# 剰余群の完全代表系と選択公理

alg-d
http://alg-d.com/math/ac/

2015 年 12 月 5 日

**定理.** 集合族 $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ が「任意の $\lambda\in\Lambda$ に対し $|X_\lambda|\geq 2$」を満たすとき，ある集合族 $\{F_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ が存在して「任意の $\lambda\in\Lambda$ に対して $F_\lambda\subset X_\lambda$ かつ $|F_\lambda|$ は奇数」である．(これを OAC と呼ぶ)
$\Longleftrightarrow G$ をアーベル群で $G$ の任意の元の位数が 2 以下であるとする．このとき部分群 $H\subset G$ に対して $G/H$ の完全代表系が存在する．

**証明.** ($\Longrightarrow$) OAC を $G/H$ に適応すると，集合族 $\{F_C\}_{C\in G/H}$ で「$F_C\subset C$ かつ $|F_C|$ が奇数」となるものが取れる．$g_C := \displaystyle\sum_{x\in F_C} x$ と置けば $g_C\in C$ である．

> $\because$) $x\in G$ の属する同値類 $\in G/H$ を $[x]$ で表すことにする．$G$ の任意の元の位数が 2 以下であるから，$C+C=0$ である．よって $[g_C]=\displaystyle\sum_{x\in F_C}[x]=\sum_{x\in F_C}C=C$ となる．故に $g_C\in C$

故に $\{g_C\mid C\in G/H\}$ が完全代表系である．

($\Longleftarrow$) $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ が「任意の $\lambda\in\Lambda$ に対し $|X_\lambda|\geq 2$」を満たすとする．これらは互いに素としてよい．$V_\lambda$ を $X_\lambda$ で生成される二元体 $\mathbb{F}_2$ 上の線型空間とする．即ち

$$V_\lambda=\left\{\sum_{x\in X_\lambda}\alpha_x x \;\middle|\; \alpha_x\in\mathbb{F}_2，\text{有限個を除いて}\alpha_x=0\right\}$$

である．$V:=\displaystyle\bigoplus_{\lambda\in\Lambda}V_\lambda$ とする．勿論 $V$ は加法によりアーベル群で，任意の元の位数が 2 以下である．任意の元 $v\in V$ は $v=\displaystyle\sum_{\lambda\in\Lambda}\Big(\sum_{x\in X_\lambda}\alpha^{(v)}_{\lambda,x}x\Big)$ と一意に書ける．

$$H:=\left\{v\in V \;\middle|\; \text{任意の}\lambda\in\Lambda\text{に対して}\sum_{x\in X_\lambda}\alpha^{(v)}_{\lambda,x}=0\right\}$$

と置くと $H \subset V$ は部分群である．$\mu \in \Lambda$ に対して

$$G_\mu := \left\{ v \in V \;\middle|\; \sum_{x \in X_\mu} \alpha^{(v)}_{\mu,x} = 1,\ \text{任意の}\lambda \neq \mu\text{に対して} \sum_{x \in X_\lambda} \alpha^{(v)}_{\lambda,x} = 0 \right\}$$

とすれば $G_\mu \in V/H$ となる．仮定により完全代表系 $P$ を取ることができる．$P \cap G_\mu = \{g_\mu\}$ と書く．このとき $F_\lambda := \left\{ x \in X_\lambda \;\middle|\; \beta^{(g_\mu)}_{\lambda,x} = 1 \right\} \subset X_\lambda$ と置けば明らかに $|F_\lambda|$ は奇数である． $\square$

the Axiom of Multiple Choice によれば OAC は選択公理と同値であるから，次の系が分かる．

**系．** 次の命題は (ZF 上) 同値．

1. 選択公理
2. $G$ をアーベル群で $G$ の任意の元の位数が 2 以下であるとする．このとき部分群 $H \subset G$ に対して $G/H$ の完全代表系が存在する．
3. $G$ をアーベル群，$H \subset G$ を部分群とすれば，$G/H$ の完全代表系が存在する． $\square$

OAC と選択公理が同値であることは基礎の公理を使っているから，この系の $2 \Longrightarrow 1$ と $3 \Longrightarrow 1$ には基礎の公理が使われていることになる．実は，$3 \Longrightarrow 1$ は基礎の公理を使わずに証明できるのでその証明を書いておく．

**証明．** 選択公理と同値な次の命題を示す．

集合族 $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$が「任意の$\lambda \in \Lambda$に対し $|X_\lambda| \geq 2$」を満たすとき，
有限集合の族 $\{F_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$が存在して任意の$\lambda \in \Lambda$に対して$\emptyset \neq F_\lambda \subsetneq X_\lambda$となる．

※同値性の証明は the Axiom of Multiple Choice の定理 2 を参照．

$\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を $|X_\lambda| \geq 2$ を満たす族とする．これらは互いに素としてよい．$V_\lambda$ を $X_\lambda$ で生成されるアーベル群とする．即ち

$$V_\lambda = \left\{ \sum_{x \in X_\lambda} \alpha_x x \;\middle|\; \alpha_x \in \mathbb{Z},\ \text{有限個を除いて}\alpha_x = 0 \right\}$$

である．$V := \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda$ とする．任意の元 $v \in V$ は $v = \sum_{\lambda \in \Lambda} \Bigl( \sum_{x \in X_\lambda} \alpha^{(v)}_{\lambda,x} x \Bigr)$ と一意に書ける．

$$H := \left\{ v \in V \;\middle|\; \text{任意の}\lambda \in \Lambda\text{に対して} \sum_{x \in X_\lambda} \alpha^{(v)}_{\lambda,x} = 0 \right\}$$

と置くと $H \subset V$ は部分群である．$\mu \in \Lambda$ に対して

$$G_\mu := \left\{ v \in V \;\middle|\; \sum_{x \in X_\mu} \alpha_{\mu,x}^{(v)} = 1,\ \text{任意の}\lambda \neq \mu\text{に対して} \sum_{x \in X_\lambda} \alpha_{\lambda,x}^{(v)} = 0 \right\}$$

とすれば $G_\mu \in V/H$ となる．仮定により $V/H$ の完全代表系 $P$ を取ることができる．$P \cap G_\mu = \{g_\mu\}$ として $f(\mu) := \{x \in X_\mu \mid \alpha_{\mu,x}^{(g_\mu)} > 0\} \subset X_\mu$ と定める．明らかに $|f(\mu)| < \infty$ である．また $g_\mu \in G_\mu$ であることから $f(\mu) \neq \emptyset$ が分かる．更に $|X_\mu| \geq 2$ だから $f(\mu) \subsetneq X_\mu$ となり，証明が終わった． $\square$

# 参考文献


[1] K. Keremedis, Some equivalents of AC in algebra II, Algebra Universalis Volume 39 (1998), 163–169,
`http://www.springerlink.com/content/2bpybyhldh7cf1cq/`