第一可算公理と選択公理

alg-d
http://alg-d.com/math/ac/

2020 年 4 月 18 日

位相空間 $\langle X, \mathcal{O}_X \rangle$ が第一可算公理を満たすとは，各点 $x \in X$ が可算な基本近傍系 $\mathcal{B}(x)$ を持つこと (即ち下記 (A)) であった．しかしこれは素朴に考えると $\mathcal{B}(x)$ の存在しか仮定していないから，選択公理を仮定しない状況では $\mathcal{B}(x)$ が「選択」できないかもしれない．

そこで $\mathcal{B}(x)$ の「選択」まで含めたバージョンの第一可算公理を考えることができる (下記 (B))．また, 単に可算というとどのように並べるかが与えられていないことになるから, 並べ方まで与えるバージョンも考えることができる (下記 (C)．$\mathcal{B}(x) = \{B(x,n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ である)．更に，基本開近傍系が与えらえたときに，その中から可算な基本近傍系が取れるというバージョンも考えることができる (下記 (D)〜(F))．また，基本開近傍系ではなく基本近傍系を考えることもできる (下記 (G)〜(I))．

定義. 位相空間 $\langle X, \mathcal{O}_X \rangle$ に対して条件 (A)〜(I) を以下のように定める．

(A) 任意の $x \in X$ に対してある $\mathcal{B}(x)$ が存在して「$\mathcal{B}(x)$ は x の基本近傍系かつ $|\mathcal{B}(x)| \leq \aleph_0$」となる．

(B) ある $\{\mathcal{B}(x)\}_{x \in X}$ が存在して「任意の $x \in X$ に対して $\mathcal{B}(x)$ は x の基本近傍系かつ $|\mathcal{B}(x)| \leq \aleph_0$」となる．

(C) ある $\{B(x,n)\}_{x \in X, n \in \mathbb{N}}$ が存在して「任意の $x \in X$ に対して $\{B(x,n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ は x の基本近傍系」となる．

(D) 任意の $x \in X$ と x の基本開近傍系 $\mathcal{V}(x)$ に対して，ある $\mathcal{B}(x) \subset \mathcal{V}(x)$ が存在して「$\mathcal{B}(x)$ は x の基本開近傍系かつ $|\mathcal{B}(x)| \leq \aleph_0$」となる．

(E) 各 $x \in X$ に対して x の基本開近傍系 $\mathcal{V}(x)$ が与えられたとき，ある $\{\mathcal{B}(x)\}_{x \in X}$ が存在して「任意の $x \in X$ に対して $\mathcal{B}(x) \subset \mathcal{V}(x)$，かつ $\mathcal{B}(x)$ は x の基本開近傍系, かつ $|\mathcal{B}(x)| \leq \aleph_0$」となる．

(F) 各 $x \in X$ に対して x の基本開近傍系 $\mathcal{V}(x)$ が与えられたとき，ある

$\{B(x,n)\}_{x\in X, n\in\mathbb{N}}$ が存在して「任意の $x \in X$、$n \in \mathbb{N}$ に対して $B(x,n) \in \mathcal{V}(x)$, かつ $\{B(x,n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ は x の基本開近傍系」となる.

(G) 任意の $x \in X$ と x の基本近傍系 $\mathcal{V}(x)$ に対して，ある $\mathcal{B}(x) \subset \mathcal{V}(x)$ が存在して「$\mathcal{B}(x)$ は x の基本近傍系かつ $|\mathcal{B}(x)| \leq \aleph_0$」となる.

(H) 各 $x \in X$ に対して x の基本近傍系 $\mathcal{V}(x)$ が与えられたとき，ある $\{\mathcal{B}(x)\}_{x\in X}$ が存在して「任意の $x \in X$ に対して $\mathcal{B}(x) \subset \mathcal{V}(x)$，かつ $\mathcal{B}(x)$ は x の基本近傍系，かつ $|\mathcal{B}(x)| \leq \aleph_0$」となる.

(I) 各 $x \in X$ に対して x の基本近傍系 $\mathcal{V}(x)$ が与えられたとき, ある $\{B(x,n)\}_{x\in X, n\in\mathbb{N}}$ が存在して「任意の $x \in X$、$n \in \mathbb{N}$ に対して $B(x,n) \in \mathcal{V}(x)$，かつ $\{B(x,n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ は x の基本近傍系」となる.

命題 1. 明らかに以下が成り立つ.

$$\begin{array}{ccccc} (\mathrm{A}) & \Longleftarrow & (\mathrm{B}) & \Longleftarrow & (\mathrm{C}) \\ \Uparrow & & \Uparrow & & \Uparrow \\ (\mathrm{D}) & \Longleftarrow & (\mathrm{E}) & \Longleftarrow & (\mathrm{F}) \\ \Uparrow & & \Uparrow & & \Uparrow \\ (\mathrm{G}) & \Longleftarrow & (\mathrm{H}) & \Longleftarrow & (\mathrm{I}) \end{array}$$

□

命題 2. ZFC においては (A)〜(I) は全て同値である. □

ZF において (A)$\Longrightarrow$(B) が証明可能かどうかは未解決問題らしい.

定義. 基数 κ に対して次の命題を $\mathrm{AMC}(\leq \kappa)$ で表す: 非空集合の族 $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ が「任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して $|X_\lambda| \leq \kappa$」を満たすならば，有限集合の族 $\{F_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ で「任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して $\emptyset \neq F_\lambda \subset X_\lambda$」となるものが存在する.

定義. 次の命題を AMC^ω で表す: 非空集合の族 $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ に対して，可算集合の族 $\{F_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ で「任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して $\emptyset \neq F_\lambda \subset X_\lambda$」となるものが存在する.

命題 3. $\mathrm{AMC}(\leq 2^{\aleph_0})$ ならば「(B)$\Longrightarrow$(C)」が成り立つ.

証明. X が (B) を満たすとする．即ち $\{\mathcal{B}(x)\}_{x\in X}$ が存在して「任意の $x \in X$ に対して

$\mathcal{B}(x)$ は x の基本近傍系かつ $|\mathcal{B}(x)| \leq \aleph_0$」となる．集合 $L(x)$ を

$$L(x) := \{ f \colon \mathbb{N} \to \mathcal{B}(x) \mid f \text{ は全射} \}$$

と定めれば，$L(x) \neq \emptyset$ かつ $|L(x)| \leq |\mathcal{B}(x)|^{\aleph_0} \leq \aleph_0^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$ である．故に $\mathrm{AMC}(\leq 2^{\aleph_0})$ より有限集合の族 $\{F_x\}_{x \in X}$ で「任意の $x \in X$ に対して $\emptyset \neq F_x \subset L(x)$」となるものが存在する．このとき $B(x,n) := \bigcap_{f \in F_x} f(n)$ と定義すれば $\{B(x,n)\}_{x \in X, n \in \mathbb{N}}$ が条件 (C) を満たす． □

命題 4. 「(B)$\Longrightarrow$(C)」ならば $\mathrm{AMC}(\leq \aleph_0)$ が成り立つ．

証明. 非空集合の族 $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ が「任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して $|X_\lambda| \leq \aleph_0$」を満たすとする．各 X_λ に離散位相を入れて $Y_\lambda := X_\lambda \cup \{\infty_\lambda\}$ を一点コンパクト化として $Y := \coprod_{\lambda \in \Lambda} Y_\lambda$ を直和とする．この Y は (B) を満たす．

> $\because$) $y \in Y$ に対して $\mathcal{B}(y)$ を次のように定めれば，これは y の可算な基本開近傍系になる．
>
> $$\mathcal{B}(y) := \begin{cases} \{\{y\}\} & (y \in X_\lambda \text{のとき}) \\ \{U \cup \{\infty_\lambda\} \mid U \subset X_\lambda \text{は補有限集合}\} & (y = \infty_\lambda \text{のとき}) \end{cases}$$
>
> (今 X_λ が可算なので補有限集合も可算個であることに注意する)

従って仮定より Y は (C) を満たす．即ちある $\{B(x,n)\}_{y \in Y, n \in \mathbb{N}}$ が存在して「任意の $y \in Y$ に対して $\{B(y,n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ は y の基本開近傍系」となる．そこで $F_\lambda := X_\lambda \setminus B(\infty_\lambda, 0)$ とすれば F_λ は有限集合で $\emptyset \neq F_\lambda \subset X_\lambda$ である． □

従って (B)$\Longrightarrow$(C) は ZF では証明できない．

定理 5. 次の命題は (ZF 上) 同値.

1. 選択公理
2. (A)$\Longrightarrow$(I)
3. (C)$\Longrightarrow$(I)
4. (C)$\Longrightarrow$(F)
5. (F)$\Longrightarrow$(I)

証明. 1$\Longrightarrow$2 と 2$\Longrightarrow$3 と 3$\Longrightarrow$4 と 3$\Longrightarrow$5 は明らか.

(4 $\Longrightarrow$ 1) $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を互いに素な非空集合の族とする．新しい元 ∞_λ を用意して

$$\begin{aligned} X &:= \bigcup_{\lambda\in\Lambda}\big((X_\lambda\times\mathbb{N})\cup\{\infty_\lambda\}\big) \\ Y^m &:= \{\langle x,k\rangle \mid \lambda\in\Lambda,\ x\in X_\lambda,\ k\geq m\}\cup\{\infty_\lambda \mid \lambda\in\Lambda\} \end{aligned}$$

と定める．$\mathcal{B} := \big\{\{\langle x,k\rangle\} \bigm| \lambda\in\Lambda,\ x\in X_\lambda,\ k\in\mathbb{N}\big\}\cup\{Y^m \mid m\in\mathbb{N}\}$ とすれば，$\mathcal{B}$ を開基とする X の位相 $\mathcal{O}$ が定まる．この $\langle X,\mathcal{O}\rangle$ は (C) を満たす．

$\because$) $x\in X$, $n\in\mathbb{N}$ に対して $B(x,n)$ を

$$B(x,n) := \begin{cases} \{x\} & (x=\langle x_\lambda,k\rangle,\ x_\lambda\in X_\lambda,\ k\in\mathbb{N}\text{ のとき}) \\ Y^n & (x=\infty_\lambda\text{のとき}) \end{cases}$$

とすればこれは開集合で (C) の条件を満たす．

従って仮定 4 より (F) を満たす．

$x\in X$ に対して $\mathcal{V}(x)$ を

$$\mathcal{V}(x) := \begin{cases} \{\{x\}\} & (x=\langle x_\lambda,k\rangle,\ x_\lambda\in X_\lambda,\ k\in\mathbb{N}) \\ \{Y^{m+1}\cup\{\langle a,m\rangle\} \mid \lambda\in\Lambda,\ a\in X_\lambda,\ m\in\mathbb{N}\} & (x=\infty_\lambda\text{のとき}) \end{cases}$$

と定める．$\mathcal{V}(x)$ は x の基本開近傍系である．この $\{\mathcal{V}(x)\}_{x\in X}$ に対して条件 (F) を適用すれば集合族 $\{B(x,n)\}_{x\in X,n\in\mathbb{N}}$ であって「任意の $x\in X$, $n\in\mathbb{N}$ に対して $B(x,n)\in\mathcal{V}(x)$, かつ $\{B(x,n)\mid n\in\mathbb{N}\}$ は x の基本開近傍系」を満たすものを得る．このとき $\lambda\in\Lambda$ に対して m_λ が一意に存在して $B(\infty_\lambda,0)=Y^{m_\lambda+1}\cup\{\langle x_\lambda,m_\lambda\rangle\}$ と書ける．これにより選択関数 $\lambda\mapsto x_\lambda$ を得る．

(5 $\Longrightarrow$ 1) 4$\Longrightarrow$1 の証明の記号を使う．$\mathcal{O}' := \{Y^m \mid m\in\mathbb{N}\}$ とすればこれも X の位相であり，この $\langle X,\mathcal{O}'\rangle$ は (F) を満たす．従って仮定 5 より (I) を満たす．

$x\in X$ に対して $\mathcal{V}'(x)$ を

$$\mathcal{V}'(x) := \begin{cases} \{Y^m\} & (x=\langle x_\lambda,m\rangle,\ x_\lambda\in X_\lambda,\ m\in\mathbb{N}) \\ \{Y^{m+1}\cup\{\langle x,m\rangle\} \mid x\in X_\lambda,\ m\in\mathbb{N}\} & (x=\infty_\lambda\text{のとき}) \end{cases}$$

と定める．$\mathcal{V}'(x)$ は $\langle X,\mathcal{O}'\rangle$ において x の基本近傍系である．そこで $\{\mathcal{V}'(x)\}_{x\in X}$ に対して条件 (I) を適用すれば集合族 $\{B(x,n)\}_{x\in X,n\in\mathbb{N}}$ であって「任意の $x\in X$，$n\in\mathbb{N}$ に対して $B(x,n)\in\mathcal{V}(x)$，かつ $\{B(x,n)\mid n\in\mathbb{N}\}$ は x の基本近傍系」を満たすものを得る．よって 4$\Longrightarrow$1 と同様にして選択関数を得る． $\square$

命題 6. 次の命題は (ZF 上) 同値.

1. 可算選択公理
2. (A)$\Longrightarrow$(G)
3. (A)$\Longrightarrow$(D)
4. (D)$\Longrightarrow$(G)

証明. 略 □

命題 **7.** 次の命題は (ZF 上) 同値.

1. 可算選択公理かつ AMC^{ω}
2. (B)$\Longrightarrow$(H)
3. (B)$\Longrightarrow$(E)
4. (E)$\Longrightarrow$(H)

証明. 定理 5 と同じような構成でできる. (省略) □

参考文献

[1] Gonçalo Gutierres, What is a first countable space?, Topology and its Applications 153 (2006), 3420–3429, https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0166864106000721