実数関数の連続性

alg-d
http://alg-d.com/math/ac/

2013 年 3 月 23 日

命題 1. $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ を関数，$x \in \mathbb{R}$ とする．
f が x で連続 $\iff$ 点列 $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ が $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ を満たすならば $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$

証明. ($\Longrightarrow$) 任意の $\varepsilon > 0$ を取る．f が x で連続だから, ある $\delta > 0$ が存在して「$|x-y| < \delta$ ならば $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$」である．この時，$\lim_{n\to\infty} x_n = x$ より，ある $N > 0$ が存在して「$n \geq N$ ならば $|x_n - x| < \delta$」とできる．よって「$n \geq N$ ならば $|f(x_n) - f(x)| < \varepsilon$」である．故に $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$ が分かった．

($\Longleftarrow$) f が x で不連続であると仮定する．即ち，ある $\varepsilon > 0$ が存在して，任意の $\delta > 0$ に対してある $y \in \mathbb{R}$ が存在して「$|x - y| < \delta$ かつ $|f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$」が成り立つ．その様な $\varepsilon > 0$ を一つ取る．正整数 n に対して，「$|x - x_n| < \frac{1}{n}$ かつ $|f(x) - f(x_n)| \geq \varepsilon$」を満たすような $x_n \in \mathbb{R}$ が取れる．すると $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ かつ $\lim_{n\to\infty} f(x_n) \neq f(x)$ となり矛盾する． □

この $\Longleftarrow$ の証明には選択公理が使われている．それは，各 $n > 0$ に対して $x_n \in \mathbb{R}$ を取っているところである．具体的には次のようになる．$X_n := \{y \in \mathbb{R} \mid |x - y| < \frac{1}{n}$ かつ $|f(x) - f(y)| \geq \varepsilon\}$ と置けば $X_n \neq \emptyset$ である．よって選択公理により $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in \prod_{n=1}^{\infty} X_n$ が取れる．

実は次の同値が知られている．

定理. 次の命題は (ZF 上) 同値.

(1) $\mathbb{R}$ の空でない部分集合からなる族 $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ は選択関数を持つ.
(2) 命題 1
(3) 非有界集合 $A \subset \mathbb{R}$ は非有界な点列を含む.

証明. ($1 \Longrightarrow 2$) 命題 1 の証明から明らか.

($2 \Longrightarrow 3$) $A \subset \mathbb{R}$ を非有界集合，$h\colon \mathbb{R} \longrightarrow (0,1)$ を同相写像とする．A が非有界だから，0 か 1 が $h(A)$ の集積点である．0 が $h(A)$ の集積点としてよい．関数 $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ を

$$f(y) := \begin{cases} 1 & (y \in h(A) \text{ のとき}) \\ 0 & (y \notin h(A) \text{ のとき}) \end{cases}$$

と定義すれば，0 が $h(A)$ の集積点であるから f は 0 で不連続である．従って仮定により点列 $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ で $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ かつ $\lim_{n\to\infty} f(x_n) \neq f(0)$ となるものが存在する．$f(0) = 0$ であるから $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 1$．$\{x_n\}$ の部分列を適当に取ることにより，各 n に対して $f(x_n) = 1$ としてよい．このとき $\{h^{-1}(x_n)\}_{n=0}^{\infty}$ は明らかに A の非有界な点列である.

($3 \Longrightarrow 1$) $\mathbb{R}$ の空でない部分集合からなる族 $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ を取る．$Y_n := \prod_{i=0}^{n} X_i$ とする．全単射 $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ と $g\colon \mathbb{R} \longrightarrow (0,1)$ を取る．$f_0(x) := x$，$f_1(x,y) := f(x,y)$，$f_2(x,y,z) := f(f(x,y),z)$，$\cdots$ として全単射の族 $\{f_n\colon \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}\}_{n=0}^{\infty}$ を得る．$\sigma_n\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ を $\sigma_n(x) := x + n$ で定める.

$Z_n := \sigma_n \circ g \circ f_n(Y_n)$，$Z = \bigcup_{n=0}^{\infty} Z_n$ と置けば，$Z_n \subset (n, n+1)$ であるから Z は非有界である．従って仮定 3 により，Z は非有界な点列 $\{z_n\}_{n=0}^{\infty}$ を含む.

$M := \{m \in \mathbb{N} \mid$ ある $n \in \mathbb{N}$ が存在して $z_n \in Z_m\}$ と置く．$m \in M$ に対して $n(m) := \min\{n \in \mathbb{N} \mid z_n \in Z_m\}$ とすれば $(z_{n(m)})_{m\in M} \in \prod_{m\in M} Z_m$ である．$y_m := (\sigma_{n(m)} \circ g \circ f_{n(m)})^{-1}(z_{n(m)}) \in Y_m$ と置けば $(y_m)_{m\in M} \in \prod_{m\in M} Y_m$ となる．$Y_m = \prod_{i=0}^{m} X_i$ だったから $y_m = (x_0^{(m)}, \cdots, x_n^{(m)})$ $\quad (x_i^{(m)} \in X_i)$ と書ける．この時 $m(n) := \min\{m \in M \mid n \leq m\}$ と置けば $(x_n^{(m(n))})_{n=0}^{\infty} \in \prod_{n=0}^{\infty} X_n$ である. □

一方，次の命題は ZF で証明できる.

命題 2. $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ とする.
f が $\mathbb{R}$ で連続 $\Longleftrightarrow$ 収束点列 $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ に対して $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\lim_{n\to\infty} x_n)$

証明. ($\Longrightarrow$) 命題 1 の時と同様.

($\Longleftarrow$) $x \in \mathbb{R}$ とする．$A := \mathbb{Q} \cup \{x\}$ とすれば，$f|_A\colon A \longrightarrow \mathbb{R}$ は x で連続である.

$\because$) f が x で不連続であると仮定する．即ち，ある $\varepsilon > 0$ が存在して，任意の $\delta > 0$ に対してある $y \in A$ が存在して「$|x - y| < \delta$ かつ $|f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$」が成り立

つ．その様な $\varepsilon > 0$ を一つ取る．正整数 n に対して，$X_n := \{y \in A \mid |x-y| < \frac{1}{n}$ かつ $|f(x)-f(y)| \geq \varepsilon\}$ と置けば $X_n \neq \emptyset$ である．$A = \mathbb{Q} \cup \{x\}$ は可算集合だから，$A = \{a_m \mid m \in \mathbb{N}\}$ と書ける．このとき各 $n > 0$ に対して $m(n) := \min\{m \in \mathbb{N} \mid a_m \in X_n\}$ とすれば $(a_{m(n)})_{n=1}^{\infty} \in \displaystyle\prod_{n=1}^{\infty} X_n$ である．すると $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_{m(n)} = x$ かつ $\displaystyle\lim_{n\to\infty} f(a_{m(n)}) \neq f(x)$ となり矛盾する．

任意の $\varepsilon > 0$ を取る．$f|_A \colon A \longrightarrow \mathbb{R}$ が x で連続だから，ある $\delta > 0$ が存在して「$y \in \mathbb{Q}$ かつ $|x-y| < \delta$ ならば $|f(x)-f(y)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$」とできる．このとき「$z \in \mathbb{R}$ かつ $|x-z| < \delta$ ならば $|f(x)-f(z)| < \varepsilon$」である．

$\because$) 先と同様にして，$f|_{\mathbb{Q}\cup\{z\}}$ も z で連続だから，ある $\delta' > 0$ が存在して「$y \in \mathbb{Q}$ かつ $|z-y| < \delta'$ ならば $|f(z)-f(y)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$」である．この時 $|x-y| < \delta$ かつ $|z-y| < \delta'$ なる $y \in \mathbb{Q}$ を取れば $|f(x)-f(z)| \leq |f(x)-f(y)| + |f(y)-f(z)| < \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

故に f は $\mathbb{R}$ で連続である． $\square$

また，この命題を距離空間に一般化すると次の同値が成り立つ．

定理. 次の命題は (ZF 上) 同値.

(1) 可算選択公理 (即ち，非空集合の族 $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ は選択関数を持つ)

(2) M を距離空間，$f \colon M \longrightarrow \mathbb{R}$ を関数とするとき
f が M で連続 $\Longleftrightarrow$ 収束点列 $\{x_n\}_{n=0}^{\infty} \subset M$ に対して $\displaystyle\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\lim_{n\to\infty} x_n)$

証明. ($1 \Longrightarrow 2$) $M = \mathbb{R}$ の時と同様.

($2 \Longrightarrow 1$) 非空集合の族 $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ が選択関数を持たないと仮定する．

$Y_n := \displaystyle\prod_{k=0}^{n} X_k$，$Y := \displaystyle\bigcup_{n=0}^{\infty} Y_n$ とする．$m \neq n$ ならば $Y_m \cap Y_n = \emptyset$ としてよい．$\infty \notin Y$ なる ∞ を一つ取り $M := Y \cup \{\infty\}$ と定める．M 上の距離 d を

$$d(x,y) := \begin{cases} 0 & (x = y \text{ のとき}) \\ 1 & (x,y \in Y,\ x \neq y \text{ のとき}) \\ \frac{1}{n+1} & (x \in Y_n,\ y = \infty \text{ のとき}) \end{cases}$$

により定める．関数 $f \colon M \longrightarrow \mathbb{R}$ を $f(x) := \begin{cases} 1 & (x \in Y \text{ のとき}) \\ 0 & (x \notin Y \text{ のとき}) \end{cases}$ で定めれば f は ∞ で連続でない．故に仮定 2 から $\displaystyle\lim_{n\to\infty} f(a_n) \neq f(\lim_{n\to\infty} a_n)$ となるような収束点列

$\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ が存在する．明らかに $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ である．部分列を取ることにより，初めから各 $n \in \mathbb{N}$ について $a_n \in Y$ としてよい．$m_n := \dfrac{1}{d(a_n, \infty)} - 1 \in \mathbb{N}$ と置く．d の定義から $a_n \in Y_{m_n}$ である．

集合 $S \subset \mathbb{N}$ を「$i, j \in S$ かつ $i < j$ ならば $m_i < m_j$」を満たすように任意に取る．S は有限集合である．

$\because$) 無限集合であると仮定する．すると任意の $k \in \mathbb{N}$ に対してある $n \in S$ が存在して $k < n$ となる．$a_n \in Y_{m_n}$ だったから $a_n = (x_0^{(n)}, \cdots, x_{m_n}^{(n)})$ と書ける．そこで $k \in \mathbb{N}$ に対して $n_k := \min\{n \in S \mid k < n\}$ と置き $b_k := x_k^{(n_k)}$ と置けば $(b_k)_{k=0}^{\infty} \in \prod_{k=0}^{\infty} X_k$ であり，$\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ が選択関数を持たないことに矛盾する．

S は任意だったから，$\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subset \displaystyle\bigcup_{n=0}^{N} Y_n$ となるような番号 N が存在しなければならない．よって $\lim a_n \neq \infty$ となり矛盾する． $\square$

参考文献

[1] Horst Herrlich, Axiom of Choice, Springer, 2006

[2] Norbert Brunner, Sequential Continuity, Kyungpook Math. J. 38 (1982), 233