Artin-Whaples 理論

@alg_d

2013 年 9 月 7 日

複素関数 f が $z_0 \in \mathbb{C}$ の近傍で $f(z) = \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ $(a_{n_0} \neq 0)$ と書けるとき，f は $z = z_0$ で有理型であるという．またこの時の n_0 を f の $z = z_0$ での位数といい，$\mathrm{ord}_{z_0}(f)$ で表す．$n_0 > 0$ のとき f は $z = z_0$ で n_0 位の零点を持つといい，$n_0 < 0$ のとき f は $z = z_0$ で $|n_0|$ 位の極を持つという．

また $f(1/w)$ を w の関数と見て $w = 0$ で有理型であるとき，$f(z)$ は $z = \infty$ で有理型であるという．位数 $\mathrm{ord}_\infty(f)$ を $f(1/w)$ の $w = 0$ での位数，即ち $z = 1/w$ として $f(z) = f(1/w) = \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n w^n$ $(a_{n_0} \neq 0)$ と書けるとき $\mathrm{ord}_\infty(f) := n_0$ と定める．

f が Riemann 球面 $\overline{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 上の任意の点で有理型のとき，f を $\overline{\mathbb{C}}$ 上の有理型関数という．

命題. $\overline{\mathbb{C}}$ 上の有理型関数は有理関数 (「多項式 / 多項式」と書ける関数) である．即ち $\overline{\mathbb{C}}$ の有理型関数体は $\mathbb{C}(x)$ である．

定理. f を Riemann 球面 $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 上の有理型関数とすれば f の零点・極は有限個で，位数の和は 0 である．即ち $\sum_{z \in \overline{\mathbb{C}}} \mathrm{ord}_z(f) = 0$. □

定理. X をコンパクト Riemann 面，f を X 上の有理型関数とすれば f の零点・極は有限個で位数の和は 0 である．即ち $\sum_{z \in X} \mathrm{ord}_z(f) = 0$. □

この「位数の和が 0」を一般化して整数論で使おう，というのが今回の話の内容である．例えば，この一般化により代数体の特徴付けが得られるのである．一般化を行うため，まず「位数」という概念の言い換えを行う．

定義. K を体とする．以下を満たす写像 $|\cdot|\colon K \longrightarrow \mathbb{R}$ を絶対値 (もしくは付値) という．

(1) $x \in K$ について $|x| \geq 0$ であり，$|x| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$

(2) $|xy| = |x||y|$

(3) (三角不等式) $|x + y| \leq |x| + |y|$

例. $\alpha \in K$ に対して

$$|\alpha| = \begin{cases} 0 & (\alpha = 0) \\ 1 & (\alpha \neq 0) \end{cases}$$

と定めればこれは明らかに K の絶対値を定める．これを自明な絶対値という． □

定義. 体 K の絶対値 $|\cdot|_0, |\cdot|_1$ に対して二項関係 $\sim$ を

$$|\cdot|_0 \sim |\cdot|_1 \Longleftrightarrow |\cdot|_0 \text{と} |\cdot|_1 \text{が} K \text{に同一の位相を定める}$$

と定める．$\sim$ は同値関係である．

命題. 体 K の自明でない絶対値 $|\cdot|_0, |\cdot|_1$ に対して以下は同値.

(1) $|\cdot|_0 \sim |\cdot|_1$.

(2) 任意の $\alpha \in K$ に対して「$|\alpha|_0 < 1 \Longrightarrow |\alpha|_1 < 1$」となる.

(3) ある実数 $s > 0$ が存在して，任意の $\alpha \in K$ に対して $|\alpha|_0 = |\alpha|_1^s$ となる. □

定義. $|\cdot|_0, |\cdot|_1$ を絶対値として $|\cdot|_0 \sim |\cdot|_1$ とすればある実数 $s > 0$ が存在して $|\cdot|_0 = |\cdot|_1^s$ となるが，絶対値 $|\cdot|$ に対して $|\cdot|^s$ が常に絶対値になるとは限らない.

例: $\mathbb{Q}$ の通常の絶対値 $|\cdot|$ に対して $|1+1|^2 = 4 > 2 = |1|^2 + |1|^2$.

そこで以下，ある絶対値 $|\cdot|_0$ と $s > 0$ によって $|\cdot| = |\cdot|_0^s$ と書ける写像 $|\cdot|$ も絶対値と呼ぶことにする.

定義. 絶対値 $|\cdot|$ が強三角不等式 $|x + y| \leq \max\{|x|, |y|\}$ を満たすとき，$|\cdot|$ は非 Archimedes 的であるという．そうでないとき，Archimedes 的であるという.

命題 1. 絶対値 $|\cdot|$ が非 Archimedes 的 $\Longleftrightarrow \{|n| \mid n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$ が有界
特に，Archimedes 的絶対値を持つ体は標数 0 である. □

定義. K の絶対値 $|\cdot|$ が discrete $\Longleftrightarrow (|K^\times|, \cdot) \cong (\mathbb{Z}, +)$.

例. $\mathbb{C}$ 上の有理関数体 $\mathbb{C}(x)$ を考える．実数 $c_0 > 1$ を一つ固定する.

$f \in \mathbb{C}(x)$ の $p \in \mathbb{C}$ における位数を $\mathrm{ord}_p(f)$ とする．即ち

$$f(x) = a \prod_{p \in \mathbb{C}} (x - p)^{n_p} \quad (a \in \mathbb{C}^\times,\ n_p \in \mathbb{Z} \text{ は有限個の } p \in \mathbb{C} \text{ を除いて } 0)$$

と一意に書いたとき $\mathrm{ord}_p(f) := n_p$ である．このとき，$|f|_p := \dfrac{1}{c_0^{\mathrm{ord}_p(f)}}$ と置けば $|\cdot|_p$ は $\mathbb{C}(x)$ の絶対値である．

また，∞ における位数を $\mathrm{ord}_\infty(f)$ とする．即ち

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)},\ g, h \in \mathbb{C}[x],\ (g, h) = 1$$

と書いたとき $\mathrm{ord}_\infty(f) := \deg(h) - \deg(g)$ である．このとき，$|f|_\infty := \dfrac{1}{c_0^{\mathrm{ord}_\infty(f)}}$ と置けば $|\cdot|_\infty$ は $\mathbb{C}(x)$ の絶対値である．

これらの絶対値は非 Archimedes 的で，discrete である． $\square$

命題． $\{\varphi \mid \varphi$ は $\mathbb{C}(x)$ の非自明絶対値，$\mathbb{C}$ 上自明 $\}/\sim$ の完全代表系は $\{|\cdot|_p \mid p \in \overline{\mathbb{C}}\}$． $\square$

定理． 任意の $\alpha \in \mathbb{C}(x)^\times$ に対して，有限個の $p \in \overline{\mathbb{C}}$ を除いて $|\alpha|_p = 1$． $\square$

定理 (積公式)．任意の $\alpha \in \mathbb{C}(x)^\times$ に対して $\displaystyle\prod_{p\in\overline{\mathbb{C}}} |\alpha|_p = 1$

証明． $|\alpha|_p = \dfrac{1}{c_0^{\mathrm{ord}_p(\alpha)}}$ だから $\displaystyle\prod_{p\in\overline{\mathbb{C}}} |\alpha|_p = \prod \frac{1}{c_0^{\mathrm{ord}_p(\alpha)}} = \frac{1}{c_0^{\sum \mathrm{ord}_p(\alpha)}} = \frac{1}{c_0^0} = 1.$ $\square$

定義． 体 K が PF 体 (PF=Product Formula)
$\iff$ 体 K の非自明絶対値のある集合 M が存在して，以下を満たす．

(1) $\varphi, \psi \in M$ で $\varphi \neq \psi$ ならば $\varphi \not\sim \psi$
(2) $\alpha \in K^\times$ に対して，有限個の $\varphi \in M$ を除いて $\varphi(\alpha) = 1$
(3) $\alpha \in K^\times$ に対して $\displaystyle\prod_{\varphi\in M} \varphi(\alpha) = 1$

この M を K の PF 集合と呼ぶことにする．

$|\cdot|$ を Archimedes 的とすれば $|2| > 1$ である．故に PF 集合 M は Archimedes 的絶対値を有限個しか含まない．

例． 有理関数体 $\mathbb{C}(x)$ は PF 体である．$M = \{|\cdot|_p \mid p \in \overline{\mathbb{C}}\}$ と取れる．同様にして，コンパクト Riemann 面上の有理型関数体も PF 体である． $\square$

$\mathbb{C}(x)$ と同様なことが有理数体 $\mathbb{Q}$ でも考えられる．$\alpha \in \mathbb{Q}^\times$ は

$$\alpha = a \prod_{p:\text{素数}} p^{n_p} \quad (a = \pm 1,\ n_p \in \mathbb{Z} \text{ は有限個の } p \text{ を除いて } 0)$$

と一意に書ける．これを用いて，素数 p に対して $\mathrm{ord}_p(\alpha) := n_p$ と書いて，$\mathbb{Q}$ の絶対値を $|\alpha|_p := \dfrac{1}{p^{\mathrm{ord}_p(\alpha)}}$ で定める．これを p 進絶対値という．また通常の絶対値を $|\cdot|_\infty$ で表す．$X := \{p \in \mathbb{N} : \text{素数}\} \cup \{\infty\}$ と置く．

命題. $\{\varphi \mid \varphi \text{ は } \mathbb{Q} \text{ の非自明絶対値}\}/\sim$ の完全代表系は $\{|\cdot|_p \mid p \in X\}$. $\square$

定理. 任意の $\alpha \in \mathbb{Q}^\times$ に対して，有限個の $p \in X$ を除いて $|\alpha|_p = 1$. $\square$

定理 (積公式). 任意の $\alpha \in \mathbb{Q}^\times$ に対して $\displaystyle\prod_{p \in X} |\alpha|_p = 1$.

証明. $\alpha = \pm p_1^{e_1} \cdots p_g^{e_g}$ と書けば $\displaystyle\prod_{p \in X} |\alpha|_p = |\alpha|_\infty |\alpha|_{p_1} \cdots |\alpha|_{p_g} = |\alpha| \frac{1}{p_1^{e_1}} \cdots \frac{1}{p_g^{e_g}} = 1$. $\square$

系. 有理数体 $\mathbb{Q}$ は PF 体である．$M = \{|\cdot|_p \mid p \in X\}$ とすればよい． $\square$

例. 一般に体 k に対して $k(x)$ は PF 体である．それを示すため，A を $k(x)$ の非自明な絶対値で k 上自明なもの全体，とする．$|\cdot| \in A$ を取る．命題 1 により $|\cdot|$ は非 Archimedes 的である．

(1) $|x| \leq 1$ のとき

任意の $f = a_n x^n + \cdots + a_0 \in k[x]$ に対して $|f| \leq \max\{|a_n x^n|, \cdots, |a_0|\} \leq 1$ である．$|\cdot|$ は非自明だから，$p \in k[x]$ で $|p| < 1$ となるものが存在する．そのような p のうち $\deg p$ が最小となるものを取る．p は既約多項式である．$f \in k[x]$ が $|f| < 1$ を満たすならば，ある $g \in k[x]$ が存在して $f = pg$ と書ける．

$\because$) $|f| < 1$ として，f を p で割り $f = pg + r$ $(g, r \in k[x],\ \deg r < \deg p)$ と書く．このとき $|r| = |f - pg| \leq \max\{|f|, |pg|\} < 1$ だから，$\deg p$ の最小性により $r = 0$ である．

任意の $f \in k(x)$ は

$$f = p^{n(p,f)} \frac{g}{h} \quad (g, h \in k[x],\ (g,h) = 1,\ (g,p) = 1,\ (h,p) = 1)$$

と一意に書ける．$(g,p) = 1$, $(h,p) = 1$ より $|g| = |h| = 1$ である．故に $|f| = |p|^{n(p,f)}$ となる．

逆に，$p \in k[x]$ を既約多項式，$c > 1$ を実数として $|f|_p := \dfrac{1}{c^{n(p,f)}}$ と定めれば $|\cdot|_p \in A$ である．

(2) $|x| > 1$ のとき
$y := x^{-1}$ とすれば $|y| < 1$ だから (1) の議論が使える．この場合 $p = y$ と取れる．従って $f = \dfrac{g}{h}$，$(g,h) = 1$ とすれば $|f| = |y|^{\deg h - \deg g}$ である．

さて，実数 $c_0 > 1$ を一つとる．既約多項式 $p \in k[x]$ に対して $|f|_p := \dfrac{1}{c_0^{n(p,f)}}$，また $|f|_\infty := \dfrac{1}{c_0^{\deg h - \deg g}}$ として $M := \{|\cdot|_p \mid p \in k[x]$ は既約 $\} \cup \{|\cdot|_\infty\}$ と定める．このとき $k(x)$ は M を PF 集合とする PF 体である． $\square$

命題. PF 体 K の有限次拡大 L/K も PF 体である．

証明. 簡単のため L/K を Galois 拡大として $G := \mathrm{Gal}(L/K)$ とおく．K の PF 集合を M とする．$\varphi \in M$ に対して $N_\varphi := \{\Phi \mid \Phi$ は L の絶対値，$\Phi|_K = \varphi\}$ とする．$\Phi_0 \in N_\varphi$ を一つ取れば，写像 $a\colon G \longrightarrow N_\varphi$ が $a(\sigma) := \Phi_0 \circ \sigma$ により定まる．$\Phi \in N_\varphi$ に対して $n(\Phi) := |a^{-1}(\Phi)|$ と置き，$N := \bigcup_{\varphi \in M} \{\Phi^{n(\Phi)} \mid \Phi \in N_\varphi\}$ と定める．$\alpha \in L$ に対して $\mathrm{N}_{L/K}\alpha := \prod_{\sigma \in G} \alpha^\sigma$ とすれば $\mathrm{N}_{L/K}\alpha \in K$ であり

$$\varphi(\mathrm{N}_{L/K}\alpha) = \Phi_0(\mathrm{N}_{L/K}\alpha) = \Phi_0\Big(\prod_{\sigma \in G} \alpha^\sigma\Big) = \prod_{\sigma \in G} \Phi_0(\alpha^\sigma) = \prod_{\Phi \in N_\varphi} \Phi(\alpha)^{n(\Phi)}$$

となる．故に

$$\prod_{\Phi^{n(\Phi)} \in N} \Phi(\alpha)^{n(\Phi)} = \prod_{\varphi \in M} \prod_{\Phi \in N_\varphi} \Phi(\alpha)^{n(\Phi)} = \prod_{\varphi \in M} \varphi(\mathrm{N}_{L/K}\alpha) = 1$$

であり，L は N を PF 集合とする PF 体である． $\square$

系. 代数体 ($\mathbb{Q}$ の有限次拡大) と体 k 上の一変数代数関数体 ($k(x)$ の有限次拡大) は PF 体である． $\square$

K の非 Archimeded 的絶対値 φ に対して $\mathcal{O}_\varphi := \{\alpha \in K \mid \varphi(\alpha) \leq 1\}$，$\mathfrak{p}_\varphi := \{\alpha \in K \mid \varphi(\alpha) < 1\}$ と定める．$\mathcal{O}_\varphi \subset K$ は部分環，$\mathfrak{p}_\varphi \subset \mathcal{O}_\varphi$ は極大イデアルである．$\kappa_\varphi := \mathcal{O}_\varphi/\mathfrak{p}_\varphi$ を φ の剰余体という．

K が PF 体で，PF 集合 M が Archimedes 的絶対値を含まないとする．

$$k_0 := \bigcap_{\varphi \in M} \mathcal{O}_\varphi$$

は K の真の部分体である．

$\because$) 明らかに環である．$\alpha \in k_0 \setminus \{0\}$ とすれば各 $\varphi \in M$ に対して $\varphi(\alpha) \leq 1$ であり，積公式 $\displaystyle\prod_{\varphi \in M} \varphi(\alpha) = 1$ により $\varphi(\alpha) = 1$ でなければならない．故に $\varphi(\alpha^{-1}) = 1$ となり $\alpha^{-1} \in k_0$ である．

k_0 は K の中で代数的に閉じている．また $k_0 \subset \kappa_\varphi$ とみなせる．

PF 体の絶対値 $\varphi \in M$ について，以下の条件を考える．

(R_1) φ は Archimedes 的である．

(R_2) φ は discrete で，$\begin{cases} \kappa_\varphi \text{ は有限体} & (M \text{ が Archimedes 的絶対値を含むとき}) \\ [\kappa_\varphi : k_0] < \infty & (M \text{ が Archimedes 的絶対値を含まないとき}) \end{cases}$

(R) R_1 または R_2

例えば R_1 を満たす絶対値のことを R_1 絶対値と呼ぶことにする．K を PF 体で，PF 集合 M が R 絶対値を含むとする．部分体 $Q \subset K$，部分環 $Z \subset Q$ を次のように定める．

(1) M が R_1 絶対値を含むとき

命題 1 により K の標数は 0 である．故に $Q := \mathbb{Q}$，$Z := \mathbb{Z}$ とできる．また $|\cdot|_\infty$ で Q の通常の絶対値を表す．

(2) そうでないとき

$x \in K \setminus k_0$ を一つ取り $Q := k_0(x)$，$Z := k_0[x]$ とする．(x は k_0 上超越的であることに注意する．) また $|\cdot|_\infty$ で x^{-1} に対応する Q の絶対値を表す．

定理. K が PF 体で M は R 絶対値を含むとする．

(1) K/Q は有限次拡大である．
(2) 全ての $|\cdot| \in M$ は R 絶対値である． □

定理. 体 K について
K が代数体 $\Longleftrightarrow$ K が PF 体で，M が R_1 絶対値を含む． □

定理. 体 K について
K が一変数代数関数体 $\Longleftrightarrow$ K が PF 体で，M が R_1 絶対値を含まず R_2 絶対値を含む． □

※ R 絶対値を含まない PF 体は存在する．

k を体，$n > 1$ として有理関数体 $K := k(x_1, \cdots, x_n)$ を考える．既約多項式 $p \in k[x_1, \cdots, x_n]$ から絶対値 $|\cdot|_p$ が定まり，多項式の次数から絶対値 $|\cdot|_\infty$ が定ま

る．これら全体を M とすれば K は PF 体で M は R 絶対値を含まない.

$\mathbb{Q}$ では素因数分解ができる．$|\cdot|_p$ の定義から，$\alpha \in \mathbb{Q}$ の素因数分解をすることは全ての有限素数 p について $|\alpha|_p$ を求めることと同じである．この考えを使えば，一般の代数体について《素因数分解》を考えることができる．(これは，素イデアル分解を考えることと本質的に同じである．)

例. $\mathbb{Q}(\sqrt{-5})$ を考える．この代数体では《素因数分解》ができない事がよく知られている．$6 = 2\cdot 3 = (1+\sqrt{-5})(1-\sqrt{-5})$

φ を $\mathbb{Q}(\sqrt{-5})$ の絶対値で，$\varphi|_{\mathbb{Q}} = |\cdot|_p$ $(p \neq \infty)$ とする.

$p \neq 2, 3$ とすれば $\varphi(6) = 1$ である．故に $\varphi(2) = \varphi(3) = \varphi(1+\sqrt{-5}) = \varphi(1-\sqrt{-5}) = 1$ となる.

$p = 2$ のとき

$$\varphi(x + y\sqrt{-5}) = \sqrt{|x^2+5y^2|_2} = \sqrt{\frac{1}{2^{\mathrm{ord}_2(x^2+5y^2)}}} = \frac{1}{\sqrt{2}^{\mathrm{ord}_2(x^2+5y^2)}}$$

となることが知られている．この φ も同じ $|\cdot|_2$ で表す.

$p = 3$ のとき．$\sqrt{-5} = 1 + 2\cdot 3 + 0\cdot 3^2 + 2\cdot 3^3 + \cdots \in \mathbb{Q}_3$ であることが知られている．これにより $|x + y\sqrt{-5}|_3$ が計算できる．φ は以下の絶対値 $|\cdot|_{3,1}$ か $|\cdot|_{3,2}$ のどちらかとなることが知られている.

$$|x+y\sqrt{-5}|_{3,1} := |x+y\sqrt{-5}|_3$$
$$|x+y\sqrt{-5}|_{3,2} := |x-y\sqrt{-5}|_3$$

よって

$$
\begin{aligned}
&|2|_2 = \frac{1}{2^1} = \frac{1}{\sqrt{2}^2}, \quad |2|_{3,1} = |2|_{3,2} = \frac{1}{3^0} \\
&|3|_2 = \frac{1}{2^0} = \frac{1}{\sqrt{2}^0}, \quad |3|_{3,1} = |2|_{3,2} = \frac{1}{3^1} \\
&|1+\sqrt{-5}|_2 = \frac{1}{\sqrt{2}^{\mathrm{ord}_2(1+5)}} = \frac{1}{\sqrt{2}^1} \\
&|1+\sqrt{-5}|_{3,1} = |2+2\cdot 3+\cdots|_3 = \frac{1}{3^0} \\
&|1+\sqrt{-5}|_{3,2} = |1-\sqrt{-5}|_3 = |-1+\sqrt{-5}|_3 = |2\cdot 3+\cdots|_3 = \frac{1}{3^1} \\
&|1-\sqrt{-5}|_2 = \frac{1}{\sqrt{2}^{\mathrm{ord}_2(1+5)}} = \frac{1}{\sqrt{2}^1} \\
&|1-\sqrt{-5}|_{3,1} = |1-\sqrt{-5}|_3 = \frac{1}{3^1} \\
&|1-\sqrt{-5}|_{3,2} = |1+\sqrt{-5}|_3 = \frac{1}{3^0}
\end{aligned}
$$

だから $2=\mathfrak{p}_2^2$，$3=\mathfrak{p}_{3,1}\mathfrak{p}_{3,2}$，$1+\sqrt{-5}=\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{3,2}$，$1-\sqrt{-5}=\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{3,1}$，$6=\mathfrak{p}_2^2\mathfrak{p}_{3,1}\mathfrak{p}_{3,2}$ と《素因数分解》すると考えられる． □

※ $\mathbb{Q}(\sqrt{-5})$ を PF 体にするためには，これらの絶対値を適当に冪乗する必要がある．

ところで，$\alpha\in\mathbb{Q}(\sqrt{-5})^\times$ に対して素因数分解 $(|\alpha|_2,|\alpha|_{3,1},|\alpha|_{3,2},\cdots)\in\bigoplus\mathbb{R}_{>0}$ を対応させる群準同型写像は単射ではない．そこでこの核を調べることが重要な問題となる．一般に，次のように定義する．

定義. K を PF 体とし，その PF 集合 M は R 絶対値を含むとする．空でない有限集合 $S\subset M$ は全ての R_1 絶対値を含むとする．このとき
$\varepsilon\in K$ が S 単数 $\Longleftrightarrow$ 任意の $|\cdot|\in M\setminus S$ に対して $|\varepsilon|=1$.

S 単数全体は乗法により群をなす．これを E_S と書く．

例. $K=\mathbb{C}(x)$ のとき．M は R_1 絶対値を持たないから $S=\emptyset$ とすれば $E_\emptyset=\mathbb{C}$ (Liouville の定理) □

即ち，S 単数とは関数体における定数のようなものとも思える．

定義. $\Lambda\subset\mathbb{R}^s$ が m 次元の格子

$\Longleftrightarrow$ 一次独立な $v_1, \cdots, v_m \in \mathbb{R}^s$ が存在して $\Lambda = \mathbb{Z}v_1 + \cdots + \mathbb{Z}v_m$ と書ける．

例. $\mathbb{Z}[i] \subset \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ は格子である． $\square$

例. $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] \subset \mathbb{R}$ は格子でない． $\square$

$|\cdot| \in S$ に対して $E_S \ni \varepsilon \longrightarrow |\varepsilon| \in \mathbb{R}_{>0}$ は群準同型だから $S = \{|\cdot|_1, \cdots, |\cdot|_s\}$ として $E_S \ni \varepsilon \longrightarrow (|\varepsilon|_1, \cdots, |\varepsilon|_s) \in \mathbb{R}^s_{>0}$ は群準同型である．準同型 $\log\colon \mathbb{R}_{>0} \longrightarrow \mathbb{R}$ とあわせて準同型 $L\colon E_S \ni \varepsilon \longrightarrow (\log|\varepsilon|_1, \cdots, \log|\varepsilon|_s) \in \mathbb{R}^s$ を得る．E_S の定義と積公式により $\log|\varepsilon|_1 + \cdots + \log|\varepsilon|_s = 0$ である．即ち $\operatorname{Im} L \subset \{(x_1, \cdots, x_s) \in \mathbb{R}^s \mid x_1 + \cdots + x_s = 0\}$.

$W_S := \ker L$ と書く．$W_S = k_0$ または $W_S = \{\alpha \in K \mid \alpha^N = 1\}$ $(N \in \mathbb{N})$ である．

命題. $\operatorname{Im} L \subset \mathbb{R}^s$ は高々 $s-1$ 次元の格子である．よって $E_S \cong W_S \times \mathbb{Z}^m$ $(0 \leq m \leq s-1)$ と書ける． $\square$

(R_{2+}) φ は非 Archimedes 的で，κ_φ は有限体
(R_{+}) R_1 または R_{2+}
とする．勿論 R_{2+} 絶対値は R_2 絶対値である．

定理. K を PF 体で M は R_+ 絶対値を含むとする．このとき $\operatorname{Im} L$ は $s-1$ 次元の格子をなす．即ち $E_S \cong W_S \times \mathbb{Z}^{s-1}$

証明. $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_s \in E_S$ を「$i \neq j$ に対して $|\varepsilon_i|_j > 1$」となるように取れることが分かる．このとき積公式より $|\varepsilon_i|_i < 1$ となる．$L(\varepsilon_1), \ldots, L(\varepsilon_{s-1})$ が $\mathbb{R}$ 上一次独立であることを示せばよい．その為には $L(\varepsilon_i) = (a_{i1}, \ldots, a_{is})$ として $\det(a_{ij})_{1\leq i,j\leq s-1} \neq 0$ を示せばよい．

$\det(a_{ij}) = 0$ と仮定する．$t := s-1$ と書く．少なくとも一つは 0 でない $x_1, \cdots, x_t \in \mathbb{R}$ が存在して

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1t} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{t1} & \cdots & a_{tt} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_t \end{pmatrix} = 0$$

とできる．また

$$a_{ij} = \log|\varepsilon_i|_j \begin{cases} > 0 & (i \neq j \text{ のとき}) \\ < 0 & (i = j \text{ のとき}) \end{cases}$$

である．

$|x_i| = \max\{|x_1|, \ldots, |x_t|\}$ なる i を取ると

$$\begin{aligned}
0 &= |a_{i1}x_1 + \cdots + a_{it}x_t| \\
&\geq |a_{ii}x_i| - |a_{i1}x_1 + \cdots + a_{ii-1}x_{i-1} + a_{ii+1}x_{i+1} + \cdots + a_{it}x_t| \\
&\geq -a_{ii}|x_i| - (|a_{i1}x_1| + \cdots + |a_{ii-1}x_{i-1}| + |a_{ii+1}x_{i+1}| + \cdots + |a_{it}x_t|) \\
&\geq -a_{ii}|x_i| - (a_{i1}|x_i| + \cdots + a_{ii-1}|x_i| + a_{ii+1}|x_i| + \cdots + a_{it}|x_i|) \\
&= -|x_i|(a_{i1} + \cdots + a_{it}) \\
&= -|x_i|(\log|\varepsilon_i|_1 + \cdots + \log|\varepsilon_i|_{s-1}) \\
&= |x_i| \log|\varepsilon_i|_s > 0
\end{aligned}$$

となり矛盾する． □

K を代数体とする．K は PF 体で，M は有限個の R_1 絶対値を含む．$S \subset M$ を R_1 絶対値全体とするとき，$E_K := E_S$ を K の単数群という．$W_K := W_S$ と置く．

系 (Dirichlet の単数定理)**.** K を代数体とすれば $E_K \cong W_K \times \mathbb{Z}^{s-1}$. □

例. $K = \mathbb{Q}$ のときは $E_{\mathbb{Q}} = \{\pm 1\}$, $W_K = \{\pm 1\}$, $s - 1 = 0$. □

例. $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ のときは $W_K = \{\pm 1\}$, $s - 1 = 1$. 故に $E_K \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times \mathbb{Z}$. 実際 $E_K = \{\pm(1+\sqrt{2})^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ と書ける． □

参考文献

[1] 彌永 昌吉編,『数論』，岩波書店, 1969 年，附録 1

[2] E. Artin and G. Whaples, Axiomatic Characterization of Fields by the Product Formula for Valuations, Bull. Amer. Math. Soc. 51(1945), 469–492, `http://www.ams.org/journals/bull/1945-51-07/S0002-9904-1945-08383-9/`