permutation モデル

alg-d
http://alg-d.com/math/ac/

2015 年 2 月 21 日

ZFA + ¬Urysohn のモデルを構成する．A を可算として，$\langle A, \leq\rangle \cong \langle \mathbb{Q}, \leq\rangle$ となる A の順序 $\leq$ を取る．G を $\langle A, \leq\rangle$ の順序同型全体とする．

$$I := \left\{ E \subset A \;\middle|\; \begin{array}{l} E \text{ は高々有限個しか集積点を持たない} \\ \text{かつ任意の無限部分集合 } S \subset E \text{ は集積点を持つ} \end{array} \right\}$$

とすると，I は normal イデアルとなる．I により permutation モデル U を定める．

$\leq = \{\langle a, b\rangle \in A \times A \mid a \leq b\}$ だから $g \in G$ に対して

$$\begin{aligned} g(\leq) &= \{\langle g(a), g(b)\rangle \in A \times A \mid a \leq b\} \\ &= \{\langle g(a), g(b)\rangle \in A \times A \mid g(a) \leq g(b)\} \\ &= \leq \end{aligned}$$

である．故に $\mathrm{fix}(\leq) = G$ だから $\leq \in U$ となる．よって $\langle A, \leq\rangle \in U$ であり，A に順序位相が入る．

命題． A は T_4 空間である．

証明． $F_0, F_1 \subset A$ を互いに素な閉集合とする．F_0, F_1 のそれぞれの support を E_0, E_1 として $E := E_0 \cup E_1$ と置く．T を E の集積点全体がなす有限集合とし，$F_0 \cap T = \{x_1, \dots, x_m\}, T \setminus \{x_1, \dots, x_m\} = \{y_1, \dots, y_n\}$ と書く．F_0, F_1 は閉だから開区間 $I_i \ni x_i$，$J_j \ni y_j$ で $I_i \cap F_1 = \emptyset$，$J_j \cap F_0 = \emptyset$ となるものが取れる．このとき $I_i \cap J_j = \emptyset$ としてよい．

$V := \bigcup_i I_i \cup \bigcup_j J_j$ は T を含む開集合である．E の無限部分集合は集積点を持つから，V の定義により $|E \setminus V| < \infty$ でなければならない．$F_0 \cap (E \setminus V) = \{x_{m+1}, \dots, x_{m'}\}$，$F_1 \cap (E \setminus V) = \{y_{n+1}, \dots, y_{n'}\}$ と書く．先と同じように開区間 $I_i \ni x_i$，$J_j \ni y_j$ を取り，

$U_0 := F_0 \cup \bigcup_{i=1}^{m'} I_i$，$U_1 := F_1 \cup \bigcup_{j=1}^{n'} J_j$ と置けば $F_0 \subset U_0$，$F_1 \subset U_1$，$U_0 \cap U_1 = \emptyset$ である． □

命題． 連続関数 $f\colon A \longrightarrow \mathbb{R}$ は定数関数しかない．

証明． まず A が Dedekind の切断公理を満たすことを示す．$\langle B, C\rangle \in U$ を A の切断とし，$\max B$ も $\min C$ も存在しないと仮定する．E を B の support とする．E は集積点を有限個しかもたないから，閉区間 $I \subset A$ で $I \cap B \neq \emptyset$，$I \cap C \neq \emptyset$，かつ I は E の集積点を含まないようにできる．E の無限部分集合は集積点をもつから，$|I \cap E| < \infty$ でなければならない．従って初めから $I \cap E = \emptyset$ としてよい．このとき $g \in G$ を $A \setminus I$ 上恒等写像となるようにとれば $g \in \mathrm{fix}(E)$ である．故に $g(B) = B$ とならなければならないが，明らかに $g(B) \neq B$ となるような g が存在し，矛盾する．従って $\max B$ か $\min C$ が存在し，Dedekind の切断公理が成り立つ．故に A では中間値の定理が成り立つ．

連続関数 $f\colon A \longrightarrow \mathbb{R}$ が定数関数でないと仮定する．すると中間値の定理から，ある $s, t \in \mathbb{R}$，$s < t$ が存在して $[s, t] \subset f(A)$ となる．すると V での全射 $A \longrightarrow [s, t]$ が得られるが，$|A| = \aleph_0$ だったから矛盾する．従って f は定数関数である． □

定理． Urysohn の補題は ZFA で証明できない． □