MT-代数

alg-d
https://alg-d.com/math/ac/

2025 年 12 月 26 日

MT-代数とは位相空間 X の内部を取る操作 $\mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ を公理化したものである．

定義． **MT-代数**[*1]とは 2 つ組 $\langle M, \Box \rangle$ であって以下の条件を満たすものである．

(1) M は完備ブール代数で $\Box\colon M \to M$ は写像である．
(2) $\Box 1 = 1$ である[*2]．
(3) $x, y \in M$ に対して $\Box(x \wedge y) = \Box x \wedge \Box y$ である．
(4) $x \in M$ に対して $\Box x \leq x$ かつ $\Box x \leq \Box\Box x$ である．

定義． B を完備ブール代数とする．

(1) $x \in B$ が**原子** (atom) $\Longleftrightarrow$ x は $B \setminus \{0\}$ の極小元である．
(2) B が**原子的** (atomic)
$\Longleftrightarrow$ 任意の $x \in B$ に対して原子の族 $\{a_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ が存在して $x = \bigvee_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda$ となる．

例 1． 位相空間 X に対して $\Box$ を内部を取る操作とすると，$\langle \mathcal{P}(X), \Box \rangle$ が MT-代数の条件を満たすことはよく知られている．このように書ける MT-代数を **spatial** という．即ち

$$\text{MT-代数 } M \text{ が spatial} \Longleftrightarrow \text{ある位相空間 } X \text{ が存在して } M \cong \langle \mathcal{P}(X), \Box \rangle \text{ となる．}$$

が定義である．このとき

$$\text{MT-代数 } M \text{ が spatial} \Longleftrightarrow M \text{ が (完備ブール代数として) 原始的である．}$$

が知られている． $\Box$

[*1] MT は McKinsey and Tarski の頭文字らしい．
[*2] 1 は M の最大元である．同様に最小元は 0 で表す．

定義. M を MT-代数とする.

(1) $\mathsf{O}(M) := \{\Box x \mid x \in M\}$ とする.
(2) $\mathsf{C}(M) := \{\neg\Box\neg x \mid x \in M\}$ とする．$\mathsf{C}(M)$ の元を**閉元**という.
(3) $\mathsf{S}(M) := \{\bigwedge A \mid A \subset \mathsf{O}(M)\}$ とする.
(4) $x \in M$ が $\mathrm{T}_0 \iff$ ある $s \in \mathsf{S}(M)$ と $c \in \mathsf{C}(M)$ が存在して $x = s \wedge c$ となる.
(5) $x \in M$ が $\mathrm{T}_{\frac{1}{2}} \iff$ ある $u \in \mathsf{O}(M)$ と $c \in \mathsf{C}(M)$ が存在して $x = u \wedge c$ となる.
(6) $S \subset M$ が **join-dense** $\iff$ 任意の $x \in M$ に対して $A \subset S$ が存在して $x = \bigvee A$ となる.
(7) M が T_i-**代数** $\iff \{x \in M \mid x$ は $\mathrm{T}_i\}$ は join-dense である.
(8) $x \in M$ が**コンパクト** $\iff \mathcal{U} \subset \mathsf{O}(M)$ が $x \leq \bigvee \mathcal{U}$ を満たすならば，有限部分集合 $F \subset \mathcal{U}$ が存在して $x \leq \bigvee F$ となる.
(9) M が**コンパクト** $\iff 1$ がコンパクトである.

例 2. 位相空間 X に対して例 1 の MT-代数 $\mathcal{P}(X)$ を考えたとき

$$X \text{ が } \mathrm{T}_0\text{-空間} \iff \mathcal{P}(X) \text{ が } \mathrm{T}_0\text{-代数}$$

である．更に

- $x \in M$ が $\mathrm{T}_1 \iff x \in \mathsf{C}(M)$ である.
- $x \in M$ が $\mathrm{T}_2 \iff x = \bigwedge\{\neg\Box\neg u \mid x \leq u \in \mathsf{O}(M)\}$ である.

と定義すれば $i = 1, 2$ に対しても

$$X \text{ が } \mathrm{T}_i\text{-空間} \iff \mathcal{P}(X) \text{ が } \mathrm{T}_i\text{-代数}$$

であることが知られている．また明らかに

$$X \text{ がコンパクトな位相空間} \iff \mathcal{P}(X) \text{ がコンパクト MT-代数}$$

である. □

MT-代数 M に対して $\mathsf{O}(M)$ は完備 Heyting 代数である．逆に完備 Heyting 代数 L に対しては，次の命題を満たすような MT-代数 $F(L)$ を構成することができる.

命題 3. 完備 Heyting 代数 L に対して $L \cong \mathsf{O}(F(L))$ となる. □

命題 4. MT-代数 M が $M \cong F(\mathsf{O}(M))$ を満たす $\iff M$ が $\mathrm{T}_{\frac{1}{2}}$-代数である. □

補題 5. M が T_0-代数で $c \in \mathsf{C}(M) \setminus \{0\}$ が極小元のとき，c は M の原子である．

証明. $c \in \mathsf{C}(M) \setminus \{0\}$ を極小元とする．c が原子であることを示すため $0 < x \leq c$ とする．M が T_0-代数だから，ある T_0 な元 $0 < y \leq x$ が存在する．このとき $0 < y \leq c$ である．従って初めから x は T_0 であるとしてよい．

T_0 の定義より，ある $A \subset \mathsf{O}(M)$ と $c' \in \mathsf{C}(M)$ により $x = (\bigwedge A) \wedge c'$ と書ける．このとき $c' \wedge c \in \mathsf{C}(M) \setminus \{0\}$ で $c' \wedge c \leq c$ だから，c の極小性より $c' \wedge c = c$ となる．故に $x \leq c$ より $x = x \wedge c = (\bigwedge A) \wedge (c' \wedge c) = (\bigwedge A) \wedge c$ である．よって $c \leq (\bigwedge A)$ を示せば $x = c$ が分かる．

そこで $c \not\leq (\bigwedge A)$ と仮定する．即ちある $a \in A$ により $c \not\leq a$ となる．このとき $0 < c \wedge \neg a \leq c$ で $c \wedge \neg a \in \mathsf{C}(M)$ だから $c \wedge \neg a = c$ である．従って $c \leq \neg a$ だから $c \wedge a = 0$ となる．つまり $x = (\bigwedge A) \wedge c \leq a \wedge c = 0$ となり矛盾する． □

定理 6. 次の命題は同値.

(1) 選択公理
(2) コンパクト MT-代数 M に対して，$\mathsf{C}(M) \setminus \{0\}$ は極小元を持つ.
(3) コンパクト T_0-代数は閉原子を持つ.
(4) コンパクト $\mathrm{T}_{\frac{1}{2}}$-代数は閉原子を持つ.

証明. ((1)$\Longrightarrow$(2)) M をコンパクト MT-代数とする．「非自明な有界束は極大イデアルを持つ」は選択公理と同値である.

※ 証明等については束を参照.

よって $\mathsf{O}(M)$ は極大イデアル I を持つ．このとき $\bigvee I \neq 1$ である.

$\because$) $\bigvee I = 1$ と仮定する．M がコンパクトだから，有限部分集合 $S \subset I$ が存在して $1 = \bigvee S$ と書ける．すると I がイデアルで $S \subset I$ が有限集合だから $\bigvee S \in I$ となるので，$1 \in I$ となり矛盾する.

$\bigvee I \in \mathsf{O}(M)$ だから $c := \neg(\bigvee I) \in \mathsf{C}(M)$ である．c が $\mathsf{C}(M) \setminus \{0\}$ の極小元であることを示せばよい．そこで $x < c$ かつ $x \in \mathsf{C}(M)$ のとき $x = 0$ を示せばよい.

まず $(\neg x)^{\downarrow} \subset \mathsf{O}(M)$ はイデアルで $I \subset (\neg x)^{\downarrow}$ となる．$x < c$ より $\bigvee I < \neg x$ となるので $\neg x \in (\neg x)^{\downarrow} \setminus I$ である．即ち $I \subsetneq (\neg x)^{\downarrow}$ となる．I は極大イデアルだったから $(\neg x)^{\downarrow} = \mathsf{O}(M)$ であり，従って $\neg x = 1$ である．即ち $x = 0$ となる.

((2)$\Longrightarrow$(3)) M をコンパクト T_0-代数とする．仮定 (2) より極小元 $c \in \mathsf{C}(M) \setminus \{0\}$ が

取れる．このとき補題 5 より c は原子である．

((3)$\Longrightarrow$(4)) 明らか．

((4)$\Longrightarrow$(1)) 選択公理と同値な条件「非自明でコンパクトな完備 Heyting 代数は極大イデアルを持つ」を示す．L を非自明でコンパクトな完備 Heyting 代数とする．命題 3 より $L \cong \mathsf{O}(F(L))$ となる．特に $F(L)$ は非自明である．またこのとき $F(L) \cong F(\mathsf{O}(F(L)))$ となるから，命題 4 より $F(L)$ は $\mathrm{T}_{\frac{1}{2}}$-代数である．L がコンパクトであることから $F(L)$ もコンパクトであることが分かる．よって仮定 (4) より $F(L)$ は閉原子 c を持つ．このとき

$$I := \{x \in \mathsf{O}(F(L)) \mid x \leq \neg c\}$$

は $\mathsf{O}(F(L))$ のイデアルである．この I が極大であることを示せばよい．

そこでイデアル $J \supsetneq I$ が存在すると仮定する．$x \in J \setminus I$ を取る．即ち $x \not\leq \neg c$ である．つまり $c \not\leq \neg x$ となるから $c \wedge \neg x < c$ となる．c は原子だから $c \wedge \neg x = 0$ である．即ち $\neg c \vee x = 1$ となるから，$1 \in J$ となり矛盾する． $\square$

参考文献

[1] G. Bezhanishvili and S. D. Melzer and R. Raviprakash and A. L. Suarez, Local compactness does not always imply spatiality, https://arxiv.org/abs/2508.01645