順序数・濃度の簡単なまとめ

alg-d
http://alg-d.com/math/ac/

2018 年 2 月 9 日

この PDF では選択公理を仮定しない．

順序数についてはそのうち書きます．$|X|$ で X の濃度を表す．

定義. X と Y を集合とする．

1. $|X| \leq |Y| \iff$ 単射 $X \longrightarrow Y$ が存在する
2. $|X| = |Y| \iff$ 全単射 $X \longrightarrow Y$ が存在する
3. $|X| < |Y| \iff |X| \leq |Y|$ かつ $|X| \neq |Y|$
4. $|X| \leq^* |Y| \iff$ 全射 $Y \longrightarrow X$ が存在するか，$X = \emptyset$
5. $|X| <^* |Y| \iff |X| \leq^* |Y|$ かつ $|X| \neq |Y|$

命題 1.
1. $|X| \leq |Y|$ かつ $|Y| \leq |X|$ ならば $|X| = |Y|$ (Bernstein の定理)
2. $|X| < |\mathcal{P}(X)|$ (Cantor の定理)
3. $|X| \leq |Y|$ ならば $|X| \leq^* |Y|$
4. $|X| \leq^* |Y|$ ならば $|X| \leq |\mathcal{P}(Y)|$ □

定義. κ と λ を濃度とする．$\kappa = |X|$, $\lambda = |Y|$, $X \cap Y = \emptyset$ となるような X, Y を取る．

1. $\kappa + \lambda := |X \cup Y|$
2. $\kappa \cdot \lambda := |X \times Y|$
3. $\kappa^\lambda := |X^Y| \quad (X^Y := \{f \colon Y \longrightarrow X\})$
4. $\kappa = \lambda + \mu$ となる濃度 μ が唯一つ存在するとき，$\kappa - \lambda := \mu$
5. $\kappa = \lambda \cdot \mu$ となる濃度 μ が唯一つ存在するとき，$\kappa \div \lambda := \mu$

※ もちろんこれらは well-defined である．

定義. 整列された無限集合 X を使って $|X|$ と表される濃度をアレフと言い，$\aleph$ で表す．特に，自然数全体がなす整列集合で表されるアレフを $\aleph_0$ と書く．

命題 2. 二元集合 $2 = \{0,1\}$ の濃度を 2 と表せば，任意の濃度 κ に対して $2 \cdot \kappa = \kappa + \kappa$, $\kappa^2 = \kappa \cdot \kappa$ である．また $\kappa = |X|$ のとき $2^\kappa = |\mathcal{P}(X)|$. □

命題 3. 任意の濃度 κ, λ について
$\kappa \leq \lambda \Longleftrightarrow$ ある濃度 μ が存在して $\kappa + \mu = \lambda$ □

命題 4. 濃度 $\kappa, \lambda \geq 2$ に対して $\kappa + \lambda \leq \kappa \cdot \lambda$.

証明. $\kappa = |X|$, $\lambda = |Y|$, $X \cap Y = \emptyset$ となる集合を取る．$a \neq b$ となる $a, b \in X$，$s \neq t$ となる $s, t \in Y$ を取る．$\varphi : X \cup Y \longrightarrow X \times Y$ を

$$\varphi(x) := \begin{cases} \langle x, s \rangle & (x \in X \text{ のとき}) \\ \langle a, x \rangle & (x \in Y \setminus \{s\} \text{ のとき}) \\ \langle b, t \rangle & (x = s \text{ のとき}) \end{cases}$$

と定めれば φ は単射である． □

命題 5. 任意のアレフ $\aleph$ に対して $\aleph^2 = \aleph$.

証明. 無限順序数 α に対し $|\alpha \times \alpha| = |\alpha|$ を示せばよい．任意の順序数 $\beta > 0$ は

$$\beta = \omega^{\beta_1} \cdot l_1 + \cdots + \omega^{\beta_n} \cdot l_n,\ 1 \leq n, l_1, \cdots, l_n < \omega,\ \beta \geq \beta_1 > \cdots > \beta_n$$

の形に一意に書ける (Cantor 標準形．[1] 第 I 章演習問題 6 の解答を参照).

全単射 $g \colon \omega \times \omega \longrightarrow \omega$ を $g(0,0) = 0$ となるように一つ取る．$\beta, \beta' < \alpha$ が与えられたとき $\alpha \geq \beta_1 > \cdots > \beta_n$ を使って

$$\beta = \omega^{\beta_1} \cdot l_1 + \cdots + \omega^{\beta_n} \cdot l_n$$
$$\beta' = \omega^{\beta_1} \cdot l'_1 + \cdots + \omega^{\beta_n} \cdot l'_n$$

と書いて $f(\beta, \beta') := \omega^{\beta_1} \cdot g(l_1, l'_1) + \cdots + \omega^{\beta_n} \cdot g(l_n, l'_n)$ と定めれば，これは全単射 $f \colon \alpha \times \alpha \longrightarrow \alpha$ を与える． □

命題 6. 任意のアレフ $\aleph, \aleph'$ に対し $\aleph \cdot \aleph' = \aleph + \aleph' = \max\{\aleph, \aleph'\}$.

証明. $\aleph' \leq \aleph$ としても一般性を失わない．このとき

$$\begin{aligned}\aleph &\leq \aleph + \aleph' \\ &\leq \aleph \cdot \aleph' \quad (\text{命題 4 による}) \\ &\leq \aleph \cdot \aleph \\ &= \aleph \quad (\text{命題 5 による}) \\ &= \max\{\aleph, \aleph'\}.\end{aligned}$$

□

命題 7. 濃度 κ, λ, μ とアレフ $\aleph$ が $\kappa \cdot \aleph \leq \lambda + \mu$ を満たすとき，$\kappa \leq \lambda$ または $\aleph \leq \mu$.

証明. $\kappa = |X|$, $\lambda = |Y|$, $\mu = |Z|$ となる集合 X, Y, Z と $\aleph = |W|$ となる整列順序集合 W を取る．仮定より単射 $f\colon X \times W \longrightarrow Y \cup Z$ が存在する．

(i) ある $x \in X$ について $f(\{x\} \times W) \subset Z$ となるとき．
$g\colon W \longrightarrow Z$ を $g(w) := f(x, w)$ で定めれば g は単射で $\aleph = |W| \leq |Z| = \mu$ である．

(ii) 任意の $x \in X$ について $f(\{x\} \times W) \not\subset Z$ となるとき．
$W_x := \{w \in W \mid f(x, w) \in Y\} \neq \emptyset$ だから $g\colon X \longrightarrow Y$ を $g(x) := f(x, \min W_x)$ で定めれば g は単射で $\kappa = |X| \leq |Y| = \lambda$ である． □

命題 8. 濃度 κ, λ, μ とアレフ $\aleph$ が $\kappa \cdot \lambda \leq \aleph + \mu$ を満たすとき，$\kappa \leq \aleph$ または $\lambda \leq \mu$.

証明. $\kappa = |X|$, $\lambda = |Y|$, $\mu = |Z|$ となる集合 X, Y, Z と $\aleph = |W|$ となる整列順序集合 W を取る．仮定より単射 $f\colon X \times Y \longrightarrow W \cup Z$ が存在する．

(i) ある $x \in X$ について $f(\{x\} \times Y) \subset Z$ となるとき．
$g\colon Y \longrightarrow Z$ を $g(y) := f(x, y)$ で定めれば g は単射で $\lambda = |Y| \leq |Z| = \mu$ である．

(ii) 任意の $x \in X$ について $f(\{x\} \times Y) \not\subset Z$ となるとき．
$Y_x := \{y \in Y \mid f(x, y) \in W\} \neq \emptyset$ である．$g\colon X \longrightarrow W$ を $g(x) := \min\{f(x, y) \mid y \in Y_x\}$ で定めれば g は単射で $\kappa = |X| \leq |W| = \aleph$ である． □

命題 9. 濃度 κ, λ とアレフ $\aleph$ が $\aleph \leq \kappa + \lambda$ を満たすとき，$\aleph \leq \kappa$ または $\aleph \leq \lambda$ である．

証明. $\aleph \leq \kappa + \lambda$ とすると命題 5 より $\aleph \cdot \aleph \leq \kappa + \lambda$ となる．よって命題 7 より $\aleph \leq \kappa$ または $\aleph \leq \lambda$ が分かる． □

命題 10. 濃度 κ, λ とアレフ $\aleph$ が $\aleph \leq \kappa \cdot \lambda$ を満たすとき，$\aleph \leq \kappa$ または $\aleph \leq \lambda$ である．

証明. $\kappa = |X|$, $\lambda = |Y|$ となる集合 X, Y と $\aleph = |W|$ となる整列順序集合 W を取る．

単射 $f : W \longrightarrow X \times Y$ が存在する．π_X, π_Y をそれぞれ $X \times Y$ から X, Y への射影として $U := \pi_X \circ f(W) \subset X$, $V := \pi_Y \circ f(W) \subset Y$ と置く．W の整列順序を使って，U, V は整列可能である．また $f(W) \subset U \times V$ である．このとき命題 6 を使って $\aleph = |W| \leq |U \times V| = |U| \cdot |V| = \max\{|U|, |V|\}$ となる．故に $\aleph \leq |U|$ または $\aleph \leq |V|$ であるが，それぞれ $\aleph \leq \kappa$, $\aleph \leq \lambda$ を導く． □

命題 11. $\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(X) := \{Y \subset X \mid Y$ は有限集合 $\}$ と置く．
整列可能な無限集合 X に対し $|X| = |\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(X)|$

証明. X の整列順序 $\leq$ を取る．

$Y \in \mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(X)$ を取り，$|Y| = n$ とする．このとき順序同型 $f_Y : n \longrightarrow (Y, \leq)$ が一意に存在する．そこで $f(Y) := \langle n, f_Y(0), \cdots, f_Y(n-1) \rangle \in \{n\} \times X^n$ と定める．これにより単射 $f \colon \mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(X) \longrightarrow \bigcup_{n=0}^{\infty} (\{n\} \times X^n)$ が定義できる．

次に，命題 5 により単射 $g_2 \colon X^2 \longrightarrow X$ が存在する．そこで $n > 2$ に対して $g_n \colon X^n \longrightarrow X$ を

$$g_n(x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n) := g_2(g_{n-1}(x_1, \cdots, x_{n-1}), x_n)$$

で定めると，各 g_n は単射である．$g_0 \colon X^0 \longrightarrow X$ を一つ取り，$g_1 := \mathrm{id}_X$ とする．この $\{g_n\}_{n=0}^{\infty}$ より単射 $g \colon \bigcup_{n=0}^{\infty} (\{n\} \times X^n) \longrightarrow \bigcup_{n=0}^{\infty} (\{n\} \times X)$ が

$$g(n, x_1, \cdots, x_n) := (n, g_n(x_1, \cdots, x_n))$$

で定義できる．

また，命題 6 により $|\omega \times X| = |X|$ である．

以上により

$$|X| \leq \left|\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(X)\right| \leq \left|\bigcup_{n=0}^{\infty} (\{n\} \times X^n)\right| \leq \left|\bigcup_{n=0}^{\infty} (\{n\} \times X)\right| = |\omega \times X| = |X|$$

である． □

補題 12. 濃度 λ, μ, κ が $\lambda + \mu = \lambda + \kappa$ を満たすとき，ある濃度 ξ, ζ, η が存在して $\lambda = \lambda + \xi = \lambda + \zeta$，$\mu = \xi + \eta$，$\kappa = \zeta + \eta$ を満たす．

証明. 互いに素な集合 X, Y, Z を $|X| = \lambda$，$|Y| = \mu$，$|Z| = \kappa$ となるように取る．すると

$|X|+|Y|=|X|+|Z|$ だから全単射 $f\colon X\cup Y\longrightarrow X\cup Z$ が存在する．

$$\begin{aligned} Y_0 &:= \{y\in Y \mid \text{任意の } n>0 \text{ に対して } f^n(y)\in X\}\\ Y_1 &:= Y\setminus Y_0\\ X_0 &:= \bigcup_{n>0} f^n(Y_0)\\ X_1 &:= X\setminus X_0 \end{aligned}$$

とする．このとき $f|_{X_0\cup Y_0}\colon X_0\cup Y_0\longrightarrow X_0$ は全単射である．よって $\xi:=|Y_0|$ と置けば

$$\lambda+\xi=|X|+|Y_0|=|X_1|+|X_0|+|Y_0|=|X_1|+|X_0|=|X|=\lambda$$

である．$\eta:=|Y_1|$ とすれば $\mu=|Y|=|Y_0|+|Y_1|=\xi+\eta$ である．

$g:=f^{-1}$ に対しても同様のことをする．即ち

$$\begin{aligned} Z_0 &:= \{z\in Z \mid \text{任意の } n>0 \text{ に対して } f^n(z)\in X\}\\ Z_1 &:= Z\setminus Z_0 \end{aligned}$$

として $\zeta:=|Z_0|$，$\eta':=|Z_1|$ とすれば $\lambda+\zeta=\lambda$，$\kappa=\zeta+\eta'$ となる．後は $\eta=\eta'$ を示せばよい．

$y\in Y_1$ とすると，定義からある $n_y>0$ が一意に存在して $f^1(y),\cdots,f^{n_y-1}(y)\in X$，$f^{n_y}(y)\in Z$ が成り立つ．このとき $g^{n_y}(f^{n_y}(y))\in Y$ だから $f^{n_y}(y)\in Z_1$ である．よって写像 $Y_1\longrightarrow Z_1$ が $Y_1\ni y\longmapsto f^{n_y}(y)\in Z_1$ により定義される．これは明らかに全単射である．よって $\eta=|Y_1|=|Z_1|=\eta'$ である． □

補題 13. 濃度 κ,λ,μ が $2^\kappa=\kappa+\lambda$ と $\kappa=\kappa+\mu$ を満たすとき，$\lambda\geq 2^\mu$ である．

証明. $\kappa=|X|$ となる X を取る．仮定より，集合 $M,N\subset\mathcal{P}(X)$，$Y,Z\subset X$ を

$$\mathcal{P}(X)=M\cup N,\ M\cap N=\emptyset,\ |M|=\kappa,\ |N|=\lambda,\\ X=Y\cup Z,\ Y\cap Z=\emptyset,\ |Y|=\kappa,\ |Z|=\mu$$

となるように取れる．$|Y|=\kappa=|M|$ だから，全単射 $f\colon Y\longrightarrow M$ が取れる．$A\in\mathcal{P}(Z)$ に対して

$$h(A):=A\cup\{y\in Y\mid y\notin f(y)\}\subset Z\cup Y=X$$

と定義する．$Y\cap Z=\emptyset$ だから，$h\colon\mathcal{P}(Z)\longrightarrow\mathcal{P}(X)$ は単射である．また $A\in\mathcal{P}(Z)$ に対して $h(A)\notin M$ である．

∵) $h(A) \in M$ と仮定する．$f\colon Y \longrightarrow M$ が全単射だから $f(y) = h(A)$ となる $y \in Y$ が取れる．このとき $y \notin A$ に注意すると

$$y \in f(y) \iff y \in h(A) \iff y \notin f(y)$$

となり矛盾する．

従って h は単射 $\mathcal{P}(Z) \longrightarrow N$ を定め，$\lambda \geq 2^{\mu}$ が分かる． □

命題 14. $\aleph_0 \leq \kappa$ ならば $2^{\kappa} - \kappa = 2^{\kappa}$ である．

証明. まず $2^{\kappa} + \kappa = 2^{\kappa}$ を示す．明らかに $2^{\kappa} + \kappa \geq 2^{\kappa}$ だから $2^{\kappa} + \kappa \leq 2^{\kappa}$ を示せばよい．今 $\aleph_0 \leq \kappa$ だから $\kappa + 1 = \kappa$ である．故に $2^{\kappa} + \kappa \leq 2^{\kappa} + 2^{\kappa} = 2^{\kappa+1} = 2^{\kappa}$ となる．

後は $\kappa + \lambda = 2^{\kappa}$ ならば $\lambda = 2^{\kappa}$ を示せばよい．まず $\kappa + \lambda = \kappa + 2^{\kappa}$ が成り立つから，補題 12 によりある ξ, ζ, η が存在して $\kappa = \kappa + \xi = \kappa + \zeta$，$\lambda = \xi + \eta$，$2^{\kappa} = \zeta + \eta$ が成り立つ．$2^{\kappa} = \kappa + \lambda$ かつ $\kappa = \kappa + \zeta$ に補題 13 を適用すれば $\lambda \geq 2^{\zeta} > \zeta$ を得る．従って $2\lambda \geq \zeta + \eta = 2^{\kappa} = 2^{\kappa+1}$ である．一方 $2^{\kappa} \geq \lambda$ だったから $2^{\kappa+1} \geq 2\lambda$ である．故に $2\lambda = 2^{\kappa+1}$ を得る．従って $\lambda = 2^{\kappa}$ である． □

命題 15. X を集合とする．$|\alpha| \not\leq |X|$ となるような順序数 α が存在する．

証明. $\Gamma(X) := \{\alpha \mid \alpha \text{ は順序数}, |\alpha| \leq |X|\}$ と置く．$\Gamma(X)$ は集合である．

∵) $W := \{R \subset X \times X \mid R \text{ は } X \text{ のある部分集合を整列する}\}$ と定義する．W は集合である．よって「W に現れる整列順序と同型な順序数全体」も集合である．この集合は $\Gamma(X)$ と一致する．

順序数の推移的な集合は順序数だから，$\Gamma(X)$ も順序数である．よって $\Gamma(X) \notin \Gamma(X)$ だから $|\Gamma(X)| \not\leq |X|$ となる． □

この Γ を Hartogs 関数という．また $\kappa = |X|$ のとき $\kappa^* := |\Gamma(X)|$ と書く．これを Hartogs number という．Hartogs number はアレフである．

命題 16.
1. $\Gamma(X)$ は $|\alpha| \not\leq |X|$ となるような順序数 α のうち最小の順序数である．
2. κ^* は $\aleph \not\leq \kappa$ となるようなアレフ $\aleph$ のうち最小のアレフである．
3. $\kappa^* \leq 2^{2^{\kappa^2}}$
4. $\kappa^* \leq 2^{2^{2^{\kappa}}}$
5. 無限濃度 κ に対して $\kappa^{**} = (\kappa + \kappa^*)^*$

6. 無限濃度 κ に対して $(\kappa^2)^* = \kappa^*$

証明. (3) $\kappa = |X|$ となる X を取り

$$W := \{R \subset X \times X \mid R \text{ は } X \text{ のある部分集合を整列する }\}$$

と置く．明らかに $|\Gamma(X)| \leq^* |W|$ である．よって $|\Gamma(X)| \leq |\mathcal{P}(W)|$ であり

$$\kappa^* = |\Gamma(X)| \leq |\mathcal{P}(W)| \leq |\mathcal{P}(\mathcal{P}(X \times X))| = 2^{2^{|X|^2}} = 2^{2^{\kappa^2}}$$

となる．

(4) $\kappa = |X|$ となる X を取り $\alpha \in \Gamma(X)$ とする．単射 $f\colon \alpha \longrightarrow X$ に対して $A_f := \{f"\beta \mid \beta < \alpha\} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$ と定める．$B := \{A_f \mid \alpha \in \Gamma(X),\ f\colon \alpha \longrightarrow X \text{ は単射 }\}$ と置けば $B \subset \mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$ となる．$\varphi\colon B \longrightarrow \Gamma(X)$ を $\varphi(A_f) := \mathrm{dom}(f)$ とすれば φ は全射となる．よって $|\Gamma(X)| \leq^* B$ だから $|\Gamma(X)| \leq \mathcal{P}(B) \leq |\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(X)))|$.

(5) $\kappa^* \leq \kappa + \kappa^*$ だから $\kappa^{**} \leq (\kappa + \kappa^*)^*$ である．$\kappa^{**} < (\kappa + \kappa^*)^*$ と仮定すると κ^{**} はアレフだから，$(\kappa + \kappa^*)^*$ の最小性より $\kappa^{**} \leq \kappa + \kappa^*$ となる．よって命題 9 により「$\kappa^{**} \leq \kappa$ または $\kappa^{**} \leq \kappa^*$」となり矛盾する．故に $\kappa^{**} = (\kappa + \kappa^*)^*$ である．

(6) $\kappa \leq \kappa^2$ だから $\kappa^* \leq (\kappa^2)^*$ である．$\kappa^* < (\kappa^2)^*$ と仮定すると κ^* はアレフだから $(\kappa^2)^*$ の最小性により $\kappa^* \leq \kappa^2$ となる．故に命題 10 から $\kappa^* \leq \kappa$ となり矛盾する．故に $\kappa^* = (\kappa^2)^*$ である． □

定義. 集合 X に対して $K(X) := \{f\colon \alpha \longrightarrow X \mid \alpha \text{ は順序数，} f \text{ は単射 }\}$ を Kruse 関数という．$\kappa = |X|$ のとき $\kappa^\dagger := |K(X)|$ と書く．

明らかに，次が成り立つ．

命題 17. 1. $\kappa^\dagger \leq 2^{\kappa^2}$

2. $\kappa^\dagger \leq 2^{2^\kappa}$

3. $\kappa < \kappa^\dagger$

4. アレフ $\aleph$ に対して $\aleph^\dagger = 2^\aleph$ □

命題 18. 1. $\kappa^\dagger \cdot \mu^\dagger \leq (\kappa + \mu)^\dagger$

2. $\kappa \geq \aleph_0 \Longrightarrow \kappa^\dagger + \kappa^\dagger = \kappa^\dagger$

3. $\kappa + \kappa = \kappa \Longrightarrow (\kappa^\dagger)^2 = \kappa^\dagger$ □

命題 19. $\kappa \geq \aleph_0$ とアレフ $\aleph$ が $\kappa^\dagger \leq \kappa + \aleph$ を満たすとき，$\kappa < \kappa^\dagger = 2^\kappa \leq \aleph$ である．

証明. $\kappa \geq \aleph_0$ だから命題 18 より $\kappa^\dagger + \kappa^\dagger = \kappa^\dagger$ である．よって $\kappa + \kappa \leq \kappa^\dagger + \kappa^\dagger = \kappa^\dagger \leq \kappa + \aleph$ となる．故にある $\aleph' \leq \aleph$ が存在して $\kappa + \kappa = \kappa + \aleph'$ となる．このとき $\aleph' \leq \kappa + \kappa$ だから命題 9 により $\aleph' \leq \kappa$ が分かる．故に $\kappa + \aleph' = \kappa$ であるから $\kappa + \kappa = \kappa$ となる．従って命題 18 より $(\kappa^\dagger)^2 = \kappa^\dagger$ が従う．仮定より $\kappa^\dagger \leq \kappa + \aleph$ だから，ある $\mu \leq \kappa$ と $\aleph'' \leq \aleph$ が存在して $\kappa^\dagger = \mu + \aleph''$ と書ける．このとき $\aleph'' \leq \kappa^\dagger$ だから $\kappa^\dagger \cdot \aleph'' \leq (\kappa^\dagger)^2 = \kappa^\dagger \leq \kappa + \aleph$ である．命題 7 により $\kappa^\dagger \leq \aleph$ または $\aleph'' \leq \kappa$ が分かる．

$\aleph'' \leq \kappa$ と仮定すると $\kappa^\dagger = \mu + \aleph'' \leq \kappa + \kappa = \kappa$ となり $\kappa < \kappa^\dagger$ (命題 17) に矛盾する．従って $\kappa^\dagger \leq \aleph$ である．よって $\kappa < \kappa^\dagger \leq \aleph$ であり，κ がアレフだから $\kappa^\dagger = 2^\kappa$ となる． □

参考文献

[1] ケネス・キューネン，『集合論-独立性証明への案内』，藤田博司訳, 日本評論社, 2008