

ultracompact と選択公理

alg-d

<https://alg-d.com/math/ac/>

2025 年 5 月 27 日

定義. X を位相空間, $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$ を超フィルターとする.

- (1) $x \in X$ が点列 $\langle a_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ の $\mathcal{D}$ -集積点
 $\iff$ 任意の開集合 $x \in U \subset X$ に対して $\{n \in \mathbb{N} \mid a_n \in U\} \in \mathcal{D}$ となる.
- (2) X が $\mathcal{D}$ -コンパクト
 $\iff$ 任意の点列 $\langle a_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ が $\mathcal{D}$ -集積点を持つ.

定義. X が ultracompact

$\iff$ 任意の超フィルター $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$ に対して X が $\mathcal{D}$ -コンパクトである.

まず基本的な性質としてコンパクトならば ultracompact である (系 2). これを示すために $\aleph_0$ -bounded というものを導入する.

定義. X が $\aleph_0$ -bounded

$\iff$ 任意の点列 $\langle a_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ に対して, あるコンパクト部分集合 $Y \subset X$ が存在して $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subset Y$ となる.

命題 1. $\aleph_0$ -bounded な空間は ultracompact である.

証明. X が $\aleph_0$ -bounded で, かつ ultracompact でないと仮定する. 即ちある超フィルター $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$ が存在して, X は $\mathcal{D}$ -コンパクトでない. つまり $\mathcal{D}$ -集積点を持たないような点列 $\langle a_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ が存在する. このとき

$$\mathcal{U} := \{U \subset X \mid U \text{ は開集合, } \{n \in \mathbb{N} \mid a_n \in U\} \notin \mathcal{D}\}$$

とすれば, $\mathcal{D}$ -集積点の定義より $\mathcal{U}$ は X の開被覆となる. X が $\aleph_0$ -bounded だから, あるコンパクト部分集合 $Y \subset X$ が存在して $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subset Y$ となるが, このとき $\mathcal{U}$

は Y の開被覆でもある．よってある $U_0, \dots, U_m \in \mathcal{U}$ が存在して $Y \subset U_0 \cup \dots \cup U_m$ と書ける． $U_i \in \mathcal{U}$ なので $\{n \in \mathbb{N} \mid a_n \in U_i\} \notin \mathcal{D}$ である． $\mathcal{D}$ が超フィルターだから $A_i := \{n \in \mathbb{N} \mid a_n \notin U_i\} \in \mathcal{D}$ となり，従って $A_0 \cap \dots \cap A_m \in \mathcal{D}$ である．ところが

$$\begin{aligned} A_0 \cap \dots \cap A_m &= \{n \in \mathbb{N} \mid a_n \notin U_0 \cap \dots \cap U_m\} \\ &\subset \{n \in \mathbb{N} \mid a_n \notin Y\} = \emptyset \end{aligned}$$

となるから $\mathcal{D}$ がフィルターであることに矛盾する． $\square$

系 2. コンパクトならば ultracompact である．

証明. 明らかにコンパクトならば $\aleph_0$ -bounded である．よって成り立つ． $\square$

さて， $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$ を $m \in \mathbb{N}$ で生成される単項フィルターとすれば，任意の点列 $\langle a_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ は明らかに $\mathcal{D}$ -集積点 a_m を持つ．よって $\mathcal{D}$ -コンパクトというのは $\mathcal{D}$ が単項でない超フィルターの場合に興味がある．ところがこのような超フィルターの存在は ZF では証明できないことが知られている．以上を踏まえて，次の定理が成り立つ．

定理 3. 選択公理

$\iff$ 単項でない超フィルター $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$ が存在して，更に ultracompact 空間の直積は ultracompact になる．

証明. ($\implies$) 選択公理の下で単項でない超フィルターが存在することはよく知られている．

ultracompact 空間の直積が ultracompact であることを示すため， $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を ultracompact 空間の族とする． $X_\lambda \neq \emptyset$ としてよい． $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$ を超フィルターとして $\langle a_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ を $X = \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ の点列とする． $\pi_\lambda: X \rightarrow X_\lambda$ を標準射影とすれば， $\langle \pi_\lambda(a_n) \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ は X_λ の点列だから $\mathcal{D}$ -集積点 $x_\lambda \in X_\lambda$ が存在する．このとき $x = \langle x_\lambda \rangle_{\lambda \in \Lambda} \in X$ が $\mathcal{D}$ -集積点であることを示せばよい．そこで $x \in U \subset X$ を開近傍とする．直積位相の定義より，ある $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \Lambda$ と開集合 $U_{\lambda_i} \subset X_{\lambda_i}$ が存在して $\pi_{\lambda_1}^{-1}(U_{\lambda_1}) \cap \dots \cap \pi_{\lambda_m}^{-1}(U_{\lambda_m}) \subset U$ となる．このとき x_λ の取り方から $\{n \in \mathbb{N} \mid \pi_{\lambda_i}(a_n) \in U_{\lambda_i}\} \in \mathcal{D}$ である． $\mathcal{D}$ がフィル

ターだから $\bigcap_{i=1}^m \{n \in \mathbb{N} \mid \pi_{\lambda_i}(a_n) \in U_{\lambda_i}\} \in \mathcal{D}$ となる. すると

$$\begin{aligned} \bigcap_{i=1}^m \{n \in \mathbb{N} \mid \pi_{\lambda_i}(a_n) \in U_{\lambda_i}\} &= \bigcap_{i=1}^m \{n \in \mathbb{N} \mid a_n \in \pi_{\lambda_i}^{-1}(U_{\lambda_i})\} \\ &= \left\{ n \in \mathbb{N} \mid a_n \in \bigcap_{i=1}^m \pi_{\lambda_i}^{-1}(U_{\lambda_i}) \right\} \\ &\subset \{n \in \mathbb{N} \mid a_n \in U\} \end{aligned}$$

となるから, $\mathcal{D}$ がフィルターより $\{n \in \mathbb{N} \mid a_n \in U\} \in \mathcal{D}$ が分かる. よって x が $\langle a_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ の $\mathcal{D}$ -集積点である.

($\Leftarrow$) $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を非空集合の族とする. $Y_\lambda := X_\lambda \sqcup \mathbb{N}$ の位相を

$$\mathcal{O}_{Y_\lambda} := \{U \subset Y_\lambda \mid Y_\lambda \setminus U \text{ は有限集合}\} \cup \mathcal{P}(\mathbb{N})$$

で定める. Y_λ はコンパクトだから系 2 より ultracompact となる. よって $Y := \prod_{\lambda \in \Lambda} Y_\lambda$ も仮定により ultracompact である. そこで仮定により存在する単項でない超フィルター $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$ を取れば Y は $\mathcal{D}$ -コンパクトとなる.

$n \in \mathbb{N}$ と $\lambda \in \Lambda$ に対して $(a_n)_\lambda := n \in Y_\lambda$ と定めると $a_n \in Y$ である. 今 Y が $\mathcal{D}$ -コンパクトだから $\langle a_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ の $\mathcal{D}$ -集積点 $y = \langle y_\lambda \rangle_{\lambda \in \Lambda} \in Y$ が存在する. このとき任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して $y_\lambda \in X_\lambda$ を示せばよい.

そこである $\mu \in \Lambda$ に対して $y_\mu \notin X_\mu$ となると仮定する. 即ち $y_\mu \in \mathbb{N}$ である. このとき $\pi_\mu: Y \rightarrow Y_\mu$ を標準射影とすれば $U := \pi_\mu^{-1}(\{y_\mu\}) \subset Y$ は y の開近傍である. このとき y が $\mathcal{D}$ -集積点だから

$$\mathcal{D} \ni \{n \in \mathbb{N} \mid a_n \in U\} = \{n \in \mathbb{N} \mid \pi_\mu(a_n) = y_\mu\} = \{y_\mu\}$$

となり, $\mathcal{D}$ が単項でないことに矛盾する. □

定義. X を位相空間とする.

(1) X が可算コンパクト

$\iff$ 部分集合 $\mathcal{U} \subset \mathcal{O}_X$, $|\mathcal{U}| = \aleph_0$ が $X = \bigcup \mathcal{U}$ を満たすならば, ある整数 $n \geq 0$ とある $U_0, \dots, U_n \in \mathcal{U}$ が存在して $X = U_0 \cup \dots \cup U_n$.

(2) X が sequentially limit point compact

$\iff$ 任意の点列 $\langle a_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ は集積点 x を持つ (即ち, 任意の開集合 $x \in U \subset X$ に対して $|\{n \in \mathbb{N} \mid a_n \in U\}| = \infty$ となる).

補題 4. 可算コンパクトならば sequentially limit point compact である*¹.

証明. X を可算コンパクトで, かつ sequentially limit point compact でないと仮定する. 即ち点列 $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ で集積点を持たないものが存在する. $n \neq m$ ならば $a_n \neq a_m$ としてよい. $A := \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ として, $F \in \mathcal{P}_{\text{fin}}(A)$ に対して

$$U_F := \bigcup \{U \subset X \mid U \cap A = F\}$$

と定める. $\{U_F \mid F \in \mathcal{P}_{\text{fin}}(A)\}$ は X の可算開被覆である.

∴) A が可算無限集合だから $\mathcal{P}_{\text{fin}}(A)$ も可算無限集合である. よって開被覆であることを示せばよい. そこで $x \in X$ とする. $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ の取り方から, 開近傍 $U \ni x$ で $|U \cap A| < \infty$ となるものが存在する. このとき $F := U \cap A$ とすれば $x \in U \subset U_F$ である.

よって X が可算コンパクトだから, ある $F_0, \dots, F_m \in \mathcal{P}_{\text{fin}}(A)$ が存在して $U_{F_0} \cup \dots \cup U_{F_m} = X$ となる. このとき

$$A = A \cap X = A \cap (U_{F_0} \cup \dots \cup U_{F_m}) = F_0 \cup \dots \cup F_m$$

となるが, この右辺は明らかに有限集合なので矛盾する. □

補題 5. $\aleph_0$ -bounded ならば sequentially limit point compact である*².

証明. X を $\aleph_0$ -bounded で, かつ sequentially limit point compact でないと仮定する. 即ち点列 $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ で集積点を持たないものが存在する. X が $\aleph_0$ -bounded だから, コンパクトな $Y \subset X$ が存在して $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subset Y$ となる. 補題 4 の証明と同様に可算開被覆 $\{U_F \mid F \in \mathcal{P}_{\text{fin}}(A)\}$ を取れば, これは Y の開被覆でもある. よって補題 4 と同様にして矛盾する. □

定理 6. 次の命題は同値.

- (1) 選択公理
- (2) ultracompact 空間の直積は可算コンパクトである.
- (3) ultracompact 空間の直積は sequentially limit point compact である.
- (4) $\aleph_0$ -bounded space の直積は可算コンパクトである.

*¹ 可算選択公理の下で逆が成り立つことが知られている. つまり ZFC では可算コンパクトと sequentially limit point compact は同値である.

*² 「 $\aleph_0$ -bounded ならば可算コンパクト」は可算選択公理と同値であることが知られている [1].

(5) $\aleph_0$ -bounded space の直積は sequentially limit point compact である.

(6) $\aleph_0$ -bounded space の直積は $\aleph_0$ -bounded である.

証明. (1 $\implies$ 2) 定理 3 により, ultracompact ならば可算コンパクトを示せばよい.

そこで X が ultracompact で, かつ可算コンパクトでないと仮定する. 可算コンパクトでないから, 開集合の増大列 $U_0 \subsetneq U_1 \subsetneq \cdots$ で $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n$ となるものが存在する.

選択公理により $a_n \in U_{n+1} \setminus U_n$ が取れる.

$\mathcal{D} \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$ を単項でない超フィルターとする. X が ultracompact だから $\langle a_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ の $\mathcal{D}$ -集積点 x が存在する. $x \in U_m$ となる $m \in \mathbb{N}$ を取ると $\{n \in \mathbb{N} \mid a_n \in U_m\}$ は有限集合である. よって $\mathcal{D}$ が単項でない超フィルターだから $\{n \in \mathbb{N} \mid a_n \in U_m\} \notin \mathcal{D}$ となり x の取り方に矛盾する.

(2 $\implies$ 3) 補題 4 より明らか.

(3 $\implies$ 5) 命題 1 より明らか.

(2 $\implies$ 4) 命題 1 より明らか.

(4 $\implies$ 5) 補題 4 より明らか.

(5 $\implies$ 1) 定理 3 と全く同様に示せる.

(1 $\implies$ 6) $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を $\aleph_0$ -bounded の族とする. $X_\lambda \neq \emptyset$ としてよい. $X := \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ として $\langle a_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ を X の点列とする. $\pi_\lambda: X \rightarrow X_\lambda$ を標準射影とすれば, $\langle \pi_\lambda(a_n) \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ は X_λ の点列である. 故にコンパクト集合 $Y_\lambda \subset X_\lambda$ を $\{\pi_\lambda(a_n) \mid n \in \mathbb{N}\} \subset Y_\lambda$ となるように取ることができる. Tychonoff の定理により $Y := \prod Y_\lambda \subset X$ はコンパクトで $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subset Y$ となる.

(6 $\implies$ 5) 補題 5 より明らか. □

参考文献

- [1] E. Tachtsis, On ultracompact spaces in ZF, Topology and its Applications 263 (2019), 257–278, <https://doi.org/10.1016/j.topol.2019.06.039>