König の定理と選択公理

alg-d

http://alg-d.com/math/ac/

2013 年 7 月 2 日

順序数や濃度の基本的な性質については順序数・濃度の簡単なまとめを参照.

次の命題を König の定理という.

命題 (König の定理). $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ と $\{Y_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ が集合族で, 各 $\lambda\in\Lambda$ に対して $|X_\lambda| < |Y_\lambda|$ ならば, $\left|\bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda\right| < \left|\prod_{\lambda\in\Lambda} Y_\lambda\right|$ である.

定理 1. 次の命題は (ZF 上) 同値.

1. 選択公理
2. 各 $\lambda\in\Lambda$ に対して $|X_\lambda| < |Y_\lambda|$ ならば, $\left|\bigcup X_\lambda\right| \leq \left|\prod Y_\lambda\right|$ である.
3. 各 $\lambda\in\Lambda$ に対して $|X_\lambda| < |Y_\lambda|$ ならば, $\left|\bigcup X_\lambda\right| \leq^* \left|\prod Y_\lambda\right|$ である.
4. 各 $\lambda\in\Lambda$ に対して $|X_\lambda| < |Y_\lambda|$ ならば, $\left|\bigcup X_\lambda\right| \not\geq^* \left|\prod Y_\lambda\right|$ である.
5. 各 $\lambda\in\Lambda$ に対して $|X_\lambda| < |Y_\lambda|$ ならば, $\left|\bigcup X_\lambda\right| \not\geq \left|\prod Y_\lambda\right|$ である.

証明. ($1 \Longrightarrow 2$) $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, $\{Y_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を集合族で, 各 $\lambda\in\Lambda$ に対して $|X_\lambda| < |Y_\lambda|$ を満たすとする. $\lambda\neq\mu$ に対して $X_\lambda \cap X_\mu = \emptyset$ としてよい.

$$A_\lambda := \{\langle f, y\rangle \in Y_\lambda^{X_\lambda} \times Y_\lambda \mid f \text{ は単射}, \ y \notin \mathrm{Im}(f)\}$$

と置けば $A_\lambda \neq \emptyset$ である. よって選択公理により $\big(\langle f_\lambda, y_\lambda\rangle\big)_{\lambda\in\Lambda} \in \prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ が存在する. $\mu\in\Lambda$ に対して $g_\mu\colon \bigcup X_\lambda \longrightarrow Y_\mu$ を

$$g_\mu(x) := \begin{cases} f_\mu(x) & (x\in X_\mu\text{のとき}) \\ y_\mu & (x\notin X_\mu\text{のとき}) \end{cases}$$

と定める. これにより $g\colon \bigcup X_\lambda \longrightarrow \prod Y_\lambda$ が $g(x) := \big(g_\lambda(x)\big)_{\lambda\in\Lambda}$ で定まる. g は単射である.

$\because$) 任意の $a \in X_\lambda,\ b \in X_\mu,\ a \neq b$ を取る．

(i) $\lambda \neq \mu$ ならば $g_\mu(a) = y_\mu,\ g_\mu(b) = f_\mu(b)$ となり，$y_\mu \notin \mathrm{Im}(f_\mu)$ だったから $g_\mu(a) \neq g_\mu(b)$ となる．故に $g(a) \neq g(b)$ である．

(ii) $\lambda = \mu$ ならば $g_\mu(a) = f_\mu(a),\ g_\mu(b) = f_\mu(b)$ であるから f_μ の単射性により $g_\mu(a) \neq g_\mu(b)$ となる．故に $g(a) \neq g(b)$ である．

よって $\left|\bigcup X_\lambda\right| \leq \left|\prod Y_\lambda\right|$ が分かった．

$(2 \Longrightarrow 3)$ $|X| \leq |Y| \Longrightarrow |X| \leq^* |Y|$ だから明らか．

$(3 \Longrightarrow 1)$ $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を非空集合の族とする．各 $\lambda \in \Lambda$ に対して $1 < |X_\lambda|$ としてよい．このとき $Y_\lambda := \{\emptyset\}$ とすれば，$|Y_\lambda| = 1 < |X_\lambda|$ だから仮定 2 により $1 = \left|\bigcup Y_\lambda\right| \leq^* \left|\prod X_\lambda\right|$ である．その為には $\prod X_\lambda \neq \emptyset$ でなければならない．

$(1 \Longrightarrow 4)$ 全射 $f\colon \bigcup X_\lambda \longrightarrow \prod Y_\lambda$ が存在すると仮定する．$\pi_\lambda\colon \prod Y_\lambda \longrightarrow Y_\lambda$ を標準全射とすれば写像 $g_\lambda := \pi_\lambda \circ f|_{X_\lambda}\colon X_\lambda \longrightarrow Y_\lambda$ が得られる．このとき $C_\lambda := Y_\lambda \setminus \mathrm{Im}(g_\lambda) \neq \emptyset$ だから選択公理により $(y_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \in \displaystyle\prod_{\lambda\in\Lambda} C_\lambda \subset \prod_{\lambda\in\Lambda} Y_\lambda$ が存在する．f は全射だったから，ある $x \in \bigcup X_\lambda$ が存在して $f(x) = (y_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ となる．$x \in X_\mu$ とすれば $g_\mu(x) = \pi_\mu(f(x)) = \pi_\mu((y_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}) = y_\mu$ となり $y_\mu \notin \mathrm{Im}(g_\mu)$ に矛盾する．

$(4 \Longrightarrow 5)$ $|X| \not\leq^* |Y| \Longrightarrow |X| \not\leq |Y|$ だから明らか．

$(5 \Longrightarrow 1)$ $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を非空集合の族とする．$\lambda \in \Lambda$ に対して $Y_\lambda := \emptyset$ とすれば，$|Y_\lambda| = 0 < |X_\lambda|$ だから仮定 3 により $0 = \left|\bigcup Y_\lambda\right| \not\geq \left|\prod X_\lambda\right|$ である．その為には $\prod X_\lambda \neq \emptyset$ でなければならない． $\square$

系. 選択公理 $\Longleftrightarrow$ König の定理

証明. 定理 1 の条件 2 かつ条件 5 が König の定理であるから明らか． $\square$

定理 2. 選択公理
$\Longleftrightarrow$ $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ が集合族で，各 $\lambda \in \Lambda$ に対して $2 \leq |X_\lambda|$ ならば $\displaystyle\left|\bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda\right| \leq \left|\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda\right|$.

証明. $(\Longrightarrow)$ $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を各 $\lambda \in \Lambda$ に対して $2 \leq |X_\lambda|$ なる集合族とする．$\lambda \neq \mu$ に対して $X_\lambda \cap X_\mu = \emptyset$ としてよい．$A_\lambda := \{\langle a, b\rangle \in X_\lambda^2 \mid a \neq b\}$ と置けば $A_\lambda \neq \emptyset$ である．よって選択公理により $(\langle a_\lambda, b_\lambda\rangle)_{\lambda\in\Lambda} \in \displaystyle\prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ が存在する．$\mu \in \Lambda$ に対して $f_\mu\colon \bigcup X_\lambda \longrightarrow X_\mu$

を

$$f_\mu(x) := \begin{cases} x & (x \in X_\mu \text{のとき}) \\ a_\mu & (x \in X_\lambda \setminus \{a_\lambda\},\ \lambda \neq \mu \text{のとき}) \\ b_\mu & (x = a_\lambda,\ \lambda \neq \mu \text{のとき}) \end{cases}$$

と定める．これにより $f\colon \bigcup X_\lambda \longrightarrow \prod Y_\lambda$ が $f(x) := \bigl(f_\lambda(x)\bigr)_{\lambda \in \Lambda}$ で定まる．f は単射である．

∵) $x \in X_\mu,\ y \in X_\nu,\ x \neq y$ とする．$\mu = \nu$ ならば $f_\mu(x) = x \neq y = f_\mu(y)$ だから $f(x) \neq f(y)$ である．そこで $\mu \neq \nu$ とする．

(1) $x = a_\mu$ のとき．

(i) $y = b_\nu$ のとき，$\lambda \neq \mu, \nu$ とすれば $f_\lambda(x) = b_\lambda,\ f_\lambda(y) = a_\lambda$.

(ii) $y \neq b_\nu$ のとき $f_\nu(x) = b_\nu,\ f_\nu(y) = y$.

よって $f(x) \neq f(y)$ である．

(2) $x = b_\mu$ のとき．

(i) $y = a_\nu$ のとき，$\lambda \neq \mu, \nu$ とすれば $f_\lambda(x) = a_\lambda,\ f_\lambda(y) = b_\lambda$.

(ii) $y \neq a_\nu$ のとき $f_\nu(x) = a_\nu,\ f_\nu(y) = y$.

よって $f(x) \neq f(y)$ である．

(3) $x \neq a_\mu, b_\mu$ のとき．$f_\mu(x) = x,\ f_\mu(y) = a_\mu, b_\mu$ だから $f(x) \neq f(y)$ である．

よって $\left|\bigcup X_\lambda\right| \leq \left|\prod X_\lambda\right|$ が分かった．

($\Longleftarrow$) $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を非空集合の族とする．各 $\lambda \in \Lambda$ に対して $2 \leq |X_\lambda|$ としてよい．このとき $0 < \left|\bigcup X_\lambda\right| \leq \left|\prod X_\lambda\right|$ である． □

参考文献

[1] H. Rubin and J. Rubin, Equivalents of the axiom of choice II, North Holland, 1985.