Bernstein の定理と選択公理

alg-d
http://alg-d.com/math/ac/

2013 年 6 月 23 日

定理 (Cantor-Bernstein-Schröder の定理)**.** 単射 $f\colon X \longrightarrow Y$ と単射 $g\colon Y \longrightarrow X$ が存在するならば，全単射 $h\colon X \longrightarrow Y$ が存在する．

> ※ 即ち，$|X| \leq |Y|$ かつ $|Y| \leq |X|$ ならば $|X| = |Y|$ である，ということ．この定理は選択公理を使わずに (ZF で) 証明できる．

以下，この命題を CBS と書くことにする．

証明. f, g のどちらかが全射ならば明らかだから，どちらも全射でないとする．以下のように集合を定義する．

$$X_n := \begin{cases} X \setminus g(Y) & (n = 0 \text{ のとき}) \\ g(Y_{n-1}) & (n > 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

$$Y_n := \begin{cases} Y \setminus f(X) & (n = 0 \text{ のとき}) \\ f(X_{n-1}) & (n > 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

$$X^+ := \bigcup_{n=0}^{\infty} X_n, \quad X^- := X \setminus X^+$$

$$Y^+ := \bigcup_{n=0}^{\infty} Y_n, \quad Y^- := Y \setminus Y^+$$

> ※ f, g が単射なので，異なる非負整数 m, n に対し $X_m \cap X_n = \emptyset$, $Y_m \cap Y_n = \emptyset$ である．また $X = X^+ \cup X^- = (\bigcup X_n) \cup X^-$, $Y = Y^+ \cup Y^- = (\bigcup Y_n) \cup Y^-$ となる．

$f(X^+) = f\Big(\bigcup_{n=0}^{\infty} X_n\Big) = \bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n$ かつ $f(X) = Y \setminus Y_0 = \Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n\Big) \cup Y^-$ だから，

$f(X^-)=Y^-$ である．そこで $h\colon X\longrightarrow Y$ を

$$h(x)=\begin{cases} f(x) & (x\in X_{2n}) \\ g^{-1}(x) & (x\in X_{2n+1}) \\ f(x) & (x\in X^-) \end{cases}$$

と定義すれば，これは明らかに全単射である． □

この定理から，すぐに「双対版」が思いつく．

命題 (双対 Cantor-Bernstein-Schröder の定理)．全射 $f\colon X\longrightarrow Y$ と全射 $g\colon Y\longrightarrow X$ が存在するならば，全単射 $h\colon X\longrightarrow Y$ が存在する．

この命題を CBS* で表すことにする．選択公理を使えば，CBS* は CBS から簡単に導くことができる．

∵) 選択公理は「全射の右逆写像の存在」と同値．即ち

選択公理 $\Longleftrightarrow$ 任意の全射 $F:X\longrightarrow Y$ に対して
ある単射 $G:Y\longrightarrow X$ が存在して $F\circ G=\mathrm{id}_Y$.

∵) ($\Longrightarrow$) F の全射性より族 $\{F^{-1}(y)\}_{y\in Y}$ は非空集合の族なので，選択関数 $G:Y\longrightarrow \bigcup_{y\in Y} F^{-1}(y)=X$ が存在する．このとき明らかに $F\circ G=\mathrm{id}_Y$.

($\Longleftarrow$) $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を非空集合の族とする．各 X_λ は互いに素としてよい．このとき $F:\bigcup_{\lambda\in\Lambda}X_\lambda\longrightarrow\Lambda$ を $F(x):=(x\in X_\lambda$ となる $\lambda)$ で定める．F は全射だから仮定より $F\circ G=\mathrm{id}_Y$ となる $G:\Lambda\longrightarrow\bigcup_{\lambda\in\Lambda}X_\lambda$ が存在する．このとき G が明らかに選択関数である．

そこで $u:Y\longrightarrow X$, $v:X\longrightarrow Y$ を全射 f,g の右逆写像として v,u に CBS を適用すれば全単射 $h:X\longrightarrow Y$ が得られる．

つまり CBS* は ZFC で証明可能．しかし，CBS* は ZF(更に言えば ZF+DC) で証明できないことが知られている．

※ 藤田博司さんがそのことについて書かれています．
`http://www.math.sci.ehime-u.ac.jp/~fujita/notes.jp.html` の双対ベルンシュタイン定理について (PDF) を参照．また，ZF で「CBS* $\Longrightarrow$ 選択公理」が成立するかどうかは未解決問題らしいです．

CBS での h に条件を加えた命題を考える．

命題. 単射 $f\colon X \longrightarrow Y$ と単射 $g\colon Y \longrightarrow X$ が存在するならば，全単射 $h\colon X \longrightarrow Y$ で $h \subset f \cup g^{-1}$ を満たすものが存在する．

※ $h \subset f \cup g^{-1}$ は f, g^{-1}, h を $X \times Y$ の部分集合とみなして考えるということ．

この命題を CBS_+ で表すことにする．当然これの双対版も考えられる．

命題. 全射 $f\colon X \longrightarrow Y$ と全射 $g\colon Y \longrightarrow X$ が存在するならば，全単射 $h\colon X \longrightarrow Y$ で $h \subset f \cup g^{-1}$ を満たすものが存在する．

この命題を CBS_+^* で表すことにする．

CBS の証明の中で構成した全単射 h は明らかに $h \subset f \cup g^{-1}$ を満たす．故に CBS_+ は ZF で証明可能である．一方 CBS_+^* については次が成り立つ．

定理. 選択公理 $\Longleftrightarrow$ CBS_+^*

証明. $(\Longrightarrow)$ $f\colon X \longrightarrow Y$ と $g\colon Y \longrightarrow X$ を全射とする．選択公理により f, g の右逆写像 $u\colon Y \longrightarrow X$, $v\colon X \longrightarrow Y$ が存在する．即ち $f \circ u = \mathrm{id}_Y$, $g \circ v = \mathrm{id}_X$．このとき $u^{-1} \subset f$, $v \subset g^{-1}$ である．

$\because$) (i) $u^{-1} \subset f$ について 任意の $\langle x, y\rangle \in u^{-1}$ を取る．$u(y) = x$ である．$f \circ u = \mathrm{id}_Y$ より $y = f \circ u(y) = f(x)$ だから $\langle x, y\rangle \in f$ である．よって $u^{-1} \subset f$. (ii) $v \subset g^{-1}$ について 任意の $\langle x, y\rangle \in v$ を取る．$v(x) = y$ である．$g \circ v = \mathrm{id}_X$ より $x = g \circ v(x) = g(y)$ だから $\langle x, y\rangle \in g^{-1}$ である．よって $v \subset g^{-1}$.

単射 $v\colon X \longrightarrow Y$ と単射 $u\colon Y \longrightarrow X$ に CBS_+ を適用して全単射 $h\colon X \longrightarrow Y$ で $h \subset v \cup u^{-1}$ を満たすものを取れば $h \subset v \cup u^{-1} \subset f \cup g^{-1}$.

$(\Longleftarrow)$ 全射 $f\colon X \longrightarrow Y$ の右逆写像の存在を示す．$Z := (\{0\} \times \{0\}) \cup (\{1\} \times Y) \cup \bigcup_{n=2}^{\infty} (\{n\} \times X)$ を考える．写像 $k\colon Z \longrightarrow Z$ を次で定める．

$$
\begin{aligned}
k(0,0) &:= \langle 0, 0\rangle \\
k(1,y) &:= \langle 0, 0\rangle \quad (y \in Y) \\
k(2,x) &:= \langle 1, f(x)\rangle \quad (x \in X) \\
k(n,x) &:= \langle n-1, x\rangle \quad (x \in X, n \geq 3)
\end{aligned}
$$

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[d, "k"'] & = (\{0\} \times \{0\}) \arrow[d] & \cup (\{1\} \times Y) \arrow[dl, "0"'] & \cup (\{2\} \times X) \arrow[dl, "f"'] & \cup (\{3\} \times X) \arrow[dl, "\mathrm{id}"'] & \cup (\{4\} \times X) \arrow[dl, "\mathrm{id}"'] & \cup \cdots \\
Z & = (\{0\} \times \{0\}) & \cup (\{1\} \times Y) & \cup (\{2\} \times X) & \cup (\{3\} \times X) & \cup (\{4\} \times X) & \cup \cdots
\end{tikzcd}$$

明らかに k は全射である．そこで全射 $k\colon Z \longrightarrow Z$ と全射 $k\colon Z \longrightarrow Z$ に CBS^*_+ を適用して全単射 $h\colon Z \longrightarrow Z$ で $h \subset k \cup k^{-1}$ を満たすものを取る．$\{0\} \times Y \subset Z$ を Y と同一視することで $Y \subset Z$ とみなし，写像 $h|_Y$ を考える．

(i) $h|_Y \subset k^{-1}$ のとき

$y \in Y$ に対し $h(y) \in k^{-1}(y)$ となる．よって $k \circ h(y) = y$．また，k の定義より $k^{-1}(Y) = \{2\} \times X$ だから $h(y) \in k^{-1}(y) \subset \{2\} \times X$ である．故に, ある写像 $g\colon Y \longrightarrow X$ を使って $h(y) = \langle 2, g(y) \rangle$ と書ける．このとき任意の $y \in Y$ に対し

$$y = k \circ h(y) = k(2, g(y)) = f(g(y)) = f \circ g(y)$$

即ち g は f の右逆写像.

(ii) $h|_Y \not\subset k^{-1}$ のとき

$h \subset k \cup k^{-1}$ だからある $a \in Y$ が存在して $h(a) = k(a)$ である．このとき k の定義から $h(a) = \langle 0, 0 \rangle$ となる．h は全単射だったから，実はこのような a は唯一つしか存在しない．故に $A := Y \setminus \{a\}$ と置けば $h|_A \subset k^{-1}$ となる．そこで A について (i) と同様の議論をすれば写像 $g\colon A \longrightarrow X$ で $f \circ g = \mathrm{id}_A$ となるものが取れる．そこで元 $b \in f^{-1}(a)$ を一つ取り $g(a) := b$ として $g\colon Y \longrightarrow X$ へ拡張すれば明らかに g が f の右逆写像である． $\square$

この $\Longleftarrow$ の証明では，CBS^*_+ の「$X = Y$ かつ $f = g$」の場合しか使っていない．故に次のことが分かる．

系. 選択公理
$\Longleftrightarrow$ 全射 $f\colon X \longrightarrow X$ に対して全単射 $h\colon X \longrightarrow X$ で $h \subset f \cup f^{-1}$ となるものがある．

参考文献

[1] Bernhard Banaschewski and Gregory H. Moore, The dual Cantor-Bernstein theorem and the partition principle, Notre Dame J. Formal Logic Volume 31, Number

3 (1990), 375–381
http://projecteuclid.org/euclid.ndjfl/1093635502
[2] 藤田博司, 双対ベルンシュタイン定理について http://www.math.sci.ehime-u.ac.jp/~fujita/notes.jp.html