位相空間の直積・直和と選択公理

alg-d
http://alg-d.com/math/ac/

2015 年 12 月 26 日

定理 1. 選択公理
$\Longleftrightarrow$$\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ と $\{Y_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ は位相空間の族で，各 $\lambda\in\Lambda$ について $X_\lambda \cong Y_\lambda$(同相) とする．このとき $\displaystyle\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \cong \prod_{\lambda\in\Lambda} Y_\lambda$ である．

証明. ($\Longrightarrow$) $H_\lambda := \{f\colon X_\lambda \longrightarrow Y_\lambda \mid f$ は同相写像 $\}$ と置けば仮定により $H_\lambda \neq \emptyset$ である．選択公理によって $(f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \in \displaystyle\prod_{\lambda\in\Lambda} H_\lambda$ を取る．$f\colon \displaystyle\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \longrightarrow \prod_{\lambda\in\Lambda} Y_\lambda$ を $f((x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}) := (f_\lambda(x_\lambda))_{\lambda\in\Lambda}$ で定めれば f は同相写像である．

($\Longleftarrow$) $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を非空集合の族とする．まず，各 X_λ が Dedekind 無限であるとする．

※「集合 X が Dedekind 無限 $\Longleftrightarrow$ X に含まれない元 ∞ に対して $\lvert X\rvert = \lvert X\cup\{\infty\}\rvert$」が成り立つ．定義などは有限集合・無限集合の定義を参照.

どの X_λ にも含まれない元 ∞ を一つ取り，$Y_\lambda := X_\lambda \cup \{\infty\}$ とする．X_λ, Y_λ に離散位相を入れると，$\lvert X_\lambda\rvert = \lvert Y_\lambda\rvert$ だから $X_\lambda \cong Y_\lambda$ である．故に仮定から $\displaystyle\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \cong \prod_{\lambda\in\Lambda} Y_\lambda \neq \emptyset$ が分かる．

X_λ が Dedekind 無限とは限らないときは $Z_\lambda := X_\lambda \times \mathbb{N}$ と置く．Z_λ は Dedekind 無限だから，既に示したように $\displaystyle\prod_{\lambda\in\Lambda} Z_\lambda \neq \emptyset$ である．よって元 $(\langle x_\lambda, n_\lambda\rangle)_{\lambda\in\Lambda} \in \displaystyle\prod_{\lambda\in\Lambda} Z_\lambda$ が取れるが，このとき $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \in \displaystyle\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ である． $\square$

この定理の $\Longleftarrow$ の証明では X_λ や Y_λ が離散位相である場合しか使っていない．故に次の系が分かる．

系 2. 次の命題は (ZF 上) 同値.

1. 選択公理
2. $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ と $\{Y_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ は集合族で，各 $\lambda\in\Lambda$ について $|X_\lambda|=|Y_\lambda|$ とする．このとき $\left|\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda\right| = \left|\prod_{\lambda\in\Lambda} Y_\lambda\right|$ である．
3. $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ と $\{Y_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ は離散位相空間の族で，各 $\lambda\in\Lambda$ について $X_\lambda \cong Y_\lambda$ とする．このとき $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \cong \prod_{\lambda\in\Lambda} Y_\lambda$ である．
4. $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ と $\{Y_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ は距離空間の族で，各 $\lambda\in\Lambda$ について $X_\lambda \cong Y_\lambda$ とする．このとき $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \cong \prod_{\lambda\in\Lambda} Y_\lambda$ である．
5. $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ と $\{Y_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ は一様空間の族で，各 $\lambda\in\Lambda$ について $X_\lambda \cong Y_\lambda$ とする．このとき $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \cong \prod_{\lambda\in\Lambda} Y_\lambda$ である． □

定理 3. 選択公理

$\Longleftrightarrow$ $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ と $\{Y_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ はコンパクト Hausdorff 空間の族で，各 $\lambda\in\Lambda$ について $X_\lambda \cong Y_\lambda$ とする．このとき $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \cong \prod_{\lambda\in\Lambda} Y_\lambda$ である．

証明. ($\Longrightarrow$) 明らか．

($\Longleftarrow$) $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を非空集合の族とする．次の性質を満たすような Dedekind 無限集合 K を取ることができる: $\{F_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ が有限集合の族ならば $K \not\subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda$ である．

$\because$) $A := \{\aleph \mid$ 全射 $\Lambda\times\mathbb{N} \longrightarrow \aleph$ が存在する $\}$ として $|K| > \sup A$ となるような整列順序集合 K を取ればよい．

この K が条件を満たすことを示すため，有限集合の族 $\{F_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ が $K \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda$ を満たすと仮定する．$K = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda$ としてよい．このとき K の整列順序により各 F_λ に順序が入る．これを使って $F_\lambda = \{x_\lambda^0, \ldots, x_\lambda^{n_\lambda - 1}\}$ と書くことが出来る．元 $a\in K$ を一つ取り，写像 $f\colon \Lambda\times\mathbb{N} \longrightarrow K$ を

$$f(\lambda, n) := \begin{cases} x_\lambda^n & (n < n_\lambda\text{のとき}) \\ a & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

により定める．この f は明らかに全射である．故に $|K| \in A$ となるが，それは $|K| > \sup A$ に矛盾する．

定理 1 のときと同様，必要ならば $X_\lambda \times K$ を考えることにより，$|K| \le |X_\lambda|$ と仮定しても一般性を失わない．(このとき X_λ は Dedekind 無限である．)

どの X_λ にも含まれない異なる二つの元 a, b を取る．$Y_\lambda := X_\lambda \cup \{a\}$ を離散位相空間

X_λ の一点コンパクト化，$Z_\lambda := X_\lambda \cup \{a, b\}$ を離散位相空間 $X_\lambda \cup \{a\}$ の一点コンパクト化，とする．即ち，Y_λ, Z_λ の位相を

$$\mathcal{O}_{Y_\lambda} := \mathcal{P}(X_\lambda) \cup \{O \subset Y_\lambda \mid |Y_\lambda \setminus O| < \infty\}$$
$$\mathcal{O}_{Z_\lambda} := \mathcal{P}(Y_\lambda) \cup \{O \subset Z_\lambda \mid |Z_\lambda \setminus O| < \infty\}$$

で定める．これにより Y_λ, Z_λ はコンパクト Hausdorff 空間で，$Y_\lambda \cong Z_\lambda$ となる．故に仮定から同相写像 $f\colon \prod_{\lambda\in\Lambda} Y_\lambda \longrightarrow \prod_{\lambda\in\Lambda} Z_\lambda$ が存在する．$z := (a)_{\lambda\in\Lambda} \in \prod_{\lambda\in\Lambda} Z_\lambda$ だから $f(y) = z$ となるような $y = (y_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \in \prod_{\lambda\in\Lambda} Y_\lambda$ が存在する．$y \in \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ であることを示せば証明が終わる．その為に $y \notin \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ と仮定すると，ある $\mu \in \Lambda$ が存在して $y_\mu \in Y_\mu \setminus X_\mu = \{a\}$，即ち $y_\mu = a$ である．$A := \left(\prod_{\lambda\neq\mu} \{y_\lambda\}\right) \times X_\mu \subset \prod_{\lambda\in\Lambda} Y_\lambda$ と置く．$|A| = |X_\mu| \geq |K|$ である．y の開近傍 $U \subset \prod_{\lambda\in\Lambda} Y_\lambda$ を任意に取ると O_{Y_λ} の定義から $|A \setminus U| < \infty$ である．$B := f(A)$ と置けば f が同相写像だから，$|B| = |A| \geq K$，かつ z の任意の開近傍 $V \subset \prod_{\lambda\in\Lambda} Z_\lambda$ に対し $|B \setminus V| < \infty$ が分かる．$\{a\} \subset Z_\lambda$ は開集合だから $|B \setminus \pi_\lambda^{-1}(a)| < \infty$ である．$y \notin A$ だから $z = f(y) \notin B$，故に

$$B = B \setminus \{z\} = B \setminus \bigcap_{\lambda\in\Lambda} \pi_\lambda^{-1}(a) = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \left(B \setminus \pi_\lambda^{-1}(a)\right).$$

これは K の取り方に反する． □

同様のことが，直積を直和に変えても成り立つ．

定理 4. 次の命題は (ZF 上) 同値.

1. 選択公理
2. $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ と $\{Y_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ は位相空間の族で，各 $\lambda \in \Lambda$ について $X_\lambda \cong Y_\lambda$ とする．このとき $\coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \cong \coprod_{\lambda\in\Lambda} Y_\lambda$.
3. $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ と $\{Y_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ は距離空間の族で，各 $\lambda \in \Lambda$ について $X_\lambda \cong Y_\lambda$ とする．このとき $\coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \cong \coprod_{\lambda\in\Lambda} Y_\lambda$.
4. $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ と $\{Y_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ はコンパクト Hausdorff 空間の族で，各 $\lambda \in \Lambda$ について $X_\lambda \cong Y_\lambda$ とする．このとき $\coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \cong \coprod_{\lambda\in\Lambda} Y_\lambda$.

証明． $1 \Longrightarrow 2$ と $2 \Longrightarrow 3$ と $2 \Longrightarrow 4$ は明らか．

$(4 \Longrightarrow 1)$ $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を互いに素な非空集合の族とする．定理 3 の証明と同様，X_λ は Dedekind 無限集合としてよい．どの X_λ にも含まれない元 ∞ を一つ取り $Y_\lambda := X_\lambda \cup \{\infty\}$ と置き，X_λ と Y_λ に離散位相を入れる．$I := (0,1] \subset \mathbb{R}$ を半開区間として，直積位相空間 $X_\lambda \times I$, $Y_\lambda \times I$ を考える．これらは局所コンパクト Hausdorff 空間である．X_λ^* と Y_λ^* を $X_\lambda \times I$ と $Y_\lambda \times I$ の一点コンパクト化とすると X_λ^* と Y_λ^* は連結なコンパクト Hausdorff 空間である．

$\because$) まず $X_\lambda \times I$ の一点コンパクト化 X_λ^* の定義を確認する．($Y_\lambda \times I$ についても同様．) $X_\lambda \times I$ に含まれない元 a_λ を一つ取り $X_\lambda^* := (X_\lambda \times I) \cup \{a_\lambda\}$ と置く．X_λ^* の位相を

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{X_\lambda^*} &:= \mathcal{O}_{X_\lambda\times I} \cup \mathcal{Q}_\lambda \\ \mathcal{Q}_\lambda &:= \{O \cup \{a_\lambda\} \mid O \in \mathcal{O}_{X_\lambda\times I},\ (X_\lambda \times I)\setminus O \subset X_\lambda \times I \text{ はコンパクト } \} \end{aligned}$$

で定める．

まず X_λ^* がコンパクト Hausdorff 空間であることは簡単に分かる．

次に X_λ^* が連結であることを示す．$O_1, O_2 \subset X_\lambda^*$ を互いに素な開集合で $X_\lambda^* = O_1 \cup O_2$ を満たすとする．$a_\lambda \in O_1$ としてよい．$O_2 \neq \emptyset$ と仮定する．ある $x \in X_\lambda$, $r \in I$ が存在して $\langle x, r\rangle \in O_2$ である．すると，I は連結だから $\{x\} \times I \subset O_2$ である．$\mathcal{O}_{X_\lambda^*}$ の定義から $(X_\lambda \times I)\setminus O_1 = O_2$ は ($X_\lambda \times I$ の) コンパクト閉集合である O_2 がコンパクトだから，その閉部分集合 $\{x\}\times I \subset O_2$ もコンパクト．しかし，明らかに $\{x\}\times I$ はコンパクトでないから矛盾する．故に $O_2 = \emptyset$ となり X_λ^* の連結性が分かった．

$\lambda \in \Lambda$ とする．このとき $X_\lambda^* \cong Y_\lambda^*$ である．

$\because$) X_λ が Dedekind 無限であるから全単射 $h_\lambda \colon X_\lambda \longrightarrow Y_\lambda$ が存在する．このとき $g_\lambda := h_\lambda \times \mathrm{id}_I : X_\lambda \times I \longrightarrow Y_\lambda \times I$ とすると g_λ は同相写像である．$Y_\lambda^* \setminus (Y_\lambda \times I) = \{b_\lambda\}$ と書いて，$f_\lambda \colon X_\lambda^* \longrightarrow Y_\lambda^*$ を

$$f(y) := \begin{cases} g(x) & (x \in X_\lambda \times I \text{ のとき}) \\ b_\lambda & (x = a_\lambda \text{のとき}) \end{cases}$$

で定めれば f_λ は同相写像である．

よって仮定 4 から同相写像 $f\colon \coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda^* \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda} Y_\lambda^*$ が存在する．X_λ^*, Y_λ^* はそれぞ

れ $\coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda^*$, $\coprod_{\lambda\in\Lambda} Y_\lambda^*$ の連結成分である．故にある写像 $h\colon \Lambda \longrightarrow \Lambda$ が存在して，任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して $f(X_\lambda^*) = Y_{h(\lambda)}^*$ となる．$\langle\infty, 1\rangle \in Y_{h(\lambda)} \times I \subset Y_{h(\lambda)}^*$ だから $\langle x_\lambda, r_\lambda\rangle := f^{-1}(\langle\infty, 1\rangle)$ と定めると $\langle x_\lambda, r_\lambda\rangle \in X_\lambda \times I$ である．

$(3 \Longrightarrow 1)$ $4 \Longrightarrow 1$ の証明において X_λ^*, Y_λ^* の位相を次のように変更すればよい．X_λ^* の位相は

$$\begin{aligned} &a_\lambda \text{の開近傍系を } \{X_\lambda \times (0, r) \mid r \in I\} \\ &\langle x, r\rangle \text{ の開近傍系を } \{\{x\} \times U \mid r \in U \in \mathcal{O}_I\} \end{aligned}$$

で定める．Y_λ^* についても同様. □

> ※ 系 2 の条件 2 の直和バージョン「$\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ と $\{Y_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ は集合族で，各 $\lambda \in \Lambda$ について $|X_\lambda| = |Y_\lambda|$ とする．このとき $\left|\coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda\right| = \left|\coprod_{\lambda\in\Lambda} Y_\lambda\right|$ である」が選択公理と同値かどうかは未解決問題であるが，Partition Principle を導くことは知られている．Partition Principle を参照.

定義. $(X, \mathcal{O})$ を位相空間，$\mathcal{U} \subset \mathcal{O}$ とする．

1. $\mathcal{V} \subset \mathcal{O}$ が $\mathcal{U}$ の開細分 $\Longleftrightarrow$ 任意の $V \in \mathcal{V}$ に対してある $U \in \mathcal{U}$ が存在して $V \subset U$ となる．
2. $\mathcal{U}$ が局所有限 $\Longleftrightarrow$ 任意の $x \in X$ に対してある $x \in O \in \mathcal{O}$ が存在して $|\{U \in \mathcal{U} \mid U \cap O \neq \emptyset\}| < \infty$ となる．
3. $\mathcal{U}$ が点有限 $\Longleftrightarrow$ 任意の $x \in X$ に対して $|\{U \in \mathcal{U} \mid x \in U\}| < \infty$ となる．
4. $\mathcal{U}$ が shrinkable $\Longleftrightarrow$ 開被覆 $\{V_U\}_{U\in\mathcal{U}}$ で，任意の $U \in \mathcal{U}$ に対して $\emptyset \neq \bar{V}_U \subset U$ となるものが存在する．

定義. X を位相空間とする．

1. X がパラコンパクト $\Longleftrightarrow$ X の開被覆は局所有限な開細分を持つ．
2. X がメタコンパクト $\Longleftrightarrow$ X の開被覆は点有限な開細分を持つ．
3. X が PFCS $\Longleftrightarrow$ X の点有限な開被覆は shrinkable である．

定理 5. AMC $\Longleftrightarrow$ パラコンパクト空間の直和はパラコンパクトである．

証明. $(\Longrightarrow)$ $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ をパラコンパクト空間の族として $X := \coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ を直和，$\mathcal{U}$ を X の開被覆とする．任意の $U \in \mathcal{U}$ に対して $\lambda \in \Lambda$ が一意に存在して $U \subset X_\lambda$ となる，と

してよい．$\mathcal{U}_\lambda := \{U \in \mathcal{U} \mid U \subset X_\lambda\}$，$A_\lambda := \{\mathcal{V} \mid \mathcal{V}$ は $\mathcal{U}_\lambda$ の局所有限な開細分 $\}$ と置く．$\mathcal{U}_\lambda$ は X_λ の開被覆で X_λ がパラコンパクトだから，$A_\lambda \neq \emptyset$ である．故に $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ に AMC を適用して，有限集合の族 $\{F_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を $\emptyset \neq F_\lambda \subset A_\lambda$ となるように取ることが出来る．このとき $\mathcal{V}_\lambda := \displaystyle\bigcup_{\mathcal{W}\in F_\lambda} \mathcal{W}$ は $\mathcal{U}_\lambda$ の局所有限開細分で，$\displaystyle\bigcup_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{V}_\lambda$ は $\mathcal{U}$ の局所有限な開細分である．

($\Longleftarrow$) $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を非空集合の族とする．各 X_λ は無限集合としてよい．X_λ に離散位相を入れて $X_\lambda^* = X_\lambda \cup \{\infty_\lambda\}$ を一点コンパクト化とする．X_λ^* はパラコンパクトだから，仮定により直和 $X := \displaystyle\coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda^*$ もパラコンパクトである．

$$\mathcal{U} := \{U \subset X \mid \text{ある } \lambda \in \Lambda \text{ に対して } U \subsetneq X_\lambda^* \text{ かつ } U \text{ は } \infty_\lambda \text{ の開近傍 }\}$$

は X の開被覆だから，局所有限な開細分 $\mathcal{V}$ が存在する．このとき $F_\lambda := \displaystyle\bigcup_{\infty_\lambda\in U\in\mathcal{V}} X_\lambda \setminus U$ は有限集合である．□

定理 6. AMC $\Longleftrightarrow$ メタコンパクト空間の直和はメタコンパクトである．

証明. 定理 5 と同様．□

定理 7. AMC $\Longleftrightarrow$ PFCS 空間の直和は PFCS である．

証明. ($\Longrightarrow$) 定理 5 と同様．

($\Longleftarrow$) $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を非空集合の族とする．各 X_λ は無限集合としてよい．定理 5 の証明と同様の構成をすれば，X_λ^* は PFCS だから仮定より X も PFCS である．$\mathcal{U} := \{X_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\} \cup \{X_\lambda^* \mid \lambda \in \Lambda\}$ は X の開被覆だから，開被覆 $\{V_U\}_{U\in\mathcal{U}}$ で，任意の $U \in \mathcal{U}$ に対して $\emptyset \neq \bar{V}_U \subset U$ となるものが存在する．即ち $\lambda \in \Lambda$ に対して $\emptyset \neq \bar{V}_{X_\lambda} \subset X_\lambda$ である．このとき $V_{X_\lambda} \subset X_\lambda$ は空でない有限集合である．□

定理 8. AMC $\Longleftrightarrow$ コンパクト Hausdorff 空間の直和はパラコンパクトである．

証明. ($\Longrightarrow$) 定理 5 から明らか．

($\Longleftarrow$) 定理 5 の証明の X_λ^* はコンパクト Hausdorff である．故に同様にして AMC がわかる．□

定理 9. AMC $\Longleftrightarrow$ コンパクト Hausdorff 空間の直和はメタコンパクトである．

証明. 定理 8 と同様．□

定理 10. AMC $\Longleftrightarrow$ コンパクト Hausdorff 空間の直和は PFCS である．

証明. 定理 8 と同様． $\square$

定義.
1. 集合 A に対して $\bigcup A := \bigcup_{x \in A} x$ と書く．
2. 集合 S が Δ-システム
$\Longleftrightarrow$ ある集合 r が存在して任意の $x, y \in S$ に対して「$x \neq y \Longrightarrow x \cap y = r$」．
この集合 r を根と呼ぶ．

補題 11. n を正整数，S を n 元集合からなる無限集合とするとき，ある有限部分集合 $r \subset \bigcup S$ が存在して任意の正整数 k に対してある $T \subset S$ が存在して「$|T| = k$ かつ T は r を根とする Δ-システム」となる．

証明. n に関する帰納法．$n = 1$ のときは $r = \emptyset$ とすればよい．

$n > 1$ のとき．$x \in S$ と $m \geq 0$ に対して

$$E_m(x) := \begin{cases} \{x\} & (m = 0 \text{ のとき}) \\ \left\{ y \in S \;\middle|\; y \cap \left(\bigcup E_{m-1}(x)\right) \neq \emptyset \right\} & (m > 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

とする．S の同値関係 $\sim$ を

$$x \sim y \Longleftrightarrow \text{ある } m \geq 0 \text{ が存在して } y \in E_m(x)$$

で定める．$x \in S$ の属する同値類を $[x]$ で表すことにする．明らかに，$[x] \neq [y]$ のとき $x \cap y = \emptyset$ である．よって $S/{\sim}$ が無限集合のときは $r = \emptyset$ とすればよいから，$S/{\sim}$ は有限集合であるとする．$[x]$ が無限集合となるような $x \in S$ が存在するので，そのような $x \in S$ を一つ取る．

(i) 任意の有限部分集合 $z \subset \bigcup [x]$ に対して，ある $y \in [x]$ が存在して $y \cap z = \emptyset$ となるとき．任意の正整数 k に対してある $T \subset [x]$ が存在して「$|T| = k$ かつ T は $\emptyset$ を根とする Δ-システム」となる．

> $\because$) k に関する帰納法．$k = 1$ のときは明らか．
> $k > 1$ のとき．帰納法の仮定により $T \subset [x]$ で「$|T| = k - 1$ かつ T は $\emptyset$ を根とする Δ-システム」となるものが存在する．$T = \{y_1, \cdots, y_{k-1}\}$ と書く．$y_1 \cup \cdots \cup y_{k-1} \subset \bigcup [x]$ は有限部分集合だから，ある $y_k \in [x]$ が存在して $y_k \cap (y_1 \cup \cdots \cup y_{k-1}) = \emptyset$ である．よって $T \cup \{y_k\}$ が条件を満たす．

故に $r = \emptyset$ とすればよい．

(ii) ある有限部分集合 $z \subset \bigcup [x]$ が存在して，任意の $y \in [x]$ に対して $y \cap z \neq \emptyset$ となるとき．$w \subset z$ で $U := \{y \in [x] \mid y \cap z = w\}$ が無限集合となるものを取る．($[x]$ が無限集合だからこのような w は存在する．) $|w| \geq 1$ である．$A := \{y \setminus w \mid y \in U\}$ と置く．w の取り方から，A は $(n - |w|)$ 元集合からなる集合である．故に帰納法の仮定から，$r_0 \subset \bigcup A$ が取れる．

$r := r_0 \cup w$ とする．正整数 k を取る．r_0 の取り方から，ある $B \subset A$ が存在して「$|B| = k$ かつ B は r_0 を根とする Δ-システム」となる．よって $T := \{b \cup w \mid b \in B\}$ と置けば「$|T| = k$ かつ T は r を根とする Δ-システム」である． $\square$

補題 12. $\mathcal{A}$ を有限集合からなる無限集合として，k は非負整数，x は $\bigcup \mathcal{A}$ の有限部分集合を動くとする．$D(x) := \{a \in \mathcal{A} \mid a \cap x = \emptyset\}$ と置く．$\mathcal{A}$ は「ある k, x に対して $|D(x)| \leq k$」を満たすとして

$$n_0 := \min\{\, n > 0 \mid \text{ある } x, k \text{ が存在して } |x| = n \text{ かつ } |D(x)| \leq k \,\}$$

と置き，

$$k_0 \in \{\, k \geq 0 \mid \text{ある } x \text{ が存在して } |x| = n_0 \text{ かつ } |D(x)| \leq k \,\}$$

を一つ取る．このとき $S := \{x \subset \bigcup \mathcal{A} \mid |x| = n_0,\ |D(x)| \leq k_0\}$ は有限集合である．

証明. S が無限集合であると仮定する．S に補題 11 を適用して $r \subset \bigcup S$ を得る．明らかに $|r| < n_0$ であり，また n_0 の最小性から $D(r)$ は無限集合である．$T \subset S$ を r を根とする Δ-システムとするとき任意の $a \in D(r)$ に対して $\bigl|\{x \in T \mid x \cap a \neq \emptyset\}\bigr| \leq |a|$ である．

$\because$) $x_1, \cdots, x_m \in \{x \in T \mid x \cap a \neq \emptyset\}$ を互いに異なる元とする．T の取り方から $i \neq j$ に対して $x_i \cap x_j = r$ である．故に $x_1 \setminus r, \cdots, x_m \setminus r$ は互いに素である．一方 $b \in D(r)$ だから $b \cap r = \emptyset$ となる．よって $(x_i \setminus r) \cap a = x_i \cap a \neq \emptyset$ である．従って $((x_1 \setminus r) \cap a) \cup \cdots \cup ((x_m \setminus r) \cap a) \subset b$ から $m \leq |a|$ でなければならない．

異なる k_0 個の元 $a_1, \cdots, a_{k_0} \in D(r)$ を取る．$\left|\bigcup_{i=1}^{k_0} \{x \in T \mid x \cap a_i \neq \emptyset\}\right| \leq \sum_{i=1}^{k_0} |a_i| =: M$ である．$N > 0$ を任意に取る．r の取り方により，ある $T \subset S$ が存在して「$|T| = M + N$ かつ T は r を根とする Δ-システム」とできる．$T' := T \setminus \bigcup_{i=1}^{k_0} \{x \in T \mid x \cap a_i \neq \emptyset\}$ と置けば $|T'| \geq N$ である．$a_0 \in D(r) \setminus \{a_1, \cdots, a_{k_0}\}$ を一つ取る．

任意の $x \in T'$ を取る．任意の $1 \leq i \leq k_0$ に対して $x \cap a_i = \emptyset$ となる．また $x \in T' \subset S$ だから $|D(x)| \leq k_0$ であり，$a \cap x = \emptyset$ となる $a \in \mathcal{A}$ は高々 k_0 個しかない．よって $a_0 \cap x \neq \emptyset$ でなければならない．$x \in T'$ は任意だったから，$T' \subset \{x \in T \mid a_0 \cap x \neq \emptyset\}$

である．故に $N \leq |T'| \leq \bigl|\{x \in T \mid x \cap a_0 \neq \emptyset\}\bigr| \leq |a_0|$ となる．$N > 0$ は任意だったから a_0 が無限集合となり矛盾する． □

定義. X を位相空間とする．

1. X が T_4 空間
   $\iff$ 互いに素な閉集合 $E, F \subset X$ に対して，ある開集合 $U, V \subset X$ が存在して $E \subset U,\ F \subset V,\ U \cap V = \emptyset$ となる
2. X が U-空間
   $\iff$ 互いに素な閉集合 $E, F \subset X$ に対してある連続関数 $f\colon X \longrightarrow [0,1]$ が存在して $f|_E = 0,\ f|_F = 1$ となる．
3. X が T-空間
   $\iff$ $F \subset X$ を閉集合，$f\colon F \longrightarrow [0,1]$ を連続関数とするとき，ある連続関数 $\overline{f}\colon X \longrightarrow [0,1]$ が存在して $\overline{f}|_F = f$ となる．
4. X が collectionwise Hausdorff
   $\iff$ $F \subset X$ が離散閉集合ならば，X の互いに素な開集合の族 $\{U_x\}_{x \in F}$ が存在して，$x \in F$ に対して $x \in U_x$ となる．
5. X が collectionwise T_4
   $\iff$ $\{F_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ が X の互いに素な閉集合の族ならば，X の互いに素な開集合の族 $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ が存在して，$\lambda \in \Lambda$ に対して $F_\lambda \subset U_\lambda$ となる．

命題 13.
1. T-空間は U-空間である．
2. U-空間は T_4 空間である．
3. パラコンパクト Hausdorff 空間は T_4 空間である．
4. 選択公理 $\Longrightarrow$ T_4 空間は U-空間である．(Urysohn の補題)
5. 選択公理 $\Longrightarrow$ T_4 空間は T-空間である．(Tietze の拡張定理) □

※ 即ち，選択公理の下では T_4 空間，U-空間，T-空間は同一の概念である．また「T_4 空間 $\Longrightarrow$ U-空間」や「T_4 空間 $\Longrightarrow$ T-空間」は ZF では証明できないことが知られている．[3]

定理 14. 次の命題は (ZF 上) 同値.

1. AMC
2. T-空間の直和は T-空間である．

3. T-空間の直和は U-空間である．
4. T-空間の直和は T_4 空間である．
5. U-空間の直和は U-空間である．
6. U-空間の直和は T_4 空間である．
7. T_4 空間の直和は T_4 空間である．
8. パラコンパクト Hausdorff 空間の直和は T_4 空間である．
9. collectionwise Hausdorff 空間の直和は collectionwise Hausdorff である．
10. collectionwise T_4 空間の直和は collectionwise T_4 である．
11. collectionwise T_4 空間の直和は T_4 空間である．

証明． 2⟹3，3⟹4，5⟹6，6⟹4，8⟹7，7⟹6，10⟹11 は明らかだから，1⟹2，1⟹5，1⟹8，4⟹1 と 1⟹9，9⟹1 と 1⟹10，11⟹1 を示せばよい．

$(1 \Longrightarrow 2)$ $\{(X_\lambda, \mathcal{O}_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ を T-空間の族として $X := \coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ とする．$F \subset X$ を閉集合，$f\colon F \longrightarrow [0,1]$ を連続写像とする．$F_\lambda := F \cap X_\lambda$，$f_\lambda := f|_{F_\lambda}$ とすれば，X_λ が T-空間であることから

$$A_\lambda := \{g\colon X_\lambda \longrightarrow [0,1] \mid g|_{F_\lambda} = f_\lambda\}$$

は空でない．$\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ に AMC を適用して空でない有限集合 $B_\lambda \subset A_\lambda$ を得る．このとき連続関数 $\overline{f}\colon X \longrightarrow [0,1]$ を $x \in X_\lambda$ に対して $\overline{f}(x) := \max\{g(x) \mid g \in B_\lambda\}$ で定めれば $\overline{f}|_F = f$ である．

$(4 \Longrightarrow 1)$ $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を非空集合の族とする．各 X_λ は無限集合としても一般性を失わない．$\mathcal{P}^0_{\mathrm{fin}}(X_\lambda) := \{F \subset X_\lambda \mid 0 < |F| < \infty\}$ として

$$M_\lambda := \left\{ \langle \mathcal{A}, \mathcal{B} \rangle \;\middle|\; \begin{array}{l} \mathcal{A}, \mathcal{B} \subset \mathcal{P}^0_{\mathrm{fin}}(X_\lambda),\ \mathcal{A}, \mathcal{B} \neq \emptyset \\ \text{任意の } F \in \mathcal{A} \text{ と任意の } G \in \mathcal{B} \text{ に対して } F \cap G \neq \emptyset \end{array} \right\}$$

と定義する．このとき $f_\lambda : M_\lambda \longrightarrow \mathcal{P}^0_{\mathrm{fin}}(X_\lambda)$ となる写像の族 $(f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ が存在する．

∵) $\langle \mathcal{A}, \mathcal{B} \rangle \in M_\lambda$ とする．まず $\mathcal{A}$ が無限集合だとする．($\mathcal{A}$ に補題 12 を適用する．) $G \in \mathcal{B}$ に対して $G \cap \bigcup \mathcal{A}$ は $\bigcup \mathcal{A}$ の有限部分集合であり，M_λ の定義から $|D(G \cap \bigcup \mathcal{A})| \leq 0$ を満たす．よって

$$n_0 := \min\{\, n > 0 \mid \text{ある } x, k \text{ が存在して } |x| = n \text{ かつ } |D(x)| \leq k \,\}$$

が存在する．

$$k_0 := \min\{\, k \geq 0 \mid \text{ある } x \text{ が存在して } |x| = n_0 \text{ かつ } |D(x)| \leq k \,\}$$

とすれば，補題 12 により $S := \{x \subset \bigcup \mathcal{A} \mid |x| = n_0,\ |D(x)| \leq k_0\}$ は有限集合である．

そこで $f_\lambda(\mathcal{A}, \mathcal{B}) := \begin{cases} \bigcup \mathcal{A} & (\mathcal{A} \text{ が有限集合のとき}) \\ \bigcup S & (\mathcal{A} \text{ が無限集合のとき}) \end{cases}$ とすれば $f_\lambda(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \in \mathcal{P}^0_{\mathrm{fin}}(X_\lambda)$ である．

$a_\lambda := \langle 0, X_\lambda \rangle$, $b_\lambda := \langle 1, X_\lambda \rangle$ として $Y_\lambda := \{a_\lambda, b_\lambda\} \cup \mathcal{P}^0_{\mathrm{fin}}(X_\lambda)$ と置く．$F \in \mathcal{P}^0_{\mathrm{fin}}(X_\lambda)$ に対して $F^\uparrow := \{G \in \mathcal{P}^0_{\mathrm{fin}}(X_\lambda) \mid F \subset G\}$, $F^* := \{G \in \mathcal{P}^0_{\mathrm{fin}}(X_\lambda) \mid F \cap G \neq \emptyset\}$ とする．Y_λ の開集合 $U \subset Y_\lambda$ を次の二条件を満たすものとして定める．

(1) $a_\lambda \in U$ ならばある $F \in \mathcal{P}^0_{\mathrm{fin}}(X_\lambda)$ が存在して $F^\uparrow \subset U$
(2) $b_\lambda \in U$ ならばある $F \in \mathcal{P}^0_{\mathrm{fin}}(X_\lambda)$ が存在して $F^* \subset U$

すると各 Y_λ は T-空間である．

$\because$) まず Y_λ が位相空間であることを示す．

(i) 明らかに $\emptyset$ と Y_λ は開集合である．

(ii) 開集合の和集合も明らかに開である．

(iii) U, V を開集合とする．$a_\lambda \in U \cap V$ とする．このとき $a_\lambda \in U$, $a_\lambda \in V$ である．よってある $F_U, F_V \in \mathcal{P}^0_{\mathrm{fin}}(X_\lambda)$ が存在して $F_U^\uparrow \subset U$, $F_V^\uparrow \subset V$ となる．このとき $F := F_U \cup F_V$ と置けば明らかに $F^\uparrow \subset U \cap V$ である．故に $U \cap V$ は開集合の定義 (1) を満たす．(2) についても同様である．

以上により Y_λ は位相空間である．

Y_λ が T-空間であることを示すため，$A \subset Y_\lambda$ を閉集合，$f\colon A \longrightarrow [0,1]$ を連続写像とする．Y_λ の位相の定義から，$y \neq a_\lambda, b_\lambda$ のとき $\{y\} \subset Y_\lambda$ が開であることに注意し，$\overline{f}\colon Y_\lambda \longrightarrow [0,1]$ を以下のように定義すればよい．

(i) $a_\lambda, b_\lambda \notin A$ のとき．

$$\overline{f}(y) := \begin{cases} f(y) & (y \in A \text{ のとき}) \\ 0 & (y \notin A \text{ のとき}) \end{cases}$$

と定義すれば $\overline{f}$ は連続である．

(ii) $a_\lambda, b_\lambda \in A$ のとき．

開近傍 $U \ni a_\lambda,\ V \ni b_\lambda,\ U \cap V = \emptyset$ を取り

$$\overline{f}(y) := \begin{cases} f(y) & (y \in A \text{ のとき}) \\ f(a_\lambda) & (y \in U \setminus A \text{ のとき}) \\ f(b_\lambda) & (y \in V \setminus A \text{ のとき}) \\ 0 & (\text{それ以外のとき}) \end{cases}$$

と定義すれば $\overline{f}$ は連続である.

(iii) $a_\lambda \in A, b_\lambda \notin A$ のとき.

開近傍 $U \ni a_\lambda,\ V \ni b_\lambda,\ U \cap V = \emptyset,\ V \cap A = \emptyset$ を取り

$$\overline{f}(y) := \begin{cases} f(y) & (y \in A \text{ のとき}) \\ f(a_\lambda) & (y \in U \setminus A \text{ のとき}) \\ 0 & (\text{それ以外のとき}) \end{cases}$$

と定義すれば $\overline{f}$ は連続である.

(iv) $a_\lambda \notin A, b_\lambda \in A$ のとき.

(iii) と同様.

$Y := \coprod_{\lambda \in \Lambda} Y_\lambda$ と置く．仮定により Y は T_4 空間である．$A := \{a_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\},\ B := \{b_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ とすればこれらは Y の閉集合で互いに素である．故に $U \supset A,\ V \supset B,\ U \cap V = \emptyset$ となる開集合 U, V が存在する．$\mathcal{A}_\lambda := \{F \in \mathcal{P}^0_{\mathrm{fin}}(X_\lambda) \mid F^\uparrow \subset U\},\ \mathcal{B}_\lambda := \{F \in \mathcal{P}^0_{\mathrm{fin}}(X_\lambda) \mid F^* \subset V\}$ と置くと $\mathcal{A}_\lambda \neq \emptyset,\ \mathcal{B}_\lambda \neq \emptyset$ で，任意の $F \in \mathcal{A}_\lambda$ と任意の $G \in \mathcal{B}_\lambda$ に対して $F \cap G \neq \emptyset$ となる.

$\because$) $F \cap G = \emptyset$ とすると $F \in G^*$ である．よって $F^\uparrow \cap G^* \neq \emptyset$ となり $U \cap V = \emptyset$ に矛盾する.

故に $\langle \mathcal{A}_\lambda, \mathcal{B}_\lambda \rangle \in M_\lambda$ である．そこで $F_\lambda := f_\lambda(\mathcal{A}_\lambda, \mathcal{B}_\lambda)$ と置けばよい.

($1 \Longrightarrow 5$) $1 \Longrightarrow 2$ と同様.

($1 \Longrightarrow 7$) $\{(X_\lambda, \mathcal{O}_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ を T_4 空間の族として $X := \coprod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ とする．$E, F \subset X$ を互いに素な閉集合とする．$E_\lambda := E \cap X_\lambda,\ F_\lambda := F \cap X_\lambda$ と置けばこれらは X_λ の互いに素な閉集合．よって X_λ が T_4 だから

$$A_\lambda := \{\langle U, V \rangle \in \mathcal{O}_\lambda \times \mathcal{O}_\lambda \mid U \supset E_\lambda,\ V \supset F_\lambda,\ U \cap V = \emptyset\}$$

は空でない．$\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ に AMC を適用して空でない有限集合 $B_\lambda \subset A_\lambda$ を得る．このと

き $U_\lambda := \displaystyle\bigcap_{\langle U,V\rangle\in B_\lambda} U$，$V_\lambda := \displaystyle\bigcap_{\langle U,V\rangle\in B_\lambda} V$ とすれば $E_\lambda \subset U_\lambda$，$F_\lambda \subset V_\lambda$，$U_\lambda \cap V_\lambda = \emptyset$ である．そこで $U := \displaystyle\bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda \in \mathcal{O}$, $V := \displaystyle\bigcup_{\lambda\in\Lambda} V_\lambda \in \mathcal{O}$ とすれば明らかに

$$U \supset E,\ V \supset F,\ U \cap V = \emptyset.$$

故に X は T_4 である．

(9 $\Longrightarrow$ 1) 4$\Longrightarrow$1 の証明で定義した Y_λ は collectionwise Hausdorff である．故に仮定 11 から $Y := \displaystyle\coprod_{\lambda\in\Lambda} Y_\lambda$ は collectionwise Hausdorff となる．$A, B \subset Y$ は離散閉集合となるから，4$\Longrightarrow$1 と同様にして AMC を示すことができる．

(11 $\Longrightarrow$ 1) 4$\Longrightarrow$1 の証明で定義した Y_λ は collectionwise T_4 である．故に仮定 11 から $Y := \displaystyle\coprod_{\lambda\in\Lambda} Y_\lambda$ は T_4 空間となり，4$\Longrightarrow$1 と同様にして AMC を示すことができる． □

命題 15. 可算選択公理 $\Longleftrightarrow$ コンパクトな空間の可算直和は Lindelöf である．

証明. ($\Longrightarrow$) 明らか．

($\Longleftarrow$) $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を非空集合の族とする．離散位相空間 $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$ の一点コンパクト化を $X = \{\infty\} \cup \displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$ とする．X はコンパクトだから，仮定より $X \sqcup \mathbb{N} = X \sqcup \{0\} \sqcup \{1\} \sqcup \cdots$ は Lindelöf である．$\{X\} \cup \{\{n, x\} \mid n \in \mathbb{N},\ x \in X_n\}$ は $X \cup \mathbb{N}$ の開被覆だから，可算部分被覆 $\{U_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ が存在する．$n \in \mathbb{N}$ に対して $n^* := \min\{m \in \mathbb{N} \mid n \in U_m\}$ として $U_{n^*} = \{n, x_n\}$ と書けば $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \displaystyle\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ である． □

定理 16. 選択公理
$\Longleftrightarrow$ コンパクトな空間の直積は Lindelöf である，かつコンパクトな空間の可算直和は Lindelöf である．

証明. ($\Longrightarrow$) 明らか．

($\Longleftarrow$) 選択公理が成り立たないと仮定する．非空集合の族 $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ で $\displaystyle\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda = \emptyset$ となるものが存在する．各 X_λ に密着位相を入れて直和 $Y_\lambda := X_\lambda \cup \{\infty\}$ を考える．Y_λ はコンパクトだから仮定により $Y := \displaystyle\prod_{\lambda\in\Lambda} Y_\lambda$ は Lindelöf となる．$\pi_\lambda \colon Y \longrightarrow Y_\lambda$ を標準射影とすると，$\displaystyle\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda = \emptyset$ だから $\{\pi_\lambda^{-1}(\infty) \mid \lambda \in \Lambda\}$ は Y の開被覆である．Y が Lindelöf だから，可算部分集合 $\Gamma \subset \Lambda$ が存在して $\{\pi_\lambda^{-1}(\infty) \mid \lambda \in \Gamma\}$ が Y の開被覆となる．こ

のとき $\prod_{\lambda\in\Gamma} X_\lambda = \emptyset$ であるが，一方命題 15 より可算選択公理が成立するから，矛盾する． $\square$

参考文献

[1] Paul Howard, Kyriakos Keremedis, Herman Rubin and Jean E. Rubin, Disjoint Unions of Topological Spaces and Choice, Math. Log. Quart. 44 (1998), 493–508, `http://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1002/malq.19980440408/`

[2] Horst Herrlich and Kyriakos Keremedis, Topological sums and products in ZF-set theory, Topology and its Applications 156 (2009), 1994–1999, `http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0166864109000960`

[3] H. Läuchli, Auswahlaxiom in der Algebra, Comment. Math. Helv. 37 (1963), 1–18

[4] Horst Herrlich, Products of Lindelöf T_2-spaces are Lindelöf — in some models of ZF, Comment. Math. Univ. Carolin. 43,2 (2002), 319–333, `http://dml.cz/handle/10338.dmlcz/119322`