the Axiom of Multiple Choice

alg-d
http://alg-d.com/math/ac/

2012 年 2 月 17 日

定理 1. X は $\emptyset \notin X$ なる集合を表すとし，λ は基数を表すとする．$\mathrm{MC}(X, \lambda)$ で命題

X 上の写像 f が存在して，任意の $x \in X$ に対し $f(x) \subset x,\ 0 < |f(x)| < \lambda$を満たす

を表すことにする．$m \geq 2$ を整数とするとき，次の命題は (ZF 上) 同値.

1. 選択公理

$2(m)$. 任意の X に対し $\mathrm{MC}(X, m)$

3. ある整数 $m \geq 2$ が存在して任意の X に対し $\mathrm{MC}(X, m)$
4. 任意の X に対しある整数 $m \geq 2$ が存在して $\mathrm{MC}(X, m)$
5. 任意の X に対し $\mathrm{MC}(X, \aleph_0)$ (the Axiom of Multiple Choice)

証明. $1 \Longleftrightarrow 2(2)$ と $2(m) \Longrightarrow 3$ と $3 \Longrightarrow 4$ と $4 \Longrightarrow 5$ は明らか．$m \leq n$ に対し $2(m) \Longrightarrow 2(n)$ も明らか．なので $5 \Longrightarrow 1$ を示せばよい．その為に，選択公理と同値な命題「任意の順序集合 $(X, \leq)$ は極大反鎖を持つ.」を示す.

※ $Y \subset X$ が反鎖 $\Longleftrightarrow$ Y の任意の異なる 2 元が比較不可能 証明は Zorn の補題・極大原理の定理 1 を参照.

$(X, \leq)$ を順序集合とする．$\mathcal{P}_0(X) := \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\}$，$\mathcal{Q} := \{Y \in \mathcal{P}_0(X) \mid Y$ は有限集合 $\}$ と置く．$\mathcal{P}_0(X)$ に仮定を適用して $f : \mathcal{P}_0(X) \longrightarrow \mathcal{Q}$ を得る．$Y \in \mathcal{P}_0(X)$ に対し $f(Y) \subset Y$ である．$g(Y) := \{a \in f(Y) \mid a$ は $(f(Y), \leq)$ の極小元 $\}$ と置けば，各 $g(Y) \subset X$ は反鎖で，$\emptyset \neq g(Y) \subset Y$ である．反鎖 K に対し $Y(K) := \{x \in X \setminus K \mid K \cup \{x\}$ は反鎖 $\}$ と定義する.

X が極大反鎖を持たないと仮定する．各 $Y(K)$ は空でない．$\aleph \not\leq |\mathcal{P}(X)|$ となる最小

のアレフ $\aleph$ を取る．写像 $h : \aleph \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ を

$$h(\alpha) := \bigcup_{\beta<\alpha} h(\beta) \cup g\Big(Y\Big(\bigcup_{\beta<\alpha} h(\beta)\Big)\Big)$$

と定義すると，これは単射になるので矛盾する．故に X は極大反鎖を持つ． $\square$

「AMC(=the Axiom of Multiple Choice) $\Longrightarrow$ 選択公理」の証明に使われている命題を追っていくと，「AMC $\Longrightarrow$ 選択公理」のこの証明には基礎の公理が使われていることが分かる．実は基礎の公理を仮定しない場合，「AMC $\Longrightarrow$ 選択公理」は証明できないことが知られている．一方，定理における 4$\Longrightarrow$1 は基礎の公理無しで証明することができるので，その証明を書いておく．

証明. 選択公理と同値な次の命題を示す．

> 任意の集合 X に対しある正整数 m と順序数αとα上の関数 f が存在して
> $\forall \beta < \alpha(|f(\beta)| \leq m)$ かつ $X = \displaystyle\bigcup_{\beta<\alpha} f(\beta)$

※ 整列可能定理についての定理 3 の条件 4 のこと．証明は整列可能定理についての一番最後を参照.

X を任意の集合として $\mathcal{P}_0(X) := \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\}$ と置く．仮定 (定理の条件 4) によりある正整数 m とある関数 $g : \mathcal{P}_0(X) \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ が存在して任意の $Y \in \mathcal{P}_0(X)$ に対し $g(Y) \subset Y,\ 0 < |g(Y)| < m+1$ を満たす．$U \not\subset X$ となる集合 U を一つ取り，$g(\emptyset) := U$ と定義しておく．アレフ $\aleph$ で，$\aleph \not\leq |\mathcal{P}(X)|$ となるものが存在するので，その様な $\aleph$ のうち最小のものを取る．順序数 $\alpha < \aleph$ に対し

$$G(\alpha) := g\Big(X \setminus \bigcup_{\beta<\alpha} G(\beta)\Big)$$

で写像 $G : \aleph \longrightarrow \mathcal{P}(X) \cup \{U\}$ を定める．明らかに，$G(\alpha) = G(\beta) \neq U$ ならば $\alpha = \beta$ である．$G(\alpha) = U$ となる α が存在しないと仮定すると，$G : \aleph \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ は単射となる．しかしこれは $\aleph \not\leq |\mathcal{P}(X)|$ に矛盾する．従って $G(\alpha) = U$ となる順序数 α が存在するので，そのような α のうち最小のものを取る．このとき $f := G|_\alpha$ とする $U = G(\alpha) = g(X \setminus \bigcup_{\beta<\alpha} G(\beta))$ だから，$\bigcup_{\beta<\alpha} G(\beta) = X$ である．また $\beta < \alpha$ に対し $f(\beta) = G(\beta) = g(X \setminus \bigcup_{\gamma<\beta} G(\gamma))$ だから g の性質より $|f(\beta)| \leq m$ が分かる．よってこの f が条件を満たす． $\square$

定理 2. 選択公理
$\iff$ 集合 X が「任意の $x \in X$ に対し $|x| \geq 2$」を満たすとするとき，X 上の写像 f が存在して「任意の $x \in X$ に対し $\emptyset \neq f(x) \subsetneq x$，$|f(x)| < \infty$」を満たす．

証明. ($\Longrightarrow$) 明らか．

($\Longleftarrow$) $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を互いに素な非空集合の族とする．$\mathcal{P} := \left\{ A \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \;\middle|\; |A| \geq 2 \right\}$ として $\mathcal{P}$ に仮定を適用し写像 f を得る．$|A| = 1$ となるような $A \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ に対して $f(A) := A$ として f の定義を拡張しておく．$S := \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \bigcap_{n=0}^{\infty} f^n(X_\lambda)$ と置く．(但し f^n は f の n 回合成である．) このとき S が $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ の選択集合である． □

定理 3. 次の命題は (ZF 上) 同値.

1. 選択公理
2. 集合 X が「任意の $x \in X$ に対し $x \neq \emptyset$」を満たすとするとき，X 上の写像 f が存在して「任意の $x \in X$ に対し $\emptyset \neq f(x) \subset x$，$|f(x)|$ は奇数」を満たす．
3. 集合 X が「任意の $x \in X$ に対し $|x| \geq 2$」を満たすとするとき，X 上の写像 f が存在して「任意の $x \in X$ に対し $\emptyset \neq f(x) \subset x$，$|f(x)|$ は偶数」を満たす．

証明. AMC $\Longrightarrow$ 選択公理により明らか． □

定理の条件 2 を OAC (= Odd Axiom of Choice)，3 を EAC (= Even Axiom of Choice) という．この証明は勿論基礎の公理が使われているが，実は基礎の公理無しで次のことが言える．

定理 4. 選択公理 $\iff$ OAC かつ EAC

証明. 定理 2 を使う．集合 X が「任意の $x \in X$ に対し $|x| \geq 2$」を満たすとする．X に EAC を適用して写像 g を得る．集合 $\{g(x) \mid x \in X\}$ に OAC を適用して写像 h を得る．このとき $x \in X$ に対して $f(x) := h \circ g(x)$ と置けば写像 f は「任意の $x \in X$ に対し $\emptyset \neq f(x) \subsetneq x$，$|f(x)| < \infty$」を満たす． □

参考文献

[1] Horst Herrlich, Axiom of Choice，Springer, 2006

[2] H. Rubin and J. Rubin, Equivalents of the Axiom of Choice II, North Holland, 1985.

[3] K. Keremedis, Bases for Vector Spaces over the Two-Element Field and the Axiom of Choice, Proc. Amer. Math. Soc. 124 (1996), 2527–2531