般の場合については第 4 節で説明する．

2　基本的な定義

〈証明〉とはざっくり言えば〈命題〉の有限列で「良い条件」を満たすもののことである．〈命題〉とは有限文字列で〈文法〉を満たすものである．そこでまずは〈命題〉に使うことができる〈文字〉から定義していく．

定義. 以下に挙げるものをこの PDF では使用可能文字と呼ぶことにする[*4]．

(1) $v_0, v_1, v_2, \cdots$ (これらを変数記号という)
(2) $\in$ (これを関係記号という)
(3) $\neg, \to, \forall, =$ (これらを論理記号という)
(4) (,) (これらを括弧という)

変数記号のところで $\cdots$ と書いてあるのは，変数記号は可算無限個存在するという意味である．これは要するに「数学をしているときは常に変数記号を新しく取ることができる」くらいの意味である．

注意 2. 読者の中には，もしかしたら「今から ZF という集合論を定義しようとしているのに，その前に可算無限という言葉を使っていいのか？」と思った人もいるかもしれない．つまりこれは循環論法ではないのか？ という疑問である．答えはもちろん循環論法ではないのだが，これについてはもう少し後で説明する (注意 8)．

後で定義するが，これらの使用可能文字を使うことで例えば

$$\forall v_0 \left(\neg(v_0 \in v_1)\right) \tag{3}$$

のような〈命題〉(論理式と呼ぶ) を記述することができるようになる．ここでの変数記号は，何らかの集合を表していると思ってほしい．というのも，ZF では集合しか考えないためである．つまり何の断りもなくいきなり v_0 のような変数記号が現れたら，これは必ず集合である．「集合しか考えないということは，自然数や実数のようなものは考えないのか？ それでは問題があるのでは？」と思うかもしれないが，実はこれは問題ないことが後で分かる．

[*4] これを言語と呼んでいる文献もあるが，言語は第 4 節で定義する意味で使用することが多いため，ここでは「使用可能文字」という独自の呼び方を採用した．

他の記号については

- $\in$ は「集合に元として属する」(つまり $x \in y$ と書いたら「x は y の元である」)
- $\neg$ は「否定」(つまり $\neg\varphi$ と書いたら「φ でない」)
- $\to$ は「ならば」(つまり $\varphi \to \psi$ と書いたら「φ ならば ψ である」)[*5]
- $\forall$ は「任意の」(つまり $\forall x\,\varphi$ と書いたら「任意の x に対して φ である」)
- $=$ は「等しい」(つまり $x = y$ と書いたら「x と y は等しい」)
- ( ) は普段通り結合の順番を表すための記号

と思えばよい．つまり例えば (3) は「集合 v_1 は元を持たない (つまり空集合である)」という意味だと思えば良い．

注意 4. もしかしたら「論理記号に $\wedge$ (かつ) や $\vee$ (または) や $\exists$ (存在) が足りないのでは？」と思った人もいるかもしれない．これについても後で説明する．

注意 5. 集合の定義は？ と思った人もいるかもしれない．これは実際には逆で，変数記号が表す対象のことを集合と呼ぶのである．ベクトル空間の元をベクトルと呼ぶというのと似ているかもしれない．

注意 6. ここで長々と記号の意味を説明したが，実はこれは非公式なものである．つまり，実際には各記号には意味なんてものは無く，ここには (可算無限 $+\,7$) 個の相異なる文字がただ存在するだけだ．ただそれだと初学者はこの後の説明をどういう気持ちで読めばよいか分からないと思うので非公式な説明をしたのである．(ただ実際には，多くの数学者もこの非公式な意味を元にこれらの文字を読んでいるはずである．) これについては注意 15 で追加の説明をする．

使用可能文字の有限列で〈文法〉を満たしているものが〈命題〉となる．数学基礎論ではこの〈命題〉にあたるものを論理式といい，次のように定義する．

定義. 使用可能文字の有限列であって，以下により定まるものを論理式という．

(1) x と y が変数記号のとき $x \in y$ と $x = y$ は論理式である (これらを原子論理式という).

[*5] 普段の数学では「ならば」は $\Rightarrow$ と書くことが多いと思うが，数学基礎論における論理記号としては $\to$ を使うことが多い．

(2) φ が論理式のとき $\neg(\varphi)$ も論理式である[*6].
(3) φ と ψ が論理式のとき $(\varphi) \to (\psi)$ も論理式である.
(4) φ が論理式で x が変数記号のとき $\forall x\,(\varphi)$ も論理式である.
(5) 以上により得られるもののみが論理式である.

注意 7. ここでは括弧を使う定義を採用したが，ポーランド記法や逆ポーランド記法と呼ばれる方法を使って，括弧を使わずに論理式を定義する方法もある．例えば [4] ではポーランド記法が使われている.

練習問題. 次のうち論理式であるものを全て選べ.

(1) $\neg v_0{=}{\to}v_1$
(2) $y \in x$
(3) $\forall v_0\,(v_0 \in v_1) \to \forall v_2\,(v_2 = v_1)$

解答. まず (1) は明らかに論理式の定義を満たしていないので，これは論理式ではない.

次に (2) であるが，これも論理式ではない．というのも論理式の定義によれば，x と y が変数記号のときに限り $y \in x$ は論理式となるのである．変数記号とは $v_0, v_1, v_2, \cdots$ のことであり x や y は変数記号ではない (そもそも使用可能文字ではない) ので，この問題の $y \in x$ は論理式ではない[*7]．要するに引っ掛け問題である.

(3) も同じく引っ掛け問題である．論理式の定義によれば, 論理式になるのは $(\forall v_0\,(v_0 \in v_1)) \to (\forall v_2\,(v_2 = v_3))$ である．この問題の $\forall v_0\,(v_0 \in v_1) \to \forall v_2\,(v_2 = v_3)$ は括弧が足りないため論理式の定義に当てはまらない. $\square$

注意 8. この問題で言いたいのは，v_0, v_1 や x, y はどちらも「変数」であるが，これらは役割が異なるということだ．v_0, v_1 というのは今定義しようとしている ZF という体系の中に出てくる，単なる記号である．一方で x, y というのは「我々が普段やってる数学」に出てくる変数となる．つまり重要なのは，ここでは〈数学〉が 2 種類あるということである (1 つは「我々が普段やってる数学」でもう 1 つは ZF というこれから定義する体系)．このように数学には 2 種類あるので，これを区別するために「我々が普段やってる数学」のことをメタ数学と呼ぶ．このメタ数学という考え方は

[*6] ここでの ( ) は使用可能文字としての括弧である．今 φ が論理式，つまり使用可能文字の有限列だから，$\neg(\varphi)$ も使用可能文字の有限列となる．これが論理式であるというのがこの定義である.
[*7] 原子論理式の定義には「x と y が変数記号のとき」という宣言がわざわざ書かれている.

普段の数学では出てこないので慣れないと難しいが，数学基礎論においてはこれを区別することが非常に重要である．

先程の使用可能文字の定義に戻ると，ここで使った無限という言葉はメタ数学での無限であり，ZF において定義する無限ではない．だから使用可能文字の定義で無限という言葉を使ってもこれは循環論法にはならない．但しメタ数学において無限に関する性質をどのくらい使って良いかは議論の余地があるところであり，時と場合や人によって異なる (これについては第 5 節で少し説明する)．例えばメタ数学において非可算な順序数 ω_1 を使った場合，これについて否定的な意見を持つ人もいるかもしれない．ただ今回の場合の「常に変数記号を新しく取ることができる」という意味での「変数記号は無限個存在する」という仮定は多くの人が問題ないと考えるであろうから，ここでのメタ数学ではこの仮定を認めている．

元の問題の話に戻ると，確かに $y \in x$ は論理式ではないものの，実際には x や y を変数記号として使うのは見慣れていて分かりやすい．そこで以下では特に断らなくても x, y, x_1, x_2 などの文字も変数記号として使っていくことにする．つまり x が出てきたら，それは何らかの v_i を表していると思えばよいわけである．但し異なる文字は異なる変数記号を表しているものとする．例えば $\forall x\,(\forall y\,(x \in y))$ というのは $\forall v_0\,(\forall v_1\,(v_0 \in v_1))$ ということであり $\forall v_0\,(\forall v_0\,(v_0 \in v_0))$ ではない．

注意 9. この約束事には一見問題がある．というのも，x や y としてどの変数記号を使うのかに決まりが無いので，例えば今の例 $\forall x\,(\forall y\,(x \in y))$ の場合，人によっては $\forall v_1\,(\forall v_0\,(v_1 \in v_0))$ だと思うかもしれないし，もしくは $\forall v_{573}\,(\forall v_{765}\,(v_{573} \in v_{765}))$ だと思うかもしれない．実はこれはどの変数記号を使ったとしても本質的に変わりがないことが分かるので，このような約束事をしても問題は起きないのである．

また異なる文字は異なる変数記号を表すという約束は，例えば後で対の公理という公理 $(\forall x\,\forall y\,\exists z\,(x \in z \wedge y \in z))$ が登場するが，ここでの x, y, z は異なる変数記号であり例えば $\forall v_0\,\forall v_0\,\exists v_0\,(v_0 \in v_0 \wedge v_0 \in v_0)$ は公理ではないということである．

また括弧についても，定義に従って全部付けると逆に分かりにくくなるので，混乱しない範囲で省略して書くことにする．また読みやすくするため ( ) の代わりに [ ] も使うことにする．

ここで次の略記を導入しておく．

- $(\neg\varphi) \to \psi$ を $\varphi \vee \psi$ と略記する．
- $\neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$ を $\varphi \wedge \psi$ と略記する．

- $(\varphi \to \psi) \land (\psi \to \varphi)$ を $\varphi \leftrightarrow \psi$ と略記する.
- $\neg \forall x \, \neg \varphi$ を $\exists x \, \varphi$ と略記する.
- $\neg(x = y)$ を $x \neq y$ と略記する.
- $\neg(x \in y)$ を $x \notin y$ と略記する.
- $\forall x \, (x \in y \to \varphi)$ を $\forall x \in y \, (\varphi)$ と略記する.
- $\exists x \, (x \in y \land \varphi)$ を $\exists x \in y \, (\varphi)$ と略記する.

このように定義するから使用可能文字の定義には $\lor, \land, \exists$ などを含めなかったのである. もちろん, 使用可能文字に $\lor, \land, \exists$ を含める定義も可能であるが, その場合は例えば「$\varphi \land \psi$ が $\neg(\neg\varphi \lor \neg\psi)$ と同値であることを確かめる」などの手間が発生するので通常は使用可能文字は必要最小限にすることが多い[*8].

また論理式の中に現れる変数記号のうち, $\forall$ が付いている変数を束縛変数という. そうでないものは自由変数という. 例えば論理式 $(\forall x \, (x \in y)) \land (x = z)$ においては, $x \in y$ の x は束縛変数で, $x = z$ の x は自由変数である. また y と z は自由変数である. 自由変数が現れない論理式のことを閉論理式 (もしくは文) という.

注意 10. ここでした束縛変数の説明はかなりテキトーであり, 本当はもっと丁寧に束縛の定義をすべきではあるが, 実はこれを厳密に扱うのは結構大変で, 話が長くなってしまい中々本題に入れなくなってしまう. 入門の段階ではとりあえずこのくらいの理解で十分だと思うため, ここではこれ以上束縛の話はしない. 詳しくは例えば [4] や [5] を参照して欲しい. また変数の束縛については, そもそも自由変数と束縛変数で記号を分けて用意する流儀もある. 例えば [7] を参照.

定義. 閉論理式のメタ集合[*9]を公理系という. また公理系が与えられたとき, その元を公理と呼ぶ.

ここで一旦 ZF を定義するが, ここで挙げる論理式は上で定義した意味での論理式にはなっていないものがある. どういうことかは第 3 節で説明する. また各公理の意味も第 3 節で説明する.

定義. φ を論理式として, φ に現れる自由変数全体を $x_1, \cdots, x_n$ とする. このとき $\varphi^{\forall}$ で

[*8] この必要最小限の論理記号として何を採用するかは文献によって異なる. この PDF では [2] を参考に $\neg, \to, \exists$ とした. またこのようなことができるのはこの PDF で説明しているのが古典論理 (排中律を認める体系) だからであり, 排中律を認めない場合は少し様子が異なる.

[*9] ここで考えているのはメタ数学における集合なので, それを区別するためにここではメタ集合と呼んでいる. 以下同様に, メタ数学における○○のことをメタ○○と呼ぶ.

$\forall x_1 \cdots \forall x_n \varphi$ を表す．$\varphi^\forall$ は閉論理式である．これを φ の全称閉包という．

定義． 以下の閉論理式からなる公理系を ZFC という[*10]．

(0) (集合の存在) $\exists x\,(x = x)$
(1) (外延性公理) $\forall x\,\forall y\,(\forall z\,(z \in x \leftrightarrow z \in y) \to x = y)$
(2) (基礎の公理[*11]) $\forall x\,[\exists y\,(y \in x) \to \exists y\,(y \in x \land \neg\exists z\,(z \in x \land z \in y))]$
(3) (内包性公理図式) φ が論理式で y を自由変数として含まないとき

$$\forall z\,\exists y\,\forall x\,(x \in y \leftrightarrow x \in z \land \varphi)$$

の全称閉包を公理とする．
(4) (対の公理) $\forall x\,\forall y\,\exists z\,(x \in z \land y \in z)$
(5) (和集合公理) $\forall \mathcal{F}\,\exists A\,\forall Y\,\forall x\,(x \in Y \land Y \in \mathcal{F} \to x \in A)$
(6) (置換公理図式) φ が論理式で Y を自由変数として含まないとき

$$\forall A\,(\forall x \in A\,\exists! y\,\varphi \to \exists Y\,\forall x \in A\,\exists y \in Y\,\varphi)$$

の全称閉包を公理とする．
(7) (無限公理) $\exists x\,(0 \in x \land \forall y \in x\,(S(y) \in x))$
(8) (冪集合公理) $\forall x\,\exists y\,\forall z\,(z \subset x \to z \in y)$
(9) (選択公理) $\forall A\,\exists R\,(R$ は A を整列順序づけする $)$

また ZFC から選択公理を除いたものを ZF と書く．また ZF から基礎の公理を除いたものを ZF$^-$ と書く．

さて，次は〈証明〉を定義する．

まず φ を論理式とするとき，φ に現れる自由変数 x を別の変数記号 y に置き換えてできる論理式をここでは $\varphi[x \rightsquigarrow y]$ と書く．例えば φ が先に挙げた $(\forall x\,(x \in y)) \land (x = z)$ のときは $\varphi[x \rightsquigarrow y]$ は $(\forall x\,(x \in y)) \land (y = z)$ になる．

注意 11. この $\varphi[x \rightsquigarrow y]$ という操作を代入という．この代入という操作は普段の数学でもよくするので親しみがあるかもしれないが，実は結構難しいものである．というのも再び φ が $(\forall x\,(x \in y)) \land (x = z)$ の場合を考えたとき，$\varphi[y \rightsquigarrow x]$ という論理式を考えるとこれは $(\forall x\,(x \in x)) \land (x = z)$ となってしまい，元の論理式と意味が全く

*10 ここでは [3] に載っているものを採用した．
*11 基礎の公理を正則性公理と呼ぶこともある．

異なるものになってしまう．元々 y は自由変数だったはずなのに，x を代入したせいで束縛されてしまうからである．そこでこの PDF では，束縛変数が増えてしまうような代入はしてはいけないものとする．この条件を代入条件と呼ぶことにする．(この代入も，変数の束縛と同じで厳密にはもっと丁寧に扱う必要があるが，ここではこのくらいの説明で先に進むことにする．)

なお代入の記号は文献によって異なる．ここで使っている $\varphi[x \rightsquigarrow y]$ は [4] の記法である．これは [2] では $\mathrm{Subst}\,\varphi\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$，[5] では $\varphi[x := y]$ と書かれている．

また論理式 φ において自由変数 x を強調したい場合には，この φ のことを $\varphi(x)$ のように書くことがある．この記法を使う場合は，例えば $\varphi(x)$ の x に y を代入してできる論理式 $\varphi(x)[x \rightsquigarrow y]$ を $\varphi(y)$ で表す．例えば先の例 $(\forall x\,(x \in y)) \land (x = z)$ を $\varphi(x)$ で表した場合には $\varphi(y)$ は $(\forall x\,(x \in y)) \land (y = z)$ である．

注意 12. より一般に自由変数 $x_1, \cdots, x_n$ を強調する場合は $\varphi(x_1, \cdots, x_n)$ のように書くが，特に断らない限りこの $\varphi(x_1, \cdots, x_n)$ には $x_1, \cdots, x_n$ 以外の自由変数が現れてもよいし，また $x_1, \cdots, x_n$ が現れなくてもよい．

定義. 以下の論理式を基本公理と呼ぶことにする．

(1) φ と ψ が論理式のとき $\varphi \to (\psi \to \varphi)$ は基本公理である．

(2) φ と ψ と χ が論理式のとき $[\varphi \to (\psi \to \chi)] \to [(\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi)]$ は基本公理である．

(3) φ と ψ が論理式のとき $(\neg\psi \to \neg\varphi) \to (\varphi \to \psi)$ は基本公理である．

(4) φ が論理式，x, y が変数記号で代入条件を満たしているとき $\forall x\,\varphi \to \varphi[x \rightsquigarrow y]$ は基本公理である．

(5) φ と ψ が論理式で x が変数記号，φ が x を自由変数として含まないとする．このとき $\forall x\,(\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \forall x\,\psi)$ は基本公理である．

(6) $\forall x\,(x = x)$ は基本公理である．

(7) $\forall x\,\forall y\,(x = y \to y = x)$ は基本公理である．

(8) $\forall x\,\forall y\,\forall z\,(x = y \to (y = z \to x = z))$ は基本公理である．

(9) $\forall x_0\,\forall x_1\,\forall y_0\,\forall y_1\,(x_0 = y_0 \to (x_1 = y_1 \to (x_0 \in x_1 \to y_0 \in y_1)))$ は基本公理である．

(6) から (9) は等号についての公理であり，これらをまとめて等号公理と呼ぶ．

論理式 φ と ψ が文字列として等しいことを $\varphi \equiv \psi$ で表すことにする (= は論理記号と

紛らわしいため使わず $\equiv$ を使う).

定義. φ, ψ, χ を論理式とする.

(1) φ が ψ から直ちに導かれる $\Longleftrightarrow$ ある変数記号 x が存在して $\varphi \equiv \forall x\, \psi$ となる.
(2) φ が ψ と χ から直ちに導かれる $\Longleftrightarrow$ $\chi \equiv \psi \to \varphi$ となる.

定義. T を論理式のメタ集合, φ を論理式とする. φ の T における形式的証明とは, 次の条件を満たす有限列 $\varphi_0, \cdots, \varphi_n$ のことをいう.

(1) 各番号 $i = 0, \cdots, n$ に対して φ_i は論理式である.
(2) $\varphi_n \equiv \varphi$ である.
(3) 各番号 $i = 0, \cdots, n$ に対して, 次のいずれかが成り立つ.
  - φ_i は基本公理である.
  - φ_i は T の元である.
  - ある番号 $j < i$ が存在して, φ_i は φ_j から直ちに導かれる.
  - ある番号 $j, k < i$ が存在して, φ_i は φ_j と φ_k から直ちに導かれる.

φ の T における形式的証明が存在することを $T \vdash \varphi$ で表し[*12], T で φ が証明可能という言い方をする. また T が $\{\psi_1, \cdots, \psi_n\}$ というメタ集合のときは $T \vdash \varphi$ のことを $\psi_1, \cdots, \psi_n \vdash \varphi$ と書く. また T が空集合のときは $T \vdash \varphi$ のことを $\vdash \varphi$ と書く.

つまり「直ちに導かれる」ことは自明であるとして認めた上で, 公理から直ちに導かれることだけを繋げて φ が得られたらそれを形式的証明という, というわけである.

注意 13. 基本公理と公理系を分けて導入しているのは, 基本公理はこの PDF においては公理系によらず常に仮定する公理となるからである. この基本公理の中には本質的に排中律が含まれているので, これはいわゆる古典論理と呼ばれるものになる. もちろんこの PDF ではこの基本公理を仮定するというだけの話であって, 基本公理をもっと弱くすることなども考えることができる.

注意 14. この PDF の最終的な目標である (1) は、結局は「ZF における形式的証明は存在しないことを証明する」ということである. つまり言い換えると, 数学基礎論が言っているのはあくまで「形式的証明が存在しないことが分かる」ということだけで

*12 記号 $\vdash$ はターンスタイルと呼ばれる. ターンスタイルというのは 1 人ずつでないと入出場できないゲートに使われている棒のことである. また後に出てくる $\models$ はダブルターンスタイルと呼ばれる.

あり，もしかしたら形式的証明にはなっていないような「天才的な証明」は存在するかもしれないということでもある．ところが多くの人は「普段の数学における証明」はここで定義した意味の形式的証明になっていると考えているようで，「ZF における形式的証明は存在しない」ことを持って「選択公理なしには証明できない」と言っている人が多いと思う．

これで〈証明〉が定義できた．例として $\mathsf{ZF} \vdash \exists y \forall x\,(x \notin y)$ であることを確かめてみよう (定理 47)．

注意 15. ここで，この $\exists y \forall x\,(x \notin y)$ という論理式は気持ちとしては「ある集合 y が存在して，任意の x に対して x は y の元ではない」という意味となる．つまりこれは「空集合が存在する」という意味であり，ZF では〈真〉である．ところがこれは注意 6 で書いた通り非公式な説明であり，実際には論理式はただの文字列である．すると何故この $\exists y \forall x\,(x \notin y)$ という「ただの文字列」が ZF において〈真〉ということになるかというと，(定理 47 で証明するように) ZF における形式的証明が構成できるからだ．このように ZF においては「φ が証明可能である」ということを「φ が成り立つ」「φ は真である」ということが多い．但し形式的証明というのは上の定義の通り，文字列の有限列で条件を満たしているものが存在するというだけであり，ここに〈意味〉は一切関わっていない．

〈意味〉に関する議論は第 4 節で〈モデル〉というものを使って行う．

そのために，まずは形式的証明に関する基本的なことを示していく．以下では φ, ψ, χ は論理式を表すメタ変数とする．

命題 16. 公理は証明可能である．即ち φ が T の元のとき $T \vdash \varphi$ となる．

証明. φ だけからなる長さ 1 の有限列が明らかにその形式的証明となる． □

命題 17. $\varphi \vdash \psi \to \varphi$ である．

証明.「φ，$\varphi \to (\psi \to \varphi)$，$\psi \to \varphi$」がその形式的証明である．実際

- φ はこの場合公理である．
- $\varphi \to (\psi \to \varphi)$ は基本公理である．
- $\psi \to \varphi$ は φ と $\varphi \to (\psi \to \varphi)$ から直ちに導かれる．

となり形式的証明の定義を満たす． □

命題 18. $\neg\varphi \vdash \varphi \to \psi$ である．

証明. 命題 17 と同様に

$$\neg\varphi,\ \neg\varphi \to (\neg\psi \to \neg\varphi),\ \neg\psi \to \neg\varphi,\ (\neg\psi \to \neg\varphi) \to (\varphi \to \psi),\ \varphi \to \psi \tag{19}$$

がその形式的証明である．実際 (19) の論理式を前から順に $\varphi_0, \cdots, \varphi_4$ とすると

- φ_0 は公理である．
- φ_1 は基本公理である．
- φ_2 は φ_0 と φ_1 から直ちに導かれる．
- φ_3 は基本公理である．
- φ_4 は φ_2 と φ_3 から直ちに導かれる．

となり形式的証明の定義を満たす． □

このように形式的証明であることを文章で説明すると分かりづらいため，形式的証明であることを表す記法を導入する．まず「φ が ψ から直ちに導かれること」を

$$\frac{\psi}{\varphi}\ \forall$$

と表す．また「φ が ψ と χ から直ちに導かれること」を

$$\frac{\psi \qquad \chi}{\varphi}\ \mathrm{MP}$$

と表す[*13]．この記法に従って $\neg\varphi \vdash \psi \to \varphi$ の形式的証明である (19) を配置すると

$$\dfrac{\dfrac{\neg\varphi \qquad \neg\varphi \to (\neg\psi \to \neg\varphi)}{\neg\psi \to \neg\varphi}\ \mathrm{MP} \qquad (\neg\psi \to \neg\varphi) \to (\varphi \to \psi)}{\varphi \to \psi}\ \mathrm{MP}$$

となり，形式的証明の定義を満たしていることが一目瞭然になる．このような表示を証明図という．つまり一般に $T \vdash \varphi$ を示すには，証明図であって

- 一番下が φ になっている．
- 一番上の部分は全て公理 (基本公理か T の元) になっている．

*13 MP は Modus Ponens の略．φ と $\varphi \to \psi$ から ψ を導くことをラテン語で Modus Ponens というらしい．

となるものを構成すればよいわけである．ただ形式的証明がある程度複雑になると，証明図は大きくなるので紙に書くのが困難になる．そこでより一般に $\varphi_1, \cdots, \varphi_n \vdash \varphi$ が成り立つことを

$$\frac{\varphi_1 \qquad \cdots \qquad \varphi_n}{\varphi}$$

と表すことにする．これにより，例えば $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \vdash \psi$ の形式的証明と $\varphi_1, \psi \vdash \chi$ の形式的証明が得られていたら，$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \vdash \chi$ の証明図を

$$\frac{\varphi_1 \qquad \dfrac{\varphi_1 \qquad \varphi_2 \qquad \varphi_3}{\psi}}{\chi}$$

と書くことができる．これは厳密な意味では証明図にはなっていないが，ここから厳密な意味での証明図が得られることは明らかであるから，これにより $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \vdash \chi$ の形式的証明が得られたとしてよい．

命題 20. $\varphi \to (\psi \to \chi) \vdash (\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi)$ である．

証明. $[\varphi \to (\psi \to \chi)] \to [(\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi)]$ が基本公理だから

$$\frac{\varphi \to (\psi \to \chi) \qquad [\varphi \to (\psi \to \chi)] \to [(\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi)]}{(\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi)}\ \mathrm{MP}$$

となる． □

命題 21. $\neg\psi \to \neg\varphi \vdash \varphi \to \psi$ である．

証明. $(\neg\psi \to \neg\varphi) \to (\varphi \to \psi)$ が基本公理だから

$$\frac{\neg\psi \to \neg\varphi \qquad (\neg\psi \to \neg\varphi) \to (\varphi \to \psi)}{\varphi \to \psi}\ \mathrm{MP}$$

となる． □

命題 22. $\forall x\, \varphi \vdash \varphi$ である．

証明. φ に自由変数としても束縛変数としても現れない変数記号を z とする[*14]と，明らかに $\varphi[x \rightsquigarrow z]$ という代入は代入条件 (注意 11) を満たしている．よって $\forall x\, \varphi \to \varphi[x \rightsquigarrow z]$ は基本公理である．また明らかに $(\varphi[x \rightsquigarrow z])[z \rightsquigarrow x]$ も代入条件を満たしていて，この代

[*14] φ は有限列であり変数記号は無限個あるからこのような z は必ず取ることができる．

入は元に戻るだけだから $(\varphi[x \rightsquigarrow z])[z \rightsquigarrow x] \equiv \varphi$ となる．つまり $\forall z\,(\varphi[x \rightsquigarrow z]) \to \varphi$ も基本公理であり

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x\,\varphi \qquad \forall x\,\varphi \to \varphi[x \rightsquigarrow z]}{\varphi[x \rightsquigarrow z]}\,\mathrm{MP}}{\forall z\,(\varphi[x \rightsquigarrow z])}\,\forall \qquad \forall z\,(\varphi[x \rightsquigarrow z]) \to \varphi}{\varphi}\,\mathrm{MP}$$

となる．[*15] □

命題 23. $\varphi \to \psi, \psi \to \chi \vdash \varphi \to \chi$ である．

証明. 次により成り立つ．

$$\dfrac{\varphi \to \psi \qquad \dfrac{\dfrac{\psi \to \chi}{\varphi \to (\psi \to \chi)}\,\text{命題 17}}{(\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi)}\,\text{命題 20}}{\varphi \to \chi}\,\mathrm{MP}$$

(注: 他の命題などを使ったことを明示するときは，このように横線の右側に書くことにする．) □

命題 24. $\vdash \varphi \to \varphi$ である．

証明. 基本公理 $\varphi \to (\psi \to \varphi)$ で ψ として φ を取れば $\varphi \to (\varphi \to \varphi)$ も基本公理である．同様に $\varphi \to \varphi$ を取れば $\varphi \to ((\varphi \to \varphi) \to \varphi)$ も基本公理である．故に

$$\dfrac{\varphi \to (\varphi \to \varphi) \qquad \dfrac{\varphi \to ((\varphi \to \varphi) \to \varphi)}{(\varphi \to (\varphi \to \varphi)) \to (\varphi \to \varphi)}\,\text{命題 20}}{\varphi \to \varphi}\,\mathrm{MP}$$

となる． □

命題 25. $\vdash \varphi \vee \neg\varphi$ である．

証明. $\vee$ の定義より $\vdash \neg\varphi \to \neg\varphi$ を示せばよいが，それは命題 24 から分かる． □

命題 26. $\varphi \to (\varphi \to \psi) \vdash \varphi \to \psi$ である．

証明. 次により成り立つ．

[*15] ここでは異なる文字 x, y は異なる変数記号を表すと約束していたから $\forall x\,\varphi \to \varphi[x \rightsquigarrow x]$ は基本公理ではないので，少し遠回りな証明になっている．初めから $\forall x\,\varphi \to \varphi[x \rightsquigarrow x]$ を基本公理として認めてもよいがこのように z を介せば証明できるからここではそうした．

$$\dfrac{\dfrac{}{\varphi \to \varphi}\ \text{命題 24} \qquad \dfrac{\varphi \to (\varphi \to \psi)}{(\varphi \to \varphi) \to (\varphi \to \psi)}\ \text{命題 20}}{\varphi \to \psi}\ \text{MP}$$

□

命題 27. $\varphi \to (\psi \to \chi) \vdash \psi \to (\varphi \to \chi)$ である．

証明. 次により成り立つ．

$$\dfrac{\overset{\text{基本公理}}{\psi \to (\varphi \to \psi)} \qquad \dfrac{\varphi \to (\psi \to \chi)}{(\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi)}\ \text{命題 20}}{\psi \to (\varphi \to \chi)}\ \text{命題 23}$$

(注: 基本公理であることを明示するときは上に書くことにする．) □

命題 28. φ が閉論理式のとき，$T \cup \{\varphi\} \vdash \psi$ ならば $T \vdash \varphi \to \psi$ である．

証明. $T \cup \{\varphi\} \vdash \psi$ が成り立つとして，その証明図を

$$\dfrac{\dfrac{\varphi_1}{\vdots} \qquad \dfrac{\varphi_n}{\vdots}}{\psi}$$

とする．この証明図の途中の部分

$$\frac{\chi_1 \qquad \cdots \qquad \chi_k}{\chi} \tag{29}$$

について考える．ここに現れる各論理式に $\varphi \to$ を付けて得られる

$$\frac{\varphi \to \chi_1 \qquad \cdots \qquad \varphi \to \chi_k}{\varphi \to \chi}$$

は証明図である．

$\because$) この (29) は「直ちに導かれる」を表すとしてよい．

(i) (29) が

$$\frac{\chi}{\forall x\, \chi}\ \forall$$

のとき．$\varphi \to$ を付けると

$$\frac{\varphi \to \chi}{\varphi \to \forall x\, \chi}$$

となる．これは

$$\dfrac{\dfrac{\varphi \to \chi}{\forall x\,(\varphi \to \chi)} \qquad \forall x\,(\varphi \to \chi) \to (\varphi \to \forall x\,\chi)}{\varphi \to \forall x\,\chi}\,\mathrm{MP}$$

により証明図となる (φ が閉論理式だから φ には x が自由変数として含まれないので，$\forall x\,(\varphi \to \chi) \to (\varphi \to \forall x\,\chi)$ が基本公理になることに注意).

(ii) (29) が

$$\dfrac{\chi \qquad \chi \to \chi'}{\chi'}\,\mathrm{MP}$$

のとき．$\varphi \to$ を付けると

$$\dfrac{\varphi \to \chi \qquad \varphi \to (\chi \to \chi')}{\varphi \to \chi'}$$

となる．これは

$$\dfrac{\varphi \to \chi \qquad \dfrac{\varphi \to (\chi \to \chi')}{(\varphi \to \chi) \to (\varphi \to \chi')}\,\text{命題 20}}{\varphi \to \chi'}\,\mathrm{MP}$$

により証明図となる．

従って

$$\dfrac{\begin{matrix}\dfrac{\varphi \to \varphi_1}{\vdots} & \qquad & \dfrac{\varphi \to \varphi_n}{\vdots}\end{matrix}}{\varphi \to \psi}$$

は証明図である．一番上の $\varphi \to \varphi_i$ について考える．

(a) $\varphi_i = \varphi$ のとき．この場合，命題 24 より $\vdash \varphi \to \varphi_i$ である．

(b) φ_i が T の元，または基本公理のとき．この場合，命題 17 より

$$\dfrac{\varphi_i}{\varphi \to \varphi_i}$$

となる．

(a)(b) を組み合わせれば $T \vdash \varphi \to \psi$ の証明図が得られる． □

命題 30. $T \cup \{\varphi\} \vdash \psi$ として，その証明図の途中に $\dfrac{\chi}{\forall x\,\chi}\,\forall$ が現れないとする．このとき $T \vdash \varphi \to \psi$ である．

証明. 命題 28 の (i) の部分が無くなるから証明がそのまま適用できる． □

命題 31. $\vdash \neg\varphi \to (\varphi \to \psi)$ である．

証明. 命題 18, 30 から明らか. □

命題 32. $\vdash \varphi \to \varphi \vee \psi$ である.

証明. $\vee$ の定義より $\vdash \varphi \to (\neg\varphi \to \psi)$ を示せばよい．それは

$$\dfrac{\dfrac{}{\neg\varphi \to (\varphi \to \psi)}\,\text{命題 31}}{\varphi \to (\neg\varphi \to \psi)}\,\text{命題 27}$$

から分かる. □

命題 33. $\vdash \psi \to \varphi \vee \psi$ である.

証明. $\vee$ の定義より $\psi \to (\neg\varphi \to \psi)$ となるが，これは基本公理である. □

命題 34. $\vdash \neg\neg\varphi \to \varphi$ である.

証明. 命題 30 と

$$\dfrac{\dfrac{}{\varphi \to \varphi}\,\text{命題 24} \qquad \dfrac{\dfrac{\neg\neg\varphi}{\neg\varphi \to \neg(\varphi \to \varphi)}\,\text{命題 18}}{(\varphi \to \varphi) \to \varphi}\,\text{命題 21}}{\varphi}\,\text{MP}$$

から $\vdash \neg\neg\varphi \to \varphi$ である. □

命題 35. $\vdash \varphi \to \neg\neg\varphi$ である.

証明. $\neg\varphi$ に命題 34 を適用することで，次のように証明できる.

$$\dfrac{\dfrac{}{\neg\neg\neg\varphi \to \neg\varphi}\,\text{命題 34}}{\varphi \to \neg\neg\varphi}\,\text{命題 21}$$

□

命題 36. $\varphi \to \psi \vdash \neg\psi \to \neg\varphi$ である.

証明. 次により成り立つ.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\neg\neg\varphi \to \varphi}\,\text{命題 34} \qquad \varphi \to \psi}{\neg\neg\varphi \to \psi}\,\text{命題 23} \qquad \dfrac{}{\psi \to \neg\neg\psi}\,\text{命題 35}}{\neg\neg\varphi \to \neg\neg\psi}\,\text{命題 23}}{\neg\psi \to \neg\varphi}\,\text{命題 21}$$

□

命題 37. $\vdash \varphi \land \psi \to \varphi$ である．

証明．$\land$ の定義より $\vdash \neg(\neg\varphi \lor \neg\psi) \to \varphi$ を示せばよい．それは

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\neg\varphi \to \neg\varphi \lor \neg\psi}\,\text{命題 32}}{\neg(\neg\varphi \lor \neg\psi) \to \neg\neg\varphi}\,\text{命題 21} \qquad \dfrac{}{\neg\neg\varphi \to \varphi}\,\text{命題 34}}{\neg(\neg\varphi \lor \neg\psi) \to \varphi}\,\text{命題 23}
$$

から分かる． □

命題 38. $\vdash \varphi \land \psi \to \psi$ である．

証明．命題 37 と同様で次のようにできる．

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\neg\psi \to \neg\varphi \lor \neg\psi}\,\text{命題 33}}{\neg(\neg\varphi \lor \neg\psi) \to \neg\neg\psi}\,\text{命題 21} \qquad \dfrac{}{\neg\neg\psi \to \psi}\,\text{命題 34}}{\neg(\neg\varphi \lor \neg\psi) \to \psi}\,\text{命題 23}
$$

□

命題 39. $\vdash (\varphi \to \neg\varphi) \to \neg\varphi$ である．

証明．証明可能な閉論理式 ψ を 1 つ取る．

$$
\dfrac{\psi \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\neg\neg\varphi \to \varphi}\,\text{命題 34} \qquad \dfrac{\dfrac{\varphi \to \neg\varphi \qquad \dfrac{}{\neg\varphi \to (\varphi \to \neg\psi)}\,\text{命題 31}}{\varphi \to (\varphi \to \neg\psi)}\,\text{命題 23}}{\varphi \to \neg\psi}\,\text{命題 26}}{\neg\neg\varphi \to \neg\psi}\,\text{命題 23}}{\psi \to \neg\varphi}\,\text{命題 21}}{\neg\varphi}\,\text{MP}
$$

だから命題 30 より $\psi \vdash (\varphi \to \neg\varphi) \to \neg\varphi$ である．今 $\vdash \psi$ だから $\vdash (\varphi \to \neg\varphi) \to \neg\varphi$ を得る． □

命題 40. $\varphi \to \chi, \psi \to \chi \vdash \varphi \lor \psi \to \chi$ である．

証明．まず

$$
\dfrac{\dfrac{\neg\chi \to \neg\neg\neg\chi \qquad \dfrac{}{(\neg\chi \to \neg\neg\neg\chi) \to \neg\neg\neg\chi}\,\text{命題 39}}{\neg\neg\chi}\,\text{MP} \qquad \dfrac{}{\neg\neg\chi \to \chi}\,\text{命題 34}}{\chi}\,\text{MP}
$$

より $\neg\chi \to \neg\neg\chi \vdash \chi$ である．よって $\varphi \lor \psi$ が $\neg\varphi \to \psi$ であることに注意すれば

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\varphi \to \chi$}
\RightLabel{命題 21}
\UnaryInfC{$\neg\chi \to \neg\varphi$}
\AxiomC{$\neg\varphi \to \psi$}
\AxiomC{$\psi \to \chi$}
\RightLabel{命題 23}
\BinaryInfC{$\neg\varphi \to \chi$}
\RightLabel{命題 23}
\BinaryInfC{$\neg\chi \to \chi$}
\RightLabel{命題 36}
\UnaryInfC{$\neg\chi \to \neg\neg\chi$}
\UnaryInfC{χ}
\end{prooftree}
$$

により $\varphi \to \chi, \psi \to \chi, \varphi \vee \psi \vdash \chi$ である．よって命題 30 より $\varphi \to \chi, \psi \to \chi \vdash \varphi \vee \psi \to \chi$ である． □

命題 41. $\chi \to \varphi, \chi \to \psi \vdash \chi \to \varphi \wedge \psi$ である．

証明. 次により成り立つ．

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\RightLabel{命題 35}
\UnaryInfC{$\chi \to \neg\neg\chi$}
\AxiomC{$\chi \to \varphi$}
\RightLabel{命題 36}
\UnaryInfC{$\neg\varphi \to \neg\chi$}
\AxiomC{$\chi \to \psi$}
\RightLabel{命題 36}
\UnaryInfC{$\neg\psi \to \neg\chi$}
\RightLabel{命題 40}
\BinaryInfC{$\neg\varphi \vee \neg\psi \to \neg\chi$}
\RightLabel{命題 36}
\UnaryInfC{$\neg\neg\chi \to \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$}
\RightLabel{命題 23}
\BinaryInfC{$\chi \to \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$}
\end{prooftree}
$$

□

命題 42. $\varphi, \psi \vdash \varphi \wedge \psi$ である．

証明. 命題 41 で χ として証明可能な閉論理式を取ればよい． □

命題 43. $\varphi \to \psi \vdash \forall x\, \varphi \to \forall x\, \psi$ である．

証明. 命題 22 で説明したように $\forall x\, \varphi \to \varphi$ は基本公理で，$\forall x\, \varphi$ は x を自由変数として含まないから

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{基本公理}
\noLine
\UnaryInfC{$\forall x\, \varphi \to \varphi$}
\AxiomC{$\varphi \to \psi$}
\RightLabel{命題 23}
\BinaryInfC{$\forall x\, \varphi \to \psi$}
\RightLabel{$\forall$}
\UnaryInfC{$\forall x\, (\forall x\, \varphi \to \psi)$}
\AxiomC{基本公理}
\noLine
\UnaryInfC{$\forall x\, (\forall x\, \varphi \to \psi) \to (\forall x\, \varphi \to \forall x\, \psi)$}
\RightLabel{MP}
\BinaryInfC{$\forall x\, \varphi \to \forall x\, \psi$}
\end{prooftree}
$$

である． □

命題 44. $\vdash \varphi \leftrightarrow \psi$ のとき $\vdash \neg\varphi \leftrightarrow \neg\psi$ である．

証明. 命題 36 から明らか． □

命題 45. $\vdash \varphi \leftrightarrow \psi$ のとき $\vdash \forall x\, \varphi \leftrightarrow \forall x\, \psi$ である．

証明. 命題 43 から明らか. □

命題 46. $\vdash \varphi \leftrightarrow \psi$ のとき $\vdash \exists x\,\varphi \leftrightarrow \exists x\,\psi$ である.

証明. 命題 44, 45 から明らか. □

定理 47. ZF $\vdash \exists y\,\forall x\,(x \notin y)$ が成り立つ.

証明. 論理式 $x \in y \leftrightarrow (x \in z \land x \neq x)$ を φ_0 と書く．まず $\vdash \varphi_0 \leftrightarrow x \notin y$ が成り立つ.

$\because$) $\vdash \varphi_0 \to x \notin y$ は次の証明図と命題 30 により分かる.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{\text{基本公理}}{\forall x\,(x = x)}}{x = x}\,\text{命題 22}}{x \notin z \lor x = x}\,\text{命題 33} \qquad \dfrac{\dfrac{\varphi_0}{x \in y \to (x \in z \land x \neq x)}\,\text{命題 37}}{(x \notin z \lor x = x) \to x \notin y}\,\text{命題 36}}{x \notin y}\,\text{MP}$$

逆は，まず命題 31 より $\vdash x \notin y \to (x \in y \to (x \in z \land x \neq x))$ である．次に

$$\dfrac{\dfrac{x = x \qquad \dfrac{}{x = x \to \neg(x \neq x)}\,\text{命題 35}}{\neg(x \neq x)}\,\text{MP} \qquad \dfrac{}{\neg(x \neq x) \to (x \neq x \to x \in y)}\,\text{命題 31}}{x \neq x \to x \in y}\,\text{MP}$$

だから

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{x \in z \land x \neq x \to x \neq x}\,\text{命題 37} \qquad \dfrac{\dfrac{\overset{\text{基本公理}}{\forall x\,(x = x)}}{x = x}\,\text{命題 22}}{x \neq x \to x \in y}}{(x \in z \land x \neq x) \to x \in y}\,\text{命題 23}}{x \notin y \to ((x \in z \land x \neq x) \to x \in y)}\,\text{命題 17}$$

により $\vdash x \notin y \to ((x \in z \land x \neq x) \to x \in y)$ である．よって命題 41 を使えば

$$\dfrac{\dfrac{}{x \notin y \to (x \in y \to (x \in z \land x \neq x))} \qquad \dfrac{}{x \notin y \to ((x \in z \land x \neq x) \to x \in y)}}{x \notin y \to \varphi_0}$$

である.

従って命題 45, 46 により $\vdash \exists y\,\forall x\,\varphi_0 \leftrightarrow \exists y\,\forall x\,(x \notin y)$ となる．ここで $\varphi \equiv x \neq x$ に対する内包性公理図式は

$$\forall z\,\exists y\,\forall x\,(x \in y \leftrightarrow x \in z \land x \neq x)$$

となり，これは $\forall z\,\exists y\,\forall x\,\varphi_0$ だから

$$\dfrac{\dfrac{\overset{\text{内包性公理図式}}{\forall z\,\exists y\,\forall x\,\varphi_0}}{\exists y\,\forall x\,\varphi_0}\,\text{命題 22} \qquad \dfrac{}{\exists y\,\forall x\,\varphi_0 \leftrightarrow \exists y\,\forall x\,(x \notin y)}}{\exists y\,\forall x\,(x \notin y)}$$

により ZF $\vdash \exists y\,\forall x\,(x \notin y)$ を得る． □

ここで $\exists x\,\varphi \land \forall x\forall z\,(\varphi \land \varphi[x \rightsquigarrow z] \to x = z)$ を $\exists! x\,\varphi$ と略記する．

> **注意 48.** これは一見怪しい略記である．というのも z としてどのような変数記号を使うかの指定がないので，人によって $\exists! x\,\varphi$ が表す論理式が異なってしまうからだ．ところが実はこれは問題にはならない．というのも例えば
>
> $$\varphi_0 \equiv \exists x\,\varphi \land \forall x\forall z\,(\varphi \land \varphi[x \rightsquigarrow y] \to x = z)$$
> $$\varphi_1 \equiv \exists x\,\varphi \land \forall x\forall w\,(\varphi \land \varphi[x \rightsquigarrow z] \to x = w)$$
>
> とすると $\vdash \varphi_0 \leftrightarrow \varphi_1$ となることが分かるので，$\exists! x\,\varphi$ として φ_0 と φ_1 のどちらを採用したとしても $T \vdash \exists! x\,\varphi$ かどうかには影響が出ないのである．

命題 49. ZF $\vdash \exists! y\,\forall x\,(x \notin y)$ が成り立つ．

証明. 定理 47 で存在は示したから ZF $\vdash [\forall x\,(x \notin y) \land \forall x\,(x \notin z)] \to y = z$ を示せばよい．外延性公理より ZF $\vdash [\forall x\,(x \in y \leftrightarrow x \in z)] \to y = z$ だから

$$\forall x\,(x \notin y) \land \forall x\,(x \notin z) \vdash \forall x\,(x \in y \leftrightarrow x \in z)$$

を示せばよい．それは次のように示せる．

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x\,(x \notin y) \land \forall x\,(x \notin z)}{\forall x\,(x \notin y)}\,\text{命題 37}}{x \notin y}\,\text{命題 22}}{x \notin z \to x \notin y}\,\text{命題 17}}{x \in y \to x \in z}\,\text{命題 21} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x\,(x \notin y) \land \forall x\,(x \notin z)}{\forall x\,(x \notin z)}\,\text{命題 38}}{x \notin z}\,\text{命題 22}}{x \notin y \to x \notin z}\,\text{命題 17}}{x \in z \to x \in y}\,\text{命題 21}}{\dfrac{x \in y \leftrightarrow x \in z}{\forall x\,(x \in y \leftrightarrow x \in z)}}\,\text{命題 42}$$

□

つまり ZF においては $\forall x\,(x \notin y)$ となるような y は唯 1 つ存在するから，それを空集合といって 0 で表すわけである[*16]．

[*16] 普通の数学では空集合は $\emptyset$ で表すことが多いが，集合論では 0 と書くことが多い．

このようなことは普通の数学ではよくやっているが，ZF という体系においてこのような処理はやっても良いのだろうか？ つまり，例えば $\exists x\,(x \neq 0)$ のような 0 を含む〈論理式〉を考えて $\mathsf{ZF} \vdash \exists x\,(x \neq 0)$ のようなことを考えても良いのだろうか？ これは良いのである．というのも，もし〈論理式〉の中に 0 が現れたら，それを 0 を使わない論理式に直すことは常に可能だからだ．例えば今回の $\exists x\,(x \neq 0)$ であれば，これは

$$\forall z\,(\forall x\,(x \notin z) \to \exists x\,(x \neq z))$$

とすればよい．つまり 0 を使った〈論理式〉はある種の略記であると考えればいいのである．

注意 50. ここで〈論理式〉と書いているのは，これは厳密には論理式になっていないからである．即ち 0 は使用可能文字ではないので「0 を含む論理式」というのはそもそも意味がない．なので 0 を使った〈論理式〉は略記であると考えるのであるが，ここで論理式の定義を拡張して，0 を使った〈論理式〉も認めるようなことも可能である (第 4 節を参照)．このような操作を「定義による拡大」といい，定義による拡大を行っても本質的には何も変わらないことが証明できる (定理 69).

より一般に $x_1, \cdots, x_n, y$ を変数記号として，これらの変数記号以外の自由変数を含まない論理式を φ とする．このとき $\mathsf{ZF} \vdash \forall x_1 \cdots \forall x_n\, \exists! y\, \varphi$ であれば，このような唯 1 つの y のことを $F(x_1, \cdots, x_n)$ と書いて〈論理式〉に使うことができる．これも F はある種の略記と考えるわけである．

最後に矛盾というものを導入しておく．

定義. 公理系 T が矛盾する $\iff$ ある閉論理式 φ が存在して $T \vdash \varphi \wedge \neg\varphi$ となる．

定理 51. T が矛盾するとき，任意の論理式 φ に対して $T \vdash \varphi$ である[*17].

証明. T が矛盾しているので，ある閉論理式 ψ が存在して $T \vdash \psi \wedge \neg\psi$ となる．このとき

$$\dfrac{\dfrac{T}{\psi \wedge \neg\psi} \qquad \dfrac{}{\psi \wedge \neg\psi \to \psi}\,\text{命題 37}}{\psi}\,\mathrm{MP}$$

となる．同様にして $T \vdash \neg\psi$ も分かる．よって任意の論理式 φ に対して

[*17] これを爆発律という．

$$\dfrac{\dfrac{T}{\psi} \qquad \dfrac{\dfrac{T}{\neg\psi} \qquad \dfrac{}{\neg\psi \to (\psi \to \varphi)}\,\text{命題 31}}{\psi \to \varphi}\,\text{MP}}{\varphi}\,\text{MP}$$

である． □

定理 52. $T \cup \{\varphi\}$ が矛盾するとき $T \vdash \neg\varphi$ である．

証明. 定理 51 より $T \cup \{\varphi\} \vdash \neg\varphi$ である．定理 51 の証明における ψ には，φ の自由変数が現れないようにできる．よって命題 28 の証明が適用できて $T \vdash \varphi \to \neg\varphi$ となる．故に

$$\dfrac{\dfrac{T}{\varphi \to \neg\varphi} \qquad \dfrac{}{(\varphi \to \neg\varphi) \to \neg\varphi}\,\text{命題 39}}{\neg\varphi}\,\text{MP}$$

□

系 53. $T \cup \{\neg\varphi\}$ が矛盾するとき $T \vdash \varphi$ である．

証明. $T \cup \{\neg\varphi\}$ が矛盾するとき定理 52 より $T \vdash \neg\neg\varphi$ である．よって命題 34 より $T \vdash \varphi$ となる． □

注意 54. 定理 52 と系 53 はいわゆる背理法である．普段の数学ではこの 2 つは区別しないが，排中律を仮定しないような数学では $\neg\neg\varphi \to \varphi$ が証明できないため，この 2 つは本質的に異なるものとなる．そのため，そのような立場の場合は系 53 のみを背理法と呼び，定理 52 は否定の導入と呼ぶ．

3 ZFC について

この節では ZFC の各公理についてもう少し詳しく解説する．

公理 0 (集合の存在)**.** $\exists x\,(x = x)$

実はこの公理は証明可能である．というもの一般に論理式 φ と代入条件を満たしている変数記号に対して

$$\dfrac{\dfrac{}{\varphi[x \rightsquigarrow y] \to \neg\neg\varphi[x \rightsquigarrow y]}\,\text{命題 35} \qquad \dfrac{\dfrac{\text{基本公理}}{\forall x\,\neg\varphi \to \neg\varphi[x \rightsquigarrow y]}}{\neg\neg\varphi[x \rightsquigarrow y] \to \neg\forall x\,\neg\varphi}\,\text{命題 21}}{\varphi[x \rightsquigarrow y] \to \neg\forall x\,\neg\varphi}\,\text{命題 23}$$

となるから基本公理 $\forall x\,\varphi \to \varphi[x \rightsquigarrow y]$ と合わせて $\vdash \forall x\,\varphi \to \neg\forall x\,\neg\varphi$ を得る．ここで φ として $x = x$ を取れば $\vdash \forall x\,(x = x) \to \exists x\,(x = x)$ が分かる．$\forall x\,(x = x)$ は基本公理だったから $\vdash \exists x\,(x = x)$ である．この PDF では [3] に合わせて，集合の存在も公理として載せている[*18]．

公理 1 (外延性公理)**.** $\forall x\,\forall y\,(\forall z\,(z \in x \leftrightarrow z \in y) \to x = y)$

これは気持ちとしては「集合は元により定まる」という意味の公理である．つまり普段の数学で集合に対する等号 $X = Y$ を示すために「$X \subset Y$ かつ $Y \subset X$」を示しているのは，実は外延性公理を使っているということである．

なお外延性公理における最後の $\to$ が $\leftrightarrow$ ではないのは，$\leftarrow$ は証明可能だからである．実際，$\forall x\,\varphi \to \varphi[x \rightsquigarrow y]$ と MP を繰り返し使うことで

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\text{基本公理}}{\forall x\,(x = x)}}{z = z} \qquad \dfrac{\dfrac{\text{基本公理}}{\forall x_0\,\forall x_1\,\forall y_0\,\forall y_1\,(x_0 = y_0 \to (x_1 = y_1 \to (x_0 \in x_1 \to y_0 \in y_1)))}}{z = z \to (x = y \to (z \in x \to z \in y))}}{x = y \to (z \in x \to z \in y)}\ \text{MP}$$

を得る．同様にして $\vdash y = x \to (z \in y \to z \in x)$ も成り立つから

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\text{基本公理}}{\forall x\,\forall y\,(x = y \to y = x)}}{x = y \to y = x} \qquad \dfrac{}{y = x \to (z \in y \to z \in x)}}{x = y \to (z \in y \to z \in x)}\ \text{命題 23}$$

となり命題 41 により $\vdash x = y \to (z \in x \leftrightarrow z \in y)$ である．よって基本公理 $\forall x\,(\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \forall x\,\psi)$ を使えば

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{x = y \to (z \in x \leftrightarrow z \in y)}}{\forall z\,(x = y \to (z \in x \leftrightarrow z \in y))}\ \forall}{x = y \to \forall z\,(z \in x \leftrightarrow z \in y)}}{\forall x\,\forall y\,(x = y \to \forall z\,(z \in x \leftrightarrow z \in y))}\ \forall$$

となる．

公理 2 (基礎の公理)**.** $\forall x\,[\exists y\,(y \in x) \to \exists y\,(y \in x \land \neg\exists z\,(z \in x \land z \in y))]$

---

*18 [3] にも「この公理は導出できるので冗長なだけかもしれないが，念のため公理として表明している」と記載がある．

この公理については後で説明する．

公理 3 (内包性公理図式)**.** φ が論理式で y を自由変数として含まないとき

$$\forall z\,\exists y\,\forall x\,(x \in y \leftrightarrow x \in z \land \varphi)$$

の全称閉包を公理とする．

この公理はこれまでの公理と少し違うことに注意する．というのも，これは論理式 φ が 1 つ与えられるごとに公理が 1 つ定まるのである．つまり内包性公理というのは無限個あることになる (この意味で，この公理には内包性公理図式というように「図式」という言葉が付いている)．これを

$$\forall\varphi\,[\forall z\,\exists y\,\forall x\,(x \in y \leftrightarrow x \in z \land \varphi)]$$

のようにして 1 つの公理としてまとめることは出来ないことに注意．φ はメタ数学の変数であるから，これに $\forall$ を付けて ZFC の中で扱うことはできないのである．

内包性公理図式により得られる集合 y は，外延性公理により唯 1 つであることが証明できる．そこでこの y を $\{x \in z \mid \varphi\}$ と書く．このようなことをしてもよいのは第 2 節の最後に述べた通りである．

公理 4 (対の公理)**.** $\forall x\,\forall y\,\exists z\,(x \in z \land y \in z)$

これは気持ちとしては「x, y に対して集合 $\{x, y\}$ が存在する」という意味の公理である．但し，実際の対の公理はこれよりも弱い形になっていることに注意しよう．何故これで問題ないかというと，それは内包性公理図式があるからである．x, y に対して，対の公理により存在する z を取る．この z と論理式 $v = x \lor v = y$ に内包性公理図式を適用することで $\{v \in z \mid v = x \lor v = y\}$ が得られるので，これを $\{x, y\}$ と書き x と y の非順序対という．また $\{x\} := \{x, x\}$ と書く．

これを使うと順序対を $\langle x, y\rangle := \{\{x\}, \{x, y\}\}$ により定義することができる．

公理 5 (和集合公理)**.** $\forall \mathcal{F}\,\exists A\,\forall Y\,\forall x\,(x \in Y \land Y \in \mathcal{F} \to x \in A)$

これは気持ちとしては「集合の集合 $\mathcal{F}$ に対して和集合 $\bigcup_{Y \in \mathcal{F}} Y$ が存在する」という意味の公理である．但しこれも対の公理と同じく，弱い形になっており実際の和集合は内包性公理図式により得られる．つまり $\mathcal{F}$ に対して，和集合公理により存在する A を取り

$$\bigcup \mathcal{F} := \{x \in A \mid \exists Y \in \mathcal{F}\,(x \in Y)\}$$

を $\mathcal{F}$ の和集合と呼ぶわけである．

公理 6 (置換公理図式). φ が論理式で Y を自由変数として含まないとき

$$\forall A\,(\forall x \in A\,\exists! y\,\varphi \to \exists Y\,\forall x \in A\,\exists y \in Y\,\varphi)$$

の全称閉包を公理とする.

これは気持ちとしては「f を関数とするとき集合 $\{f(x) \mid x \in A\}$ が存在する」という意味の公理図式である. これも内包性公理図式と組み合わせて使用する.

置換公理図式を使うと 2 つの集合 A, B の直積集合 $A \times B$ を定義することができる. まず $y \in B$ に対して

$$\mathsf{ZF}^- \vdash \forall x \in A\,\exists! z\,(z = \langle x, y\rangle)$$

だから置換公理図式と内包性公理図式を使って $\mathrm{prod}(A, y) := \{\langle x, y\rangle \mid x \in A\}$ と定める. 次に

$$\mathsf{ZF}^- \vdash \forall y \in B\,\exists! z\,(z = \mathrm{prod}(A, y))$$

だから $\mathrm{prod}'(A, B) := \{\mathrm{prod}(A, y) \mid y \in B\}$ と定める. これに和集合公理を使って

$$A \times B := \bigcup \mathrm{prod}'(A, B)$$

と定義する. こうして直積集合が定義できたので, 普段の数学と同じように n 項関係, 順序集合, 整列順序集合, 関数, 単射, 全射, 全単射などが定義できる.

公理 7 (無限公理). $\exists x\,(0 \in x \land \forall y \in x\,(S(y) \in x))$

この公理について説明するため, 次の定義をする.

定義. $S(x)$ で $x \cup \{x\}$ を表す.

つまり無限公理はこの S と 0 を使った略記をしている論理式である. この略記を使わず正式な論理式に直すことは容易であろう. このとき次のように定義する[*19].

定義. x が推移的 $\iff \forall y\,\forall z\,((y \in x \land z \in y) \to z \in x)$.

定義. x が順序数 $\iff$ (x が推移的) $\land$ ($\langle x, \in\rangle$ が整列順序集合).

> **注意 55.** この定義は「x が推移的」や「x が順序数」は 1 つの論理式を表すという意味である. (ここでは「$\langle x, \in\rangle$ が整列順序集合」という論理式を定義していないが, これを定義することは容易であろう.)

[*19] これは要するに順序数の話である. 順序数については詳しくは「順序数入門」の PDF [1] を参照

命題 56. $\mathsf{ZF}^- \vdash (\alpha$ が順序数 $) \to (S(\alpha)$ が順序数 $)$. □

定義. α が後続型順序数 $\iff (\alpha$ が順序数 $) \land \exists\beta\,(\beta$ は順序数 $\land\ \alpha = S(\beta))$.

定義. x が自然数 $\iff x = 0 \lor (x$ が後続型順序数 $\land\ \forall\alpha \in x\,(\alpha = 0 \lor \alpha$ は後続型順序数 $))$

命題 57. 無限公理により存在する x を取ると $\mathsf{ZF}^- \vdash \forall n\,(n$ が自然数 $\to n \in x)$. □

つまり気持ちとしては，無限公理は「自然数全体の集合が存在する」という意味の公理である．これも弱い形の公理になっているので，内包性公理図式を使って次のように定義する．

定義. 無限公理により存在する x を使って $\omega := \{n \in x \mid n$ は自然数 $\}$ と定義する．

公理 8 (冪集合公理)**.** $\forall x\,\exists y\,\forall z\,(z \subset x \to z \in y)$

これは「冪集合が存在する」という公理である．ここで $z \subset x$ は $\forall y\,(y \in z \to y \in x)$ の略記である。これも弱い形の公理なので次のように定義する．

定義. 冪集合公理により存在する y を使って $\mathcal{P}(x) := \{z \in y \mid z \subset x\}$ と定義する．

以上の公理を使うことで，ω から通常通り $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ などを定義することができる．更に関数 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ やその連続性，微分可能性を通常通り定義することができるから微積分学などを展開することができる．このように普段やっているような数学は大抵行うことができると分かり，集合しか考えないとしても問題無いわけである．

公理 9 (選択公理)**.** $\forall A\,\exists R\,(R$ は A を整列順序づけする $)$

これはいわゆる整列可能定理というものである．良く知られている通りこれは選択公理と同値だから，これを公理として採用しても問題ない．ここに書いた通り整列可能定理は(本来の選択公理よりも) 記述がシンプルになるので，こうすると公理の記述がシンプルになるというメリットがある．

最後に，基礎の公理について説明する．この公理をわざわざ ZFC に含めているということは，これは有用なのであるが，では何に使うのかと聞かれると少し答えるのが難しい．というのは，この公理は普段数学をする上ではほぼ使わない公理だからである．では何故基礎の公理があるのかというと，これがあると集合論の細かい議論をする上で便利だからである．

例えば基礎の公理があると次の命題が成り立つ.

命題 58. $\mathsf{ZF} \vdash \forall x\,(x \notin x)$.

証明. まず基礎の公理とは

$$\forall x\,[\exists y\,(y \in x) \to \exists y\,(y \in x \land \neg\exists z\,(z \in x \land z \in y))]$$

であった. よって基本公理 $\forall x\,\varphi \to \varphi[x \rightsquigarrow \{x\}]$ を使うことで

$$\mathsf{ZFC} \vdash \exists y\,(y \in \{x\}) \to \exists y\,(y \in \{x\} \land \neg\exists z\,(z \in \{x\} \land z \in y))$$

を得る. 明らかに $\mathsf{ZFC} \vdash \exists y\,(y \in \{x\})$ なので

$$\mathsf{ZFC} \vdash \exists y\,(y \in \{x\} \land \neg\exists z\,(z \in \{x\} \land z \in y))$$

となる. $y \in \{x\}$ となるのは $y = x$ のときであるから

$$\mathsf{ZFC} \vdash \forall x\,(x \notin x)$$

が分かる. □

つまり基礎の公理があると, $x \in x$ となるような「変な」集合は存在しないことが証明できる. 更に詳しく, 次のような説明もできる. まず順序数 α に対して集合 $R(\alpha)$ を

$$R(\alpha) := \begin{cases} 0 & (\alpha = 0) \\ \mathcal{P}(R(\beta)) & (\alpha = \beta + 1) \\ \bigcup\{R(\beta) \mid \beta < \alpha\} & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

により定める.

定理 59. $\mathsf{ZF}^- \vdash (\text{基礎の公理}) \leftrightarrow \forall x\,\exists\alpha\,(\alpha\text{ は順序数} \land x \in R(\alpha))$.

証明. 省略. □

つまり基礎の公理とは $R(\alpha)$ に入らないような「変な」集合は存在しないという意味の公理になる. このことを使うと, 基礎の公理の下では集合の rank というものを定義することができる.

定義. $\mathrm{rank}(x) := \min\{\alpha \mid \alpha\text{ は順序数} \land x \in R(\alpha + 1)\}$ と定める.

rank は順序数である. よって ZF においては「任意の x に対して○○である」という定理を証明するときに「$\mathrm{rank}(x)$ に関する超限帰納法」を使うことができるのである.

4　より一般の公理系について

第 2 節では ZFC を定義するためだけに論理式を定義したが，この定義をより一般化することで様々な公理系も同じように扱うことができる．例えば

$$\forall x\,\forall y\,\forall z\,((x\cdot y)\cdot z = x\cdot(y\cdot z))$$
$$\forall x\,(x\cdot e = x \land e\cdot x = x)$$
$$\forall x\,(x\cdot x^{-1} = e \land x^{-1}\cdot x = e)$$

を群の公理といい，群の公理では $\forall x\,\forall y\,(x\cdot y = y\cdot x)$ は証明できない，という主張をしたりすることができるようになる．この群の公理では，第 2 節の論理式とは異なり，2 項演算 $\cdot$ や定数記号 e のようなものが現れるのでそのままでは論理式として扱うことができない．そこでこういうものも扱うことができる，より一般の論理式[*20]を定義するために「言語」と「項」というものを導入する．

定義. 関数記号と呼ばれる記号と，関係記号と呼ばれる記号からなるメタ集合 L を言語という．但し，L の元にはアリティと呼ばれる自然数が定まっているものとする．[*21]

定義. L を言語とする．L-項とは，以下により定まるものをいう．

(1) 変数記号は L-項である．
(2) $f\in L$ がアリティ n の関数記号で $t_1,\cdots,t_n$ が L-項のとき，$f(t_1,\cdots,t_n)$ も L-項である．
(3) 以上により得られるもののみが L-項である．

また変数記号が現れない L-項を L-閉項という．

$f\in L$ がアリティ 0 の関数記号のとき，定義から f 自身が L-項になる．なのでアリティ 0 の関数記号のことを定数記号と呼ぶことがある．

定義. L を言語とする．L-論理式とは，以下により定まるものをいう．

(1) t_1,t_2 が L-項のとき，$t_1 = t_2$ は L-論理式である．

---

*20 ここで定義するのは 1 階述語論理と呼ばれるものであり，更に一般化した高階述語論理と呼ばれるものも存在する．

*21 以下で登場する例では言語 L は全て有限集合になっているが，L は無限集合でもよい．

(2) $R \in L$ がアリティ n の関係記号で $t_1, \cdots, t_n$ が L-項のとき，$R(t_1, \cdots, t_n)$ は L-論理式である．

(3) φ が L-論理式のとき $\neg(\varphi)$ も L-論理式である．

(4) φ と ψ が L-論理式のとき $(\varphi) \to (\psi)$ も L-論理式である．

(5) φ が L-論理式で x が変数記号のとき $\forall x\,(\varphi)$ も L-論理式である．

(6) 以上により得られるもののみが L-論理式である．

また自由変数が現れない L-論理式を L-閉論理式という．

定義． L-閉論理式のメタ集合を L-公理系という．

例 60. $L_{\mathsf{ZFC}} := \{\in\}$ を集合論の言語という (ここで $\in$ はアリティ 2 の関係記号とする)．この場合は関数記号がないので，L_{ZFC}-項とは変数記号のことである．よって L_{ZFC}-論理式とは第 2 節で定義した論理式のことである． □

例 61. $L_{\mathrm{Grp}} := \{\cdot, e, i\}$ を群論の言語という (ここで $\cdot$ はアリティ 2 の関数記号，e はアリティ 0 の関数記号，i はアリティ 1 の関数記号とする)．x, y を変数記号として，普段の数学でもやるように $\cdot(x, y)$ を $x \cdot y$ のように書くことにすると

$$x, \quad x \cdot y, \quad (x \cdot y) \cdot x, \quad e, \quad e \cdot e, \quad i(e), \quad x \cdot (i(y) \cdot e)$$

などが L_{Grp}-項の例である．このうち L_{Grp}-閉項は $e, e \cdot e, i(e)$ である．

3 つの L_{Grp}-論理式 $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2$ をそれぞれ

$$\begin{aligned}
&\forall x\,\forall y\,\forall z\,((x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)) \\
&\forall x\,(x \cdot e = x \land e \cdot x = x) \\
&\forall x\,(x \cdot i(x) = e \land i(x) \cdot x = e)
\end{aligned}$$

としたとき，L_{Grp}-公理系 $T_{\mathrm{Grp}} := \{\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2\}$ を群論という． □

注意 62. ここでは群論の言語として $L_{\mathrm{Grp}} = \{\cdot, e, i\}$ を採用したが，普通は群は 2 項演算 $\cdot$ のみを使って定義することが多いかもしれない．そのようにしたい場合は，言語を $L := \{\cdot\}$ として L-公理系 $T := \{\varphi_3, \varphi_4\}$ を

$$\begin{aligned}
\varphi_3 &\equiv \forall x\,\forall y\,\forall z\,((x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)) \\
\varphi_4 &\equiv \exists u\,[\forall x\,(x \cdot u = x \land u \cdot x = x) \land \forall x\,\exists y\,(x \cdot y = u \land y \cdot x = u)]
\end{aligned}$$

により定めればよい．

L-論理式の形式的証明についても第 2 節と同様に定義できる (省略).

通常の群論においては，公理系 T_{Grp} を直接扱うのではなくて〈群〉と呼ばれる「T_{Grp} を満たす集合」を扱う．一般の公理系において，この〈群〉に相当するものをモデルという．

定義. L を言語とする．L-構造とは (メタ数学における) 2 つ組 $\mathcal{M} = \langle M, F\rangle$ であって以下の条件をみたすものをいう．

(1) M は空でないメタ集合である[*22].
(2) F は L を定義域とする関数である．以下 $\alpha \in L$ に対して $\alpha^{\mathcal{M}} := F(\alpha)$ と書く．
(3) $R \in L$ がアリティ n の関係記号のとき，$R^{\mathcal{M}}$ は M 上の n 項関係である．
(4) $f \in L$ がアリティ 0 の関数記号のとき，$f^{\mathcal{M}}$ は M の元である．
(5) $f \in L$ がアリティ $n > 0$ の関数記号のとき，$f^{\mathcal{M}}$ は関数 $f\colon M^n \to M$ である．

つまり言語が与えられたとき，それで表せるような〈構造〉のことを L-構造というのである．L-構造というのは単に〈構造〉が与えられているだけであって，これが与えられた公理を満たすかどうかというのは全く考慮されていない．そこで「L-構造が公理を満たす」ということを定義する．

定義. L を言語，$\mathcal{M} = \langle M, F\rangle$ を L-構造とする．このとき $a \in M$ に対して新しい関数記号 c_a (アリティは 0 とする) を用意して $L(\mathcal{M}) := L \cup \{c_a \mid a \in M\}$ と定める．

この $L(\mathcal{M})$ も言語である．このとき $\mathcal{M}$ は $c_a^{\mathcal{M}} := a$ と定めることで $L(\mathcal{M})$-構造になる．

定義. L を言語，$\mathcal{M} = \langle M, F\rangle$ を L-構造とする．このとき $L(\mathcal{M})$-閉項 t に対して M の元 $t^{\mathcal{M}}$ を次のように定義する．

(1) $t \equiv f$ がアリティ 0 の関数記号のとき $t^{\mathcal{M}} := f^{\mathcal{M}}$ とする．
(2) $t \equiv f(t_1, \cdots, t_n)$ で $n > 0$ のとき $t^{\mathcal{M}} := f^{\mathcal{M}}(t_1^{\mathcal{M}}, \cdots, t_n^{\mathcal{M}})$ とする．

定義. L を言語，$\mathcal{M}$ を L-構造，φ を $L(\mathcal{M})$-閉論理式とする．このとき $\mathcal{M} \models \varphi$ を以下により定義する．

(1) $\mathcal{M} \models t_1 = t_2$ は $t_1^{\mathcal{M}} = t_2^{\mathcal{M}}$ を意味する．

[*22] 普段の数学では空な〈構造〉を認めることもあるが，ここでは空な L-構造は認めないことにする．これは空な L-構造に対しては一部の定理が成り立たないからである．[4]II.8.16 を参照.

(2) R がアリティ n の関係記号のとき，$\mathcal{M} \models R(t_1, \cdots, t_n)$ は $\langle t_1^{\mathcal{M}}, \cdots, t_n^{\mathcal{M}} \rangle \in R^{\mathcal{M}}$ を意味する．

(3) $\mathcal{M} \models \neg\varphi$ は「$\mathcal{M} \models \varphi$ でない」を意味する．

(4) $\mathcal{M} \models \varphi \to \psi$ は「$\mathcal{M} \models \varphi$ ならば $\mathcal{M} \models \psi$」を意味する．

(5) $\mathcal{M} \models \forall x\, \varphi$ は「任意の $a \in M$ に対して $\mathcal{M} \models \varphi[x \rightsquigarrow c_a]$ となる」を意味する．

また φ が閉でない L-論理式のときは，全称閉包 $\varphi^{\forall}$ を使って $\mathcal{M} \models \varphi \iff \mathcal{M} \models \varphi^{\forall}$ と定義する．

定義. L を言語，T を L-公理系とするとき

$$L\text{-構造 } \mathcal{M} \text{ が } T \text{ のモデル} \iff \text{任意の } \varphi \in T \text{ に対して } \mathcal{M} \models \varphi \text{ となる．}$$

$\mathcal{M}$ が T のモデルであることを記号で $\mathcal{M} \models T$ と書く．

例 **63.** 例 61 の L_{Grp} を考える．L_{Grp}-構造とは

$$\text{メタ集合 } M\text{，関数 } \cdot^{\mathcal{M}} \colon M \times M \to M\text{，元 } e^{\mathcal{M}} \in M\text{，関数 } i^{\mathcal{M}} \colon M \to M$$

の 4 つ組 $\mathcal{M} = \langle M, \cdot^{\mathcal{M}}, e^{\mathcal{M}}, i^{\mathcal{M}} \rangle$ のことである．このとき $\mathcal{M} \models \varphi_0$ とは

$$\text{任意の } a, b, c \in M \text{ に対して } (a \cdot^{\mathcal{M}} b) \cdot^{\mathcal{M}} c = a \cdot^{\mathcal{M}} (b \cdot^{\mathcal{M}} c) \text{ が成り立つ}$$

ということである．同様にして $\mathcal{M} \models \varphi_1$ は

$$\text{任意の } a \in M \text{ に対して } a \cdot^{\mathcal{M}} e^{\mathcal{M}} = a \text{ かつ } e^{\mathcal{M}} \cdot^{\mathcal{M}} a = a \text{ が成り立つ}$$

であり $\mathcal{M} \models \varphi_2$ は

$$\text{任意の } a \in M \text{ に対して } a \cdot^{\mathcal{M}} i^{\mathcal{M}}(a) = e^{\mathcal{M}} \text{ かつ } i^{\mathcal{M}}(a) \cdot^{\mathcal{M}} a = e^{\mathcal{M}} \text{ が成り立つ}$$

ということである．即ち $\mathcal{M}$ が T_{Grp} のモデルであるとは $\langle M, \cdot^{\mathcal{M}}, e^{\mathcal{M}}, i^{\mathcal{M}} \rangle$ が群であるということである． $\square$

モデルについて重要な定理が健全性定理，完全性定理，コンパクト性定理である．

定義. T を L-公理系，φ を L-論理式とするとき

$$T \models \varphi \iff \mathcal{M} \text{ が } T \text{ のモデルならば } \mathcal{M} \models \varphi \text{ である．}$$

定理 64 (健全性定理)**.** T を L-公理系，φ を L-論理式とするとき，$T \vdash \varphi$ ならば $T \models \varphi$

である．

証明. $T \vdash \varphi$ かつ $\mathcal{M} \models T$ とする．$\mathcal{M} \models \varphi$ を示せばよい．まず $T \vdash \varphi$ だから，その証明図を

$$\dfrac{\dfrac{\varphi_1}{\vdots} \qquad \dfrac{\varphi_n}{\vdots}}{\varphi}$$

とする．この証明図の途中の部分

$$\frac{\chi_1 \qquad \cdots \qquad \chi_k}{\chi} \tag{65}$$

を取る．このとき $\mathcal{M} \models \chi_1$，$\cdots$，$\mathcal{M} \models \chi_k$ ならば $\mathcal{M} \models \chi$ である．

$\because$) この (65) は「直ちに導かれる」を表すとしてよい．

(i) (65) が

$$\frac{\chi}{\forall x\, \chi}$$

のとき．定義より $\mathcal{M} \models \chi$ は $\mathcal{M} \models \forall x\, \chi$ を意味しているからこの場合は明らかに成り立つ．

(ii) (65) が

$$\frac{\chi \qquad \chi \to \chi'}{\chi'}\,\mathrm{MP}$$

のとき．定義より $\mathcal{M} \models \chi \to \chi'$ とは「$\mathcal{M} \models \chi$ ならば $\mathcal{M} \models \chi'$」ということである．よって $\mathcal{M} \models \chi$ かつ $\mathcal{M} \models \chi \to \chi'$ ならば $\mathcal{M} \models \chi'$ である．

故に $\mathcal{M} \models \varphi_1$，$\cdots$，$\mathcal{M} \models \varphi_n$ ならば $\mathcal{M} \models \varphi$ であることが分かる．今 $\mathcal{M} \models T$ なので $\mathcal{M} \models \varphi_1$，$\cdots$，$\mathcal{M} \models \varphi_n$ が成り立つから $\mathcal{M} \models \varphi$ が分かった． □

定理 66 (完全性定理)**.** T を L-公理系，φ を L-論理式とするとき，$T \models \varphi$ ならば $T \vdash \varphi$ である．

証明. 省略 ([5] を参照). □

$T \vdash \varphi$ というのは φ の形式的証明が存在するという意味であり，ここには〈文字の意味〉というのは一切現れていない．一方で $T \models \varphi$ というのは φ を $\mathcal{M}$ というモデルで解釈したらどうなるか，という形で〈文字の意味〉を考えるものである．つまりこの健全性

定理と完全性定理というのは，形式的証明を考えることと〈意味〉を考えることはある意味で等しいという定理である．

例 67. 群の公理から可換性 $(\forall x\,\forall y\,(x \cdot y = y \cdot x))$ は証明できない．

証明. 証明できる (即ち $T_{\mathrm{Grp}} \vdash \forall x\,\forall y\,(x \cdot y = y \cdot x)$) と仮定する．健全性定理 (定理 64) により

$$T_{\mathrm{Grp}} \models \forall x\,\forall y\,(x \cdot y = y \cdot x)$$

である．即ち $\mathcal{M}$ を任意の群 ($= T_{\mathrm{Grp}}$ のモデル) とすると $\mathcal{M} \models \forall x\,\forall y\,(x \cdot y = y \cdot x)$ となる．これは「任意の $a, b \in M$ に対して $a \cdot^{\mathcal{M}} b = b \cdot^{\mathcal{M}} a$」を意味する．ところがこれを満たさない群は存在するから，これは矛盾である． $\square$

定理 68. L-公理系 T に対して

$$T \text{ のモデル } \mathcal{M} \text{ が存在する} \iff T \text{ は無矛盾である．}$$

証明. ($\Longrightarrow$) $\mathcal{M} \models T$ かつ T が矛盾すると仮定する．T が矛盾するから $T \vdash \varphi \land \neg\varphi$ となる L-閉論理式 φ が取れる．健全性定理 (定理 64) により $\mathcal{M} \models \varphi \land \neg\varphi$ である．定義によりこれは「$\mathcal{M} \models \varphi$ かつ $\mathcal{M} \models \neg\varphi$」ということであるが，$\mathcal{M} \models \neg\varphi$ とは「$\mathcal{M} \models \varphi$ でない」ということだからこれは (メタ数学において) 矛盾する．従って (メタ数学における背理法により) T は無矛盾である．

($\Longleftarrow$) 対偶を示す．そのために T のモデルが存在しないとする．この場合，定義より任意の L-論理式 φ に対して $T \models \varphi$ である．そこで φ として $\varphi \land \neg\varphi$ を取れば $T \models \varphi \land \neg\varphi$ となるから，完全性定理により $T \vdash \varphi \land \neg\varphi$ となり T は矛盾する． $\square$

このようにモデルを使うことで，証明できないことや矛盾しないことを証明することができる．

また第 2 節の最後で述べたようなことも L-論理式を使うことで正当化できる．まず L を言語，T を L-公理系，$\theta(x_1, \cdots, x_n, y)$ を L-論理式とする．この $\theta(x_1, \cdots, x_n, y)$ は $x_1, \cdots, x_n, y$ のみを自由変数として持つとして

$$T \vdash \forall x_1 \cdots \forall x_n\, \exists! y\, \theta(x_1, \cdots, x_n, y)$$

となるとき，L に含まれない新しい関数記号 f を用意して $L' := L \cup \{f\}$ と定める (f のアリティは n とする)．このとき L-論理式は明らかに L'-論理式であるから T は L'-公理系とみなすことができる．この T に閉論理式

$$\forall x_1 \cdots \forall x_n \forall y\, [f(x_1, \cdots, x_n) = y \leftrightarrow \theta(x_1, \cdots, x_n, y)]$$

を加えてできる L'-公理系を T' とする．この T' を T の定義による拡大という．

定理 69. T' を T の定義による拡大とする．

(1) φ を L-閉論理式とするとき $T \vdash \varphi$ と $T' \vdash \varphi$ は同値である．

(2) t を L'-項とするとき, ある L-論理式 $\zeta_t(x)$ が存在して $T \vdash \exists! x\, \zeta_t(x)$ かつ $T' \vdash \zeta_t(t)$ となる．

(3) ψ を L'-論理式とするとき，ある L-論理式 φ が存在して $T' \vdash \psi \leftrightarrow \varphi$ となる．

証明. (1) $T \subset T'$ だから $T \vdash \varphi$ ならば $T' \vdash \varphi$ である．逆を示すため $T' \vdash \varphi$ かつ $T \nvdash \varphi$ と仮定する．L-構造 $\mathcal{M}$ で $\mathcal{M} \models T$ かつ $\mathcal{M} \models \neg\varphi$ となるものが存在する．

$\because$) 完全性定理 (定理 66) により $T \not\models \varphi$ である．即ち L-構造 $\mathcal{M}$ で $\mathcal{M} \models T$ かつ $\mathcal{M} \not\models \varphi$ となるものが存在する．このとき $\models$ の定義より $\mathcal{M} \models \neg\varphi$ である．

今 $T \vdash \forall x_1 \cdots \forall x_n\, \exists! y\, \theta(x_1, \cdots, x_n, y)$ だから $\mathcal{M} \models \forall x_1 \cdots \forall x_n\, \exists! y\, \theta(x_1, \cdots, x_n, y)$ である．即ち

$$a_1, \cdots, a_n \in M \text{ に対して } b \in M \text{ が一意に存在して } \mathcal{M} \models \theta(a_1, \cdots, a_n, b)$$

となる．これを使って関数 $f^{\mathcal{M}}\colon M^n \to M$ を $f^{\mathcal{M}}(a_1, \cdots, a_n) := b$ で定義する．この $f^{\mathcal{M}}$ により $\mathcal{M}$ を L'-構造とみなす．すると明らかに

$$\mathcal{M} \models \forall x_1 \cdots \forall x_n \forall y\, [f(x_1, \cdots, x_n) = y \leftrightarrow \theta(x_1, \cdots, x_n, y)]$$

である．よって $\mathcal{M} \models T'$ となる．今 $T' \vdash \varphi$ だったから健全性定理 (定理 64) により $\mathcal{M} \models \varphi$ である．ところが $\mathcal{M} \models \neg\varphi$ だったからこれは (メタ数学における) 矛盾である．

(2) L'-項 t の構成に関する帰納法.

- $t \equiv y$ で y が変数記号のとき．$\zeta_t(x) \equiv x = y$ と定めればよい.
- $t \equiv g(t_1, \cdots, t_n)$ で $g \in L$ が関数記号のとき.

$$\zeta_t(x) \equiv \exists x_1 \cdots \exists x_n\, [g(x_1, \cdots, x_n) = x \wedge \zeta_{t_1}(x_1) \wedge \cdots \wedge \zeta_{t_n}(x_n)]$$

  と定めればよい.
- $t \equiv f(t_1, \cdots, t_n)$ のとき.

$$\zeta_t(x) \equiv \exists x_1 \cdots \exists x_n\, [\theta(x_1, \cdots, x_n, x) \wedge \zeta_{t_1}(x_1) \wedge \cdots \wedge \zeta_{t_n}(x_n)]$$

  と定めればよい.

(3) L'-論理式 ψ の構成に関する帰納法.

- $\psi \equiv R(t_1, \cdots, t_n)$ で R が関係記号のとき．(2) の $\zeta_{t_i}(x)$ を取り

$$\varphi \equiv \exists x_1 \cdots \exists x_n \, [R(x_1, \cdots, x_n) \wedge \zeta_{t_1}(x_1) \wedge \cdots \wedge \zeta_{t_n}(x_n)]$$

  と定めればよい.
- $\psi \equiv t_1 = t_2$ のとき．$R(t_1, \cdots, t_n)$ の場合と同様.
- $\psi \equiv \neg\psi'$ のとき．帰納法の仮定から L-論理式 φ' が存在して $T' \vdash \psi' \leftrightarrow \varphi'$ となる．このとき命題 44 から $T' \vdash \psi \leftrightarrow \neg\varphi'$ である.
- $\psi \equiv \psi' \to \psi''$ のとき．帰納法の仮定から L-論理式 φ', φ'' が存在して $T' \vdash \psi' \leftrightarrow \varphi'$ かつ $T' \vdash \psi'' \leftrightarrow \varphi''$ となる．このとき $T' \dashv \psi \leftrightarrow (\varphi' \to \varphi'')$ である.
- $\psi \equiv \forall x \, \psi'$ のとき．帰納法の仮定から L-論理式 φ' が存在して $T' \vdash \psi' \leftrightarrow \varphi'$ となる．このとき命題 45 から $T' \vdash \psi \leftrightarrow \forall x \, \varphi'$ である. □

定理 70 (コンパクト性定理)**.** T を L-公理系として，次の条件を満たすとする.

任意の有限部分集合 $T_0 \subset T$ に対して T_0 のモデルが存在する.

このとき T のモデルも存在する.

証明. 定理 68 より T が無矛盾であることを示せばよい．そこで T が矛盾するとする．即ち $T_0 \vdash \varphi \wedge \neg\varphi$ となるような L-閉論理式 φ と有限部分集合 $T_0 \subset T$ が存在する．ところが今 T_0 のモデルが存在するから定理 68 より T_0 は無矛盾なはずであり矛盾する. □

定義. $L_{\mathsf{PA}} := \{0, S, +, \cdot\}$ とする (これらは全て関数記号で，アリティはそれぞれ $0, 1, 2, 2$ とする)．このときペアノ算術 PA とは，以下の論理式の全称閉包からなる L_{PA}-公理系のことである.

(1) $S(x) = S(y) \to x = y$
(2) $S(x) \neq 0$
(3) $x + 0 = x$
(4) $x + S(y) = S(x + y)$
(5) $x \cdot 0 = 0$
(6) $x \cdot S(y) = x \cdot y + x$
(7) $\varphi(x)$ が論理式のとき，$(\varphi(0) \wedge \forall x \, [\varphi(x) \to \varphi(S(x))]) \to \forall x \, \varphi(x)$

例 71. 自然数全体のメタ集合 $\mathbb{N}$ は自然な方法で PA のモデルとなる．これを PA の標

準モデルという．標準モデルでないモデルを超準モデルという．PA の超準モデルは存在する．

証明. まず $x < y$ で L_{PA}-論理式 $\exists z\,(y = x + S(z))$ を表すことにする．

定数記号 c を付け加えた言語 $L := L_{\mathsf{PA}} \cup \{c\}$ を考える．メタ自然数 n に対して L-論理式

$$S^n(0) < c \quad (\text{但し } S^n(0) \text{ は } 0 \text{ に } S \text{ を } n \text{ 回適用した } L\text{-閉項 } S(\cdots S(0)\cdots) \text{ を表す})$$

を φ_n と書く．L-公理系 $T := \mathsf{PA} \cup \{\varphi_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ を考えると，任意の有限部分集合 $T_0 \subset T$ はモデルを持つ．よってコンパクト性定理により T はモデル $\mathcal{M} = \langle M, F\rangle$ を持つ．このとき $\mathcal{M}$ は PA のモデルとみなすこともできる．ここで M には元 $c^{\mathcal{M}} \in M$ が存在するが，この元は「任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $c^{\mathcal{M}} > n$」を満たす．この条件を満たす元は $\mathbb{N}$ には存在しないから，$\mathcal{M}$ は PA の超準モデルである． □

5　選択公理について

この PDF で紹介したような数学基礎論においても，選択公理は登場する．というのも第 4 節で登場した完全性定理やコンパクト性定理は実は証明に選択公理を使うことが知られている[*23]．またここでは紹介しないが Löwenheim-Skolem の定理という定理があり，実はこの定理は選択公理と同値であることが知られている．

これはどういうことだろうか

これはいくつか考え方がある．1 つはメタ数学で普通に選択公理を使っているということである．そんなことしていいのか？ と思う人もいるかもしれないが，メタ数学というのは「我々が普段やってる数学」であり，この「我々が普段やってる数学」で選択公理を使ったとして問題があると考える人は少ないであろう．つまり普段の数学と同じノリでメタ数学において選択公理を使った結果，完全性定理などが証明できたということである．この考え方はあまり厳密でないと感じる人もいるかもしれないし，もしくは「選択公理は間違っている！」と思う人にとっては間違った議論をしている，ということになる．

もう 1 つはメタ数学は ZFC であるとする考え方である．どういうことかというと，まず第 2 節でやったように ZFC を定義する．すると第 3 節までで見た通り，この ZFC の中では普段の数学でやっているようなことは可能である．特に，第 4 節でやったような数学

[*23] 完全な選択公理でなく，BPI (Boolean Prime Ideal Theorem) があれば良いことが知られている．何故ならばこれらの定理は ZF において BPI と同値になるからである．

を ZFC の中で実行することは可能である．つまり ZFC の中で言語 L や L-論理式，L-公理系などを定義することができる．すると完全性定理は ZFC における論理式として書くことができる．それを φ とすると，実は ZF $\nvdash \varphi$ かつ ZFC $\vdash \varphi$ であることが知られているのである．同じように Löwenheim-Skolem の定理を論理式で書いたものを ψ とすると ZF $\vdash \mathrm{AC} \leftrightarrow \psi$ であることが知られている．

この場合 L-論理式から見たメタ数学は ZFC であり「我々が普段やってる数学」は〈メタメタ数学〉とでもいうべきものになっている．

6 集合とは限らない集まりについて

(この節は今後もっと詳しく書く．)

初めに説明した通り ZFC は集合のみを扱う公理系である．つまり何か変数記号 x が出てきたら，これは必ず集合を表す．ところが数学では，集合ではないような〈集まり〉を扱いたいことがたまにある．例えば「全ての集合の集まり」「全ての順序数の集まり」「全ての基数の集まり」「全ての群の集まり」「全ての位相空間の集まり」のような〈集まり〉である．この節ではこのような〈集まり〉を扱う方法を説明する．

まずそのためにクラスというものを定義する．

定義. $\varphi(x)$ を論理式とするとき「$\varphi(x)$ を満たす x 全体の集まり」を $\{x \mid \varphi(x)\}$ で表しクラスという．

例 72. $\varphi(x)$ として $x = x$ を取ったときのクラス $\{x \mid x = x\}$ を $\mathbf{V}$ と書く．任意の x に対して $x = x$ は成り立つから，$\mathbf{V}$ は「全ての集合を集めたクラス」となる． □

例 73. 「x は順序数」を意味する論理式を $\varphi_{\mathrm{ord}}(x)$ としたときのクラス $\{x \mid \varphi_{\mathrm{ord}}(x)\}$ を ON で表す．つまり ON は「順序数全体のクラス」である． □

例 74. 「x は基数」を意味する論理式を $\varphi_{\mathrm{card}}(x)$ とする．つまり $\varphi_{\mathrm{card}}(x)$ は

$$x \text{ は順序数} \land \forall y \in x\,(|y| < |x|)$$

という論理式である．このときのクラス $\{x \mid \varphi_{\mathrm{card}}(x)\}$ を Card で表す．つまり Card は「基数全体のクラス」である． □

このクラスというのはある意味で非公式なものであり，クラスある種の略記法であると

考える．例えば

$$\forall x\,\exists\alpha\in\mathrm{ON}\,(|x|=|\alpha|)$$

というのは

$$\forall x\,\exists\alpha\,(\varphi_{\mathrm{ord}}(\alpha)\land|x|=|\alpha|)$$

の略記だということになる．つまりクラスという表記は実際には無くても良いのだが，クラスを使うと分かりやすくなることがあるので導入されている言葉である．

クラスの間の関数にあたるものも考えることができる．これは論理式 $\varphi(x,y)$ が $\forall x\in\mathbf{M}\,\exists!y\in\mathbf{N}\,\varphi(x,y)$ を満たしていればこの φ が関数 $F\colon\mathbf{M}\to\mathbf{N}$ を与えているとみなすのである．このとき例えば F が単射とは

$$\forall x_0\in\mathbf{M}\,\forall x_1\in\mathbf{M}\,\forall y\,(\varphi(x_0,y)\land\varphi(x_1,y)\to x_0=x_1)$$

ということであり，F が全射とは

$$\forall y\in\mathbf{N}\,\forall x\in\mathbf{M}\,\varphi(x,y)$$

ということである．このように考えると

- 単射 $F\colon\mathbf{M}\to a$ が存在すれば $\mathbf{M}$ は集合である．
- 全射 $F\colon a\to\mathbf{M}$ が存在すれば $\mathbf{M}$ は集合である．

が内包性公理図式と置換公理から簡単に分かる．

例 75. $\alpha\mapsto\omega_\alpha$ は $\mathrm{ON}\to\mathrm{Card}$ を与えるが，これは単射である．ON が集合でないことはよく知られているので Card も集合ではない． □

例 76. 「位相空間全体のクラス」$\mathbf{Top}$ は集合ではない．というのも集合 x に対して，x に離散位相を入れた空間を $F(x)$ とすれば単射 $F\colon\mathbf{V}\to\mathbf{Top}$ が得られるからである． □

7 ZF のモデル

例 67 で，モデルを考えることで「証明できないことが証明できる」ことを見た．この論法を ZF に適用しよう，というのが「選択公理なしには証明できないこと」の証明のアイデアである．例えば ZF のモデル $\mathcal{M}$ で

$$\mathcal{M}\models\neg(\text{Hahn-Banach の定理})$$

となるものを構成できれば ZF $\vdash$ (Hahn-Banach の定理) でないこと，つまり「Hahn-Banach の定理は選択公理なしには証明できない」ことが証明できそうである．実はこれは上手くいかない．というのも ZF のモデル $\mathcal{M}$ は構成できないことが知られているからである[*24]．

そこで集合論のクラスモデルというものを導入する．

定義. $\mathbf{M}$ をクラス，φ を論理式とする．論理式 $\varphi^{\mathbf{M}}$ を以下により定義する．

(1) $(x = y)^{\mathbf{M}}$ は $x = y$ を表すとする．
(2) $(x \in y)^{\mathbf{M}}$ は $x \in y$ を表すとする．
(3) $(\neg\varphi)^{\mathbf{M}}$ は $\neg(\varphi^{\mathbf{M}})$ を表すとする．
(4) $(\varphi \to \psi)^{\mathbf{M}}$ は $(\varphi^{\mathbf{M}}) \to (\psi^{\mathbf{M}})$ を表すとする．
(5) $(\forall x\, \varphi)^{\mathbf{M}}$ は $\forall x \in \mathbf{M}\, (\varphi^{\mathbf{M}})$ を表すとする．

補題 77. $\varphi_1, \cdots, \varphi_n, \psi$ を閉論理式として $\varphi_1, \cdots, \varphi_n \vdash \psi$ とする．このときクラス $\mathbf{M}$ に対して $\varphi_1^{\mathbf{M}}, \cdots, \varphi_n^{\mathbf{M}} \vdash \psi^{\mathbf{M}}$ である．

証明. $\varphi_1, \cdots, \varphi_n \vdash \psi$ が成り立つとして，その証明図を

$$\dfrac{\dfrac{\varphi_1}{\vdots} \qquad \dfrac{\varphi_n}{\vdots}}{\psi}$$

とする．この証明図の途中の部分

$$\frac{\chi_1 \qquad \cdots \qquad \chi_k}{\chi} \tag{78}$$

について考える．これを $\mathbf{M}$ の中で考えた

$$\frac{\chi_1^{\mathbf{M}} \qquad \cdots \qquad \chi_k^{\mathbf{M}}}{\chi^{\mathbf{M}}}$$

は証明可能である．

$\because$) この (78) は「直ちに導かれる」を表すとしてよい．

(i) (78) が

$$\frac{\chi}{\forall x\, \chi}\,\forall$$

[*24] これはいわゆる不完全性定理から得られる帰結である．不完全性定理は難しいのでここでは扱わない．

のとき．これを $\mathbf{M}$ の中で考えると

$$\frac{\chi^{\mathbf{M}}}{\forall x \in \mathbf{M}\,(\chi^{\mathbf{M}})}$$

となる．これは

$$\cfrac{\cfrac{\chi^{\mathbf{M}}}{x \in \mathbf{M} \to \chi^{\mathbf{M}}}\ \text{命題 17}}{\forall x\,(x \in \mathbf{M} \to \chi^{\mathbf{M}})}\ \forall$$

により証明図である．

(ii) (78) が

$$\frac{\chi \qquad \chi \to \xi}{\xi}\ \mathrm{MP}$$

のとき．これを $\mathbf{M}$ の中で考えると

$$\frac{\chi^{\mathbf{M}} \qquad \chi^{\mathbf{M}} \to \xi^{\mathbf{M}}}{\xi^{\mathbf{M}}}$$

となるから明らか．

従って $\varphi_1^{\mathbf{M}}, \cdots, \varphi_n^{\mathbf{M}} \vdash \psi^{\mathbf{M}}$ の証明図が得られる． □

定義. $\mathbf{M}$ をクラス，T を公理系とする．$\mathbf{M}$ が T のモデルである ($\mathbf{M} \models T$ で表す) $\Longleftrightarrow$ 任意の $\varphi \in T$ に対して $\varphi^{\mathbf{M}}$ が証明可能である．

補題 79. T, S を公理系，$\mathbf{M}$ をクラスとする．T において $\mathbf{M} \neq 0$ と $\mathbf{M} \models S$ が証明できるとする．このとき T が無矛盾ならば S も無矛盾である．

証明. S が矛盾しているとする．即ちある閉論理式 φ が存在して $S \vdash \varphi \wedge \neg\varphi$ となる．証明に現れる論理式は有限個だから, ある $\varphi_1, \cdots, \varphi_n \in S$ が存在して $\varphi_1, \cdots, \varphi_n \vdash \varphi \wedge \neg\varphi$ とできる．このとき補題 77 より $\varphi_1^{\mathbf{M}}, \cdots, \varphi_n^{\mathbf{M}} \vdash \varphi^{\mathbf{M}} \wedge \neg\varphi^{\mathbf{M}}$ である．仮定より $\mathbf{M} \models S$ を T で証明できるから，つまり $T \vdash \varphi_1^{\mathbf{M}}$, $\cdots$, $T \vdash \varphi_n^{\mathbf{M}}$ となる．よって補題 77 により $T \vdash \varphi^{\mathbf{M}} \wedge \neg\varphi^{\mathbf{M}}$ となり T が矛盾する． □

定理 80. $\mathbf{M} := \{0\}$ とすると ZF^- で以下が証明できる．

$\mathbf{M}$ が「外延性公理 + 内包性公理図式 $+\forall x\,(x = 0)$」のモデルである．

証明. (外延性公理)$^{\mathbf{M}}$ は

$$\forall x \in \mathbf{M}\, \forall y \in \mathbf{M}\, (\forall z \in \mathbf{M}\, (z \in x \leftrightarrow z \in y) \to x = y)$$

ということであり，これは明らかに ZF$^-$ で証明できる．次に 0 の部分集合は 0 のみだから，(内包性公理)$^{\mathbf{M}}$ も ZF$^-$ で証明できる．最後に $(\forall x\, (x = 0))^{\mathbf{M}}$ は $\forall x \in \mathbf{M}\, (x = 0)$ だから，これも証明できる． □

系 81. ZF$^-$ が無矛盾ならば「外延性公理 + 内包性公理図式 $+\forall x\, (x = 0)$」も無矛盾である．

証明. 前定理と補題 79 から分かる． □

系 82. ZF$^-$ が無矛盾ならば，外延性公理と内包性公理図式から $\exists x\, (x \neq 0)$ は証明できない． □

このようにクラスを使うことで証明できないことが証明できる．但しこの方法では「ZF$^-$ が無矛盾ならば」というような仮定が付いてしまうが，多くの読者は ZF$^-$ は無矛盾であると思っているだろうから，この仮定は問題ないであろう．(このような T が無矛盾ならば S も無矛盾である，というような主張を「相対的無矛盾性」という．)

定義. クラス $\mathbf{M}$ が推移的 $\iff (x \in \mathbf{M} \wedge y \in x) \to y \in \mathbf{M}$.

定義. 推移的クラス $\mathbf{M}$ が almost universal $\iff \forall x \subset \mathbf{M}\, \exists y \in \mathbf{M}\, (x \subset y)$.

定義. 以下の関数 $F_1, \cdots, F_8$ を Gödel operation という．

$$\begin{aligned}
F_1(x, y) &:= \{x, y\} \\
F_2(x, y) &:= x \setminus y \\
F_3(x, y) &:= x \times y \\
F_4(x) &:= \mathrm{dom}(x) \\
F_5(x) &:= \{\langle a, b \rangle \in x^2 \mid a \in b\} \\
F_6(x) &:= \{\langle a, b, c \rangle \mid \langle b, c, a \rangle \in x\} \\
F_7(x) &:= \{\langle a, b, c \rangle \mid \langle c, b, a \rangle \in x\} \\
F_8(x) &:= \{\langle a, b, c \rangle \mid \langle a, c, b \rangle \in x\}
\end{aligned}$$

定理 83. $\mathbf{M}$ が almost universal な推移的クラスで Gödel operation で閉じているならば $\mathbf{M} \models$ ZF である．

証明. 省略 ([6] を参照). □

$\mathbf{WF} := \bigcup\{R(\alpha) \mid \alpha \in \mathrm{ON}\}$ と定義する．これは $\mathbf{WF} = \{x \mid \exists\alpha \in \mathrm{ON}\,(x \in R(\alpha))\}$ という意味である．

定理 84. ZF$^-$ において $\mathbf{WF} \models$ ZF である． □

系 85. ZF$^-$ が無矛盾ならば ZF も無矛盾である． □

集合 x を部分集合にもつ，Gödel operation で閉じている最小の集合を $\mathrm{cl}(x)$ と書くことにする．このとき順序数 α に対して集合 $L(\alpha)$ を

$$L(\alpha) := \begin{cases} 0 & (\alpha = 0) \\ \mathcal{P}(L(\beta)) \cap [\mathrm{cl}(L(\beta) \cup \{L(\beta)\})] & (\alpha = \beta + 1) \\ \bigcup\{L(\beta) \mid \beta < \alpha\} & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

と定めて $\mathbf{L} := \bigcup\{L(\alpha) \mid \alpha \in \mathrm{ON}\}$ と定義する．$\mathbf{L}$ を構成可能宇宙という．

定理 86. ZF において $\mathbf{L} \models$ ZFC が証明できる．

証明. $\mathbf{L}$ は推移的かつ almost universal で，かつ Gödel operation で閉じている．よって定理 83 より $\mathbf{L} \models$ ZF である．また $\mathbf{L}$ が整列可能であることが分かるので $\mathbf{L} \models$ ZFC となる． □

系 87. ZF が無矛盾ならば ZFC も無矛盾である． □

これは選択公理を仮定することの正当性を与えている．つまり，もし選択公理を仮定したことで矛盾が発生してしまったとすれば，それはそもそも ZF が矛盾していたということであり，選択公理に罪はないわけである．

また定理 52 より次の系が成り立つ．

系 88. ZF が無矛盾ならば ZF $\nvdash \neg\mathrm{AC}$ である． □

定理 89. ZF において $\mathbf{L} \models \mathrm{CH}$ が証明できる．

証明. 省略 ([3] を参照). □

系 90. ZFC が無矛盾ならば ZFC $+ \mathrm{CH}$ も無矛盾である． □

系 91. ZFC が無矛盾ならば ZFC $\nvdash \neg\mathrm{CH}$ である． □

さて，この調子で $\mathbf{M} \models$ ZF $+ \neg$(Hahn-Banach の定理) となるようなクラス $\mathbf{M}$ を ZF

において定義することで「ZF が無矛盾ならば ZF $\nvdash$ (Hahn-Banach の定理) である」が証明できそうであるが，実はこの方針ではうまくいかない．というのも，このようなクラス $\mathbf{M}$ を直接定義することはできないからである．そこで必要になってくるのが強制法という方法である．これについては「permutation モデル」や「symmetric モデル」の PDF で解説する．

参考文献

[1] alg-d, 順序数入門，`https://alg-d.com/math/`

[2] 前原昭二,『数学基礎論入門』，朝倉書店，1977

[3] ケネス・キューネン，『集合論-独立性証明への案内』，藤田博司訳, 日本評論社, 2008

[4] ケネス・キューネン，『キューネン数学基礎論講義』，藤田博司訳, 日本評論社, 2016

[5] 新井敏康,『数学基礎論』，岩波書店，2011

[6] Thomas J. Jech, the Axiom of Choice, Dover, 2008

[7] 江田勝哉,『数理論理学』，内田老鶴圃，2010

この PDF を書くのに主に参考にしたのは [2], [4], [5] である．書いた結果，初めに読む本は [4] が良いのではないかと感じた．[2] は (集合論ではなく) 自然数論を扱った入門書であるが，不完全性定理の証明まで書いてある本である．[3] は数学基礎論というよりは集合論の本であり，後の PDF で解説する強制法についての標準的な教科書である．[6] は選択公理に焦点を当てた数学基礎論の本であり，特に選択公理に興味のある読者にはオススメである．