Tychonoff の定理と選択公理

alg-d
http://alg-d.com/math/ac/

2014 年 8 月 15 日

定義. $(X, \mathcal{O}_X)$ を位相空間とする.

1. X がコンパクト
$\iff$ 部分集合 $\mathcal{U} \subset \mathcal{O}_X$ が $X = \bigcup \mathcal{U}$ を満たすならば，ある非負整数 n とある $U_0, \cdots, U_n \in \mathcal{U}$ が存在して $X = U_0 \cup \cdots \cup U_n$.

※ 集合 $\mathcal{A}$ に対して $\bigcup \mathcal{A} := \displaystyle\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$, $\bigcap \mathcal{A} := \displaystyle\bigcap_{A \in \mathcal{A}} A$ である.

2. $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}_X$ が有限交差性 (finite intersection property) を持つ
$\iff$ 任意の整数 $n \geq 0$ と任意の $F_0, \cdots, F_n \in \mathcal{F}$ に対して $F_0 \cap \cdots \cap F_n \neq \emptyset$.

補題 1. 位相空間 X に対して次の命題は同値.

1. X がコンパクト
2. $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}_X$ が有限交差性を持つ $\Longrightarrow \bigcap \mathcal{F} \neq \emptyset$

証明. 補集合を考えれば明らか. □

定義. X を位相空間とする.

1. $(I, \leq)$ を有向集合とするとき，$\{x_i\}_{i \in I}$ $(x_i \in X)$ を X の有向点列という.
2. $x \in X$ が X の有向点列 $\{x_i\}_{i \in I}$ の集積点 (cluster point)
$\iff$ x の任意の開近傍 $U \subset X$ と任意の $i \in I$ に対して，ある $j \geq i$ が存在して $x_j \in U$ となる.
3. X の有向点列 $\{x_i\}_{i \in I}$ が $x \in X$ に収束する
$\iff$ x の任意の開近傍 $U \subset X$ に対してある $i \in I$ が存在して，任意の $j \geq i$ に対

して $x_j \in U$ となる．

定義． $(I,\leq)$, $(J,\leq)$ を有向集合とし，$\{x_i\}_{i\in I}$ を X の有向点列とする．順序を保つ写像 $i : J \longrightarrow I$ が「任意の $i_0 \in I$ に対してある $j \in J$ が存在して $i_0 \leq i(j)$」を満たすとき，有向点列 $\{x_{i(j)}\}_{j\in J}$ を $\{x_i\}_{i\in I}$ の部分有向点列という．

次の有向点列に関する性質は認めることにする．

命題． X を位相空間とする．

1. $x \in X$ が X の有向点列 $\{x_i\}_{i\in I}$ の集積点である
   $\Longleftrightarrow$ x に収束する $\{x_i\}_{i\in I}$ の部分有向点列が存在する．
2. X がコンパクト
   $\Longleftrightarrow$ X の任意の有向点列が集積点を持つ．
   $\Longleftrightarrow$ X の任意の有向点列が収束する部分有向点列を持つ．

定理． 以下の命題は (ZF 上) 同値．

1. 選択公理
2. コンパクト空間の直積はコンパクト．（Tychonoff の定理）
3. コンパクトな T_1 空間の直積はコンパクト．
4. 開集合が有限個な空間の直積はコンパクト．
5. 開集合が丁度 3 個な空間の直積はコンパクト．

証明． ($1 \Longrightarrow 2$) $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ をコンパクト空間の族とする．$X := \displaystyle\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ がコンパクトであることを示すために，X の有向点列 $\xi = \{f_i \mid i \in I\}$ を取る．$\Sigma \subset \Lambda$ に対して $\xi|_\Sigma := \{f_i|_\Sigma \mid i \in I\}$ と書く．（各 $f_i \in X$ は写像 $\Lambda \longrightarrow \bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ であることに注意しておく．）

$$A := \left\{ g \;\middle|\; \Sigma \subset \Lambda,\ g \in \prod_{\lambda\in\Sigma} X_\lambda,\ g \text{ は } \xi|_\Sigma \text{ の集積点} \right\}$$

と定義し，A に包含関係 $\subset$ で順序を入れる．A に Zorn の補題を適用する為に，部分全順序 $C \subset A$ を取る．$h := \displaystyle\bigcup_{g\in C} g$，$\Sigma := \displaystyle\bigcup_{g\in C} \mathrm{dom}(g)$ と置く．$h \in \displaystyle\prod_{\lambda\in\Sigma} X_\lambda$ は $\xi|_\Sigma$ の集積点である．

$\because$) 任意の開近傍 $U \ni h$ と $i \in I$ を取る．$U = \displaystyle\prod_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$，有限個の λ を除いて $U_\lambda = X_\lambda$，としてよい．$U_\lambda \subsetneq X_\lambda$ となる λ 全体を $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ とする．このときあ

る $g \in C$ が存在して $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathrm{dom}(g)$ となる．$g \in \prod_{\lambda \in \mathrm{dom}(g)} U_\lambda$ であり，g が $\xi|_{\mathrm{dom}(g)}$ の集積点だから，ある $j \geq i$ が存在して $f_j|_{\mathrm{dom}(g)} \in \prod_{\lambda \in \mathrm{dom}(g)} U_\lambda$ となる．このとき定義から明らかに $f_j|_\Sigma \in U$ である．よって h が $\xi|_\Sigma$ の集積点であることが分かった．

故に $h \in A$ となるから，h が C の上界である．従って Zorn の補題により A の極大元 g が存在する．

$\Sigma := \mathrm{dom}(g) \subsetneq \Lambda$ と仮定する．$\mu \in \Lambda \setminus \Sigma$ を取る．g は $\xi|_\Sigma$ の集積点だから，g に収束する部分有向点列 $\eta = \{f_{\varphi(j)} \mid j \in J\}$ が存在する．このとき $\eta(\mu) := \{f_{\varphi(j)}(\mu) \mid j \in J\}$ は X_μ の有向点列である．今 X_μ はコンパクトだったから，$\eta(\mu)$ の集積点 $a \in X_\mu$ が存在する．このとき $\widetilde{\Sigma} := \Sigma \cup \{\mu\}$ として $\widetilde{g} \in \prod_{\lambda \in \widetilde{\Sigma}} X_\lambda$ を

$$\widetilde{g}(\lambda) := \begin{cases} g(\lambda) & (\lambda \in \Sigma) \\ a & (\lambda = \mu) \end{cases}$$

と定めれば $\widetilde{g} \in A$ である．

$\because$) $\widetilde{g}$ が $\xi|_{\widetilde{\Sigma}}$ の集積点であることを示せばよい．その為に任意の開近傍 $U \ni \widetilde{g}$ と $i \in I$ を取る．$U = \prod_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$，有限個の λ を除いて $U_\lambda = X_\lambda$，としてよい．$U_\mu = X_\mu$ の時は簡単に分かる．$U_\mu \subsetneq X_\mu$ とする．η が g に収束するから，ある $j_0 \geq i$ が存在して $j \geq j_0$ に対して $f_i|_\Sigma \in \prod_{\lambda \in \Sigma} U_\lambda$ である．一方 $a = \widetilde{g}(\mu)$ が $\eta(\mu)$ の集積点だったから，ある $j \geq j_0$ が存在して $f_j(\mu) \in U_\mu$ となる．よって $f_i|\widetilde{\Sigma} \in U$ である．

よって $\widetilde{g} \supsetneq g$ だから g の極大性に矛盾する．故に $\mathrm{dom}(g) = \Lambda$ であり，g は ξ の集積点である．

$(2 \Longrightarrow 3)$ 明らか

$(3 \Longrightarrow 1)$ $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を非空集合の族とする．どの X_λ にも含まれない元 $\infty \notin \bigcup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ を用意し，$Y_\lambda := X_\lambda \cup \{\infty\}$ とする．各 Y_λ の位相を

$$\mathcal{O}_{Y_\lambda} := \{U \subset Y_\lambda \mid Y_\lambda \setminus U \text{ は有限集合 }\} \cup \{\emptyset, \{\infty\}\}$$

で定義する．各 $(Y_\lambda, \mathcal{O}_{Y_\lambda})$ はコンパクトである．

$\because$) $\{U_i\}_{i \in I}$ を Y_λ の開被覆とする．$\mathcal{O}_{Y_\lambda}$ の定義から，$Y_\lambda \setminus U_{i_0}$ が有限集合となるような $i_0 \in I$ が存在する．$Y_\lambda \setminus U_{i_0} = \{y_1, \cdots, y_n\}$ と書く．$\{U_i\}_{i \in I}$ が開被覆である

ことから $y_k \in U_{i_k}$ となる i_k が存在する．この時 $Y_\lambda = U_{i_0} \cup U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_n}$．従って Y_λ はコンパクト．

また明らかに Y_λ は T_1 空間でもある．故に仮定 3 から直積空間 $Y := \prod_{\lambda\in\Lambda} Y_\lambda$ もコンパクトである．$\mathcal{O}_{Y_\lambda}$ の定義から，$X_\lambda = Y_\lambda \setminus \{\infty\} \subset Y_\lambda$ は閉集合．閉集合の族 $\{\pi_\lambda^{-1}(X_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ は有限交差性をもつ．

$\because$) 任意の $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \Lambda$ に対し $\pi_{\lambda_1}^{-1}(X_{\lambda_1}) \cap \cdots \cap \pi_{\lambda_n}^{-1}(X_{\lambda_n}) \neq \emptyset$ となることを示せばよい．各 X_λ は空でないから，$x_{\lambda_1} \in X_{\lambda_1}, \cdots, x_{\lambda_n} \in X_{\lambda_n}$ が取れる．λ_i 以外の $\lambda \in \Lambda$ に対しては $x_\lambda := \infty$ として $x := (x_\lambda) \in Y$ を考える．明らかに $\pi_{\lambda_i}(x) \in X_{\lambda_i}$ だから $x \in \pi_{\lambda_1}^{-1}(X_{\lambda_1}) \cap \cdots \cap \pi_{\lambda_n}^{-1}(X_{\lambda_n})$.

よって補題 1 の条件 2 から $\emptyset \neq \displaystyle\bigcap_{\lambda\in\Lambda} \pi_\lambda^{-1}(X_\lambda) = \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ である．

($2 \Longrightarrow 4$) 開集合が有限個の空間はコンパクトなので明らか．

($4 \Longrightarrow 5$) 明らか．

($5 \Longrightarrow 1$) $3 \Longrightarrow 1$ の証明において，Y_λ の位相を

$$\mathcal{O}_{Y_\lambda} := \{\emptyset,\ \{\infty\},\ Y_\lambda\}$$

で定めればよい． □

定理． 任意の整数 $n \geq 3$ に対して
選択公理 $\Longleftrightarrow$ 開集合が丁度 n 個な空間の直積はコンパクト．

証明． $Y_\lambda := X_\lambda \sqcup \mathbb{N}$ として

$$\mathcal{O}_{Y_\lambda} := \big\{\emptyset,\ \mathbb{N},\ Y_\lambda, \{4\},\ \{4,5\},\ \cdots, \{4,5,\cdots,n\}\big\}$$

と定めればよい． □

定理． 任意の整数 $n \geq 3$ に対して，以下の命題は (ZF 上) 同値．

1. 選択公理
2. 互いに同相なコンパクト空間の直積はコンパクト．
3. 互いに同相な，開集合が丁度 n 個ある空間の直積はコンパクト．

証明． $1 \Longrightarrow 2$ と $2 \Longrightarrow 3$ は明らか．

$(3 \Longrightarrow 1)$ 選択公理は

$$\text{非空集合の族 } \{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \text{で全ての } X_\lambda \text{の濃度が等しいもの，に対して } \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \neq \emptyset.$$

と同値だった (集合に関する命題を参照) ことから明らか．

しかし，直接選択公理を示すことも出来るので，その証明を書いておく．簡単のため $n=3$ とする．$\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を互いに素な非空集合の族とする．

$X := \bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda,\ Y := X \times \mathbb{N}^X$ として Y の位相 $\mathcal{O}_\lambda$ を

$$\mathcal{O}_\lambda := \{\emptyset,\ Y,\ (X \setminus X_\lambda) \times \mathbb{N}^X\}$$

で定める．$\lambda, \mu \in \Lambda$ とすると $|X_\lambda \times \mathbb{N}^X| = |X_\mu \times \mathbb{N}^X|$ である．

$\because)$ $\langle x, f\rangle \in X \times \mathbb{N}^X$ に対し $g = g(x,f) \in \mathbb{N}^X$ を

$$g(y) := \begin{cases} 2f(y) & (y \neq x \text{ のとき}) \\ 2f(y)+1 & (y = x \text{ のとき}) \end{cases}$$

と定める．$a \in X_\mu$ を取り $\varphi : X_\lambda \times \mathbb{N}^X \longrightarrow X_\mu \times \mathbb{N}^X$ を $\varphi(x,f) := (a, g(x,f))$ で定める．すると φ は単射である．よって $|X_\lambda \times \mathbb{N}^X| \leq |X_\mu \times \mathbb{N}^X|$ となる．同様にして $\geq$ も言えるから Bernstein の定理より $=$ が分かる．

そこで，全単射 $F : X_\lambda \times \mathbb{N}^X \longrightarrow X_\mu \times \mathbb{N}^X$ により写像 $G : (Y, \mathcal{O}_\lambda) \longrightarrow (Y, \mathcal{O}_\mu)$ を

$$G(x,f) := \begin{cases} F(x,f) & (x \in X_\lambda \text{のとき}) \\ F^{-1}(x,f) & (x \in X_\mu \text{のとき}) \\ (x,f) & (\text{それ以外のとき}) \end{cases}$$

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[d, "G"] & = & (X_\lambda \times \mathbb{N}^X) \arrow[rrd, "F"] & \sqcup & (X_\mu \times \mathbb{N}^X) \arrow[lld, "F^{-1}"'] & \sqcup & (X_\nu \times \mathbb{N}^X) \arrow[d, "\mathrm{id}"] & \sqcup \cdots \\
Y & = & (X_\lambda \times \mathbb{N}^X) & \sqcup & (X_\mu \times \mathbb{N}^X) & \sqcup & (X_\nu \times \mathbb{N}^X) & \sqcup \cdots
\end{tikzcd}$$

と定める．すると G は同相写像である．故に族 $\{(Y, \mathcal{O}_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ は仮定 3 の条件を満たすので $\prod_{\lambda\in\Lambda}(Y, \mathcal{O}_\lambda)$ はコンパクトである．閉集合の族 $\{\pi_\lambda^{-1}(X_\lambda \times \mathbb{N}^X)\}_{\lambda\in\Lambda}$ は有限交差性を持つから，

$$\emptyset \neq \bigcap_{\lambda\in\Lambda} \pi_\lambda^{-1}(X_\lambda \times \mathbb{N}^X) = \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \times \mathbb{N}^X$$

となり，故に $\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda \neq \emptyset$ である． □

※「コンパクト Hausdorff 空間の直積はコンパクト」は選択公理と同値でないことが知られている．(BPI (= Boolean Prime Ideal Theorem) と同値である．) また「コンパクトの可算直積はコンパクト」は可算選択公理からでは証明できないことも知られている．

参考文献

[1] Horst Herrlich, Axiom of Choice，Springer, 2006

[2] Ofelia T. Alas, the Axiom of Choice and two particular forms of Tychonoff Theorem, Portugaliae Math., 28 (1969), 75–76, http://purl.pt/2594

[3] Paul R. Chernoff, A Simple Proof of Tychonoff's Theorem Via Nets, Amer. Math. Monthly, Vol. 99, No. 10 (1992), 932–934, http://www.jstor.org/stable/2324485