

# 順序数・濃度の簡単なまとめ

alg-d

<http://alg-d.com/math/ac/>

2015年8月14日

このPDFでは選択公理を仮定しない。

順序数についてはそのうち書きます。|X|でXの濃度を表す。

定義. XとYを集合とする。

1.  $|X| \leq |Y| \iff$  単射  $X \rightarrow Y$  が存在する
2.  $|X| = |Y| \iff$  全単射  $X \rightarrow Y$  が存在する
3.  $|X| < |Y| \iff |X| \leq |Y|$  かつ  $|X| \neq |Y|$
4.  $|X| \leq^* |Y| \iff$  全射  $Y \rightarrow X$  が存在するか,  $X = \emptyset$
5.  $|X| <^* |Y| \iff |X| \leq^* |Y|$  かつ  $|X| \neq |Y|$

命題 1. 1.  $|X| \leq |Y|$  かつ  $|Y| \leq |X|$  ならば  $|X| = |Y|$  (Bernstein の定理)

2.  $|X| < |\mathcal{P}(X)|$  (Cantor の定理)

3.  $|X| \leq |Y|$  ならば  $|X| \leq^* |Y|$

4.  $|X| \leq^* |Y|$  ならば  $|X| \leq |\mathcal{P}(Y)|$  □

定義.  $\kappa$ と $\lambda$ を濃度とする.  $\kappa = |X|$ ,  $\lambda = |Y|$ ,  $X \cap Y = \emptyset$ となるような $X, Y$ を取る.

1.  $\kappa + \lambda := |X \cup Y|$

2.  $\kappa \cdot \lambda := |X \times Y|$

3.  $\kappa^\lambda := |X^Y|$  ( $X^Y := \{f: Y \rightarrow X\}$ )

4.  $\kappa = \lambda + \mu$ となる濃度 $\mu$ が唯一つ存在するとき,  $\kappa - \lambda := \mu$

5.  $\kappa = \lambda \cdot \mu$ となる濃度 $\mu$ が唯一つ存在するとき,  $\kappa \div \lambda := \mu$

※ もちろんこれらは well-defined である.

定義. 整列された無限集合  $X$  を使って  $|X|$  と表される濃度をアレフと言い,  $\aleph$  で表す. 特に, 自然数全体がなす整列集合で表されるアレフを  $\aleph_0$  と書く.

命題 2. 二元集合  $2 = \{0, 1\}$  の濃度を  $2$  と表せば, 任意の濃度  $\kappa$  に対して  $2 \cdot \kappa = \kappa + \kappa$ ,  $\kappa^2 = \kappa \cdot \kappa$  である. また  $\kappa = |X|$  のとき  $2^\kappa = |\mathcal{P}(X)|$ .  $\square$

命題 3. 任意の濃度  $\kappa, \lambda$  について

$\kappa \leq \lambda \iff$  ある濃度  $\mu$  が存在して  $\kappa + \mu = \lambda$   $\square$

命題 4. 濃度  $\kappa, \lambda \geq 2$  に対し  $\kappa + \lambda \leq \kappa \cdot \lambda$ .

証明.  $\kappa = |X|$ ,  $\lambda = |Y|$ ,  $X \cap Y = \emptyset$  となる集合を取る.  $a \neq b$  となる  $a, b \in X$ ,  $s \neq t$  となる  $s, t \in Y$  を取る.  $\varphi: X \cup Y \rightarrow X \times Y$  を

$$\varphi(x) := \begin{cases} \langle x, s \rangle & (x \in X \text{ のとき}) \\ \langle a, x \rangle & (x \in Y \setminus \{s\} \text{ のとき}) \\ \langle b, t \rangle & (x = s \text{ のとき}) \end{cases}$$

と定めれば  $\varphi$  は単射である.  $\square$

命題 5.  $\aleph_0 \leq \kappa$  ならば  $2^\kappa - \kappa = 2^\kappa$

証明.  $\kappa = |X|$  となる集合  $X$  を取る.  $X \ni x \mapsto \{x\} \in \mathcal{P}(X)$  により  $X \subset \mathcal{P}(X)$  とみなしたとき  $|\mathcal{P}(X)| \leq |\mathcal{P}(X) \setminus X|$  を示せばよい.

$X$  に含まれない元  $\infty$  を一つ取り  $\bar{X} := X \cup \{\infty\}$  と置く.  $f: \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(\bar{X}) \setminus X$  を  $f(Y) := Y \cup \{\infty\}$  で定める. これは明らかに単射だから  $|\mathcal{P}(X)| \leq |\mathcal{P}(\bar{X}) \setminus X|$  である. ここで  $\aleph_0 \leq \kappa$  だから  $\kappa + 1 = \kappa$ , 即ち  $|\bar{X}| = |X|$  であり, よって  $|\mathcal{P}(\bar{X}) \setminus \bar{X}| = |\mathcal{P}(X) \setminus X|$  となる. また  $\aleph_0 \leq |\mathcal{P}(\bar{X}) \setminus \bar{X}|$  だから

$$|\mathcal{P}(\bar{X}) \setminus X| = |(\mathcal{P}(\bar{X}) \setminus \bar{X}) \cup \{\infty\}| = |\mathcal{P}(\bar{X}) \setminus \bar{X}| + 1 = |\mathcal{P}(\bar{X}) \setminus \bar{X}|$$

となる. 従って  $|\mathcal{P}(X)| \leq |\mathcal{P}(X) \setminus X|$  が分かった.  $\square$

命題 6. 任意のアレフ  $\aleph$  に対して  $\aleph^2 = \aleph$ .

証明. 無限順序数  $\alpha$  に対し  $|\alpha \times \alpha| = |\alpha|$  を示せばよい. 任意の順序数  $\beta > 0$  は

$$\beta = \omega^{\beta_1} \cdot l_1 + \cdots + \omega^{\beta_n} \cdot l_n, \quad 1 \leq n, l_1, \dots, l_n < \omega, \alpha \geq \beta_1 > \cdots > \beta_n$$

の形に一意に書ける (Cantor 標準形. [1] 第 I 章演習問題 6 の解答を参照).

全単射  $g: \omega \times \omega \rightarrow \omega$  を  $g(0,0) = 0$  となるように一つ取る.  $\beta, \beta' < \alpha$  が与えられたとき  $\alpha \geq \beta_1 > \dots > \beta_n$  を使って

$$\begin{aligned}\beta &= \omega^{\beta_1} \cdot l_1 + \dots + \omega^{\beta_n} \cdot l_n \\ \beta' &= \omega^{\beta_1} \cdot l'_1 + \dots + \omega^{\beta_n} \cdot l'_n\end{aligned}$$

と書いて  $f(\beta, \beta') := \omega^{\beta_1} \cdot g(l_1, l'_1) + \dots + \omega^{\beta_n} \cdot g(l_n, l'_n)$  と定めれば, これは全単射  $f: \alpha \times \alpha \rightarrow \alpha$  を与える.  $\square$

**命題 7.** 任意のアレフ  $\aleph, \aleph'$  に対し  $\aleph \cdot \aleph' = \aleph + \aleph' = \max\{\aleph, \aleph'\}$ .

**証明.**  $\aleph' \leq \aleph$  としても一般性を失わない. このとき

$$\begin{aligned}\aleph &\leq \aleph + \aleph' \\ &\leq \aleph \cdot \aleph' \quad (\text{命題 4 による}) \\ &\leq \aleph \cdot \aleph \\ &= \aleph \quad (\text{命題 6 による}) \\ &= \max\{\aleph, \aleph'\}.\end{aligned}$$

$\square$

**命題 8.** 濃度  $\kappa, \lambda, \mu$  とアレフ  $\aleph$  が  $\kappa \cdot \aleph \leq \lambda + \mu$  を満たすとき,  $\kappa \leq \lambda$  または  $\aleph \leq \mu$ .

**証明.**  $\kappa = |X|$ ,  $\lambda = |Y|$ ,  $\mu = |Z|$  となる集合  $X, Y, Z$  と  $\aleph = |W|$  となる整列順序集合  $W$  を取る. 仮定より単射  $f: X \times W \rightarrow Y \cup Z$  が存在する.

(i) ある  $x \in X$  について  $f(\{x\} \times W) \subset Z$  となるとき.

$g: W \rightarrow Z$  を  $g(w) := f(x, w)$  で定めれば  $g$  は単射で  $\aleph = |W| \leq |Z| = \mu$  である.

(ii) 任意の  $x \in X$  について  $f(\{x\} \times W) \not\subset Z$  となるとき.

$W_x := \{w \in W \mid f(x, w) \in Y\} \neq \emptyset$  だから  $g: X \rightarrow Y$  を  $g(x) := f(x, \min W_x)$  で定めれば  $g$  は単射で  $\kappa = |X| \leq |Y| = \lambda$  である.  $\square$

**命題 9.** 濃度  $\kappa, \lambda, \mu$  とアレフ  $\aleph$  が  $\kappa \cdot \lambda \leq \aleph + \mu$  を満たすとき,  $\kappa \leq \aleph$  または  $\lambda \leq \mu$ .

**証明.**  $\kappa = |X|$ ,  $\lambda = |Y|$ ,  $\mu = |Z|$  となる集合  $X, Y, Z$  と  $\aleph = |W|$  となる整列順序集合  $W$  を取る. 仮定より単射  $f: X \times Y \rightarrow W \cup Z$  が存在する.

(i) ある  $x \in X$  について  $f(\{x\} \times Y) \subset Z$  となるとき.

$g: Y \rightarrow Z$  を  $g(y) := f(x, y)$  で定めれば  $g$  は単射で  $\lambda = |Y| \leq |Z| = \mu$  である.

(ii) 任意の  $x \in X$  について  $f(\{x\} \times Y) \not\subset Z$  となるとき.

$Y_x := \{y \in Y \mid f(x, y) \in W\} \neq \emptyset$  である.  $g: X \rightarrow W$  を  $g(x) := \min\{f(x, y) \mid y \in Y_x\}$  で定めれば  $g$  は単射で  $\kappa = |X| \leq |W| = \aleph$  である.  $\square$

**命題 10.** 濃度  $\kappa, \lambda$  とアレフ  $\aleph$  が  $\aleph \leq \kappa + \lambda$  を満たすとき,  $\aleph \leq \kappa$  または  $\aleph \leq \lambda$  である.

**証明.**  $\aleph \leq \kappa + \lambda$  とすると命題 6 より  $\aleph \cdot \aleph \leq \kappa + \lambda$  となる. よって命題 8 より  $\aleph \leq \kappa$  または  $\aleph \leq \lambda$  が分かる.  $\square$

**命題 11.** 濃度  $\kappa, \lambda$  とアレフ  $\aleph$  が  $\aleph \leq \kappa \cdot \lambda$  を満たすとき,  $\aleph \leq \kappa$  または  $\aleph \leq \lambda$  である.

**証明.**  $\kappa = |X|, \lambda = |Y|$  となる集合  $X, Y$  と  $\aleph = |W|$  となる整列順序集合  $W$  を取る. 単射  $f: W \rightarrow X \times Y$  が存在する.  $\pi_X, \pi_Y$  をそれぞれ  $X \times Y$  から  $X, Y$  への射影として  $U := \pi_X \circ f(W) \subset X, V := \pi_Y \circ f(W) \subset Y$  と置く.  $W$  の整列順序を使って,  $U, V$  は整列可能である. また  $f(W) \subset U \times V$  である. このとき命題 7 を使って  $\aleph = |W| \leq |U \times V| = |U| \cdot |V| = \max\{|U|, |V|\}$  となる. 故に  $\aleph \leq |U|$  または  $\aleph \leq |V|$  であるが, それぞれ  $\aleph \leq \kappa, \aleph \leq \lambda$  を導く.  $\square$

**命題 12.**  $\mathcal{P}_{\text{fin}}(X) := \{Y \subset X \mid Y \text{ は有限集合}\}$  と置く.

整列可能な無限集合  $X$  に対し  $|X| = |\mathcal{P}_{\text{fin}}(X)|$

**証明.**  $X$  の整列順序  $\leq$  を取る.

$Y \in \mathcal{P}_{\text{fin}}(X)$  を取り,  $|Y| = n$  とする. このとき順序同型  $f_Y: n \rightarrow (Y, \leq)$  が一意に存在する. そこで  $f(Y) := \langle n, f_Y(0), \dots, f_Y(n-1) \rangle \in \{n\} \times X^n$  と定める. これにより単射  $f: \mathcal{P}_{\text{fin}}(X) \rightarrow \bigcup_{n=0}^{\infty} (\{n\} \times X^n)$  が定義できる.

次に, 命題 6 により単射  $g_2: X^2 \rightarrow X$  が存在する. そこで  $n > 2$  に対して  $g_n: X^n \rightarrow X$  を

$$g_n(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) := g_2(g_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1}), x_n)$$

で定めると, 各  $g_n$  は単射である.  $g_0: X^0 \rightarrow X$  を一つ取り,  $g_1 := \text{id}_X$  とする. この  $\{g_n\}_{n=0}^{\infty}$  より単射  $g: \bigcup_{n=0}^{\infty} (\{n\} \times X^n) \rightarrow \bigcup_{n=0}^{\infty} (\{n\} \times X)$  が

$$g(n, x_1, \dots, x_n) := (n, g_n(x_1, \dots, x_n))$$

で定義できる.

また, 命題 7 により  $|\omega \times X| = |X|$  である.

以上により

$$|X| \leq |\mathcal{P}_{\text{fin}}(X)| \leq \left| \bigcup_{n=0}^{\infty} (\{n\} \times X^n) \right| \leq \left| \bigcup_{n=0}^{\infty} (\{n\} \times X) \right| = |\omega \times X| = |X|$$

である. □

**命題 13.**  $X$  を集合とする.  $|\alpha| \not\leq |X|$  となるような順序数  $\alpha$  が存在する.

**証明.**  $\Gamma(X) := \{\alpha \mid \alpha \text{ は順序数, } |\alpha| \leq |X|\}$  と置く.  $\Gamma(X)$  は集合である.

$\therefore$ )  $W := \{R \subset X \times X \mid R \text{ は } X \text{ のある部分集合を整列する}\}$  と定義する.  $W$  は集合である. よって「 $W$  に現れる整列順序と同型な順序数全体」も集合である. この集合は  $\Gamma(X)$  と一致する.

順序数の推移的な集合は順序数だから,  $\Gamma(X)$  も順序数である. よって  $\Gamma(X) \notin \Gamma(X)$  だから  $|\Gamma(X)| \not\leq |X|$  となる. □

この  $\Gamma$  を Hartogs 関数という. また  $\kappa = |X|$  のとき  $\kappa^* := |\Gamma(X)|$  と書く. これを Hartogs number という. Hartogs number はアレフである.

**命題 14.** 1.  $\Gamma(X)$  は  $|\alpha| \not\leq |X|$  となるような順序数  $\alpha$  のうち最小の順序数である.

2.  $\kappa^*$  は  $\aleph \not\leq \kappa$  となるようなアレフ  $\aleph$  のうち最小のアレフである.

3.  $\kappa^* \leq 2^{2^{\kappa^2}}$

4.  $\kappa^* \leq 2^{2^{2^\kappa}}$

5. 無限濃度  $\kappa$  に対して  $\kappa^{**} = (\kappa + \kappa^*)^*$

6. 無限濃度  $\kappa$  に対して  $(\kappa^2)^* = \kappa^*$

**証明.** (3)  $\kappa = |X|$  となる  $X$  を取り

$$W := \{R \subset X \times X \mid R \text{ は } X \text{ のある部分集合を整列する}\}$$

と置く. 明らかに  $|\Gamma(X)| \leq^* |W|$  である. よって  $|\Gamma(X)| \leq |\mathcal{P}(W)|$  であり

$$\kappa^* = |\Gamma(X)| \leq |\mathcal{P}(W)| \leq |\mathcal{P}(\mathcal{P}(X \times X))| = 2^{2^{|X|^2}} = 2^{2^{\kappa^2}}$$

となる.

(4)  $\kappa = |X|$  となる  $X$  を取り  $\alpha \in \Gamma(X)$  とする. 単射  $f: \alpha \rightarrow X$  に対して  $A_f := \{f''\beta \mid \beta < \alpha\} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$  と定める.  $B := \{A_f \mid \alpha \in \Gamma(X), f: \alpha \rightarrow X \text{ は単射}\}$  と

置けば  $B \subset \mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$  となる.  $\varphi: B \rightarrow \Gamma(X)$  を  $\varphi(A_f) := \text{dom}(f)$  とすれば  $\varphi$  は全射となる. よって  $|\Gamma(X)| \leq^* B$  だから  $|\Gamma(X)| \leq \mathcal{P}(B) \leq |\mathcal{P}(\mathcal{P}(X))|$ .

(5)  $\kappa^* \leq \kappa + \kappa^*$  だから  $\kappa^{**} \leq (\kappa + \kappa^*)^*$  である.  $\kappa^{**} < (\kappa + \kappa^*)^*$  と仮定すると  $\kappa^{**}$  はアレフだから,  $(\kappa + \kappa^*)^*$  の最小性より  $\kappa^{**} \leq \kappa + \kappa^*$  となる. よって命題 10 により「 $\kappa^{**} \leq \kappa$  または  $\kappa^{**} \leq \kappa^*$ 」となり矛盾する. 故に  $\kappa^{**} = (\kappa + \kappa^*)^*$  である.

(6)  $\kappa \leq \kappa^2$  だから  $\kappa^* \leq (\kappa^2)^*$  である.  $\kappa^* < (\kappa^2)^*$  と仮定すると  $\kappa^*$  はアレフだから  $(\kappa^2)^*$  の最小性により  $\kappa^* \leq \kappa^2$  となる. 故に命題 11 から  $\kappa^* \leq \kappa$  となり矛盾する. 故に  $\kappa^* = (\kappa^2)^*$  である.  $\square$

定義. 集合  $X$  に対して  $K(X) := \{f: \alpha \rightarrow X \mid \alpha \text{ は順序数, } f \text{ は単射}\}$  を Kruse 関数という.  $\kappa = |X|$  のとき  $\kappa^\dagger := |K(X)|$  と書く.

明らかに, 次が成り立つ.

命題 15. 1.  $\kappa^\dagger \leq 2^{\kappa^2}$

2.  $\kappa^\dagger \leq 2^{2^\kappa}$

3.  $\kappa < \kappa^\dagger$

4. アレフ  $\aleph$  に対して  $\aleph^\dagger = 2^\aleph$   $\square$

命題 16. 1.  $\kappa^\dagger \cdot \mu^\dagger \leq (\kappa + \mu)^\dagger$

2.  $\kappa \geq \aleph_0 \implies \kappa^\dagger + \kappa^\dagger = \kappa^\dagger$

3.  $\kappa + \kappa = \kappa \implies (\kappa^\dagger)^2 = \kappa^\dagger$   $\square$

命題 17.  $\kappa \geq \aleph_0$  とアレフ  $\aleph$  が  $\kappa^\dagger \leq \kappa + \aleph$  を満たすとき,  $\kappa < \kappa^\dagger = 2^\kappa \leq \aleph$  である.

証明.  $\kappa \geq \aleph_0$  だから命題 16 より  $\kappa^\dagger + \kappa^\dagger = \kappa^\dagger$  である. よって  $\kappa + \kappa \leq \kappa^\dagger + \kappa^\dagger = \kappa^\dagger \leq \kappa + \aleph$  となる. 故にある  $\aleph' \leq \aleph$  が存在して  $\kappa + \kappa = \kappa + \aleph'$  となる. このとき  $\aleph' \leq \kappa + \kappa$  だから命題 10 により  $\aleph' \leq \kappa$  が分かる. 故に  $\kappa + \aleph' = \kappa$  であるから  $\kappa + \kappa = \kappa$  となる. 従って命題 16 より  $(\kappa^\dagger)^2 = \kappa^\dagger$  が従う. 仮定より  $\kappa^\dagger \leq \kappa + \aleph$  だから, ある  $\mu \leq \kappa$  と  $\aleph'' \leq \aleph$  が存在して  $\kappa^\dagger = \mu + \aleph''$  と書ける. このとき  $\aleph'' \leq \kappa^\dagger$  だから  $\kappa^\dagger \cdot \aleph'' \leq (\kappa^\dagger)^2 = \kappa^\dagger \leq \kappa + \aleph$  である. 命題 8 により  $\kappa^\dagger \leq \aleph$  または  $\aleph'' \leq \kappa$  が分かる.

$\aleph'' \leq \kappa$  と仮定すると  $\kappa^\dagger = \mu + \aleph'' \leq \kappa + \kappa = \kappa$  となり  $\kappa < \kappa^\dagger$  (命題 15) に矛盾する. 従って  $\kappa^\dagger \leq \aleph$  である. よって  $\kappa < \kappa^\dagger \leq \aleph$  であり,  $\kappa$  がアレフだから  $\kappa^\dagger = 2^\kappa$  となる.  $\square$

## 参考文献

- [1] ケネス・キューネン, 『集合論-独立性証明への案内』, 藤田博司訳, 日本評論社, 2008