選択公理について

alg-d
http://alg-d.com/math/ac/

2019 年 9 月 17 日

定義. X を集合とするとき，次の条件を満たす写像 $f\colon X \setminus \{\emptyset\} \longrightarrow \bigcup_{x \in X} x$ を集合 X の選択関数という．

$$\text{任意の非空集合 } x \in X \text{ に対して } f(x) \in x$$

次の命題を選択公理と呼ぶ.

選択公理. 任意の集合は選択関数を持つ.

定義. 全射 $g\colon \Lambda \longrightarrow A$ を Λ を添え字集合とする集合族という．$X_\lambda := g(\lambda)$ と置いて，この集合族を $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ で表すことが多い．また，次の条件を満たす写像 $f\colon \Lambda \longrightarrow \bigcup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ を集合族 $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ の選択関数という．

$$\text{任意の}\lambda \in \Lambda\text{に対して } f(\lambda) \in X_\lambda$$

集合族 $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ の選択関数全体からなる集合を $\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ で表す．$f \in \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ に対して $x_\lambda := f(\lambda)$ と置くとき，$f = (x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ 等と表すことがある．

定理 1. 次の命題は (ZF 上) 同値.

1. 選択公理
2. 非空集合の族 $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ に対して，選択関数が存在する．
3. 互いに素な非空集合の族 $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ に対して，選択関数が存在する．
4. 非空集合の族 $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ に対して，$\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda \neq \emptyset$.
5. 互いに素な非空集合の族 $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ に対して，$\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda \neq \emptyset$.

6. 互いに素な非空集合の族 $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ に対して，ある集合 C が存在して「任意の $\lambda\in\Lambda$ に対し $|X_\lambda\cap C|=1$」を満たす．この C を選択集合という．

証明. ($1\implies 2$) 集合 $\{X_\lambda \mid \lambda\in\Lambda\}$ の選択関数を g とすれば $f(\lambda):=g(X_\lambda)$ が $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ の選択関数である．

$2\implies 3$ と $3\implies 5$ と $2\implies 4$ と $4\implies 5$ は明らか．

($5\implies 6$) $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を互いに素な非空集合の族とする．仮定 5 により元 $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}\in\prod_{\lambda\in\Lambda}X_\lambda$ が取れる．このとき $C:=\{x_\lambda \mid \lambda\in\Lambda\}$ と置けばよい．

($6\implies 1$) X を任意の集合とする．

(i) $\emptyset\notin X$ のとき．

$Y:=\big\{\{x\}\times x\big\}_{x\in X}$ とすれば Y は互いに素な非空集合の族であるから，選択集合 C が存在する．このとき $x\in X\setminus\{\emptyset\}$ に対して $C\cap(\{x\}\times x)=\{\langle x,f(x)\rangle\}$ と表せば f が X の選択関数である．

(ii) $\emptyset\in X$ のとき．

$X_0:=X\setminus\{\emptyset\}$ に対して (i) の議論を行い X_0 の選択関数 f を得る．$a\in X$ を一つ取り，f を $f(\emptyset):=f(a)$ として f の定義域を X に拡張すれば，この f が X の選択関数である． □