位相空間のコホモロジーと選択公理

alg-d
http://alg-d.com/math/ac/

2012 年 2 月 6 日

定義. X を集合，G を群とする．次の条件を満たす (T, p) を X 上の G-torsor という．

1. $p : T \longrightarrow X$ は全射である．p を射影という．
2. G は T に右から作用する．$g \in G$ の $t \in T$ への作用を t^g で表す.
3. 任意の $t \in T$ と $g \in G$ に対し $p(t^g) = p(t)$.
4. $p(t) = p(s)$ を満たす $t, s \in T$ に対し，ある $g \in G$ が一意に存在して $s = t^g$ となる.

例. $T := X \times G,\ p(x, g) := x,\ (t, g)^h := (t, gh)$ と定めれば (T, p) は X 上の G-torsor になる.

定義. G-torsor $(T, p),\ (T', p')$ が同型
$\Longleftrightarrow$ 全単射 $T \longrightarrow T'$ で射影と群作用と可換になる (即ち $p'(f(t)) = p(t)$ かつ $f(t)^g = f(t^g)$) ようなものが存在する.

定義. X 上の G-torsor の同型類がなすクラスを $H^1(X, G)$ と書く.

先の例により X 上の G-torsor は少なくとも一つ存在するから，$H^1(X, G) \neq \emptyset$ が分かる．G-torsor $X \times G$ が属する同型類を 1 で表すことにする．即ち $1 \in H^1(X, G)$.

定理. 選択公理 $\Longleftrightarrow$ 任意の集合 X と任意の群 G に対して $H^1(X, G) = \{1\}$

証明. ($\Longrightarrow$) (T, p) を X 上の G-torsor とする．(T, p) が $X \times G$ と同型であることを示せばよい．p は全射だから選択公理によりある写像 $s : X \longrightarrow T$ が存在して $p \circ s = \mathrm{id}_X$ を満たす．このとき $f : X \times G \longrightarrow T$ を $f(x, g) := s(x)^g$ で定義すれば f は同型である.

($\Longleftarrow$) $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を互いに素な非空集合の族とする．ある集合 S が存在して任意の

$\lambda \in \Lambda$ に対し $|X_\lambda| = |S|$ であると仮定してよい.

> ※ 集合に関する命題の定理 2 を参照.

G を S の置換がなす群として, $T_\lambda := \{t : S \longrightarrow X_\lambda \mid t$ は全単射 $\} \neq \emptyset$, $T := \bigcup_{\lambda\in\Lambda} T_\lambda$ と置く. G は T に $t^g := t \circ g$ によって作用する. 射影 $p : T \longrightarrow \Lambda$ を T_λ の元を $\lambda \in \Lambda$ へ写す写像とすれば, (T, p) は Λ 上の G-torsor である. 仮定により同型 $f : T \longrightarrow \Lambda \times G$ が存在する. 今 $s : \Lambda \longrightarrow T$ を $s(\lambda) := f^{-1}(\langle\lambda, \mathrm{id}_S\rangle)$ で定めると f が同型であることから $s(\lambda) \in T_\lambda$ である. そこで元 $a \in S$ を一つ取り, $\varphi : \Lambda \longrightarrow \bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ を $\varphi(\lambda) := s(\lambda)(a)$ で定めれば φ が選択関数である. □

定理. 選択公理 $\Longleftrightarrow$ 任意の集合 X と任意のアーベル群 G に対して $H^1(X, G) = \{1\}$

証明. $(\Longrightarrow)$ 明らか.

$(\Longleftarrow)$ 選択公理と同値な次の命題を示す.

> 集合族 $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$が「任意の$\lambda \in \Lambda$に対し $|X_\lambda| \geq 2$」を満たすとするとき,
> Λ上の写像 f が存在して, 任意の$\lambda \in \Lambda$に対し $f(\lambda) \subsetneq X_\lambda$かつ $0 < |f(\lambda)| < \infty$.

> ※ the Axiom of Multiple Choice の定理 2 を参照.

$\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を「任意の $\lambda \in \Lambda$ に対し $|X_\lambda| \geq 2$」を満たす集合族とする. $\{X_\lambda\}$ は互いに素としてよい. $X := \bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ と置いて, G を X で生成される自由アーベル群とする. 即ち任意の元 $g \in G$ は

$$g = \prod_{x\in X} x^{n(g,x)}, \quad n(g,x) \in \mathbb{Z}, \quad \text{有限個の } x \in X \text{ を除いて } n(g,x) = 0$$

と表示される. $\lambda \in \Lambda$ に対して $n(g, \lambda) := \displaystyle\sum_{x\in X_\lambda} n(g, x)$ と定める.

$$\begin{aligned} H &:= \{g \in G \mid \text{任意の}\lambda \in \Lambda\text{に対して } n(g, \lambda) = 0\} \\ T_\lambda &:= \{g \in G \mid n(g, \lambda) = 1,\ \text{任意の}\mu \neq \lambda\text{に対して } n(g, \mu) = 0\} \end{aligned}$$

と置けば $H \subset G$ は部分群で, 乗法により H は T_λ に作用する. $T := \bigcup_{\lambda\in\Lambda} T_\lambda$ として, 射影 $p : T \longrightarrow \Lambda$ を T_λ の元を $\lambda \in \Lambda$ へ写す写像とすれば, (T, p) は Λ 上の H-torsor である. 仮定により同型 $g : T \longrightarrow \Lambda \times H$ が存在する. 今 $e \in H$ を単位元として $s : \Lambda \longrightarrow T$ を $s(\lambda) := g^{-1}(\langle\lambda, e\rangle)$ で定めると g が同型であることから $s(\lambda) \in T_\lambda$ である. $f(\lambda) := \{x \in X_\lambda \mid n(s(\lambda), x) > 0\}$ と置く. $s(\lambda) \in T_\lambda$ だから

$\sum_{x \in X_\lambda} n(s(\lambda), x) = n(s(\lambda), \lambda) = 1$，故に $f(\lambda) \neq \emptyset$ である．また $n(s(\lambda), x) \neq 0$ となる $x \in X_\lambda$ は有限個だから $|f(\lambda)| < \infty$ となる．更に，$|X_\lambda| \geq 2$ だから，$f(\lambda) \subsetneq X_\lambda$ であることも分かる．故にこの f が条件を満たす． $\square$

参考文献

[1] Andreas Blass, Cohomology detects Failures of the Axiom of Choice, Trans. Amer. Math. Soc. 279 (1983), 257–269, http://www.ams.org/journals/tran/1983-279-01/S0002-9947-1983-0704615-7/home.html