Banach-Tarski の定理

alg-d
http://alg-d.com/math/ac/

2023 年 5 月 28 日

目次

1 Banach-Tarski の定理

定義. この PDF では次の記号を使用する.

(1) $S^2 := \{\langle x, y, z\rangle \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.
(2) $\mathsf{B} := \{\langle x, y, z\rangle \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$.
(3) $X = Y \sqcup Z \iff X = Y \cup Z$ かつ $Y \cap Z = \emptyset$.
(4) G_3 を $\mathbb{R}^3$ の回転と平行移動がなす群とする.
(5) G_3 の部分群 $SO(3) \subset G_3$ を「原点 $O \in \mathbb{R}^3$ を中心とする回転」がなす部分群とする.
(6) $u = \langle a, b, c\rangle \in \mathbb{R}^3$ に対して $\tau_u \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を, $\langle x, y, z\rangle \in \mathbb{R}^3$ に対して

$$\tau_u(x, y, z) := \langle x + a, y + b, z + c\rangle$$

で定める．$\tau_u \in G_3$ である．

(7) $X, Y \subset \mathbb{R}^3$ を有界部分集合とする．このとき $u = \langle a, b, c \rangle \in \mathbb{R}^3$ をうまく取ることで $X \cap \tau_u(Y) = \emptyset$ とできる．この u を使って $X \oplus Y := X \sqcup \tau_u(Y)$ と定める．

> ※ もちろんこの $X \oplus Y$ は u の取り方によるが，以下では u の取り方は特に関係ない場面でしか $X \oplus Y$ は使用しない．

定義. $X, Y \subset \mathbb{R}^3$ が分割合同 ($X \sim Y$ で表す)
$\Longleftrightarrow$ ある $n \in \mathbb{N}$ と $X_i, Y_i \subset \mathbb{R}^3$，$\sigma_i \in G_3$ $(0 \leq i \leq n)$ が存在して

$$X = X_0 \sqcup \cdots \sqcup X_n, \quad Y = Y_0 \sqcup \cdots \sqcup Y_n, \quad Y_i = \sigma_i X_i$$

となる．

命題 1. (1) 分割合同 $\sim$ は同値関係である．

(2) $X_0 \sim Y_0$，$X_1 \sim Y_1$ ならば $X_0 \oplus X_1 \sim Y_0 \oplus Y_1$ である．特に $X_0 \cap X_1 = \emptyset$, $Y_0 \cap Y_1 = \emptyset$ ならば $X_0 \sqcup X_1 \sim Y_0 \sqcup Y_1$ となる． $\square$

$\mathsf{B} \sim \mathsf{B} \oplus \mathsf{B}$ を主張するのが Banach-Tarski の定理である．これを証明するために，まず分割合同の例を 2 つあげる．

例 2. 適当な方法で $S^1 = \{x \in \mathbb{C} \mid |x| = 1\} \subset \mathbb{R}^3$ とみなす．

$X := \{e^{n\sqrt{-1}} \mid n \in \mathbb{N}\} \subset S^1$，$Y := S^1 \setminus X$ とする．原点を中心とした 1 ラジアンの回転を σ とすれば $\sigma X = \{e^{n\sqrt{-1}} \mid n > 0\} = X \setminus \{1\}$ であるから

$$S^1 = X \sqcup Y \sim (X \setminus \{1\}) \sqcup Y = S^1 \setminus \{1\}$$

となる．即ち「円周から一点を抜いた集合」は円周と分割合同である． $\square$

例 3. $O \in \mathbb{R}^3$ を原点として，(適当に縮小した) S^1 を B の中に $O \in \mathsf{B} \cap S^1$ となるように埋め込めば

$$\mathsf{B} = (\mathsf{B} \setminus S^1) \sqcup S^1 \sim (\mathsf{B} \setminus S^1) \sqcup (S^1 \setminus \{O\}) = \mathsf{B} \setminus \{O\}$$

だから「球体から原点を抜いた集合」は球体と分割合同である． $\square$

これらの例から分かるように，分割合同というのは (物理的には) かなり変な分割の仕方も許している．また，次のことが分かる．

命題 4. $S^2 \sim S^2 \oplus S^2$ ならば $\mathsf{B} \sim \mathsf{B} \oplus \mathsf{B}$ である．

証明. $S^2 = X_0 \sqcup \cdots \sqcup X_n$, $S^2 \oplus S^2 = Y_0 \sqcup \cdots \sqcup Y_n$, $Y_i = \sigma_i X_i$ とする．後の証明によれば $\sigma_i \in SO(3)$ とすることができる．$A \subset S^2$ に対して

$$\overline{A} := \{tx \mid x \in A, 0 < t \leq 1\} \subset \mathbb{R}^3$$

とすれば $\overline{S^2} = \mathsf{B} \setminus \{O\}$ となり，

$$\mathsf{B} \setminus \{O\} = \overline{X}_0 \sqcup \cdots \sqcup \overline{X}_n, \quad (\mathsf{B} \setminus \{O\}) \oplus (\mathsf{B} \setminus \{O\}) = \overline{Y}_0 \sqcup \cdots \sqcup \overline{Y}_n, \quad \overline{Y}_i = \sigma_i \overline{X}_i$$

である．故に $\mathsf{B} \sim \mathsf{B} \setminus \{O\} \sim \mathsf{B} \setminus \{O\} \oplus \mathsf{B} \setminus \{O\} \sim \mathsf{B} \oplus \mathsf{B}$ である． □

故に Banach-Tarski の定理を示すには $S^2 \sim S^2 \oplus S^2$ (命題 11) を示せばよい．

定義. Z を集合とする．有限列の集合 $\{x_1 \cdots x_n \mid n \in \mathbb{N},\ x_i \in Z \cup Z^{-1}\}$ に積を列の結合 $(x_1 \cdots x_n) \cdot (y_1 \cdots y_m) := x_1 \cdots x_n y_1 \cdots y_m$ で定めるとこれは群になる (ただし，x と x^{-1} が隣り合ったときはキャンセルする．また空文字列を単位元とみなす)．これを Z で生成される自由群という．

二元集合 $\{s, t\}$ で生成される自由群を F_2 と書く．

命題 5. $W(a) := \{x_1 \cdots x_n \in F_2 \mid n > 0,\ x_1 = a\}$ と置けば

$$\begin{aligned} F_2 &= \{1\} \sqcup W(s) \sqcup W(s^{-1}) \sqcup W(t) \sqcup W(t^{-1}) \\ &= W(s) \sqcup sW(s^{-1}) \\ &= W(t) \sqcup tW(t^{-1}). \end{aligned}$$

□

命題 6. $SO(3)$ は F_2 と同型な部分群を持つ．(これにより以下 $F_2 \subset SO(3)$ とみなす．)

証明. $\theta := \arccos(\frac{1}{3})$ として「$\mathbb{R}^3$ の z 軸を軸とする θ ラジアンの回転」を s,「x 軸を軸とする θ ラジアンの回転」を t とすれば s, t が生成する $SO(3)$ の部分群は $\{s, t\}$ が生成する自由群 F_2 であることが分かる． □

Banach-Tarski の証明において，選択公理を使用するのは次の部分だけである．

命題 7. 選択公理を仮定すると次の主張が成り立つ．

$$\begin{array}{l} F_2 \subset SO(3) \text{ が集合 } E \subset \mathbb{R}^3 \text{ に自由に作用しているとき,} \\ \text{ある } X, Y \subset E \text{ が存在して } X \sqcup Y \subset E,\ E \sim X \sim Y \text{ となる.} \end{array} \tag{8}$$

※ 群 G の E への作用が自由である
$\Longleftrightarrow$ 任意の $\sigma \in G$, $x \in E$ に対して「$\sigma x = x \Longrightarrow \sigma = e$」

証明. E に同値関係 R を

$$xRy \Longleftrightarrow \text{ある } \sigma \in F_2 \text{ が存在して } y = \sigma x$$

で定める．選択公理により商集合 E/R の完全代表系 M を取ることができる．すると作用が自由であるから $E = \bigsqcup_{\sigma \in F_2} \sigma M$ となる．

$$X_0 := \bigsqcup_{\sigma \in W(s)} \sigma M, \quad X_1 := \bigsqcup_{\sigma \in W(s^{-1})} \sigma M, \quad X := X_0 \sqcup X_1$$
$$Y_0 := \bigsqcup_{\sigma \in W(t)} \sigma M, \quad Y_1 := \bigsqcup_{\sigma \in W(t^{-1})} \sigma M, \quad Y := Y_0 \sqcup Y_1$$

と置けば，$E = X_0 \sqcup sX_1 = Y_0 \sqcup tY_1 \supset X_0 \sqcup X_1 \sqcup Y_0 \sqcup Y_1$ であるから $X \sqcup Y \subset E$ かつ $E \sim X \sim Y$ となる． $\square$

定義. $X, Y \subset \mathbb{R}^3$ に対して二項関係 $\precsim$ を次のように定める．

$$X \precsim Y \Longleftrightarrow \text{ある } Y' \subset Y \text{ が存在して } X \sim Y' \text{ となる．}$$

命題 9 (Banach-Bernstein-Schröder の定理)**.** $X \precsim Y$ かつ $Y \precsim X$ ならば $X \sim Y$.

証明. $X \sim Y$ のとき，全単射 $f\colon X \to Y$ で「任意の $X' \subset X$ に対して $X' \sim f(X')$」を満たすものが取れることに注意しておく．

$X \precsim Y$ かつ $Y \precsim X$ とする．ある $X' \subset X$ と $Y' \subset Y$ が存在して $X \sim Y'$ かつ $Y \sim X'$ である．よって全単射 $f\colon X \to Y'$ と $g\colon X' \to Y$ で先の条件を満たすものが取れる．

$$X_0 := X \setminus X', \quad X_{n+1} := g^{-1} \circ f(X_n), \quad Z := \bigsqcup_{n=0}^{\infty} X_n$$

と定める．$Z \subset X$，$X \setminus Z \subset X'$ だから $Z \sim f(Z)$，$X \setminus Z \sim g(X \setminus Z)$ である．従って

$$X = Z \sqcup (X \setminus Z) \sim f(Z) \sqcup g(X \setminus Z) = Y$$

が分かる． $\square$

命題 6 により F_2 は球面 S^2 に作用しているが，各元 $\sigma \in F_2 \setminus \{1\}$ の不動点 $x \in S^2$ は丁度 2 つある．よって $D := \{x \in S^2 \mid$ ある $\sigma \in F_2 \setminus \{1\}$ が存在して $\sigma x = x\}$ は可算集合である．

補題 10. 主張 (8) を仮定する．$S^2 \setminus D \sim (S^2 \setminus D) \oplus (S^2 \setminus D)$ である．

証明. F_2 は $E := S^2 \setminus D$ に自由に作用する．故に主張 8 からある $X, Y \subset E$，$X \cap Y = \emptyset$ が存在して $X \sim E$ かつ $Y \sim E$ である．X, Y の取り方から $E \sim Y \subset E \setminus X \subset E$，即ち $E \precsim E \setminus X$ かつ $E \setminus X \precsim E$ であるから命題 9 により $E \setminus X \sim E$ が分かる．改めて $Y := E \setminus X$ と書き直せば $E = X \sqcup Y \sim X \sim Y$ が分かる．即ち $S^2 \setminus D \sim (S^2 \setminus D) \oplus (S^2 \setminus D)$ である． □

命題 11. 主張 (8) を仮定する．$S^2 \sim S^2 \oplus S^2$ である．

証明. $\sigma \in SO(3)$ で $D, \sigma D, \sigma^2 D, \cdots$ が互いに素となるものが存在する．

∵) D を通らない，原点を通る直線 $l \subset \mathbb{R}^3$ を一つ取る．l を軸とする ξ ラジアンの回転を ρ_ξ とする．このとき正整数 $n > 0$ と $P \in D$ に対して

$$A_{n,P} := \{\xi \in (0, 2\pi) \mid \rho_\xi^n(P) \in D\}$$

と書くと $A_{n,P}$ は可算集合である．故に $A := \bigcup_{n=0}^{\infty} \bigcup_{P \in D} A_{n,P}$ は可算集合である．

> ※ 可算和定理を使えば明らかであるが，選択公理を使わずに可算といえる．何故か？ また，実は D が可算であるという部分でも同様の問題が発生している．

従って $(0, 2\pi) \setminus A \neq \emptyset$ であるから $\xi \in (0, 2\pi) \setminus A$ を 1 つ取れば ρ_ξ が条件を満たす．

このとき $Y := S^2 \setminus \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} \sigma^n D \right)$ と置けば

$$S^2 = Y \sqcup \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} \sigma^n D \right) \sim Y \sqcup \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} \sigma^{n+1} D \right) = S^2 \setminus D$$

である．故に補題 10 を使えば $S^2 \sim S^2 \setminus D \sim (S^2 \setminus D) \oplus (S^2 \setminus D) \sim S^2 \oplus S^2$ となる． □

以上により，主張 (8) を仮定すると (従って選択公理を仮定すると) 次の 2 つが証明できる．

定理 12 (Banach-Tarski の定理)**.** $\mathsf{B} \sim \mathsf{B} \oplus \mathsf{B}$ である． □

系 13 (強 Banach-Tarski の定理)**.** 内部が空でない有界部分集合 $X, Y \subset \mathbb{R}^3$ に対して $X \sim Y$ となる.

証明. 明らかに, ある球体 K, L が存在して $X \subset K$ かつ $L \subset Y$ となる. $n \in \mathbb{N}$ を十分大きく取り, L の n 個のコピー $L_1, \cdots, L_n$ で K を被覆する. このとき定理 12 より

$$X \subset K \precsim L_1 \oplus \cdots \oplus L_n \sim L \subset Y$$

となって $X \precsim Y$ が分かる. 同様にして $Y \precsim X$ だから命題 9 によって $X \sim Y$ となる. □

2　Hahn-Banach との関係

Banach-Tarski の定理の証明で選択公理を使っている部分は命題 7 で主張 (8) を示しているところのみであった. 実は主張 (8) は Hahn-Banach の定理から導かれる.

定義. $\mathbb{B}$ をブール代数とする.
$\mu\colon \mathbb{B} \to [0,1]$ が $\mathbb{B}$ 上の有限加法的測度
$\iff \mu(1) = 1$ かつ「$x \wedge y = 0 \implies \mu(x \vee y) = \mu(x) + \mu(y)$」.

定理 14. Hahn-Banach の定理
$\iff$ 任意のブール代数 $\mathbb{B}$ について $\mathbb{B}$ 上の有限加法的測度が存在する. □

定理 15. Hahn-Banach の定理 $\Longrightarrow$ 主張 (8)

証明. 命題 7 の証明の E/R を考える. $U \in E/R$ に対してブール代数 $\mathbb{B}_U := \mathcal{P}(U)$ を考え, ブール代数の直和 $\mathbb{B} := \bigoplus_{U \in E/R} \mathbb{B}_U$ を取る. $i_U\colon \mathbb{B}_U \to \mathbb{B}$ を標準埋込とする. Hahn-Banach の定理により, $\mathbb{B}$ 上の有限加法的測度 μ が取れる. $\mu_U := \mu \circ i_U$ と置く. $V(a) := \{x_1 \cdots x_n \in F_2 \mid n > 0,\ x_n = a\}$ として

$$\begin{aligned}
X_1 &:= \{x \in E \mid \mu_{[x]}(V(s)x) > 1/2\} \\
X_2 &:= \{x \in E \mid \mu_{[x]}(V(t)x) > 1/2\} \\
X_3 &:= \{x \in E \mid \mu_{[x]}(V(s^{-1})x) > 1/2\} \\
X_4 &:= \{x \in E \mid \mu_{[x]}(V(t^{-1})x) > 1/2\} \\
Y_1 &:= X \setminus (sX_1 \cup tX_2) \\
Y_2 &:= X \setminus (s^{-1}X_3 \cup t^{-1}X_4)
\end{aligned}$$

と定める．$X = sX_1 \cup tX_2 \cup s^{-1}X_3 \cup t^{-1}X_4$ である．

∵) 任意の $x \in E$ を取る．$V(s)x, V(t)x, V(s^{-1})x, V(t^{-1})x \subset [x]$ は互いに素だから $\mu_{[x]}(V(s)x) + \mu_{[x]}(V(t)x) + \mu_{[x]}(V(s^{-1})x) + \mu_{[x]}(V(t^{-1})x) \leq 1$ となる．よってこの 4 つのうち少なくとも 1 つは $\frac{1}{2}$ より小さい．

どの場合でも同様なので $\mu_{[x]}(V(s)x) < \frac{1}{2}$ だとする．$F_2 = V(s) \sqcup V(s^{-1})s$ だから $\mu_{[x]}(V(s)x) + \mu_{[x]}(V(s^{-1})sx) = 1$ となるので，$\mu_{[x]}(V(s^{-1})sx) > \frac{1}{2}$ である．故に $sx \in X_3$，即ち $x \in s^{-1}X_3$ である．以上により $X = sX_1 \cup tX_2 \cup s^{-1}X_3 \cup t^{-1}X_4$ が分かった．

従って $Y_1 \cap Y_2 = \emptyset$ である．また明らかに X_1, X_2, X_3, X_4 は互いに素である．

Y_1 と X_1 は互いに素である．

∵) $V(s) \subset V(t)t^{-1}$ だから

$$\begin{aligned} X_1 &= \{x \in X \mid \mu_{[x]}(V(s)x) > 1/2\} \\ &\subset \{x \in X \mid \mu_{[x]}(V(t)t^{-1}x) > 1/2\} \\ &= \{tx \in X \mid \mu_{[x]}(V(t)x) > 1/2\} = tX_2 \end{aligned}$$

である．よって $Y_1 \cap X_1 = \emptyset$．

同様にして $i = 1, 2$，$j = 1, 2, 3, 4$ に対して $Y_i \cap X_j = \emptyset$ が分かる．

$X_2' \subset X_2$，$X_4' \subset X_4$ を $sX_1 \cup tX_2 = sX_1 \sqcup tX_2'$，$s^{-1}X_3 \cup t^{-1}X_4 = s^{-1}X_3 \sqcup t^{-1}X_4'$ となるように取る．$X = X_1 \sqcup X_2' \sqcup Y_1$，$Y := X_3 \sqcup X_4' \sqcup Y_2$ と置けば $X \sqcup Y \subset E$ かつ $E \sim X$，$E \sim Y$ である．□

系 16. Hahn-Banach の定理 $\Longrightarrow$ Banach-Tarski の定理．□

3 移動も含めた Banach-Tarski の定理

この節では選択公理を仮定する．Banach-Tarski の証明から得られる B の分割の仕方を見ると，この分割が物理的に可能であったとしても，物理的に移動させることが可能かどうかはよく分からない．そこで《物理的な移動まで含めた分割合同》というものを考えてみる．

定義. $X, Y \subset \mathbb{R}^3$ とする．

$X \approx Y \iff n \in \mathbb{N}$, $X_i, Y_i \subset \mathbb{R}^3$，連続写像 $\gamma_i \colon [0,1] \to G_3$ $(0 \leq i \leq n)$ が存在して以下

を満たす.

- $X = X_0 \sqcup \cdots \sqcup X_n$
- $Y = Y_0 \sqcup \cdots \sqcup Y_n$
- $\gamma_i(0) = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$
- $Y_i = \gamma_i(1)X_i$
- $i \neq j$ ならば，任意の $t \in [0,1]$ に対して $\gamma_i(t)X_i \cap \gamma_j(t)X_j = \emptyset$.

命題 17. $\approx$ は同値関係である. □

補題 18. $S_0, S_1 \subset \mathbb{R}$ を次の条件を満たすように取ることができる．$\mathbb{R} = S_0 \sqcup S_1$ かつ，$\Delta S_i := \{x - y \mid x, y \in S_i\} \subset \mathbb{R}$ の補集合は稠密となる.

証明. $K := \displaystyle\bigcup_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n}\mathbb{Z}$，$H := K + \dfrac{1}{2}\mathbb{Z}$ と置く．選択公理により $\mathbb{R}/H$ の完全代表系 M を取る．このとき $S_0 := \displaystyle\bigcup_{r \in M} (r + K)$，$S_1 = S_0 + \dfrac{1}{2}$ と置けば明らかに $\mathbb{R} = S_0 \sqcup S_1$ である.

稠密性を示す．どちらも同じであるから $\mathbb{R} \setminus \Delta S_0 \subset \mathbb{R}$ が稠密であることを示す．そのためには $\mathbb{R} \setminus \Delta S_0 \supset K + \frac{1}{2}$，即ち $\Delta S_0 \cap (K + \frac{1}{2}) = \emptyset$ を示せばよい.

そこで $a \in \Delta S_0 \cap (K + \frac{1}{2})$ が存在すると仮定する．ΔS_0 の定義より $x, y \in S_0$ を使って $a = x - y$ と書ける．更にこれを

$$x = r_x + k_x,\ y = r_y + k_y \quad (r_x, r_y \in M,\ k_x, k_y \in K)$$

と書く．このとき $a \in K + \frac{1}{2} \subset H$ だから $r_x - r_y = a - k_x + k_y \in H$ となり，M の取り方により $r_x = r_y$ である．従って $a = k_x - k_y \in K$ となり矛盾する. □

命題 19. $X, Y \subset \mathbb{R}^3$ を有界部分集合として，$u, v \in \mathbb{R}^3$ を $X \cap \tau_u Y = \emptyset$，$X \cap \tau_v Y = \emptyset$ となるように取る．このとき $X \sqcup \tau_u Y \approx X \sqcup \tau_v Y$ である.

証明. 補題 18 の S_0, S_1 を取る．稠密性から，0 へ収束する実数列 $\{a_n^{(i)}\}_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{R} \setminus \Delta S_i$ が取れる.

$i, j \in \{0, 1\}$ に対して $S_{ij} := S_i \times S_j \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^3$ と置く．すると $\mathbb{R} = S_0 \sqcup S_1$ だったから $\mathbb{R}^3 = S_{00} \sqcup S_{01} \sqcup S_{10} \sqcup S_{11}$ となる．$\pi_1 \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ を第 1 成分への射影として，$r > 0$ を

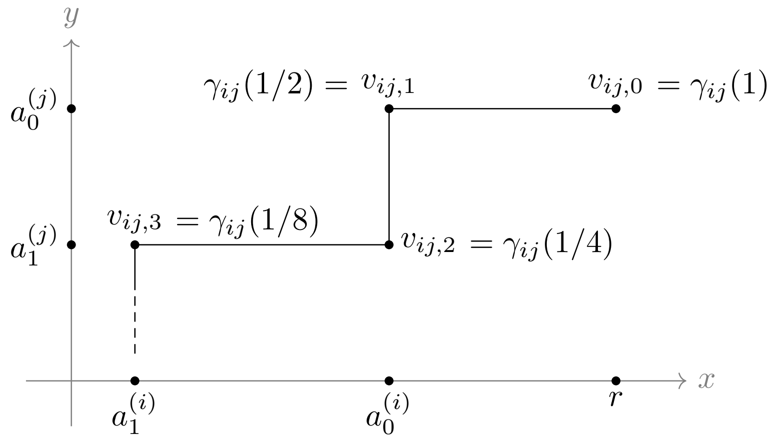
$$\sup \pi_1(X) < \inf \pi_1(\tau_u Y) + r, \quad \sup \pi_1(X) < \inf \pi_1(\tau_v Y) + r$$

となるように取る．$v_{ij,k} \in \mathbb{R}^3$ を

$$v_{ij,0} := \langle r, a_0^{(j)}, 0\rangle, \quad v_{ij,2k+1} = \langle a_k^{(i)}, a_k^{(j)}, 0\rangle, \quad v_{ij,2k+2} = \langle a_k^{(i)}, a_{k+1}^{(j)}, 0\rangle$$

で定めて，連続写像 $\gamma_{ij}\colon [0,1] \to \mathbb{R}^3$ を

$$\gamma_{ij}(t) := \begin{cases} \langle 0,0,0\rangle & (t=0\ \text{のとき}) \\ v_{ij,k} & (t=\frac{1}{2^k}\ \text{のとき}) \\ \text{線分}\ v_{ij,k+1}v_{ij,k}\ \text{上の点} & (\frac{1}{2^{k+1}} < t < \frac{1}{2^k}\ \text{のとき}) \end{cases}$$



を満たすように取る．$0 < t \leq 1$ のとき $\gamma_{ij}(t) \notin \Delta S_i \times \Delta S_j \times \mathbb{R}$ である．これにより t を変数とする連続写像 $\tau_{\gamma_{ij}(t)}\colon [0,1] \to G_3$ が定まるが，簡単のためこれも $\gamma_{ij}(t)$ で表す．

$X_{ij} := X \cap S_{ij}$，$Y_{ij} := \tau_u Y \cap S_{ij}$ と置けば

$$X \sqcup \tau_u Y = X_{00} \sqcup X_{01} \sqcup X_{10} \sqcup X_{11} \sqcup Y_{00} \sqcup Y_{01} \sqcup Y_{10} \sqcup Y_{11} \tag{20}$$

である．γ の定義から $0 \leq t \leq 1$ に対して $X_{ij} \cap \gamma_{ij}(t)(Y_{ij}) = \emptyset$ となるから

$$X_{ij} \sqcup Y_{ij} \approx X_{ij} \sqcup (\gamma_{ij}(1)Y_{ij}) \tag{21}$$

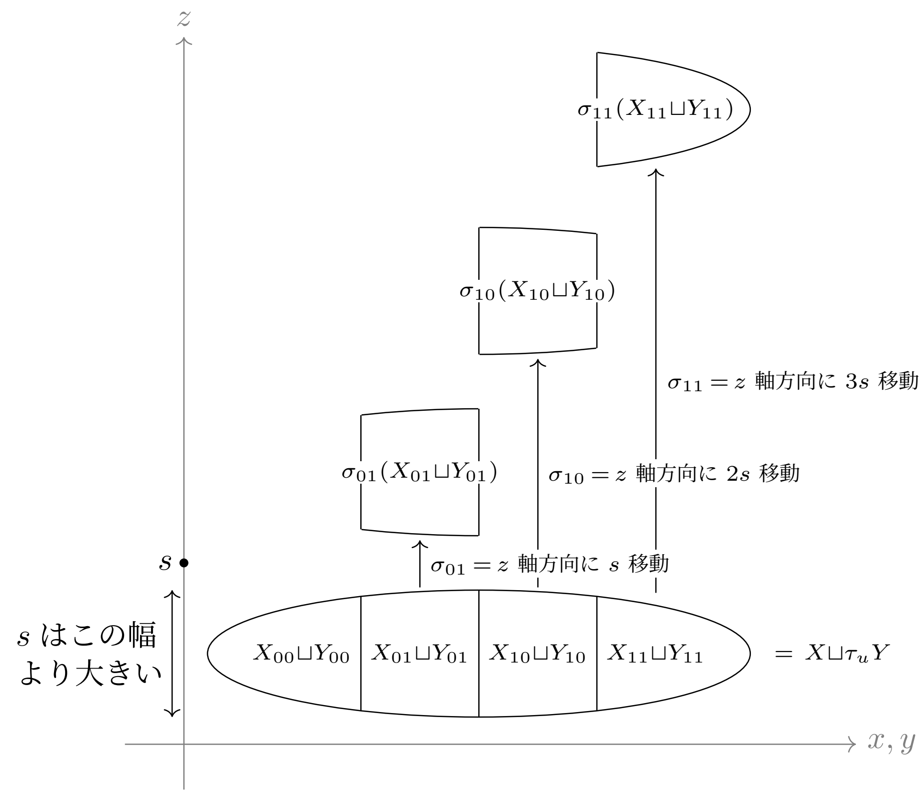
となる．

実数 s を $s > \sup\{d(x,y) \mid x,y \in X \sqcup \tau_u Y\}$ かつ $s > \sup\{d(x,y) \mid x,y \in X \sqcup \tau_v Y\}$ (d は通常の距離) となるように取り

$$\sigma_{00} := \tau_{\langle 0,0,0\rangle}, \quad \sigma_{01} := \tau_{\langle 0,0,s\rangle}, \quad \sigma_{10} := \tau_{\langle 0,0,2s\rangle}, \quad \sigma_{11} := \tau_{\langle 0,0,3s\rangle}$$

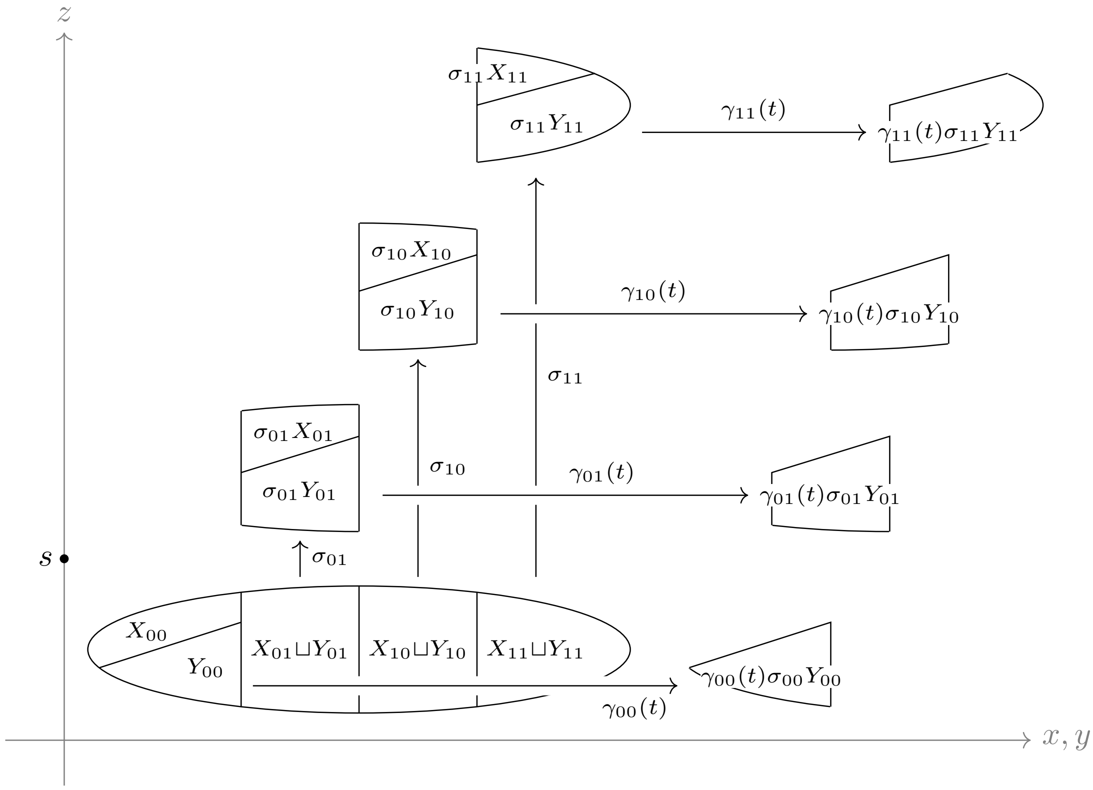
と定める．$S_{ij} = S_i \times S_j \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^3$ だから，分割 (20) において $X_{ij} \sqcup Y_{ij}$ を 1 つの塊としたとき，これらは z 軸方向に平行移動したとき互いにぶつからない．よって

$$X \sqcup \tau_u Y = \bigsqcup_{i,j=0}^{1} X_{ij} \sqcup Y_{ij} \approx \bigsqcup_{i,j=0}^{1} \sigma_{ij}(X_{ij} \sqcup Y_{ij})$$



である．次に $\sigma_{ij}(X_{ij} \sqcup Y_{ij})$ は z 軸方向に平行移動しただけであり，また $\gamma_{ij}(t)$ は z 軸方向には動かさないので，(21) と同様にして $\sigma_{ij}(X_{ij} \sqcup Y_{ij}) \approx \sigma_{ij}X_{ij} \sqcup \gamma_{ij}(1)(\sigma_{ij}Y_{ij})$ となる．ここで s の取り方 (上図も参照) から，各 $\sigma_{ij}(X_{ij} \sqcup Y_{ij})$ を $\gamma_{ij}(t)$ で動かす際には互いにぶつかることはない．即ち

$$X \sqcup \tau_u Y \approx \bigsqcup_{i,j=0}^{1} \sigma_{ij}(X_{ij} \sqcup Y_{ij}) \approx \bigsqcup_{i,j=0}^{1} \sigma_{ij}X_{ij} \sqcup \gamma_{ij}(1)(\sigma_{ij}Y_{ij})$$



である．$Y'_{ij} := \tau_v Y \cap S_{ij}$ として，同様の議論を行えば

$$X \sqcup \tau_v Y \approx \bigsqcup_{i,j=0}^{1} \sigma_{ij} X_{ij} \sqcup \gamma_{ij}(1)(\sigma_{ij} Y'_{ij})$$

も分かる．$\gamma_{ij}(1) = \langle r, a_0^{(j)}, 0\rangle$ で，r, s の取り方から

$$X \sqcup \tau_u Y \approx \bigsqcup_{i,j=0}^{1} \sigma_{ij} X_{ij} \sqcup \gamma_{ij}(1)(\sigma_{ij} Y_{ij}) \approx \bigsqcup_{i,j=0}^{1} \sigma_{ij} X_{ij} \sqcup \gamma_{ij}(1)(\sigma_{ij} Y'_{ij}) \approx X \sqcup \tau_v Y$$

とできる． □

命題 22. $X, Y \subset \mathbb{R}^3$ を互いに素な有界集合として $\sigma_0, \sigma_1 \in G_3$ が $\sigma_0 X \cap \sigma_1 Y = \emptyset$ を満たすとする．このとき $X \sqcup Y \approx \sigma_0 X \sqcup \sigma_1 Y$ である．

証明. 十分大きい r を取って $u := \langle r, 0, 0\rangle$ とすれば明らかに $X \sqcup (\tau_u Y) \approx \sigma_0 X \sqcup (\tau_u \sigma_1 Y)$ とできる．一方命題 19 より

$$X \sqcup Y \approx X \sqcup \tau_u Y, \quad \sigma_0 X \sqcup \sigma_1 Y \approx \sigma_0 X \sqcup \tau_u(\sigma_1 Y)$$

であるから $X \sqcup Y \approx \sigma_0 X \sqcup \sigma_1 Y$ が分かる． □

定理 23. 内部が空でない有界部分集合 $X, Y \subset \mathbb{R}^3$ に対して $X \approx Y$ である．

証明. 系 13 によりある分割 $X = X_0 \sqcup \cdots \sqcup X_n$，$Y = Y_0 \sqcup \cdots \sqcup Y_n$ と $\sigma_i \in G_3$ が存在して $\sigma_i X_i = Y_i$ となる．故に命題 22 を繰り返し使用して

$$X = X_0 \sqcup \cdots \sqcup X_n \approx \sigma_0 X_0 \sqcup \cdots \sqcup \sigma_n X_n = Y$$

である． □

4　各パーツの連結性

この節では選択公理を仮定する．また $N_4 := \{0, 1, 2, 3\}$ と書く．

Banach-Tarski の定理で $\mathsf{B} = X_0 \sqcup \cdots \sqcup X_n$ と分割するとき，これは確かに集合としては有限個の分割になっているが，物理的に有限個の分割になっているかは分からない．つまり各 X_i が連結かどうかは分からないということである．そこで連結になるようにできるか，という問題を考えることができるが，実はこれは可能である (定理 29).

まず命題 11 をより詳しく見る．命題 6 と同様，$s_0, s_1, s_2, s_3 \in SO(3)$ を「s_0, s_1, s_2, s_3 が生成する部分群」が「4 元集合 $\{s_0, s_1, s_2, s_3\}$ が生成する自由群 F_4」になるように取れる．このとき，任意の $\sigma \in F_4$ は

$$\sigma = t_1 \cdots t_n, \quad t_k = s_{i_k}^{j_k}, \quad i_k \in N_4, \quad j_k = \pm 1, \quad t_k t_{k+1} \neq 1$$

と一意に書ける．以下この表示を標準形ということにする．

S^2 に同値関係 R を

$$xRy \Longleftrightarrow \text{ある } \sigma \in F_4 \text{ が存在して } y = \sigma(x)$$

で定める．$x \in S^2$ の属する同値類を $[x] \in S^2/R$ と書く．また選択公理により S^2/R の完全代表系 M を取る．

定義. $x \in S^2$ が不動点 $\Longleftrightarrow$ ある $\sigma \in F_4 \setminus \{1\}$ が存在して $\sigma(x) = x$ となる．

xRy のとき，x が不動点であることと y が不動点であることは同値である．

$m \in M$ が不動点であるとする．$\theta_m(m) = m$ となる $\theta_m \in F_4$ を取り，この θ_m を標準形で $\theta_m = u_1 \cdots u_r$ と書く．このとき必要なら M の取り方と θ_m を変えることで r が最小になるようにしておく．

補題 24. $u_1 u_r \neq 1$ である．

$\because$) $u_1u_r = 1$ と仮定すると $\theta' := u_1^{-1}\theta_m u_r^{-1}$ は

$$\theta'(u_r(m)) = u_r\theta(m) = u_r(m)$$

を満たす．θ' の標準形は $\theta' = u_2 \cdots u_{r-1}$ であるから，これは r の最小性に矛盾する．

補題 25. $x \in [m]$ が $\theta_m(x) = x$ を満たすとする．このとき $\sigma \in F_4$ が $\sigma(x) = x$ を満たすならば，ある $p \in \mathbb{Z}$ が存在して $\sigma = \theta_m^p$ となる．

証明. $\sigma = 1$ のときは $p = 0$ とすればよいから，$\sigma \neq 1$ とする．σ と θ_m は同じ不動点 x を持つので，これらはどちらも同じ軸について回転させる作用である．故に $\sigma\theta_m = \theta_m\sigma$ が成り立つ．標準形で $\sigma = t_1 \cdots t_n$ と書く．r の最小性から $n \geq r$ である．

(i) $t_n u_1 \neq 1$ のとき

この場合 $\sigma\theta_m = \theta_m\sigma$ から

$$t_1 \cdots t_n u_1 \cdots u_r = u_1 \cdots u_r t_1 \cdots t_n$$

であって，左辺はこれ以上キャンセルされない．故に右辺もキャンセルされず，特に $u_r t_1 \neq 1$ である．すると標準形の一意性から $t_1 = u_1, \cdots, t_r = u_r$ である．即ち σ は $\sigma = \theta_m\sigma'$ と書ける．$\sigma' = 1$ のときは $p = 1$ とすればよいから，$\sigma' \neq 1$ とする．このとき

$$\theta_m\sigma'(x) = \sigma(x) = x = \theta_m(x)$$

から $\sigma'(x) = x$ である．よって $\sigma' = t_{r+1} \cdots t_n$ も σ と同じ条件を満たすので，同じ議論を繰り返せば $\sigma = \theta_m^p$ $(p > 0)$ と書けることが分かる．

(ii) $t_n u_1 = 1$ のとき

この場合 $\sigma\theta_m^{-1} = \theta_m^{-1}\sigma$ を考えると

$$t_1 \cdots t_n u_r^{-1} \cdots u_1^{-1} = u_r^{-1} \cdots u_1^{-1} t_1 \cdots t_n$$

となる．補題 24 より $t_n u_r^{-1} \neq 1$ となるから左辺はこれ以上簡約されない．よって (i) と同様にして $\sigma = \theta_m^p$ $(p < 0)$ と書けることが分かる． □

命題 26. $X_0, X_1, X_2, X_3 \subset S^2$ を次のように取ることができる．

$$\begin{aligned} S^2 &= X_0 \sqcup X_1 \sqcup X_2 \sqcup X_3 \\ s_0X_0 &= s_1X_1 = X_0 \sqcup X_1 \\ s_2X_2 &= s_3X_3 = X_2 \sqcup X_3 \end{aligned}$$

(従って特に $S^2 \sim S^2 \oplus S^2$ である．)

証明. $i \in N_4$, $j = \pm 1$ に対して，写像 $f_{i,j}\colon N_4 \to N_4$ を次のように定義する．

$$
\begin{aligned}
f_{0,1}(0) &= 1, \quad f_{0,1}(1) = 2, \quad f_{0,1}(2) = 3, \quad f_{0,1}(3) = 3,\\
f_{0,-1}(0) &= 0, \quad f_{0,-1}(1) = 0, \quad f_{0,-1}(2) = 3, \quad f_{0,-1}(3) = 3,\\
f_{1,1}(0) &= 2, \quad f_{1,1}(1) = 0, \quad f_{1,1}(2) = 3, \quad f_{1,1}(3) = 3,\\
f_{1,-1}(0) &= 1, \quad f_{1,-1}(1) = 1, \quad f_{1,-1}(2) = 3, \quad f_{1,-1}(3) = 3,\\
f_{2,1}(0) &= 0, \quad f_{2,1}(1) = 0, \quad f_{2,1}(2) = 3, \quad f_{2,1}(3) = 0,\\
f_{2,-1}(0) &= 0, \quad f_{2,-1}(1) = 0, \quad f_{2,-1}(2) = 2, \quad f_{2,-1}(3) = 2,\\
f_{3,1}(0) &= 0, \quad f_{3,1}(1) = 0, \quad f_{3,1}(2) = 0, \quad f_{3,1}(3) = 2,\\
f_{3,-1}(0) &= 0, \quad f_{3,-1}(1) = 0, \quad f_{3,-1}(2) = 3, \quad f_{3,-1}(3) = 3,
\end{aligned}
$$

$x \in S^2$ に対して $P(x) \in N_4$ を定義したい．そこでまず $m \in M$ を $x \in [m]$ となるように取る．

(i) m が不動点でないとき
$\sigma \in F_4$ が一意に存在して $x = \sigma(m)$ と書ける．この σ は標準形で $\sigma = t_1 \cdots t_n$ と一意に書ける．こうして得られる表示

$$
x = t_1 \cdots t_n(m), \quad t_k = s_{i_k}^{j_k}, \quad i_k \in N_4, \quad j_k = \pm 1, \quad t_k t_{k+1} \neq 1
$$

を x の標準形ということにする．x の標準形を使って $P(x) \in N_4$ を次のように帰納的に定める．

- $P(m) \in N_4$ は任意に定める．
- $n > 0$ のとき，$P(x) := f_{i_1,j_1}(P(t_2 \cdots t_n(m)))$ とする．

(ii) m が不動点のとき
上のように $\theta_m = u_1 \cdots u_r$ を取る．このとき

$$
x = t_1 \cdots t_n(m), \quad t_k = s_{i_k}^{j_k}, \quad i_k \in N_4, \quad j_k = \pm 1, \quad t_k t_{k+1} \neq 1, \quad t_n \neq u_1^{-1}
$$

$$
n > r \text{ ならば } t_{n-r+1} \cdots t_n \neq u_1 \cdots u_r \text{ である}
$$

と書ける．

$\because$) まず $\sigma \in F_4$ により $x = \sigma(m)$ と書ける．この σ を標準形で $\sigma = t_1 \cdots t_n$ と一意に書く．$\sigma\theta_m(m) = \sigma(m) = x$ だから，$t_n = u_1^{-1}$ のときは σ の代わりに $\sigma\theta_m$ を使うことで，$t_n \neq u_1^{-1}$ としてよい．更に $n > r$ かつ $t_{n-r+1} \cdots t_n = u_1 \cdots u_r$ のときは

$\sigma' := t_1 \cdots t_{n-r}$ とすれば

$$\sigma'(m) = \sigma'(\theta_m(m)) = \sigma(m) = x$$

だから，σ の代わりに σ' を使うことで

$$n > r \text{ ならば } t_{n-r+1} \cdots t_n \neq u_1 \cdots u_r \text{ である}$$

を満たすようにすることができる．

この表示を x の標準形ということにする．x の標準形は一意である．

$\because$) $x = t_1 \cdots t_n(m) = t'_1 \cdots t'_{n'}(m)$ とすると

$$t_n^{-1} \cdots t_1^{-1} t'_1 \cdots t'_{n'}(m) = m$$

である．故に補題 25 により $t_n^{-1} \cdots t_1^{-1} t'_1 \cdots t'_{n'} = \theta^p$ と書ける．

$p = 0$ を示せばよい．そこで $p \neq 0$ と仮定する．必要であれば t と t' を入れ替えることで $p > 0$ としてよい．今 $t_n^{-1} \neq u_1$ だから $t_n^{-1} \cdots t_1^{-1} t'_1 \cdots t'_{n'} = \theta^p$ となるためには t_n^{-1} から t_1^{-1} が全てキャンセルされなければならない．つまり $n' > n$ であって $t'_{n+1} \cdots t'_{n'} = \theta^p$ となるが，これは条件

$$n > r \text{ ならば } t_{n-r+1} \cdots t_n \neq u_1 \cdots u_r \text{ である}$$

に矛盾する．

x の標準形を使って $P(x) \in N_4$ を次のように帰納的に定める．

- $P(m) \in N_4$ は任意に定める．
- $P(u_r(m)) = \cdots = P(u_2 \cdots u_r(m)) := P(m)$ とする．
- $n > 0$ のとき，$P(x) := f_{i_1, j_1}(P(t_2 \cdots t_n(m)))$ とする．

(i)(ii) を使って $X_i := \{x \in S^2 \mid P(x) = i\}$ と定める．$S^2 = X_0 \sqcup X_1 \sqcup X_2 \sqcup X_3$ である．このとき $s_0 X_0 \subset X_0 \sqcup X_1$ である．

$\because$) $x \in X_0$ を標準形で $x = t_1 \cdots t_n(m)$ と書く．

(1) $t_1 = s_0^{-1}$ のとき

$s_0(x)$ の標準形は $s_0(x) = t_2 \cdots t_n(m)$ である．このとき

$$0 = P(x) = P(s_0^{-1} t_2 \cdots t_n(m)) = f_{0,-1}(P(t_2 \cdots t_n(m)))$$

となるから，P の定義より $P(t_2\cdots t_n(m))\in\{0,1\}$ である．従って

$$P(s_0(x))=P(t_2\cdots t_n(m))\in\{0,1\}$$

となるから $s_0(x)\in X_0\sqcup X_1$ である．

(2) $t_1\neq s_0^{-1}$ のとき

$s_0(x)$ の標準形は $s_0(x)=s_0t_1\cdots t_n(m)$ である．よって

$$P(s_0(x))=f_{0,1}(P(x))=f_{0,1}(0)=1$$

となるから $s_0(x)\in X_1$ である．

(1)(2) により $s_0X_0\subset X_0\sqcup X_1$ である．

次に $X_0\subset s_0X_0$ である．

$\because$) $x\in X_0$ を標準形で $x=t_1\cdots t_n(m)$ と書く．

$t_1=s_0$ と仮定する．$s_0^{-1}(x)$ の標準形は $s_0^{-1}(x)=t_2\cdots t_n(m)$ である．このとき

$$0=P(x)=P(s_0t_2\cdots t_n(m))=f_{0,1}(P(t_2\cdots t_n(m)))$$

となるが，これは $f_{0,1}$ の定義に矛盾する．従って $t_1\neq s_0$ である．

よって $s_0^{-1}(x)$ の標準形は $s_0^{-1}(x)=s_0^{-1}t_1\cdots t_n(m)$ である．よって

$$P(s_0^{-1}(x))=f_{0,-1}(P(x))=f_{0,-1}(0)=0$$

となる．故に $s_0^{-1}(x)\in X_0$ だから $x=s_0(s_0^{-1}(x))\in s_0X_0$ である．

更に $X_1\subset s_0X_0$ である．

$\because$) $x\in X_1$ を標準形で $x=t_1\cdots t_n(m)$ と書く．

(1) $t_1=s_0$ のとき

$s_0^{-1}(x)$ の標準形は $s_0^{-1}(x)=t_2\cdots t_n(m)$ である．このとき

$$1=P(x)=P(s_0t_2\cdots t_n(m))=f_{0,1}(P(t_2\cdots t_n(m)))$$

となるから，P の定義より $P(t_2\cdots t_n(m))=0$ である．従って $t_2\cdots t_n(m)\in X_0$ だから $x=s_0(t_2\cdots t_n(m))\in s_0X_0$ となる．

(2) $t_1\neq s_0$ のとき

$s_0^{-1}(x)$ の標準形は $s_0^{-1}(x) = s_0^{-1}t_1 \cdots t_n(m)$ である．よって

$$P(s_0^{-1}(x)) = f_{0,-1}(P(x)) = f_{0,-1}(1) = 0$$

となる．故に $s_0^{-1}(x) \in X_0$ だから $x = s_0(s_0^{-1}(x)) \in s_0 X_0$ である．

(1)(2) により $X_1 \subset s_0 X_0$ である．

以上により $s_0X_0 = X_0 \sqcup X_1$ が分かった．

同様にして

$$s_1X_1 = X_0 \sqcup X_1, \quad s_2X_2 = s_3X_3 = X_2 \sqcup X_3$$

が分かる (同様なため一旦省略し，後で補題 30，31，32 で証明する)． □

命題 27. 点 $p \in S^2$ と，$X_0, X_1, X_2, X_3 \subset S^2$ を次のように取ることができる．

$$\begin{aligned} S^2 &= X_0 \sqcup X_1 \sqcup X_2 \sqcup X_3 \sqcup \{p\} \\ s_0X_0 = s_1X_1 &= X_0 \sqcup X_1 \sqcup \{p\} \\ s_2X_2 = s_3X_3 &= X_2 \sqcup X_3 \end{aligned}$$

証明. 不動点でない $p \in M$ を 1 つ取り，$x \in [p]$ の標準形を $x = t_1 \cdots t_n(p)$ とする．これを使って $P(x) \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ を次のように定める．

- $P(p) := 4$ とする．
- $P(s_0(p)) := 3$, $P(s_0^{-1}(p)) := 0$, $P(s_1(p)) := 3$, $P(s_1^{-1}(p)) := 1$, $P(s_2(p)) := 0$, $P(s_2^{-1}(p)) := 0$, $P(s_3(p)) := 0$, $P(s_3^{-1}(p)) := 0$ とする．
- $n > 1$ のとき $P(x) := f_{i_1,j_1}(P(t_2 \cdots t_n(p)))$ とする．

残りの点 $x \in S^2 \setminus [p]$ については命題 26 と同じ $P(x)$ を使い $X_i := \{x \in S^2 \mid P(x) = i\}$ と定めれば $S^2 = X_0 \sqcup X_1 \sqcup X_2 \sqcup X_3 \sqcup \{p\}$ である．このとき $s_0X_0 = X_0 \sqcup X_1 \sqcup \{p\}$ である．

∵) $X_i' := X_i \cap [p]$, $X_i'' := X_i \setminus X_i'$ とする．$x \in X_i''$ に対しては $P(x)$ は命題 26 と同じように定義されているから，命題 26 の証明と同様にして

$$s_0X_0'' = X_0'' \sqcup X_1''$$

である．よって $s_0X_0' = X_0' \sqcup X_1' \sqcup \{p\}$ を示せばよい．

まず $s_0X_0' \subset X_0' \sqcup X_1' \sqcup \{p\}$ である．

∵) $x \in X_0'$ を標準形で $x = t_1 \cdots t_n(p)$ と書く．

(1) $t_1 = s_0^{-1}$ かつ $n = 1$ のとき

$x = s_0^{-1}(p)$ だから $s_0(x) = p$ である．

(2) $t_1 = s_0^{-1}$ かつ $n > 1$ のとき

$s_0(x)$ の標準形は $s_0(x) = t_2 \cdots t_n(p)$ である．このとき

$$0 = P(x) = P(s_0^{-1} t_2 \cdots t_n(p)) = f_{0,-1}(P(t_2 \cdots t_n(p)))$$

となるから，$f_{0,-1}$ の定義より $P(t_2 \cdots t_n(p)) \in \{0, 1\}$ である．従って

$$P(s_0(x)) = P(t_2 \cdots t_n(p)) \in \{0, 1\}$$

となるから $s_0(x) \in X'_0 \sqcup X'_1$ である．

(3) $t_1 \neq s_0^{-1}$ のとき

$s_0(x)$ の標準形は $s_0(x) = s_0 t_1 \cdots t_n(p)$ である．よって

$$P(s_0(x)) = f_{0,1}(P(x)) = f_{0,1}(0) = 1$$

となるから $s_0(x) \in X'_1$ である．

(1)(2)(3) により $s_0 X'_0 \subset X'_0 \sqcup X'_1 \sqcup \{p\}$ である．

次に $X'_0 \subset s_0 X'_0$ である．

$\because$) $x \in X'_0$ を標準形で $x = t_1 \cdots t_n(p)$ と書く．

$t_1 = s_0$ と仮定する．定義より $P(s_0(p)) = 3$ であるから，$P(x) = 0$ となるためには $n > 1$ でなければならない．故に $s_0^{-1}(x)$ の標準形は $s_0^{-1}(x) = t_2 \cdots t_n(p)$ かつ $n > 1$ となる．このとき

$$0 = P(x) = P(s_0 t_2 \cdots t_n(p)) = f_{0,1}(P(t_2 \cdots t_n(p)))$$

となるが，これは $f_{0,1}$ の定義に矛盾する．従って $t_1 \neq s_0$ である．

よって $s_0^{-1}(x)$ の標準形は $s_0^{-1}(x) = s_0^{-1} t_1 \cdots t_n(p)$ である．よって

$$P(s_0^{-1}(x)) = f_{0,-1}(P(x)) = f_{0,-1}(0) = 0$$

となる．故に $s_0^{-1}(x) \in X'_0$ だから $x = s_0(s_0^{-1}(x)) \in s_0 X'_0$ である．

更に $X'_1 \subset s_0 X'_0$ である．

$\because$) $x \in X'_1$ を標準形で $x = t_1 \cdots t_n(p)$ と書く．

(1) $t_1 = s_0$ のとき

定義より $P(s_0(p)) = 3$ であるから，$P(x) = 1$ となるためには $n > 1$ でなければ

ならない．故に $s_0^{-1}(x) = \tau(p)$ の標準形は $s_0^{-1}(x) = t_2 \cdots t_n(p)$ かつ $n > 1$ である．このとき

$$1 = P(x) = P(s_0 t_2 \cdots t_n(p)) = f_{0,1}(P(t_2 \cdots t_n(p)))$$

となるから，$f_{0,1}$ の定義より $P(t_2 \cdots t_n(p)) = 0$ である．従って $t_2 \cdots t_n(p) \in X_0'$ だから $x = s_0(t_2 \cdots t_n(p)) \in s_0 X_0'$ となる．

(2) $t_1 \neq s_0$ のとき

$s_0^{-1}(x)$ の標準形は $s_0^{-1}(x) = s_0^{-1} t_1 \cdots t_n(p)$ である．よって

$$P(s_0^{-1}(x)) = f_{0,-1}(P(x)) = f_{0,-1}(1) = 0$$

となる．故に $s_0^{-1}(x) \in X_0'$ だから $x = s_0(s_0^{-1}(x)) \in s_0 X_0'$ である．

(1)(2) により $X_1' \subset s_0 X_0'$ である．

最後に $s_0^{-1}(p) \in X_0'$ であるから $p \in s_0 X_0'$ である．

以上により $s_0 X_0' = X_0' \sqcup X_1' \sqcup \{p\}$ が分かった．

同様にして

$$s_1 X_1 = X_0 \sqcup X_1 \sqcup \{p\}, \quad s_2 X_2 = s_3 X_3 = X_2 \sqcup X_3$$

が分かる (補題 33，34，35). □

定義. X を位相空間とする．$Y \subset X$ が完全集合 $\iff$ Y が閉集合かつ孤立点を持たない．

定義. $X \subset \mathsf{B}$ が totally imperfect
$\iff$ コンパクトな完全集合 $Y \subset \mathsf{B}$ で $Y \subset X$ となるものが存在しない．

命題 28. $X \subset \mathsf{B}$ が totally imperfect のとき $\mathsf{B} \setminus X \subset \mathsf{B}$ は連結部分空間である．

証明. $Y \subset \mathsf{B}$ に対して $Y^c := \mathsf{B} \setminus Y$ と書く．

$X^c = \mathsf{B} \setminus X$ が連結でないと仮定する．即ち開集合 $U, V \subset \mathsf{B}$ によって

$$X^c = (U \cap X^c) \sqcup (V \cap X^c), \quad U \cap X^c \neq \emptyset, \quad V \cap X^c \neq \emptyset$$

と書けるとする．$U \cap V = \emptyset$ としてよい．このとき

$$\begin{aligned} X &= (X^c)^c = (U \cap X^c)^c \cap (V \cap X^c)^c = (U^c \cup X) \cap (V^c \cup X) \\ &= (U^c \cap V^c) \cup (U^c \cap X) \cup (V^c \cap X) \cup X \end{aligned}$$

である．故に $U^c \cap V^c \subset X$ となる．$U^c \cap V^c$ はコンパクトな閉集合で，X が totally imperfect だから $U^c\cap V^c$ は孤立点 $x\in U^c\cap V^c$ を持つ．即ち，ある $\varepsilon>0$ が存在して

$$U^c\cap V^c\cap A=\{x\},\quad A=\{y\in B\mid d(y,x)<\varepsilon\}$$

となる．すると

$$\begin{aligned}A=\mathsf{B}\cap A&=\bigl((U^c\cap V^c)\sqcup(U^c\cap V^c)^c\bigr)\cap A\\&=(U^c\cap V^c\cap A)\sqcup((U^c\cap V^c)^c\cap A)\\&=\{x\}\sqcup((U\sqcup V)\cap A)\\&=\{x\}\sqcup(U\cap A)\sqcup(V\cap A)\end{aligned}$$

となるから $A\setminus\{x\}$ が連結でないことになり，矛盾する． □

B のコンパクトな完全集合全体を整列して $\{P_\alpha\mid\alpha<\lambda\}$ と書く．ここで基数 λ は $\lambda=|\mathbb{R}|$ である．

定理 29. ある $n\in\mathbb{N}$ と $X_i,Y_i\subset\mathbb{R}^3$，$\sigma_i\in G_3$ $(0\le i\le n)$ が存在して次を満たす．

(1) $\mathsf{B}=X_0\sqcup\cdots\sqcup X_n$，$\mathsf{B}\oplus\mathsf{B}=Y_0\sqcup\cdots\sqcup Y_n$ である．
(2) X_i,Y_i は連結である．
(3) $Y_i=\sigma_iX_i$ と書ける．

証明. f を $\mathcal{P}(\mathsf{B})\setminus\{\emptyset\}$ の選択関数とする．また F_4 の不動点全体を $D\subset\mathsf{B}$ とする．$S^2(r):=\{\langle x,y,z\rangle\in\mathbb{R}^3\mid x^2+y^2+z^2=r^2\}$ とする．点 $p\in S^2(1)$ と，$0<r\le1$ に対して $X_0(r),X_1(r),X_2(r),X_3(r)\subset S^2(r)$ を次を満たすように取る．

$$\begin{aligned}S^2(r)&=X_0(r)\sqcup X_1(r),\sqcup X_2(r)\sqcup X_3(r)\quad(0<r<1\text{ のとき})\\S^2(1)&=X_0(1)\sqcup X_1(1),\sqcup X_2(1)\sqcup X_3(1)\sqcup\{p\}\\s_0X_0(r)&=s_1X_1(r)=X_0(r)\sqcup X_1(r)\quad(0<r<1\text{ のとき})\\s_0X_0(1)&=s_1X_1(1)=X_0(1)\sqcup X_1(1)\sqcup\{p\}\\s_2X_2(r)&=s_3X_3(r)=X_2(r)\sqcup X_3(r)\quad(0<r\le1\text{ のとき})\end{aligned}$$

このような $X_i(r)$ が取れることは命題 26，27 から分かるが，ここではこの $X_i(r)$ を次のように定義する．

まず $\alpha<\lambda$，$i\in N_4$ に対して $x_{\alpha i}\in\mathsf{B}\setminus\{O\}$ を

$$x_{\alpha i}:=f\Bigl(P_\alpha\setminus\Bigl(D\cup\bigcup_{\beta<\alpha,j<4}[x_{\beta j}]\cup\bigcup_{j<i}[x_{\alpha j}]\Bigr)\Bigr)$$

と定義する ($|P_\alpha| = |\mathbb{R}|$ かつ $\left|D \cup \bigcup_{\beta<\alpha, j<4} [x_{\beta j}] \cup \bigcup_{j<i} [x_{\alpha j}]\right| < |\mathbb{R}|$ であるからこのような $x_{\alpha i}$ は取れる)．このように取ると，$\langle \alpha, i\rangle \neq \langle \beta, j\rangle$ のとき $x_{\alpha i} \not R x_{\beta j}$ である．よって $S^2(r)/R$ の完全代表系 M を取るとき $\{x_{\alpha i} \mid \alpha < \lambda,\ i \in N_4\} \cap S^2(r) \subset M$ となるようにできる．そして命題 26，27 の証明の方法で $X_0(r), X_1(r), X_2(r), X_3(r) \subset S^2(r)$ を取るが，このとき $P(x_{\alpha i}) := i$ としておく．

$X_i := \bigcup_{0<r\leq 1} X_i(r)$ とすれば $x_{\alpha i} \in X_i(r)$ である．また命題 26，27 の証明により

$$\begin{aligned} \mathsf{B} &= X_0 \sqcup X_1 \sqcup X_2 \sqcup X_3 \sqcup \{O\} \sqcup \{p\} \\ s_0 X_0 &= s_1 X_1 = X_0 \sqcup X_1 \sqcup \{p\} \\ s_2 X_2 &= s_3 X_3 = X_2 \sqcup X_3 \end{aligned}$$

となる．従って

$$\begin{aligned} \mathsf{B} &= X_0 \sqcup X_1 \sqcup X_2 \sqcup X_3 \sqcup \{O\} \sqcup \{p\} \\ &\sim (s_0 X_0 \sqcup s_2 X_2 \sqcup \{O\}) \oplus (s_1 X_1 \sqcup s_3 X_3 \sqcup \{O\}) \\ &= (X_0 \sqcup X_1 \sqcup \{p\} \sqcup X_2 \sqcup X_3 \sqcup \{O\}) \oplus (X_0 \sqcup X_1 \sqcup \{p\} \sqcup X_2 \sqcup X_3 \sqcup \{O\}) \\ &= \mathsf{B} \oplus \mathsf{B} \end{aligned}$$

である．後は $\mathsf{B} \setminus X_i$ が totally imperfect であることを示せば，命題 28 より $X_i \subset \mathsf{B}$ が連結と分かる．

そのために $Y \subset \mathsf{B}$ をコンパクトな完全集合とする．ある $\alpha < \lambda$ により $Y = P_\alpha$ と書ける．このとき $x_{\alpha i} \in P_\alpha$ かつ $x_{\alpha i} \in X_i$ だから $P_\alpha \cap X_i \neq \emptyset$ である．故に $P_\alpha \not\subset \mathsf{B} \setminus X_i$ が分かった． □

5 補題

補題 30. $s_1 X_1 \subset X_0 \sqcup X_1$ である．

証明. まず $s_1 X_1 \subset X_0 \sqcup X_1$ である．

$\because$) $x \in X_1$ を標準形で $x = t_1 \cdots t_n(m)$ と書く．

(1) $t_1 = s_1^{-1}$ のとき

$s_1(x)$ の標準形は $s_1(x) = t_2 \cdots t_n(m)$ である．このとき

$$1 = P(x) = P(s_1^{-1} t_2 \cdots t_n(m)) = f_{1,-1}(P(t_2 \cdots t_n(m)))$$

となるから，$f_{1,-1}$ の定義より $P(t_2\cdots t_n(m))\in\{0,1\}$ である．従って $P(s_1(x))=P(t_2\cdots t_n(m))\in\{0,1\}$ となるから $s_1(x)\in X_0\sqcup X_1$ である．

(2) $t_1\neq s_1^{-1}$ のとき

$s_1(x)$ の標準形は $s_1(x)=s_1t_1\cdots t_n(m)$ である．よって

$$P(s_1(x))=f_{1,1}(P(x))=f_{1,1}(1)=0$$

となるから $s_1(x)\in X_0$ である．

(1)(2) により $s_0X_0\subset X_0\sqcup X_1$ である．

次に $X_0\subset s_1X_1$ である．

$\because$) $x\in X_0$ を標準形で $x=t_1\cdots t_n(m)$ と書く．

(1) $t_1=s_1$ のとき

$s_1^{-1}(x)$ の標準形は $s_1^{-1}(x)=t_2\cdots t_n(m)$ である．このとき

$$0=P(x)=P(s_1t_2\cdots t_n(m))=f_{1,1}(P(t_2\cdots t_n(m)))$$

となるから，$f_{1,1}$ の定義より $P(t_2\cdots t_n(m))=1$ である．従って $t_2\cdots t_n(m)\in X_1$ だから $x=s_1(t_2\cdots t_n(m))\in s_1X_1$ となる．

(2) $t_1\neq s_1$ のとき

$s_1^{-1}(x)$ の標準形は $s_1^{-1}(x)=s_1^{-1}t_1\cdots t_n(m)$ である．よって

$$P(s_1^{-1}(x))=f_{1,-1}(P(x))=f_{1,-1}(0)=1$$

となる．故に $s_1^{-1}(x)\in X_1$ だから $x=s_1(s_1^{-1}(x))\in s_1X_1$ である．

(1)(2) により $X_0\subset s_1X_1$ である．

更に $X_1\subset s_1X_1$ である．

$\because$) $x\in X_1$ を標準形で $x=t_1\cdots t_n(m)$ と書く．

$t_1=s_1$ と仮定する．$s_1^{-1}(x)$ の標準形は $s_1^{-1}(x)=t_2\cdots t_n(m)$ である．このとき

$$1=P(x)=P(s_1\tau(m))=f_{1,1}(P(\tau(m)))$$

となるが，これは $f_{1,1}$ の定義に矛盾する．従って $t_1\neq s_1$ である．

よって $s_1^{-1}(x)$ の標準形は $s_1^{-1}(x)=s_1^{-1}t_1\cdots t_n(m)$ である．よって

$$P(s_1^{-1}(x))=f_{1,-1}(P(x))=1$$

となる．故に $s_1^{-1}(x) \in X_1$ だから $x = s_1(s_1^{-1}(x)) \in s_1X_1$ である．

以上により $s_1X_1 = X_0 \sqcup X_1$ が分かった． □

補題 31． $s_2X_2 \subset X_2 \sqcup X_3$ である．

証明．まず $s_2X_2 \subset X_2 \sqcup X_3$ である．

$\because$) $x \in X_2$ を標準形で $x = t_1 \cdots t_n(m)$ と書く．

(1) $t_1 = s_2^{-1}$ のとき

$s_2(x)$ の標準形は $s_2(x) = t_2 \cdots t_n(m)$ である．このとき

$$2 = P(x) = P(s_2^{-1}t_2 \cdots t_n(m)) = f_{2,-1}(P(t_2 \cdots t_n(m)))$$

となるから，$f_{2,-1}$ の定義より $P(t_2 \cdots t_n(m)) = 2, 3$ である．従って $P(s_2(x)) = P(t_2 \cdots t_n(m)) = 2, 3$ となるから $s_2(x) \in X_2 \sqcup X_3$ である．

(2) $t_1 \neq s_2^{-1}$ のとき

$s_2(x)$ の標準形は $s_2(x) = s_2t_1 \cdots t_n(m)$ である．よって

$$P(s_2(x)) = f_{2,1}(P(x)) = f_{2,1}(2) = 3$$

となるから $s_2(x) \in X_3$ である．

(1)(2) により $s_2X_2 \subset X_2 \sqcup X_3$ である．

次に $X_2 \subset s_2X_2$ である．

$\because$) $x \in X_2$ を標準形で $x = t_1 \cdots t_n(m)$ と書く．

$t_1 = s_2$ と仮定する．$s_2^{-1}(x)$ の標準形は $s_2^{-1}(x) = t_2 \cdots t_n(m)$ である．このとき

$$2 = P(x) = P(s_2\tau(m)) = f_{2,1}(P(\tau(m)))$$

となるが，これは $f_{2,1}$ の定義に矛盾する．従って $t_1 \neq s_2$ である．

よって $s_2^{-1}(x)$ の標準形は $s_2^{-1}(x) = s_2^{-1}t_1 \cdots t_n(m)$ である．よって

$$P(s_2^{-1}(x)) = f_{2,-1}(P(x)) = 2$$

となる．故に $s_2^{-1}(x) \in X_2$ だから $x = s_2(s_2^{-1}(x)) \in s_2X_2$ である．

更に $X_3 \subset s_2X_2$ である．

$\because$) $x \in X_3$ を標準形で $x = t_1 \cdots t_n(m)$ と書く．

(1) $t_1 = s_2$ のとき

$s_2^{-1}(x)$ の標準形は $s_2^{-1}(x) = t_2 \cdots t_n(m)$ である．このとき

$$3 = P(x) = P(s_2 t_2 \cdots t_n(m)) = f_{2,1}(P(t_2 \cdots t_n(m)))$$

となるから，$f_{2,1}$ の定義より $P(t_2 \cdots t_n(m)) = 2$ である．従って $t_2 \cdots t_n(m) \in X_2$ だから $x = s_2 t_2 \cdots t_n(m) \in s_2 X_2$ となる．

(2) $t_1 \neq s_2$ のとき

$s_2^{-1}(x)$ の標準形は $s_2^{-1}(x) = s_2^{-1} t_1 \cdots t_n(m)$ である．よって

$$P(s_2^{-1}(x)) = f_{2,-1}(P(x)) = f_{2,-1}(3) = 2$$

となる．故に $s_2^{-1}(x) \in X_2$ だから $x = s_2(s_2^{-1}(x)) \in s_2 X_2$ である．

(1)(2) により $X_3 \subset s_2 X_2$ である．

以上により $s_2 X_2 = X_2 \sqcup X_3$ が分かった． □

補題 32. $s_3 X_3 = X_2 \sqcup X_3$ である．

証明. まず $s_3 X_3 \subset X_2 \sqcup X_3$ である．

$\because$) $x \in X_3$ を標準形で $x = t_1 \cdots t_n(m)$ と書く．

(1) $t_1 = s_3^{-1}$ のとき

$s_3(x)$ の標準形は $s_3(x) = t_2 \cdots t_n(m)$ である．このとき

$$3 = P(x) = P(s_3^{-1}\tau(m)) = f_{3,-1}(P(\tau(m)))$$

となるから，$f_{3,-1}$ の定義より $P(\tau(m)) = 2, 3$ である．従って $P(s_3(x)) = P(\tau(m)) = 2, 3$ となるから $s_3(x) \in X_2 \sqcup X_3$ である．

(2) $t_1 \neq s_3^{-1}$ のとき

$s_3(x) = \tau(m)$ と一意に書くと $\tau = s_3 t_1 \cdots t_n$ である．よって

$$P(s_3(x)) = f_{3,1}(P(x)) = 2$$

となるから $s_3(x) \in X_2$ である．

(1)(2) により $s_3 X_3 \subset X_2 \sqcup X_3$ である．

次に $X_2 \subset s_3 X_3$ である．

$\because$) $x \in X_2$ を標準形で $x = t_1 \cdots t_n(m)$ と書く．

(1) $t_1 = s_3$ のとき
$s_3^{-1}(x)$ の標準形は $s_3^{-1}(x) = t_2 \cdots t_n(m)$ である．このとき

$$2 = P(x) = P(s_3 t_2 \cdots t_n(m)) = f_{3,1}(P(t_2 \cdots t_n(m)))$$

となるから，$f_{3,1}$ の定義より $P(t_2 \cdots t_n(m)) = 3$ である．従って $t_2 \cdots t_n(m) \in X_3$ だから $x = s_3 t_2 \cdots t_n(m) \in s_3 X_3$ となる．

(2) $t_1 \neq s_3$ のとき
$s_3^{-1}(x)$ の標準形は $s_3^{-1}(x) = s_3^{-1} t_1 \cdots t_n(m)$ である．よって

$$P(s_3^{-1}(x)) = f_{3,-1}(P(x)) = 3$$

となる．故に $s_3^{-1}(x) \in X_3$ だから $x = s_3(s_3^{-1}(x)) \in s_3 X_3$ である．

(1)(2) により $X_2 \subset s_3 X_3$ である．

更に $X_3 \subset s_3 X_3$ である．

$\because$) $x \in X_3$ を標準形で $x = t_1 \cdots t_n(m)$ と書く．
$t_1 = s_3$ と仮定する．$s_3^{-1}(x)$ の標準形は $s_3^{-1}(x) = t_2 \cdots t_n(m)$ である．このとき

$$3 = P(x) = P(s_3 t_2 \cdots t_n(m)) = f_{3,1}(P(t_2 \cdots t_n(m)))$$

となるが，これは $f_{3,1}$ の定義に矛盾する．従って $t_1 \neq s_3$ である．
よって $s_3^{-1}(x)$ の標準形は $s_3^{-1}(x) = s_3^{-1} t_1 \cdots t_n(m)$ である．よって

$$P(s_3^{-1}(x)) = f_{3,-1}(P(x)) = f_{3,-1}(3) = 3$$

となる．故に $s_3^{-1}(x) \in X_3$ だから $x = s_3(s_3^{-1}(x)) \in s_3 X_3$ である．

以上により $s_3 X_3 = X_2 \sqcup X_3$ が分かった． □

補題 33. $s_1' X_1' = X_0' \sqcup X_1' \sqcup \{p\}$ である．

証明. まず $s_1 X_1' \subset X_0' \sqcup X_1' \sqcup \{p\}$ である．

$\because$) $x \in X_1'$ を標準形で $x = t_1 \cdots t_n(p)$ と書く．
(1) $t_1 = s_1^{-1}$ かつ $n = 1$ のとき
$x = s_1^{-1}(p)$ だから $s_1(x) = p$ である．
(2) $t_1 = s_1^{-1}$ かつ $n > 1$ のとき

$s_1(x)$ の標準形は $s_1(x)=t_2\cdots t_n(p)$ である．このとき

$$1=P(x)=P(s_1^{-1}t_2\cdots t_n(p))=f_{1,-1}(P(t_2\cdots t_n(p)))$$

となるから，$f_{1,-1}$ の定義より $P(t_2\cdots t_n(p))\in\{0,1\}$ である．従って

$$P(s_1(x))=P(t_2\cdots t_n(p))\in\{0,1\}$$

となるから $s_1(x)\in X_0'\sqcup X_1'$ である．

(3) $t_1\neq s_1^{-1}$ のとき

$s_1(x)$ の標準形は $s_1(x)=s_1t_1\cdots t_n(p)$ である．よって

$$P(s_1(x))=f_{1,1}(P(x))=f_{1,1}(1)=0$$

となるから $s_1(x)\in X_0'$ である．

(1)(2)(3) により $s_1X_1'\subset X_0'\sqcup X_1'\sqcup\{p\}$ である．

次に $X_0'\subset s_1X_1'$ である．

$\because$) $x\in X_0'$ を標準形で $x=t_1\cdots t_n(p)$ と書く．

(1) $t_1=s_1$ のとき

定義より $P(s_1(p))=3$ であるから，$P(x)=0$ となるためには $n>1$ でなければならない．故に $s_1^{-1}(x)$ の標準形は $s_1^{-1}(x)=t_2\cdots t_n(p)$ かつ $n>1$ である．このとき

$$0=P(x)=P(s_1t_2\cdots t_n(p))=f_{1,1}(P(t_2\cdots t_n(p)))$$

となるから，$f_{1,1}$ の定義より $P(t_2\cdots t_n(p))=1$ である．従って $t_2\cdots t_n(p)\in X_1'$ だから $x=s_1(t_2\cdots t_n(p))\in s_1X_1'$ となる．

(2) $t_1\neq s_1$ のとき

$s_1^{-1}(x)$ の標準形は $s_1^{-1}(x)=s_1^{-1}t_1\cdots t_n(p)$ である．よって

$$P(s_1^{-1}(x))=f_{1,-1}(P(x))=f_{1,-1}(0)=1$$

となる．故に $s_1^{-1}(x)\in X_1'$ だから $x=s_1(s_1^{-1}(x))\in s_1X_1'$ である．

(1)(2) により $X_1'\subset s_1X_1'$ である．

更に $X_1'\subset s_1X_1'$ である．

$\because$) $x\in X_1'$ を標準形で $x=t_1\cdots t_n(p)$ と書く．

$t_1=s_1$ と仮定する．定義より $P(s_1(p))=3$ であるから，$P(x)=1$ となるため

には $n>1$ でなければならない．故に $s_1^{-1}(x)$ の標準形は $s_1^{-1}(x)=t_2\cdots t_n(p)$ かつ $n>1$ となる．このとき

$$1=P(x)=P(s_1t_2\cdots t_n(p))=f_{1,1}(P(t_2\cdots t_n(p)))$$

となるが，これは $f_{1,1}$ の定義に矛盾する．従って $t_1\neq s_1$ である．

よって $s_1^{-1}(x)$ の標準形は $s_1^{-1}(x)=s_1^{-1}t_1\cdots t_n(p)$ である．よって

$$P(s_1^{-1}(x))=f_{1,-1}(P(x))=f_{0,-1}(1)=1$$

となる．故に $s_1^{-1}(x)\in X_1'$ だから $x=s_1(s_1^{-1}(x))\in s_1X_1'$ である．

以上により $X_1'\subset s_1X_1'$ である．

最後に $s_0^{-1}(p)\in X_0'$ であるから $p\in s_0X_0'$ である．

以上により $s_0X_0'=X_0'\sqcup X_1'\sqcup\{p\}$ が分かった． □

補題 34. $s_2'X_2'=X_2'\sqcup X_3'$ である．

証明．まず $s_2X_2'\subset X_2'\sqcup X_3'$ である．

$\because$) $x\in X_2'$ を標準形で $x=t_1\cdots t_n(p)$ と書く．

(1) $t_1=s_2^{-1}$ のとき

定義より $P(s_2^{-1}(p))=0$ であるから，$P(x)=2$ となるためには $n>1$ でなければならない．故に $s_2(x)$ の標準形は $s_2(x)=t_2\cdots t_n(p)$ かつ $n>1$ である．このとき

$$2=P(x)=P(s_2^{-1}t_2\cdots t_n(p))=f_{2,-1}(P(t_2\cdots t_n(p)))$$

となるから，$f_{2,-1}$ の定義より $P(t_2\cdots t_n(p))\in\{2,3\}$ である．従って

$$P(s_2(x))=P(t_2\cdots t_n(p))\in\{2,3\}$$

となるから $s_2(x)\in X_2'\sqcup X_3'$ である．

(2) $t_1\neq s_2^{-1}$ のとき

$s_2(x)$ の標準形は $s_2(x)=s_2t_1\cdots t_n(p)$ である．よって

$$P(s_2(x))=f_{2,1}(P(x))=f_{2,1}(2)=3$$

となるから $s_1(x)\in X_3'$ である．

(1)(2) により $s_2X_2'\subset X_2'\sqcup X_3'$ である．

次に $X_2' \subset s_2 X_2'$ である．

$\because$) $x \in X_2'$ を標準形で $x = t_1 \cdots t_n(p)$ と書く．

$t_1 = s_2$ と仮定する．定義より $P(s_2(p)) = 0$ であるから，$P(x) = 2$ となるためには $n > 1$ でなければならない．故に $s_1^{-1}(x)$ の標準形は $s_1^{-1}(x) = t_2 \cdots t_n(p)$ かつ $n > 1$ となる．このとき

$$2 = P(x) = P(s_2 t_2 \cdots t_n(p)) = f_{2,1}(P(t_2 \cdots t_n(p)))$$

となるが，これは $f_{2,1}$ の定義に矛盾する．従って $t_1 \neq s_2$ である．

よって $s_2^{-1}(x)$ の標準形は $s_2^{-1}(x) = s_2^{-1} t_1 \cdots t_n(p)$ である．よって

$$P(s_2^{-1}(x)) = f_{2,-1}(P(x)) = f_{2,-1}(2) = 2$$

となる．故に $s_2^{-1}(x) \in X_2'$ だから $x = s_2(s_2^{-1}(x)) \in s_2 X_2'$ である．

更に $X_3' \subset s_2 X_2'$ である．

$\because$) $x \in X_3'$ を標準形で $x = t_1 \cdots t_n(p)$ と書く．

(1) $t_1 = s_2$ のとき

定義より $P(s_2(p)) = 0$ であるから，$P(x) = 3$ となるためには $n > 1$ でなければならない．故に $s_2^{-1}(x)$ の標準形は $s_2^{-1}(x) = t_2 \cdots t_n(p)$ かつ $n > 1$ である．このとき

$$3 = P(x) = P(s_2 t_2 \cdots t_n(p)) = f_{2,1}(P(t_2 \cdots t_n(p)))$$

となるから，$f_{2,1}$ の定義より $P(t_2 \cdots t_n(p)) = 2$ である．従って $t_2 \cdots t_n(p) \in X_2'$ だから $x = s_2(t_2 \cdots t_n(p)) \in s_2 X_2'$ となる．

(2) $t_1 \neq s_2$ のとき

$s_2^{-1}(x)$ の標準形は $s_2^{-1}(x) = s_2^{-1} t_1 \cdots t_n(p)$ である．よって

$$P(s_2^{-1}(x)) = f_{2,-1}(P(x)) = f_{2,-1}(2) = 2$$

となる．故に $s_2^{-1}(x) \in X_2'$ だから $x = s_2(s_2^{-1}(x)) \in s_2 X_2'$ である．

(1)(2) により $X_2' \subset s_2 X_2'$ である．

以上により $s_2 X_2' = X_2' \sqcup X_3'$ が分かった． □

補題 35. $s_3' X_3' = X_2' \sqcup X_3'$ である．

証明. まず $s_3 X_3' \subset X_2' \sqcup X_3'$ である．

$\because$) $x \in X_3'$ を標準形で $x = t_1 \cdots t_n(p)$ と書く．

(1) $t_1 = s_3^{-1}$ のとき

定義より $P(s_3^{-1}(p)) = 0$ であるから，$P(x) = 3$ となるためには $n > 1$ でなければならない．故に $s_3(x)$ の標準形は $s_3(x) = t_2 \cdots t_n(p)$ かつ $n > 1$ である．このとき

$$3 = P(x) = P(s_3^{-1} t_2 \cdots t_n(p)) = f_{3,-1}(P(t_2 \cdots t_n(p)))$$

となるから，$f_{3,-1}$ の定義より $P(t_2 \cdots t_n(p)) \in \{2, 3\}$ である．従って

$$P(s_3(x)) = P(t_2 \cdots t_n(p)) \in \{2, 3\}$$

となるから $s_3(x) \in X_2' \sqcup X_3'$ である．

(2) $t_1 \neq s_3^{-1}$ のとき

$s_3(x)$ の標準形は $s_3(x) = s_3 t_1 \cdots t_n(p)$ である．よって

$$P(s_3(x)) = f_{3,1}(P(x)) = f_{3,1}(3) = 2$$

となるから $s_3(x) \in X_2'$ である．

(1)(2) により $s_3 X_3' \subset X_2' \sqcup X_3'$ である．

次に $X_2' \subset s_3 X_3'$ である．

$\because$) $x \in X_2'$ を標準形で $x = t_1 \cdots t_n(p)$ と書く．

(1) $t_1 = s_3$ のとき

定義より $P(s_3(p)) = 0$ であるから，$P(x) = 2$ となるためには $n > 1$ でなければならない．故に $s_3^{-1}(x)$ の標準形は $s_3^{-1}(x) = t_2 \cdots t_n(p)$ かつ $n > 1$ である．このとき

$$2 = P(x) = P(s_3 t_2 \cdots t_n(p)) = f_{3,1}(P(t_2 \cdots t_n(p)))$$

となるから，$f_{3,1}$ の定義より $P(t_2 \cdots t_n(p)) = 3$ である．従って $t_2 \cdots t_n(p) \in X_3'$ だから $x = s_3(t_2 \cdots t_n(p)) \in s_3 X_3'$ となる．

(2) $t_1 \neq s_3$ のとき

$s_3^{-1}(x)$ の標準形は $s_3^{-1}(x) = s_3^{-1} t_1 \cdots t_n(p)$ である．よって

$$P(s_3^{-1}(x)) = f_{3,-1}(P(x)) = f_{3,-1}(2) = 3$$

となる．故に $s_3^{-1}(x) \in X_3'$ だから $x = s_3(s_3^{-1}(x)) \in s_3 X_3'$ である．

(1)(2) により $X_2' \subset s_3 X_3'$ である．

更に $X_3' \subset s_3 X_3'$ である．

∵) $x \in X_3'$ を標準形で $x = t_1 \cdots t_n(p)$ と書く．

$t_1 = s_3$ と仮定する．定義より $P(s_3(p)) = 0$ であるから，$P(x) = 3$ となるためには $n > 1$ でなければならない．故に $s_3^{-1}(x)$ の標準形は $s_3^{-1}(x) = t_2 \cdots t_n(p)$ かつ $n > 1$ となる．このとき

$$3 = P(x) = P(s_3 t_2 \cdots t_n(p)) = f_{3,1}(P(t_2 \cdots t_n(p)))$$

となるが，これは $f_{3,1}$ の定義に矛盾する．従って $t_1 \neq s_3$ である．

よって $s_3^{-1}(x)$ の標準形は $s_3^{-1}(x) = s_3^{-1} t_1 \cdots t_n(p)$ である．よって

$$P(s_3^{-1}(x)) = f_{3,-1}(P(x)) = f_{3,-1}(3) = 3$$

となる．故に $s_3^{-1}(x) \in X_3'$ だから $x = s_3(s_3^{-1}(x)) \in s_3 X_3'$ である．

以上により $X_3' \subset s_3 X_3'$ である．

以上により $s_3 X_3' = X_2' \sqcup X_3'$ が分かった． □

参考文献

[1] Stan Wagon, The Banach-Tarski Paradox, Cambridge University Press, 1994

[2] Janusz Pawlikowski, The Hahn-Banach theorem implies the Banach-Tarski paradox, Fundamenta Mathematicae 138 (1991), 21–22

[3] Trevor M. Wilson, A continuous movement version of the Banach-Tarski paradox: A solution to de Groot's Problem, J. Symbolic Logic 70 (2005), 946–952