整列可能定理と選択公理

alg-d
http://alg-d.com/math/ac/

2012 年 8 月 5 日

定理 1. 次の命題は (ZF 上) 同値.

1. 選択公理
2. 任意の集合は整列可能 (整列可能定理).
3. 任意の集合 X に対して，ある順序数 α と全単射 $X \longrightarrow \alpha$ が存在する.
4. 任意の集合 X に対して，ある順序数 α と全射 $\alpha \longrightarrow X$ が存在する.
5. 任意の集合 X に対して，ある順序数 α と単射 $X \longrightarrow \alpha$ が存在する.

証明. $1 \iff 2$ は整列可能定理と Zorn の補題で示した.

$(2 \implies 3)$ 整列可能定理により X の整列順序 $\leq$ が存在する．順序数の性質により，ある順序数 α と順序同型 $f\colon (X, \leq) \longrightarrow \alpha$ が存在する．$f\colon X \longrightarrow \alpha$ は勿論全単射である.

$(3 \implies 4)$ 明らか.

$(4 \implies 5)$ 全射 $f\colon \alpha \longrightarrow X$ に対して $g\colon X \longrightarrow \alpha$ を $g(x) := \min f^{-1}(x)$ で定めれば g は明らかに単射である.

$(5 \implies 2)$ 単射 $X \longrightarrow \alpha$ により $X \subset \alpha$ とみなすことにより X は整列集合である． □

定理 2. 整列可能定理 $\iff$ 選択関数を持つ集合は整列可能

証明. $\implies$ は明らか．$\impliedby$ を示す．任意の集合 X に対し $Y := \{\{x\} \mid x \in X\}$ と置けば，Y は明らかに選択関数を持つ．故に Y は整列可能．よって明らかに X も整列可能． □

定理 3. 整列可能定理
$\iff$「X が有限集合 $\iff$ $(X, \leq)$ が整列順序ならば $(X, \geq)$ も整列順序」

証明. $(\implies)$ 「X が有限集合 $\implies$ $(X, \leq)$ が整列順序ならば $(X, \geq)$ も整列順序」は明らか．逆を示すため，X が「$(X, \leq)$ が整列順序ならば $(X, \geq)$ も整列順序」を満たすとす

る．整列可能定理より整列順序 $(X,\leq)$ が存在する．$(X,\leq)\cong\alpha$ となる順序数 $(\alpha,\leq)$ が存在する．$(X,\geq)$ の整列性より $(\alpha,\geq)$ も整列順序．故に $\alpha\cap\omega\subset\alpha$ は ($\geq$ に関する) 最小元，即ち ($\leq$ に関する) 最大元 β を持つ．$\omega\leq\alpha$ のとき $\alpha\cap\omega=\omega$ は最大元を持たないから，$\alpha<\omega$ でなければならない．即ち X は有限集合．

($\Longleftarrow$) 整列できない無限集合 X が存在すると仮定する．この X は明らかに「$(X,\leq)$ が整列順序ならば $(X,\geq)$ も整列順序」を満たす．よって仮定に矛盾．故に任意の集合は整列可能である． □

定理 4. 次の命題は (ZF 上) 同値.

1. 整列可能定理
2. 任意の全順序集合は整列可能.
3. 集合 X が整列可能ならば冪集合 $\mathcal{P}(X)$ も整列可能.
4. 順序数 α に対して $\mathcal{P}(\alpha)$ も整列可能.

証明. ($1\Longrightarrow 2$) 明らか.

($2\Longrightarrow 3$) $(X,\leq)$ を整列順序集合とする．$\mathcal{P}(X)$ の二項関係 $\lhd$ を

$$A\lhd B\iff \text{ある } a\in A\setminus B \text{ が存在して任意の } b\in B\setminus A \text{ に対して } a<b$$

で定め，$A\unlhd B\iff$「$A\lhd B$ または $A=B$」とする．このとき $(\mathcal{P}(X),\unlhd)$ は全順序集合になる.

$\because$) (i) $A\not\lhd A$ である.
これは $A\setminus A=\emptyset$ なので明らか

(ii) $A\lhd B\Longrightarrow B\not\lhd A$ である.
実際，$A\lhd B$ とすると $<$ の定義よりある $a_0\in A\setminus B$ が存在して「任意の $b\in B\setminus A$ に対して $a_0<b$」となる．よって「任意の $a\in A\setminus B$ に対して $b<a$」となる $b\in B\setminus A$ は存在しない．即ち $B\not\lhd A$ である.

(iii) $A\lhd B$ または $A=B$ または $B\lhd A$ である.
実際，$A\neq B$ とすると，X は整列順序集合だから $a:=\min\bigl((A\setminus B)\cup(B\setminus A)\bigr)$ が存在する．勿論 $a\in A$ または $a\in B$ であるが，明らかに $a\in A$ ならば $A\lhd B$ で，$a\in B$ ならば $B\lhd A$ である.

(iv) $(A\lhd B$ かつ $B\lhd C)\Longrightarrow A\lhd C$ である.
$A\not\lhd C$ と仮定する．$A=C$ だとすると $A\lhd B$ かつ $B\lhd A$ となり (ii) に反するので

$A \neq C$ である．故に (iii) から $C \lhd A$ である．$A \lhd B,\ B \lhd C,\ C \lhd A$ より

$$\text{任意の } b \in B \setminus A \text{ に対して } a_0 < b \tag{1}$$
$$\text{任意の } c \in C \setminus B \text{ に対して } b_0 < c \tag{2}$$
$$\text{任意の } a \in A \setminus C \text{ に対して } c_0 < a \tag{3}$$

を満たす $a_0 \in A \setminus B,\ b_0 \in B \setminus C,\ c_0 \in C \setminus A$ が存在する．$a_0 \in A \setminus C$ である．

$\because$) $a_0 \notin A \setminus C$ と仮定する．即ち $a_0 \in A^c \cup C$ である．$a_0 \in A \setminus B$ だったから $a_0 \in (A^c \cup C) \cap (A \setminus B) = A \cap C \setminus B \subset C \setminus B$ である．よって (2) により $b_0 < a_0$ である．従って (1) から $b_0 \notin B \setminus A$ でなければならない．すると同様の議論を繰り返して $a_0 < c_0 < b_0 < a_0$ が導かれ，矛盾する．

同様にして $b_0 \in B \setminus A$, $c_0 \in C \setminus B$ である．従って (1)(2)(3) から $a_0 < b_0 < c_0 < a_0$ となり，矛盾する．故に $A \lhd C$ である．

よって仮定 2 より $\mathcal{P}(X)$ は整列可能である．

$(3 \implies 4)$ 明らか．

$(4 \implies 1)$ X を任意の集合とすると (基礎の公理により) 順序数 α が存在して $X \subset R(\alpha)$ となる．

※ 基礎の公理とは ZF に含まれる公理の 1 つで「$x \neq \emptyset \implies \exists y \in x (x \cap y = \emptyset)$」を表す．また，順序数 α に対し $R(\alpha)$ は

$$R(\alpha) := \begin{cases} \emptyset & (\alpha = 0 \text{ の時}) \\ \mathcal{P}(R(\beta)) & (\alpha = \beta + 1 \text{ の時}) \\ \bigcup_{\beta < \alpha} R(\beta) & (\alpha \text{が極限順序数の時}) \end{cases}$$

と定義される．このとき「ZF から基礎の公理を除いた公理系」の元で

$$\text{基礎の公理} \iff \text{任意の集合 } x \text{ に対してある順序数} \alpha \text{が存在して } x \in R(\alpha)$$

である．また集合 x に対して $\rho(x) := \min\{\alpha \mid x \in R(\alpha + 1)\}$ と定義し，これを x の階数 (rank) という．

故に $R(\alpha)$ が整列可能であることを示せばよい．$|\lambda| \not\leq |R(\alpha)|$ となるような順序数 λ が存在するので，そのような λ を一つとっておく．仮定 4 により $\mathcal{P}(\lambda)$ は整列可能である．そこで $(\mathcal{P}(\lambda), \lhd)$ が整列順序となるような $\lhd$ を一つ取っておく．

超限帰納法により，α 上の関数 F で「任意の $\beta < \alpha$ に対して $F_\beta := F(\beta)$ は $z(\beta) :=$

$\{a \in R(\alpha) \mid \rho(a) = \beta\}$ を整列する」を満たすものを構成する．

(i) $\beta = 0$ のとき．

$R(0) = \emptyset$ だから $F_0 := \emptyset$ とすればよい．

(ii) $0 < \beta < \alpha$ のとき．

帰納法の仮定により，任意の $\gamma < \beta$ に対して $(z(\gamma), F_\gamma)$ は整列順序である．そこで $R(\beta) = \bigcup_{\gamma<\beta} z(\gamma)$ の二項関係 $\leq_\beta$ を次のように定義する．

$$u \leq_\beta v \Longleftrightarrow \rho(u) < \rho(v) \text{ または「}\rho(u) = \rho(v),\ uF_{\rho(u)}v\text{」}$$

すると $(R(\beta), \leq_\beta)$ は整列順序である．

$\because$) (反射律) $F_{\rho(u)}$ の反射律から明らか．

(反対称律) $u \leq_\beta v$ かつ $v \leq_\beta u$ とする．$\rho(u) = \rho(v)$ である．即ち $uF_{\rho(u)}v$ かつ $vF_{\rho(v)}u$ である．今 $F_{\rho(u)}$ が反対称律を満たすから $u = v$ である．

(推移律) $u \leq_\beta v$ かつ $v \leq_\beta w$ とする．$\rho(u) < \rho(v)$ または $\rho(v) < \rho(w)$ の時は明らかなので $\rho(u) = \rho(v) = \rho(w)$ とする．この時 $uF_{\rho(u)}v$ かつ $vF_{\rho(u)}w$ であり，$F_{\rho(u)}$ の推移律により $uF_{\rho(u)}w$ である．

以上より $(R(\beta), \leq_\beta)$ は順序集合である．次に任意の部分集合 $A \subset R(\beta)$ をとる．$\xi := \min\{\rho(u) \mid u \in A\}$ とする．$\xi < \beta$ である．$B := \{u \in A \mid \rho(u) = \xi\}$ を考える．$B \subset z(\xi)$ であり，F_ξ は $z(\xi)$ を整列するから B は最小元 u_0 を持つ．u_0 の選び方から，これは A の最小元である．即ち $(R(\alpha), \leq_\beta)$ は整列順序集合である．

今 $|\lambda| \not\leq |R(\alpha)|$ であったから，勿論 $|\lambda| \not\leq |R(\beta)|$ であり，よって $|R(\beta)| < |\lambda|$ となる．故にある $\mu < \lambda$ が一意に存在して $(R(\beta), \leq_\beta) \cong (\delta, \leq)$ である (この同型も一意に定まることに注意する)．ここから全単射 $f : \mathcal{P}(R(\beta)) \longrightarrow \mathcal{P}(\delta)$ が自然に定まる．$\delta \subset \lambda$ であるから $\mathcal{P}(\delta) \subset \mathcal{P}(\lambda)$ である．よって $(\mathcal{P}(\delta), \lhd)$ は整列順序である．ここから f により $R(\beta+1) = \mathcal{P}(R(\beta))$ の整列順序が定まる．それにより定まる $z(\beta) \subset R(\beta+1)$ の整列順序を F_β と置く．

(i)(ii) により F が定まった．このとき，先と同様にして $R(\alpha)$ の整列順序 $\leq_\alpha$ を

$$u \leq_\alpha v \Longleftrightarrow \rho(u) < \rho(v) \text{ または「}\rho(u) = \rho(v),\ uF_{\rho(u)}v\text{」}\}$$

で定めればよい． □

※ 基礎の公理を仮定しない場合，$2 \Longrightarrow 1$ や $3 \Longrightarrow 1$ や $4 \Longrightarrow 1$ は証明できないことが知られている．

定理 5. λ は基数を表すとし，$\mathrm{WO}(X,\lambda)$ で命題

$$\begin{aligned}&\text{ある順序数}\,\alpha\,\text{と写像}\ f:\alpha\to\mathcal{P}(X)\ \text{が存在して}\\ &X=\bigcup_{\beta<\alpha} f(\beta)\ \text{かつ任意の}\ \beta<\alpha\ \text{に対して}\ |f(\beta)|<\lambda.\end{aligned}$$

を表すことにする．m は 2 以上の整数を表すとするとき，次の命題は (ZF 上) 同値.

1. 整列可能定理

2(m). 任意の集合 X に対し $\mathrm{WO}(X,m)$

3. ある m が存在して任意の集合 X に対し $\mathrm{WO}(X,m)$
4. 任意の集合 X に対しある m が存在して $\mathrm{WO}(X,m)$
5. 任意の集合 X に対し $\mathrm{WO}(X,\aleph_0)$

証明. 1$\Longleftrightarrow$2(2) と 2(m)$\Longrightarrow$3 と 3$\Longrightarrow$4 と 4$\Longrightarrow$5 は明らか．$m\leq n$ に対し 2(m)$\Longrightarrow$2(n) も明らか．なので 5$\Longrightarrow$1 を示せばよい．その為に選択公理と同値な AMC を示す.

※ AMC (= the Axiom of Multiple Choice) とは次の命題のこと.

$$\begin{aligned}&\text{非空集合の族}\ \{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}\text{に対し，有限集合の族}\ \{F_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}\text{で}\\ &\text{任意の}\lambda\in\Lambda\text{に対し}\emptyset\neq F_\lambda\subset X_\lambda\text{となるものが存在する.}\end{aligned}$$

同値性の証明は the Axiom of Multiple Choice を参照.

$X\not\ni\emptyset$ を集合とする．仮定 5 により $\mathrm{WO}(\bigcup X,\aleph_0)$ の条件を満たす順序数 α と写像 g が存在する．$x\in X$ に対し $\beta(x):=\min\{\gamma<\alpha\mid x\cap g(\gamma)\neq\emptyset\}$ と定めて $f(x):=x\cap g(\beta(x))$ と置けば，この f が AMC を満たす. □

基礎の公理を仮定しないと AMC $\Longrightarrow$ 選択公理は証明できない．つまりこの 5$\Longrightarrow$1 の証明は基礎の公理を使っていることになる．実は 5$\Longrightarrow$1 は基礎の公理を仮定しないと証明できないことが知られている．(5$\Longleftrightarrow$AMC は基礎の公理を使わずに証明できる．) 一方，4$\Longrightarrow$1 は基礎の公理を使わなくても証明できるので，その証明を書いておく.

証明. その為に，まず $Y\times Y\subset Y$ を満たす集合 Y が整列可能であることを示す.

$\mathrm{WO}(Y,m+1)$ が成立しているとする．(このとき $\mathrm{WO}(Y,m)$ が成立することをこれから示す．) $\mathrm{WO}(Y,m+1)$ の条件を満たす順序数 α と関数 f を取り

$$u_{\beta,\gamma,\delta}:=(f(\beta)\times f(\gamma))\cap f(\delta)\quad(\beta,\gamma,\delta<\alpha)$$

を考える．定義より $u_{\beta,\gamma,\delta}$ は二項関係とみなせる．(即ち定義域 dom，値域 ran を考え

ることができる．）f の性質から $|\mathrm{dom}(u_{\beta,\gamma,\delta})| \le |f(\beta)| \le m$, $|\mathrm{ran}(u_{\beta,\gamma,\delta})| \le |f(\gamma)| \le m$, $|u_{\beta,\gamma,\delta}| \le |f(\delta)| \le m$ である．

(i) 任意の $\beta < \alpha$ に対して「もし $f(\beta) \ne \emptyset$ であるならば、ある $\gamma, \delta < \alpha$ が存在して $0 < |\mathrm{dom}(u_{\beta,\gamma,\delta})| < m$」となるとき.

$f(\beta) \ne \emptyset$ なる $\beta < \alpha$ に対し，$0 < |\mathrm{dom}(u_{\beta,\gamma,\delta})| < m$ となる組 $\langle \gamma, \delta \rangle$ のうち辞書式順序で最小のものを $\langle \lambda_\beta, \mu_\beta \rangle$ で表す.

$$v_\beta := \begin{cases} \mathrm{dom}(u_{\beta,\lambda_\beta,\mu_\beta}) & (f(\beta) \ne \emptyset \text{ のとき}) \\ \emptyset & (f(\beta) = \emptyset \text{ のとき}) \end{cases}$$
$$w_\beta := f(\beta) \setminus v_\beta$$

と置き，$\alpha + \alpha$ 上の関数 g を

$$g(\xi) := \begin{cases} v_\xi & (\xi < \alpha \text{ のとき}) \\ w_\eta & (\alpha \le \xi < \alpha + \alpha,\ \xi \setminus \alpha \cong \eta \text{ のとき}) \end{cases}$$

で定義する．すると $\displaystyle\bigcup_{\xi < \alpha + \alpha} g(\xi) = y$ である．また定義から明らかに $|v_\beta| < m, |w_\beta| < m$ だから $|g(\xi)| < m$ である．即ち，$\alpha + \alpha$ と g が $\mathrm{WO}(Y, m)$ の条件を満たす.

(ii) そうでないとき.

このような β のうち最小のものを取る．この β は「$f(\beta) \ne \emptyset$」と「任意の $\gamma, \delta < \alpha$ に対して $|\mathrm{dom}(u_{\beta,\gamma,\delta})| = 0$ または $= m$」を満たす．$s \in f(\beta)$ を一つ取っておく.

$\gamma < \alpha$ が $f(\gamma) \ne \emptyset$ を満たすとする．勿論 $f(\beta) \times f(\gamma) \ne \emptyset$ であり，$f(\beta) \times f(\gamma) \subset Y \times Y \subset Y = \displaystyle\bigcup_{\delta < \alpha} f(\delta)$ であるから，$u_{\beta,\gamma,\delta} \ne \emptyset$ となる δ は存在する．そこで $\delta_\gamma := \min\{\delta < \alpha \mid u_{\beta,\gamma,\delta} \ne \emptyset\}$ と置く．このとき $|\mathrm{dom}(u_{\beta,\gamma,\delta_\gamma})| = m$ であり，$|u_{\beta,\gamma,\delta}| \le m$ だったから $|u_{\beta,\gamma,\delta}| = m$ となる．従って $u_{\beta,\gamma,\delta}$ は関数でなければならない.

さて，$\gamma < \alpha$ に対して

$$v_\gamma := \begin{cases} \{u_{\beta,\gamma,\delta_\gamma}(s)\} & (f(\gamma) \ne \emptyset \text{ のとき}) \\ \emptyset & (f(\gamma) = \emptyset \text{ のとき}) \end{cases}$$
$$w_\gamma := f(\gamma) \setminus v_\gamma$$

と置き，$\alpha + \alpha$ 上の関数 g を

$$g(\xi) := \begin{cases} v_\xi & (\xi < \alpha \text{ のとき}) \\ w_\eta & (\alpha \le \xi < \alpha + \alpha,\ \xi \setminus \alpha \cong \eta \text{ のとき}) \end{cases}$$

で定義する．すると (i) の場合と同様，$\alpha + \alpha$ と g が $\mathrm{WO}(Y, m)$ の条件を満たす.

(i)(ii) より WO(Y, m) が成立することが分かった．仮定 4 より WO(Y, m) が成立する m は存在するから，WO$(Y, 2)$ が成立することが分かる．即ち，Y は整列可能である．

さて，X を任意の集合とする．この時

$$Z_0 := X,\ Z_{n+1} := Z_n \cup (Z_n \times Z_n),\ Y := \bigcup_{n=0}^{\infty} Z_n$$

と置く．すると $m < n$ の時 $Z_m \subset Z_n$，$Z_m \times Z_m \subset Z_n$ だから

$$\begin{aligned} Y \times Y &= \bigcup_{m,n=0}^{\infty} Z_m \times Z_n \\ &\subset \bigcup_{m,n=0}^{\infty} Z_{\max(m,n)} \times Z_{\max(m,n)} \\ &\subset \bigcup_{m,n=0}^{\infty} Z_{\max(m,n)+1} \\ &\subset Y. \end{aligned}$$

よって先に述べた通り Y は整列可能であり，明らかに $X \subset Y$ だから X も整列可能である． □

参考文献

[1] Horst Herrlich, Axiom of Choice, Springer Lecture Notes in Mathematics 1876, Springer Verlag Berlin Heidelberg (2006)

[2] Azriel Levy, Basic set theory, Dover Publications (2002), pp.164-165, `http://books.google.co.jp/books?id=TCIX3qis9pUC`

[3] H. Rubin and J. Rubin, Equivalents of the Axiom of Choice, II, North Holland, 1985.