

双積・弱完全圏

alg-d

http://alg-d.com/math/kan_extension/

2018年3月11日

※ この PDF では可換モノイドやアーベル群の演算を $+$ で書く。

この PDF の目的は大きく分けて二つあり、(1) 双積を定義すること (2) 蛇の補題などを証明すること、である。

(1) いくつかの圏 (線形空間の圏や \mathbf{Ab} など) では有限直積が有限直和にもなっている。このような状況を一般化したものが双積である。これは [2] 等では \mathbf{Ab} -豊穡圏において定義されているが [1] により通常圏における定義が知られておりそれを述べる。

(2) いわゆるホモロジー代数における有名な補題に「蛇の補題」「5項補題」などがある。通常これらは R -加群の圏等で「元を取る」ことによって証明することが多いと思われるがここでは圏論的な証明を与える。その為の枠組みが [3] による弱完全圏である。

目次

1	準備	2
2	零射	4
3	零対象	5
4	双積	6
5	核	10
6	アーベル圏	14
7	弱完全圏	27
8	弱完全圏の例	49

1 準備

$\mathbf{Set}_* := 1/\mathbf{Set}$ を基点付き集合の圏という. $\langle A, a \rangle, \langle B, b \rangle \in \mathbf{Set}_*$ に対して $A \times B$ の同値関係 \sim を

$$\langle u, v \rangle \sim \langle w, x \rangle \iff \begin{cases} (u = w \text{ かつ } v = x) \\ \text{または } (u, v \text{ のどちらかが基点, かつ } w, x \text{ のどちらかが基点}) \end{cases}$$

で定義し, $\langle A, a \rangle \wedge \langle B, b \rangle := \langle A \times B / \sim, [a, b] \rangle$ を $\langle A, a \rangle$ と $\langle B, b \rangle$ のスマッシュ積という. (ここで $\langle a, b \rangle$ が属する同値類を $[a, b]$ と書いた.)

命題 1. \mathbf{Set}_* はスマッシュ積により, 完備かつ余完備な対称モノイダル閉圏となる. \square

命題 2. 可換モノイドの圏 \mathbf{CMon} はテンソル積により, 完備かつ余完備な対称モノイダル閉圏となる. \square

定義. $f: a \rightarrow b$ が正則エピ射 (regular epimorphism)

\iff ある射 $g, h: x \rightarrow a$ が存在して

$$x \begin{array}{c} \xrightarrow{g} \\ \xrightarrow{h} \end{array} a \xrightarrow{f} b$$

が coequalizer となる.

明らかに正則エピ射はエピ射である.

命題 3. モノ射かつ正則エピ射ならば同型射である.

証明. $f: a \rightarrow b$ をモノ射かつ正則エピ射とする. f が $g, h: x \rightarrow a$ の coequalizer だとすると $f \circ g = f \circ h$ である.

$$x \begin{array}{c} \xrightarrow{g} \\ \xrightarrow{h} \end{array} a \xrightarrow{f} b$$

今 f がモノ射だから $g = h$ となる. すると f が g, h の coequalizer だから f は同型射でなければならない. \square

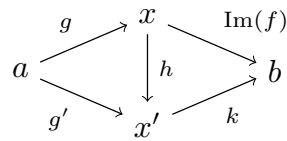
定義. 正則圏 (regular category) とは次の条件を満たす圏 C をいう:

- (1) C は有限完備である.
- (2) 正則エピ射の pullback は正則エピ射である.

(3) 任意の射 $f: a \rightarrow b$ の kernel pair は coequalizer を持つ.

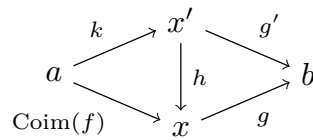
定義. C を圏とする. C の射 $f: a \rightarrow b$ の像 (image) とは, モノ射 $\text{Im}(f): x \rightarrow b$ であって次の条件を満たすものをいう:

- (1) ある射 $g: a \rightarrow x$ が存在して $f = \text{Im}(f) \circ g$ となる.
- (2) モノ射 $k: x' \rightarrow b$ と射 $g': a \rightarrow x'$ が存在して $f = k \circ g'$ となるならば, 射 $h: x \rightarrow x'$ が存在して $\text{Im}(f) = k \circ h$ となる*¹.



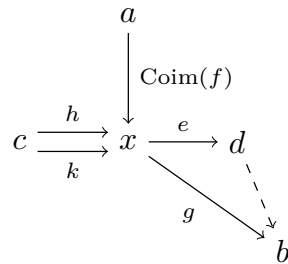
定義. C^{op} における像を余像 (coimage) という. 即ち $f: a \rightarrow b$ の余像とはエピ射 $\text{Coim}(f): a \rightarrow x$ であって

- (1) ある射 $g: x \rightarrow b$ が存在して $f = g \circ \text{Coim}(f)$ となる.
- (2) エピ射 $k: a \rightarrow x'$ と射 $g': x' \rightarrow b$ が存在して $f = g' \circ k$ となるならば, 射 $h: x' \rightarrow x$ が存在して $\text{Coim}(f) = h \circ k$ となる



命題 4. C が coequalizer を持つとする. 射 $f: a \rightarrow b$ が $f = (a \xrightarrow{\text{Coim}(f)} x \xrightarrow{g} b)$ と分解したとき, g はモノ射である.

証明. $h, k: c \rightarrow x$ が $g \circ h = g \circ k$ を満たすとする. $e: x \rightarrow d$ を h, k の coequalizer とすると次の図式を得る.



*¹ k がモノ射だから, このような h は一意であり, また $h \circ g = g'$ となる.

よってエピ射 $e \circ \text{Coim}(f)$ を使って $f = (a \xrightarrow{e \circ \text{Coim}(f)} d \rightarrow b)$ と分解できる. 故に $d \cong x$ を得る. 従って $h = k$ である. \square

2 零射

定義. $f: a \rightarrow b$ を圏 C の射とする.

- (1) f が定数射 \iff 任意の対象 $c \in C$ と射 $g, h: c \rightarrow a$ に対して $f \circ g = f \circ h$ となる.
- (2) f が余定数射 $\iff C^{\text{op}}$ において f が定数射.
- (3) f が零射 $\iff f$ が定数射かつ余定数射.

$f: a \rightarrow b, g: b \rightarrow c$ を射とする. 定義から明らかに, f か g のどちらか片方が定数射ならば $g \circ f$ も定数射である. 従って, f か g のどちらか片方が零射ならば $g \circ f$ も零射である.

定義. 圏 C が零射を持つ \iff 任意の対象 $a, b \in C$ に対して零射 $a \rightarrow b$ が存在する.

命題 5. 零射 $a \rightarrow b$ と零射 $b \rightarrow a$ が存在するとき, 零射 $a \rightarrow b$ は一意である.

証明. $f, g: a \rightarrow b, k: b \rightarrow a$ を零射として $f = g$ を示す. k が余定数射だから $f \circ k = g \circ k$ である. また f, g が定数射だから $f \circ \text{id}_a = f \circ (k \circ f)$ かつ $g \circ (k \circ f) = g \circ \text{id}_a$ である. 従って

$$f = f \circ \text{id}_a = f \circ k \circ f = g \circ k \circ f = g \circ \text{id}_a = g$$

である. \square

そこで圏 C が零射を持つとき, 一意に存在する零射 $a \rightarrow b$ を 0_{ab} もしくは単に 0 で表す.

命題 6. 圏 C に対して次の条件は同値である.

- (1) C が零射を持つ.
- (2) ある \mathbf{Set}_* -豊穡圏 C が存在して $U(C) = C$ となる.
- (3) 射の族 $\{0_{ab}: a \rightarrow b\}_{a, b \in C}$ が与えられ次を満たす: 任意の $f: c \rightarrow a$ と $g: b \rightarrow d$ に対して $g \circ 0_{ab} \circ f = 0_{cd}$ である.

証明. (1 \implies 2) $a, b \in C$ に対して, 0_{ab} を $\text{Hom}_C(a, b)$ の基点としたものを $\mathcal{C}(a, b)$ とする. このとき合成 $\text{Hom}_C(b, c) \times \text{Hom}_C(a, b) \rightarrow \text{Hom}_C(a, c)$ が与える写像 $\mathcal{C}(b, c) \wedge \mathcal{C}(a, b) \rightarrow$

$\mathcal{C}(a, c)$ は \mathbf{Set}_* の射である.

\therefore) $a \xrightarrow{f} b \xrightarrow{g} c$ で f か g のどちらかが基点のとき $g \circ f$ も基点となることを示せばよいがそれは零射の性質から成り立つ.

\mathbf{Set}_* -豊穡圏の他の性質も成り立つことが分かる.

(2 \implies 3) $a, b \in C$ に対して $\mathcal{C}(a, b)$ の基点を 0_{ab} と定める. C の合成が基点を保つから, $f: c \rightarrow a, g: b \rightarrow d$ に対して $g \circ 0_{ab} \circ f = 0_{cd}$ となる.

(3 \implies 1) $0_{ab}: a \rightarrow b$ が零射であること, 即ち定数射かつ余定数射であることを示す. 双対を考えればよいから余定数射であることを示せばよい. その為に $f, g: b \rightarrow c$ を射とすると

$$\begin{aligned} f \circ 0_{ab} &= f \circ 0_{ab} \circ \text{id}_a = 0_{ac} \\ g \circ 0_{ab} &= g \circ 0_{ab} \circ \text{id}_a = 0_{ac} \end{aligned}$$

だから $f \circ 0_{ab} = g \circ 0_{ab}$ である. □

3 零対象

零射を構成する方法としてよく知られているのが, 零対象を使う方法である.

定義. 対象 $a \in C$ が零対象 $\iff a$ が始対象かつ終対象

$a, b \in C$ を対象, $0 \in C$ を零対象とする. 0 は始対象であるから, 射 $i: 0 \rightarrow b$ が一意に存在する. また 0 は終対象でもあるから, 射 $p: a \rightarrow 0$ が一意に存在する. これらを使って $0_{ab} := (a \xrightarrow{p} 0 \xrightarrow{i} b)$ と定義する. 定義から明らかにこの 0_{ab} は零射である. 従って零射の一意性 (命題 5) により, この 0_{ab} は零対象の取り方によらず well-defined になっていることが分かる. 以上により次が成り立つ.

命題 7. 零対象を持つ圏は零射を持つ. □

従って命題 6 により零対象を持つ圏は \mathbf{Set}_* -豊穡圏とみなせる. 逆に \mathbf{Set}_* -豊穡圏においては, 零対象の定義は次のように言い換えられる.

命題 8. C を \mathbf{Set}_* -豊穡圏として $C := U(C)$ とする. このとき C の対象 x に対して次の条件は同値である.

(1) x は零対象である.

- (2) x は始対象である.
- (3) x は終対象である.
- (4) $\mathcal{C}(x, x) = 1$.
- (5) id_x は零射である.

証明. (2 \implies 4) x が始対象だから $\mathcal{C}(x, x) = 1$ である.

(4 \implies 5) 明らか.

(5 \implies 2) a を対象として $f, g: x \rightarrow a$ を射とすると, id_x が零射だから $f = f \circ \text{id}_x = g \circ \text{id}_x = g$ となる. 故に x は始対象である.

同様にして $3 \iff 4$ も分かり, 従って $1 \iff 2$ も分かる. □

4 双積

「直積かつ余直積」的なものが双積である.

定義. C を圏, $a, b \in C$ を対象とする. a と b の双積とは, 5 つ組 $\langle a \oplus b, i_0, i_1, p_0, p_1 \rangle$ であって以下の条件を満たすものである.*2

- (1) $a \oplus b$ は C の対象で, i_0, i_1, p_0, p_1 は次の図式のような射である.

$$a \begin{array}{c} \xleftarrow{i_0} \\ \xrightarrow{p_0} \end{array} a \oplus b \begin{array}{c} \xleftarrow{i_1} \\ \xrightarrow{p_1} \end{array} b$$

- (2) $\langle a \oplus b, i_0, i_1 \rangle$ は a と b の余直積であり, $\langle a \oplus b, p_0, p_1 \rangle$ は a と b の直積である.
- (3) $p_0 \circ i_0 = \text{id}_a$ である.
- (4) $p_1 \circ i_1 = \text{id}_b$ である.
- (5) $i_0 \circ p_0 \circ i_1 \circ p_1 = i_1 \circ p_1 \circ i_0 \circ p_0$ である.

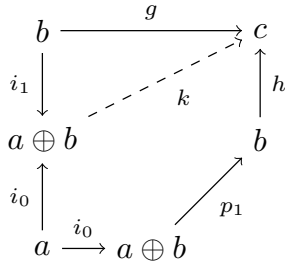
定義. 圏 C が双積を持つ \iff 任意の対象 $a, b \in C$ に対して双積が存在する.

命題 9. $\langle a \oplus b, i_0, i_1, p_0, p_1 \rangle$ を a と b の双積とするとき, $p_1 \circ i_0: a \rightarrow b$ は零射である.

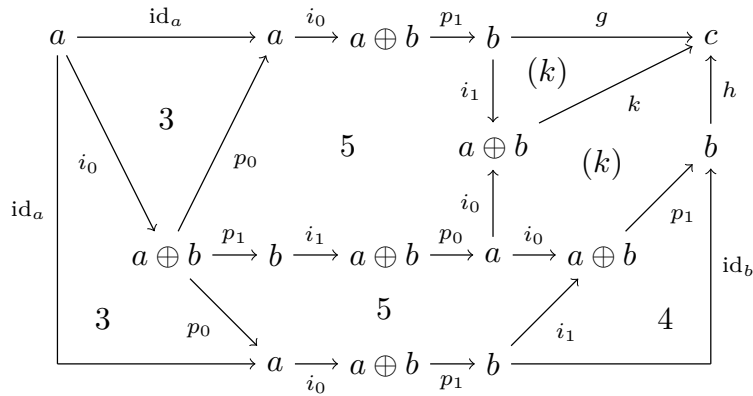
証明. 双対を考えればよいから, $p_1 \circ i_0$ が余定数射であることを示せばよい.

*2 この定義 [1] による. これは [2] 等に記載している定義と少し異なる. [2] の定義は C が **Ab**-豊穡圏であることを仮定しており, 通常の圏に対しては適用できない. 後で証明する命題 15 により, **Ab**-豊穡圏の場合はこれらの定義が一致することが分かる.

任意の対象 $c \in C$ と射 $g, h: b \rightarrow c$ を取る. $g \circ (p_1 \circ i_0) = h \circ (p_1 \circ i_0)$ を示す. まず余直積 $\langle a \oplus b, i_0, i_1 \rangle$ の普遍性により, 次の射 $k: a \oplus b \rightarrow c$ を得る.



次の図式が可換であることを示せばよい.



3, 4, 5 は双積の定義より可換である. また (k) は k の定義により可換である. 故にこの図式は可換である. □

系 10. 双積を持つ圏は零射を持つ. □

従って命題 6 より, 双積を持つ圏は \mathbf{Set}_* -豊穡圏とみなせる. またこの場合, 双積の条件は次のように言い換えられる.

命題 11. C を \mathbf{Set}_* -豊穡圏として $C := U(C)$ とする.

$$a \begin{array}{c} \xleftarrow{i_0} \\ \xrightarrow{p_0} \end{array} s \begin{array}{c} \xleftarrow{i_1} \\ \xrightarrow{p_1} \end{array} b$$

を C の図式とする. このとき $\langle s, i_0, i_1, p_0, p_1 \rangle$ が a と b の双積となる \iff 次の条件を満たす:

- (1) $\langle s, i_0, i_1 \rangle$ は a と b の余直積であり, $\langle s, p_0, p_1 \rangle$ は a と b の直積である.

- (2) $p_0 \circ i_0 = \text{id}_a$ である.
- (3) $p_1 \circ i_1 = \text{id}_b$ である.
- (4) $p_1 \circ i_0 = 0_{ab}$ である.
- (5) $p_0 \circ i_1 = 0_{ba}$ である.

証明. (\implies) 1 と 2 と 3 は双積の条件である. $p_1 \circ i_0$ と $p_0 \circ i_1$ は零射だから, 4 と 5 も成り立つ.

(\impliedby) 双積の条件 5 を示せばよいが, それは

$$i_0 \circ p_0 \circ i_1 \circ p_1 = 0_{ss} = i_1 \circ p_1 \circ i_0 \circ p_0$$

より成り立つ. □

双積だけでなく零対象もある場合, 更に **CMon-豊穡圏**にすることもできる.

命題 12. C を零対象と双積を持つ圏とする. C の射 $f, g: a \rightarrow b$ に対して余直積 $a \oplus a$ の普遍性から得られる射を $f \oplus g$ とする. (ここで $\langle a \oplus a, i_0, i_1, p_0, p_1 \rangle$ を a と a の双積, $\langle b \oplus b, j_0, j_1, q_0, q_1 \rangle$ を b と b の双積とする.)

$$\begin{array}{ccccc}
 a & \xrightarrow{i_0} & a \oplus a & \xleftarrow{i_1} & a \\
 f \downarrow & & \downarrow f \oplus g & & \downarrow g \\
 b & \xrightarrow{j_0} & b \oplus b & \xleftarrow{j_1} & b
 \end{array}$$

これを使って $f + g := (a \xrightarrow{\Delta} a \oplus a \xrightarrow{f \oplus g} b \oplus b \xrightarrow{\nabla} b)$ と定義する. この $+$ と零射により $\text{Hom}_C(a, b)$ は可換モノイドとなる.

証明. 略. □

定理 13. C を零対象と双積を持つ圏とする. このときある **CMon-豊穡圏** \mathcal{C} が存在して $U(\mathcal{C}) = C$ となる.

証明. 命題 12 により **CMon-豊穡圏**になっていることを示せばよい. □

CMon-豊穡圏においては, 双積の定義は次のように言い換えられる.

命題 14. C を **CMon-豊穡圏**として $C := U(\mathcal{C})$ とする.

$$a \begin{array}{c} \xrightarrow{i_0} \\ \xleftarrow{p_0} \end{array} s \begin{array}{c} \xleftarrow{i_1} \\ \xrightarrow{p_1} \end{array} b$$

を C の図式とする. このとき $\langle s, i_0, i_1, p_0, p_1 \rangle$ が a と b の双積となる \iff 次の条件を満たす:

- (1) $p_0 \circ i_0 = \text{id}_a$ である.
- (2) $p_1 \circ i_1 = \text{id}_b$ である.
- (3) $p_1 \circ i_0 = 0_{ab}$ である.
- (4) $p_0 \circ i_1 = 0_{ba}$ である.
- (5) $(i_0 \circ p_0) + (i_1 \circ p_1) = \text{id}_s$ である.

証明. (\implies) 1 と 2 は双積の条件である. 3 と 4 は命題 11 より成り立つ. よって 5 を示せばよい. まず次の図式が可換である.

$$\begin{array}{ccccc}
 a & \xrightarrow{i_0} & s & \xleftarrow{i_1} & b \\
 & & \downarrow & & \\
 & & (i_0 \circ p_0) + (i_1 \circ p_1) & & \\
 & & \downarrow & & \\
 & & s & & \\
 & \searrow^{i_0} & & \swarrow_{i_1} & \\
 & & s & &
 \end{array}$$

$\therefore ((i_0 \circ p_0) + (i_1 \circ p_1)) \circ i_0 = (i_0 \circ p_0 \circ i_0) + (i_1 \circ p_1 \circ i_0) = i_0 + 0_{as} = i_0$ より左側の三角は可換である. 右側も同様.

故に余直積 s の普遍性から $(i_0 \circ p_0) + (i_1 \circ p_1) = \text{id}_s$ が分かる.

(\impliedby) まず $\langle s, i_0, i_1 \rangle$ が余直積であることを示す. その為に任意の射 $f: a \rightarrow x$, $g: b \rightarrow x$ を取る. $h := (f \circ p_0) + (g \circ p_1)$ と定める. このとき次の図式は可換である.

$$\begin{array}{ccccc}
 a & \xrightarrow{i_0} & s & \xleftarrow{i_1} & b \\
 & \searrow f & \downarrow h & \swarrow g & \\
 & & x & &
 \end{array}$$

$\therefore h \circ i_0 = ((f \circ p_0) + (g \circ p_1)) \circ i_0 = (f \circ p_0 \circ i_0) + (g \circ p_1 \circ i_0) = f + 0_{ax} = f$ である. $h \circ i_1 = g$ も同様.

$h': s \rightarrow x$ が次の図式を可換にするとする.

$$\begin{array}{ccccc}
 a & \xrightarrow{i_0} & s & \xleftarrow{i_1} & b \\
 & \searrow f & \downarrow h' & \swarrow g & \\
 & & x & &
 \end{array}$$

このとき $h = h'$ である.

$\therefore h' = h' \circ ((i_0 \circ p_0) + (i_1 \circ p_1)) = (h' \circ i_0 \circ p_0) + (h' \circ i_1 \circ p_1) = (f \circ p_0) + (g \circ p_1) = h$ である.

故に $\langle s, i_0, i_1 \rangle$ は余直積である.

双対を考えれば $\langle s, p_0, p_1 \rangle$ が直積であることも分かる.

後は双積の条件 5 を示せばよいが, それは $i_0 \circ p_0 \circ i_1 \circ p_1 = 0_{ss} = i_1 \circ p_1 \circ i_0 \circ p_0$ より分かる. □

更に **Ab**-豊穡圏の場合は次のようになる.

命題 15. \mathcal{C} を **Ab**-豊穡圏として $C := U(\mathcal{C})$ とする.

$$a \begin{array}{c} \xleftarrow{i_0} \\ \xrightarrow{p_0} \end{array} s \begin{array}{c} \xleftarrow{i_1} \\ \xrightarrow{p_1} \end{array} b$$

を C の図式とする. このとき $\langle s, i_0, i_1, p_0, p_1 \rangle$ が a と b の双積となる \iff 次の条件を満たす:

- (1) $p_0 \circ i_0 = \text{id}_a$ である.
- (2) $p_1 \circ i_1 = \text{id}_b$ である.
- (3) $(i_0 \circ p_0) + (i_1 \circ p_1) = \text{id}_s$ である.

証明. (\implies) 命題 14 より明らか.

(\impliedby) 命題 14 の条件 3, 4 を示せばよい. どちらも同じなので 3 を示す.

$$\begin{aligned} p_1 \circ i_0 &= p_1 \circ \text{id}_s \circ i_0 \\ &= p_1 \circ ((i_0 \circ p_0) + (i_1 \circ p_1)) \circ i_0 \\ &= (p_1 \circ i_0 \circ p_0 \circ i_0) + (p_1 \circ i_1 \circ p_1 \circ i_0) \\ &= (p_1 \circ i_0) + (p_1 \circ i_0) \end{aligned}$$

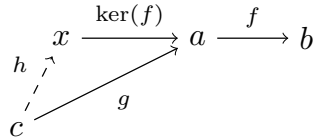
であり, 今 **Ab**-豊穡圏だから両辺から $p_1 \circ i_0$ を引いて $p_1 \circ i_0 = 0$ が分かる. □

5 核

定義. C を零射を持つ圏とする. $f: a \rightarrow b$ を C の射とするとき, f と 0_{ab} の equalizer を f の核 (kernel) という. 即ち, 核とは次の条件を満たす射 $\ker(f): x \rightarrow a$ のことである.

(1) $f \circ \ker(f) = 0_{xb}$ である.

(2) $g: c \rightarrow a$ が $f \circ g = 0_{cb}$ を満たすとき, $h: c \rightarrow x$ が一意に存在して $\ker(f) \circ h = g$ となる.

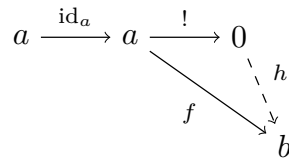


双対的に, f と 0_{ab} の coequalizer を f の余核 (cokernel) といい, $\text{coker}(f)$ で表す.

例 16. 零対象を持つ圏 C において, $\text{coker}(\text{id}_a)$ は存在し, それは一意的な射 $!: a \rightarrow 0$ である.

証明. 0 が終対象だから $! \circ \text{id}_a = 0_{a0}$ である.

$f: a \rightarrow b$ が $f \circ \text{id}_a = 0_{ab}$ を満たすとする. 即ち $f = 0_{ab}$ である.

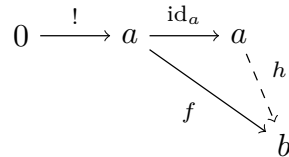


0 が始対象だから, 一意的な射 $h: 0 \rightarrow b$ が存在する. このとき $h \circ ! = 0_{ab} = f$ である. 明らかにこのような h は一意だから, $\text{coker}(\text{id}_a) = !$ が分かった. \square

例 17. 零対象を持つ圏 C において, 一意的な射 $!: 0 \rightarrow a$ の余核は存在し, それらは id_a である.

証明. 0 が始対象だから $\text{id}_a \circ ! = 0_{0a}$ である.

$f: a \rightarrow b$ が $f \circ ! = 0_{0b}$ を満たすとする.



このとき明らかに $h = f$ が図式を可換にする一意な射であるから, $\text{coker}(!) = \text{id}_a$ である. \square

双対を考えれば $\ker(\text{id}) = !$, $\ker(!) = \text{id}$ も分かる.

命題 18. $a \xrightarrow{f} b \xrightarrow{g} c$ で f はエピ射とする. このとき「 g の余核が存在する $\iff g \circ f$ の余核が存在する」であり, これらは一致する (即ち $\text{coker}(g) = \text{coker}(g \circ f)$ である).

証明. (\implies) $\text{coker}(g): c \rightarrow x$ が存在するとして, これが $g \circ f$ の余核であることを示す. まず明らかに $\text{coker}(g) \circ (g \circ f) = 0_{ax}$ である. 普遍性を示すため, $k: c \rightarrow d$ が $k \circ (g \circ f) = 0_{ad}$ を満たすとする.

$$\begin{array}{ccccccc}
 a & \xrightarrow{f} & b & \xrightarrow{g} & c & \xrightarrow{\text{coker}(g)} & x \\
 & & & & & \searrow k & \downarrow h \\
 & & & & & & d
 \end{array}$$

このとき $k \circ g \circ f = 0_{ad} = 0_{bd} \circ f$ で f がエピ射だから $k \circ g = 0_{bd}$ である. 故に $\text{coker}(g)$ の普遍性から $h: x \rightarrow d$ が存在して図式が可換となる. $\text{coker}(g)$ はエピ射だから, このような h は明らかに一意である. 故に $\text{coker}(g)$ が $g \circ f$ の余核になることが分かった.

(\impliedby) $\text{coker}(g \circ f): c \rightarrow x$ が存在するとして, これが g の余核であることを示す. まず $\text{coker}(g \circ f) \circ g = 0_{bx}$ である.

$\therefore \text{coker}(g \circ f) \circ g \circ f = 0_{ax} = 0_{bx} \circ f$ で f がエピ射だから $\text{coker}(g \circ f) \circ g = 0_{bx}$ となる.

普遍性を示すため, $k: c \rightarrow d$ が $k \circ g = 0_{bd}$ を満たすとする.

$$\begin{array}{ccccccc}
 a & \xrightarrow{f} & b & \xrightarrow{g} & c & \xrightarrow{\text{coker}(g \circ f)} & x \\
 & & & & & \searrow k & \downarrow h \\
 & & & & & & d
 \end{array}$$

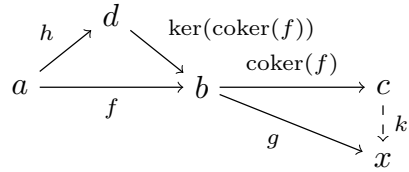
すると $k \circ g \circ f = 0_{ad}$ だから $\text{coker}(g \circ f)$ の普遍性により $h: x \rightarrow d$ が存在して図式が可換となる. $\text{coker}(g \circ f)$ はエピ射だから, このような h は明らかに一意である. 故に $\text{coker}(g \circ f)$ が g の余核になることが分かった. \square

命題 19. $f: a \rightarrow b$ の余核 $\text{coker}(f): b \rightarrow c$ が存在し, 更にその核 $\ker(\text{coker}(f)): d \rightarrow b$ が存在するとする. このとき $\text{coker}(\ker(\text{coker}(f))) = \text{coker}(f)$ となる.

証明. まず $\text{coker}(f) \circ f = 0$ だから, $\ker(\text{coker}(f))$ の普遍性により次の h を得る.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & d & & \\
 & \nearrow h & \searrow \ker(\text{coker}(f)) & & \\
 a & \xrightarrow{f} & b & \xrightarrow{\text{coker}(f)} & c
 \end{array}$$

$\text{coker}(f)$ が $\ker(\text{coker}(f))$ の余核であることを示すため、 $g: b \rightarrow x$ が $g \circ \ker(\text{coker}(f)) = 0$ を満たすとする。



すると $g \circ f = g \circ \ker(\text{coker}(f)) \circ h = 0$ だから余核 $\text{coker}(f)$ の普遍性により $k: c \rightarrow x$ が存在し可換となる。 $\text{coker}(f)$ の普遍性からこのような k は明らかに一意なので、 $\text{coker}(\ker(\text{coker}(f))) = \text{coker}(f)$ が分かる。 \square

定義. C を零対象を持つ圏とする。 C の射 f が正規モノ射 (normal monomorphism) \iff ある射 g により $f = \ker(g)$ と書ける。

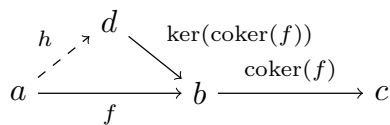
正規モノ射はモノ射である。

定義. 零対象を持つ圏 C が正規圏 (normal category) $\iff C$ の任意のモノ射が正規モノ射である。

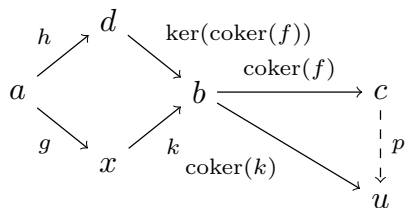
双対的に C^{op} での正規モノ射を正規エピ射といい、 C^{op} が正規圏であるとき C を余正規圏という。

命題 20. C を余核を持つ正規圏とする。射 f に対して、 $\ker(\text{coker}(f))$ が存在するならば $\ker(\text{coker}(f)) = \text{Im}(f)$ である。

証明. まず $\text{coker}(f) \circ f = 0$ だから、 $\ker(\text{coker}(f))$ の普遍性により次の h を得る。



$\ker(\text{coker}(f)) = \text{Im}(f)$ を示すため、モノ射 $k: x \rightarrow b$ を使って $f = (a \xrightarrow{g} x \xrightarrow{k} b)$ と書けたとする。 k の余核を取る。



$\text{coker}(k) \circ f = \text{coker}(k) \circ k \circ g = 0$ だから, $\text{coker}(f)$ の普遍性により $p: c \rightarrow u$ を得る. このとき $\text{coker}(k) \circ \ker(\text{coker}(f)) = 0$ で, 今正規圏だから $k = \ker(\text{coker}(k))$ の普遍性により $d \rightarrow x$ が存在する. \square

6 アーベル圏

定義. 次の条件を満たす圏 C をアーベル圏 (abelian category) という.

- (1) C は零対象を持つ.
- (2) C は直積と余直積を持つ.
- (3) C は核と余核を持つ.
- (4) C は正規かつ余正規である.

以下, この節では C をアーベル圏とする.

命題 21. 任意のエピ射 $f \in C$ に対して $\text{coker}(\ker(f)) = f$ である.

証明. 今 C が余正規だからエピ射 f はある射 g を使って $f = \text{coker}(g)$ と書ける. 故に命題 19 より $\text{coker}(\ker(f)) = \text{coker}(\ker(\text{coker}(g))) = \text{coker}(g) = f$ である. \square

命題 22. $f \in C$ がモノ射かつエピ射ならば同型射である.

証明. C が余正規だから, エピ射は正規エピ射, 従って正則エピ射である. 故に命題 3 から従う. \square

補題 23. $f: a \rightarrow b, g: a \rightarrow c$ がエピ射ならば f と g の pushout が存在する.

証明. f, g の核を $\ker(f): s \rightarrow a, \ker(g): t \rightarrow a$ とする. 余直積 $\langle s \amalg t, i_0, i_1 \rangle$ の普遍性により次の点線の射 h が存在し可換となる.

$$\begin{array}{ccccc}
 s & & \text{ker}(f) & & c \\
 & \searrow & & \nearrow & \\
 & i_0 & & g & \\
 & & s \amalg t & \xrightarrow{h} & a \\
 & & i_1 & & \\
 t & \nearrow & & \searrow & b \\
 & \text{ker}(g) & & f &
 \end{array}$$

この h の余核 $\text{coker}(h): a \rightarrow x$ を取る.

$$\begin{array}{c}
 s \\
 \searrow^{i_0} \\
 s \amalg t \xrightarrow{h} a \\
 \searrow^f \\
 b
 \end{array}
 =
 \begin{array}{c}
 s \xrightarrow{\text{ker}(f)} a \\
 \searrow^f \\
 b
 \end{array}
 = 0$$

であり, f がエビ射だから $f = \text{coker}(\text{ker}(f))$ となるのでその普遍性により $u_0: b \rightarrow x$ が存在して $u_0 \circ f = \text{coker}(h)$ となる. 同様に u_1 を取る.

$$\begin{array}{ccccc}
 s & & \text{ker}(f) & & c \\
 \searrow^{i_0} & & \searrow & & \nearrow^{u_1} \\
 s \amalg t & \xrightarrow{h} & a & \xrightarrow{\text{coker}(h)} & x \\
 \nearrow^{i_1} & & \searrow^f & & \nearrow^{u_0} \\
 t & & \text{ker}(g) & & b
 \end{array}$$

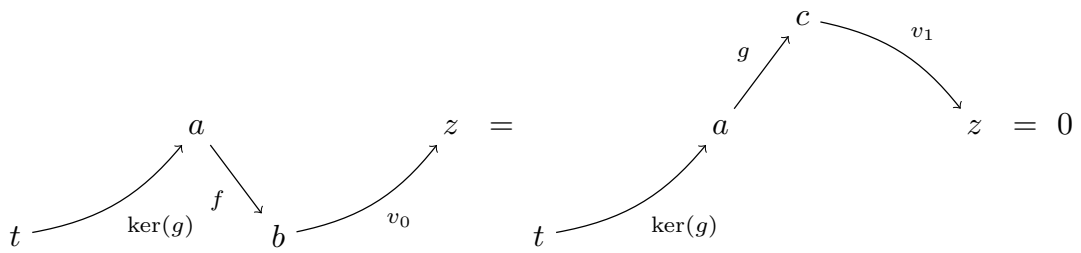
$\langle x, u_0, u_1 \rangle$ が f, g の pushout であることを示せばよい. その為に v_0, v_1 を $v_0 \circ f = v_1 \circ g$ を満たすように取る.

$$\begin{array}{ccccc}
 s & & \text{ker}(f) & & c \\
 \searrow^{i_0} & & \searrow & & \nearrow^{v_1} \\
 s \amalg t & \xrightarrow{h} & a & \xrightarrow{\text{coker}(h)} & x \\
 \nearrow^{i_1} & & \searrow^f & & \nearrow^{u_0} \\
 t & & \text{ker}(g) & & b
 \end{array}
 \xrightarrow{v_0} z$$

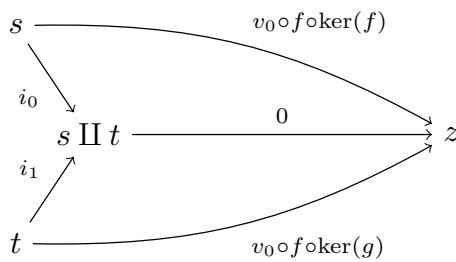
$v_0 \circ f \circ h = 0$ である.

∴)

$$\begin{array}{c}
 s \xrightarrow{\text{ker}(f)} a \\
 \searrow^f \\
 b \xrightarrow{v_0} z = 0
 \end{array}$$

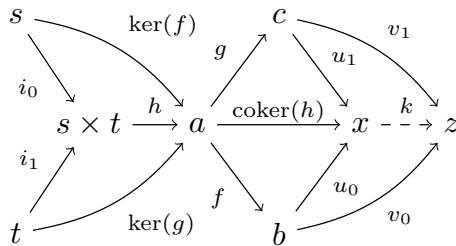


だから次の図式は可換である。

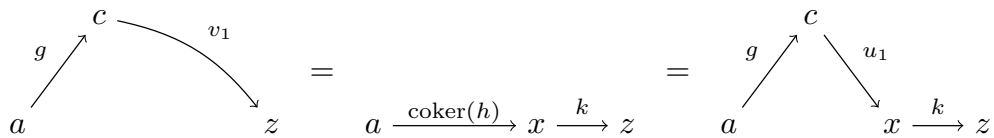


故に $s \amalg t$ の普遍性から $v_0 \circ f \circ h = 0$ が分かる。

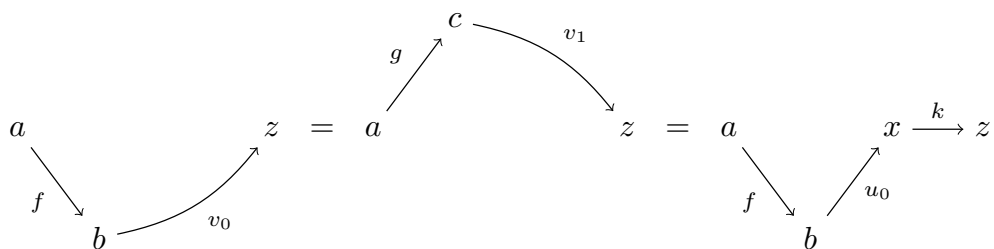
よって $\text{coker}(h)$ の普遍性により $k: x \rightarrow z$ が存在して $k \circ \text{coker}(h) = v_0 \circ f$ となる。



k の一意性は $\text{coker}(h)$ がエピ射であることから明らかなので、右側の二つの三角形が可換であることを示せばよい。まず k の取り方から



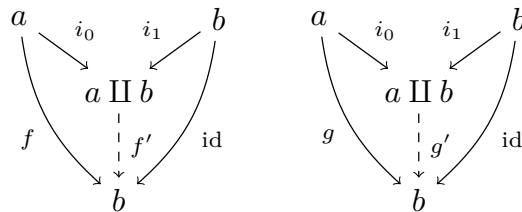
となり、 g がエピ射だから $k \circ u_1 = v_1$ が分かる。従って



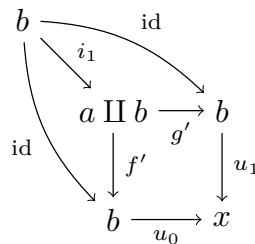
となり f がエピ射だから $k \circ u_0 = v_0$ である。 □

定理 24. アーベル圏は有限完備かつ有限余完備である。

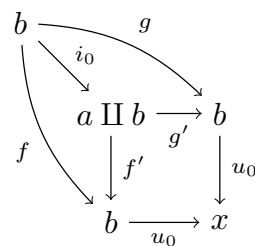
証明. 双対を考えればよいから有限余完備であることを示せばよいが、有限余直積は定義から存在するので coequalizer が存在することを示せばよい。 $f, g: a \rightarrow b$ とする。余直積 $a \amalg b$ の普遍性により得られる次の点線の射を f', g' とする。



$f' \circ i_1 = \text{id}$, $g' \circ i_1 = \text{id}$ だから f', g' はエピ射である。よって f', g' の pushout $\langle x, u_0, u_1 \rangle$ が存在する。定義より

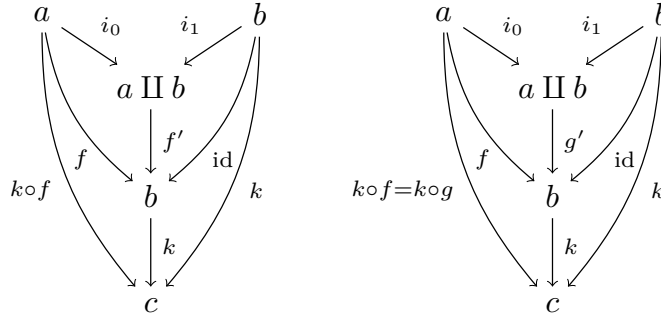


が可換であるから $u_0 = u_1$ である。よって

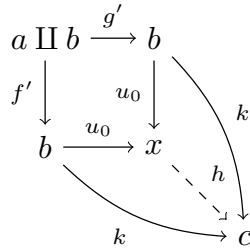


が可換となる。 u_0 が f, g の coequalizer であることを示せばよい。その為に $k: b \rightarrow c$ が

$k \circ f = k \circ g$ を満たすとする. このとき次の図式が可換だから $k \circ f' = k \circ g'$ である.



よって pushout の普遍性から点線の射 h が存在して可換となる.



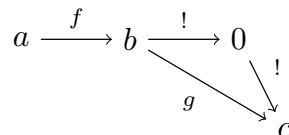
pushout の普遍性からこのような h の一意性も明らかだから, u_0 が f, g の coequalizer である. □

命題 25. C の射 $f: a \rightarrow b$ に対して次の条件は同値である.

- (1) f はエピ射である.
- (2) $g: b \rightarrow c$ が $g \circ f = 0$ を満たすならば $g = 0$ である.
- (3) 一意な射 $!: b \rightarrow 0$ が f の余核である.

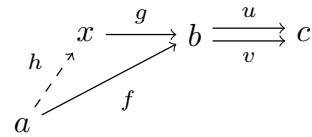
証明. (1 \implies 2) $g \circ f = 0$ とすると $g \circ f = 0 = 0 \circ f$ で f がエピ射だから $g = 0$ である.

(2 \implies 3) まず明らかに $! \circ f = 0$ である. 次に $g \circ f = 0$ とする. 条件 2 より $g = 0$ だから次の図式は可換である.

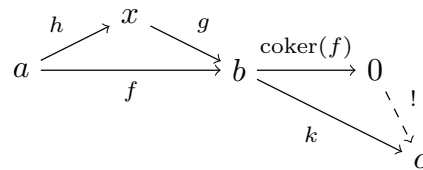


このような $0 \rightarrow c$ はもちろん一意なので $\text{coker}(f) = !$ が分かった.

(3 \implies 1) 射 $u, v: b \rightarrow c$ が $u \circ f = v \circ f$ を満たすとする. u, v の equalizer を $g: x \rightarrow b$ とすると普遍性により $h: a \rightarrow x$ が存在して $g \circ h = f$ となる.

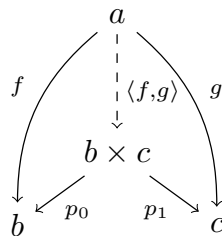


g は equalizer だからモノ射で, 今 C が正規だから, ある $k: b \rightarrow d$ により $g = \ker(k)$ と書ける.

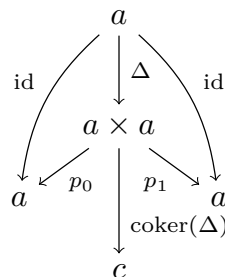


すると $k \circ f = k \circ g \circ h = 0$ だから, 余核 $\text{coker}(f)$ の普遍性により $! \circ \text{coker}(f) = k$ となる. 故に k は零射であり, $g = \ker(k)$ は同型となる. 従って $u = v$ である. \square

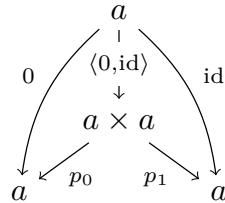
$f: a \rightarrow b, g: a \rightarrow c$ に対して, 直積 $\langle b \times c, p_0, p_1 \rangle$ の普遍性により定まる点線の射を以下では $\langle f, g \rangle$ と書く.



補題 26. $a \in C$ の対角射 $\Delta := \langle \text{id}, \text{id} \rangle: a \rightarrow a \times a$ の余核を $\text{coker}(\Delta): a \times a \rightarrow c$ とするとき $a \cong c$ である.

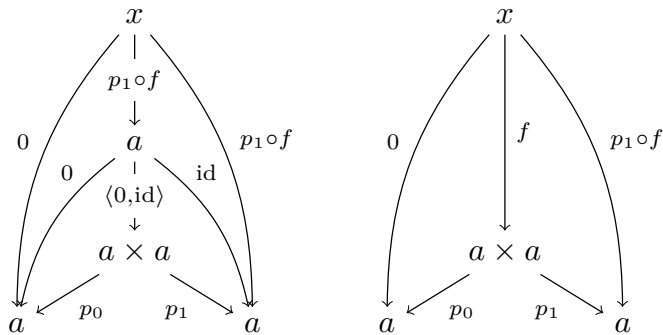


証明. $\langle 0, \text{id} \rangle$ を考える. $p_1 \circ \langle 0, \text{id} \rangle = \text{id}$ だから $\langle 0, \text{id} \rangle$ はモノ射で p_1 はエピ射である.



このとき $\langle 0, \text{id} \rangle = \ker(p_0)$ である.

$\therefore f: x \rightarrow a \times a$ が $p_0 \circ f = 0$ を満たすとする. このとき次の図式が可換であるから, 普遍性により $\langle 0, \text{id} \rangle \circ (p_1 \circ f) = f$ である.



$\langle 0, \text{id} \rangle$ がモノ射だから, $\langle 0, \text{id} \rangle \circ h = f$ となるような h は一意である. 故に $\langle 0, \text{id} \rangle = \ker(p_0)$ が分かる.

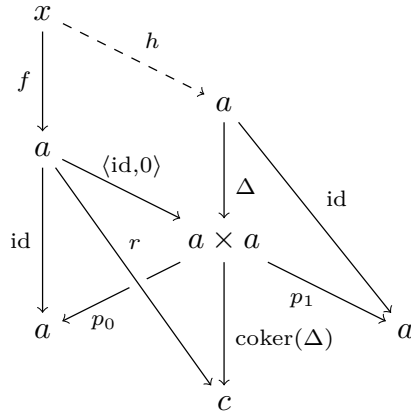
よって $p_0 = \text{coker}(\ker(p_0)) = \text{coker}(\langle 0, \text{id} \rangle)$ である.

同様にして $\langle \text{id}, 0 \rangle = \ker(p_1)$, $p_1 = \text{coker}(\langle \text{id}, 0 \rangle)$ が分かる.

$r := \text{coker}(\Delta) \circ \langle \text{id}, 0 \rangle: a \rightarrow c$ が同型であることを示せばよい. その為には r がモノ射かつエピ射であることを示せばよい.

まず r がモノ射であることを示すため, $r \circ f = 0$ とする. 次の図式の実線部分は可換

である.



$\text{coker}(\Delta) \circ \langle \text{id}, 0 \rangle \circ f = r \circ f = 0$ であるから, 核 $\Delta = \ker(\text{coker}(\Delta))$ の普遍性により点線の射 h が存在し可換である. このとき

$$h = \begin{array}{c} x \\ \searrow h \\ a \\ \searrow \text{id} \\ a \end{array} = \begin{array}{c} x \\ \downarrow f \\ a \\ \searrow \langle \text{id}, 0 \rangle \\ a \times a \\ \searrow p_1 \\ a \end{array} = 0$$

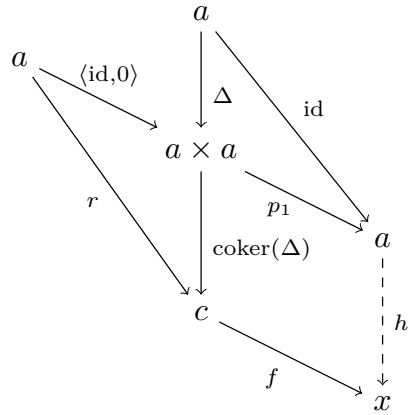
である. 故に

$$f = \begin{array}{c} x \\ \downarrow f \\ a \\ \downarrow \text{id} \\ a \end{array} = \begin{array}{c} x \\ \searrow h (=0) \\ a \\ \downarrow \Delta \\ a \times a \\ \swarrow p_0 \\ a \end{array} = 0$$

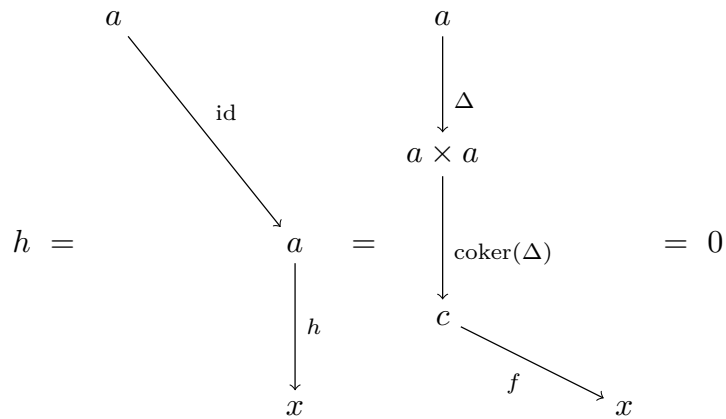
である.

後は r がエピ射であることを示すため $f \circ r = 0$ とする. 次の図式の実線部分は可換で

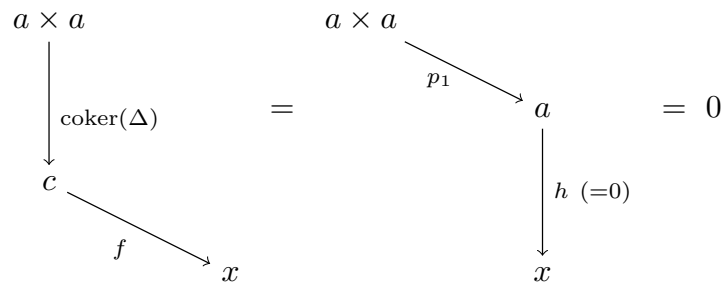
ある.



$f \circ \text{coker}(\Delta) \circ \langle \text{id}, 0 \rangle = f \circ r = 0$ であるから, 余核 $\text{coker}(\Delta)$ の普遍性により点線の射 h が存在し可換である. このとき



である. よって



となるが, $\text{coker}(\Delta)$ はエピ射だから $f = 0$ である. □

よって Δ の余核として $r^{-1} \circ \text{coker}(\Delta)$ を考えることで, 初めから $\text{coker}(\Delta): a \times a \rightarrow a$ かつ $\text{coker}(\Delta) \circ \langle \text{id}, 0 \rangle = \text{id}$ としてよい. 以下そのようにしておく.

補題 27. $f: a \rightarrow b$ に対して次の図式は可換である.

$$\begin{array}{ccc} a \times a & \xrightarrow{f \times f} & b \times b \\ \text{coker}(\Delta) \downarrow & & \downarrow \text{coker}(\Delta) \\ a & \xrightarrow{f} & b \end{array}$$

証明. 余核の普遍性により次の点線の射 g が存在し可換となる.

$$\begin{array}{ccc} a \times a & \xrightarrow{f \times f} & b \times b \\ \text{coker}(\Delta) \downarrow & & \downarrow \text{coker}(\Delta) \\ a & \xrightarrow{\quad g \quad} & b \end{array}$$

$f = g$ を示せばよい. まず次の図式が可換だから, $b \times b$ の普遍性により $(f \times f) \circ \langle \text{id}, 0 \rangle = \langle \text{id}, 0 \rangle \circ f$ である.

$$\begin{array}{ccc} a & & a \\ \downarrow f & & \downarrow f \\ a \times a & \xrightarrow{f \times f} & b \times b \\ \downarrow \langle \text{id}, 0 \rangle & & \downarrow \langle \text{id}, 0 \rangle \\ b & \xrightarrow{f} & b \end{array}$$

よって次の図式が可換である.

$$\begin{array}{ccc} a & \xrightarrow{f} & b \\ \langle \text{id}, 0 \rangle \downarrow & & \downarrow \langle \text{id}, 0 \rangle \\ a \times a & \xrightarrow{f \times f} & b \times b \\ \text{coker}(\Delta) \downarrow & & \downarrow \text{coker}(\Delta) \\ a & \xrightarrow{g} & b \end{array}$$

今 $\text{coker}(\Delta) \circ \langle \text{id}, 0 \rangle = \text{id}$ だったから $f = g$ が分かる. □

$f, g: a \rightarrow b$ に対して $f - g := \text{coker}(\Delta) \circ \langle f, g \rangle: a \rightarrow b$ と定める.

補題 28. $f, g, h, k \in \text{Hom}_C(a, b)$ に対して次の等式が成り立つ.

- (1) $(f - g) - (h - k) = (f - h) - (g - k)$.
- (2) $f - 0 = f$.
- (3) $f - f = 0$.
- (4) $0 - (0 - f) = f$.

証明. (1) 射影 $p_i: b \times b \rightarrow b$ に補題 27 を適用して次の可換図式を得る.

$$\begin{array}{ccc} (b \times b) \times (b \times b) & \xrightarrow{p_i \times p_i} & b \times b \\ \text{coker}(\Delta) \downarrow & & \downarrow \text{coker}(\Delta) \\ b \times b & \xrightarrow{p_i} & b \end{array}$$

これを使って次の可換図式を得る.

$$\begin{array}{ccccc} & & \langle f, h \rangle & & \\ & & \downarrow & & \\ a & \xrightarrow{\langle \langle f, g \rangle, \langle h, k \rangle \rangle} & (b \times b) \times (b \times b) & \xrightarrow{p_0 \times p_0} & b \times b \\ & \searrow \langle f, g \rangle - \langle h, k \rangle & \downarrow \text{coker}(\Delta) & & \downarrow \text{coker}(\Delta) \\ & & b \times b & \xrightarrow{p_0} & b \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} & & \langle g, k \rangle & & \\ & & \downarrow & & \\ a & \xrightarrow{\langle \langle f, g \rangle, \langle h, k \rangle \rangle} & (b \times b) \times (b \times b) & \xrightarrow{p_1 \times p_1} & b \times b \\ & \searrow \langle f, g \rangle - \langle h, k \rangle & \downarrow \text{coker}(\Delta) & & \downarrow \text{coker}(\Delta) \\ & & b \times b & \xrightarrow{p_1} & b \end{array}$$

故に $\langle f, g \rangle - \langle h, k \rangle = \langle f - h, g - k \rangle$ が分かる.

次に $\text{coker}(\Delta)$ に補題 27 を適用して可換図式

$$\begin{array}{ccc} (b \times b) \times (b \times b) & \xrightarrow{\text{coker}(\Delta) \times \text{coker}(\Delta)} & b \times b \\ \text{coker}(\Delta) \downarrow & & \downarrow \text{coker}(\Delta) \\ b \times b & \xrightarrow{\text{coker}(\Delta)} & b \end{array}$$

を得る. よって

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \langle f-g, h-k \rangle & & \\
 & & \downarrow & & \\
 a & \xrightarrow{\langle \langle f, g \rangle, \langle h, k \rangle \rangle} & (b \times b) \times (b \times b) & \xrightarrow{\text{coker}(\Delta) \times \text{coker}(\Delta)} & b \times b \\
 & \searrow \langle f, g \rangle - \langle h, k \rangle & \downarrow \text{coker}(\Delta) & & \downarrow \text{coker}(\Delta) \\
 & & b \times b & \xrightarrow{\text{coker}(\Delta)} & b
 \end{array}$$

が可換であるから $(f - g) - (h - k) = (f - h) - (g - k)$ が分かる.

(2) $\text{coker}(\Delta) \circ \langle \text{id}, 0 \rangle = \text{id}$ だから明らか.

(3) $\langle f, f \rangle = \Delta \circ f$ だから $f - f := \langle f, f \rangle \circ \text{coker}(\Delta) = \text{coker}(\Delta) \circ \Delta \circ f = 0$ となる.

$$\begin{array}{c}
 a \\
 \downarrow f \\
 b \\
 \downarrow \Delta \\
 b \times b \\
 \swarrow p_0 \quad \searrow p_1 \\
 b \qquad b \\
 \downarrow \text{coker}(\Delta) \\
 b
 \end{array}$$

(4)

$$\begin{aligned}
 0 - (0 - f) &= (f - f) - (0 - f) && (3 \text{ より}) \\
 &= (f - 0) - (f - f) && (1 \text{ より}) \\
 &= f - 0 && (2, 3 \text{ より}) \\
 &= f && (2 \text{ より})
 \end{aligned}$$

□

定理 29. C をアーベル圏とすると, ある **Ab**-豊穡圏 \mathcal{C} が存在して $U(\mathcal{C}) = C$ となる.

証明. $a, b \in C$ とする. $f, g \in \text{Hom}_C(a, b)$ に対して $f + g := f - (0 - g)$ と定義すると $\text{Hom}_C(a, b)$ はアーベル群となる.

$\therefore f, g, h \in \text{Hom}_C(a, b)$ に対して

$$\begin{aligned}
 (f + g) + h &= (f - (0 - g)) - (0 - h) && \text{(定義より)} \\
 &= (f - 0) - ((0 - g) - h) && \text{(補題 28 の 1 より)} \\
 &= f - ((0 - g) - (0 - (0 - h))) && \text{(補題 28 の 2, 4 より)} \\
 &= f - ((0 - 0) - (g - (0 - h))) && \text{(補題 28 の 1 より)} \\
 &= f - (0 - (g + h)) && \text{(補題 28 の 2 と定義より)} \\
 &= f + (g + h). && \text{(定義より)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f + g &= f - (0 - g) && \text{(定義より)} \\
 &= (0 - (0 - f)) - ((0 - g) - 0) && \text{(補題 28 の 4, 2 より)} \\
 &= (0 - (0 - g)) - ((0 - f) - 0) && \text{(補題 28 の 1 より)} \\
 &= g - (0 - f) && \text{(補題 28 の 4, 2 より)} \\
 &= g + f. && \text{(定義より)}
 \end{aligned}$$

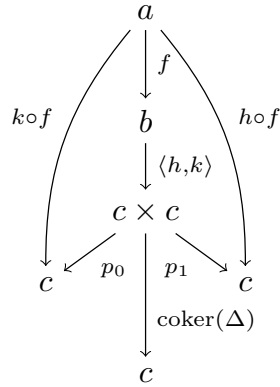
$$\begin{aligned}
 f + 0 &= f - (0 - 0) && \text{(定義より)} \\
 &= f. && \text{(補題 28 の 2 より)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f + (0 - f) &= f - (0 - (0 - f)) && \text{(定義より)} \\
 &= f - f && \text{(補題 28 の 4 より)} \\
 &= 0. && \text{(補題 28 の 3 より)}
 \end{aligned}$$

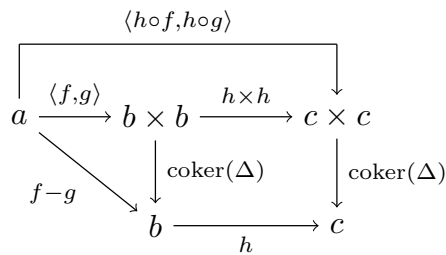
だから $\text{Hom}_C(a, b)$ はアーベル群である.

このとき合成が与える写像 $\text{Hom}_C(a, c) \times \text{Hom}_C(a, b) \rightarrow \text{Hom}_C(a, c)$ が成分ごとに準同型であることを示せばよい. $f, g: a \rightarrow b, h, k: b \rightarrow c$ とする. まず $\langle h, k \rangle \circ f = \langle h \circ f, k \circ f \rangle$

だから $(h - k) \circ f = (h \circ f) - (k \circ f)$ が分かる.



次に h に補題 27 を適用すれば



が可換となるから $h \circ (f - g) = (h \circ f) - (h \circ g)$ が分かる. □

7 弱完全圏

以降の内容は [3] を参考にした.

定義. 零対象を持つ圏 C が弱完全圏 (weakly exact category) とは, 次の条件を満たす集まり $D \subset \text{Mor}(C)$ が与えられていることをいう:

- (1) D は同型射と一意な射 $! : a \rightarrow 0$ を全て含む.
- (2) 任意の $f \in D$ は核 $\ker(f)$ を持ち, また f が $\ker(f)$ の余核になる.
- (3) D は合成で閉じている.
- (4) $a \xrightarrow{f} b \xrightarrow{g} c$ で $f, g \circ f \in D$ ならば $g \in D$ である.
- (5) (9 項補題 (上)) $p \in D$ で $i = \ker(p)$ のとき, 図式 $a \xrightarrow{i} b \xrightarrow{p} c$ は短完全列であるという. 次の可換図式で縦列が全て短完全列のとき, 中央と下の横列が短完全列なら

ば上の横列も短完全列となる.

$$\begin{array}{ccccc}
 a_0 & \longrightarrow & a_1 & \longrightarrow & a_2 \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 b_0 & \longrightarrow & b_1 & \longrightarrow & b_2 \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 c_0 & \longrightarrow & c_1 & \longrightarrow & c_2
 \end{array}$$

また D の元を deflation と呼び, deflation の核となる射を inflation と呼ぶ.

以下, 弱完全圏 C とその deflation の集まり D が与えられているものとする. また inflation を赤色の矢印, deflation を緑色の矢印で表すことにする. 例えば短完全列は $a \xrightarrow{i} b \xrightarrow{p} c$ のようになる.

定義より inflation は正規モノ射で deflation は正規エピ射である.

命題 30 (9 項補題 (下)). 次の可換図式で縦列が全て短完全列のとき, 上と中央の横列が短完全列ならば下の縦列も短完全列となる.

$$\begin{array}{ccccc}
 a_0 & \xrightarrow{u_0} & a_1 & \xrightarrow{u_1} & a_2 \\
 f_0 \downarrow & & \downarrow f_1 & & \downarrow f_2 \\
 b_0 & \xrightarrow{v_0} & b_1 & \xrightarrow{v_1} & b_2 \\
 g_0 \downarrow & & \downarrow g_1 & & \downarrow g_2 \\
 c_0 & \xrightarrow{w_0} & c_1 & \xrightarrow{w_1} & c_2
 \end{array}$$

証明. v_1, g_2 が deflation だから条件 3 より $g_2 \circ v_1 = w_1 \circ g_1$ も deflation である. 故に条件 4 より w_1 は deflation である. よって核 $\ker(w_1): c'_0 \rightarrow c_1$ が存在する.

$$\begin{array}{ccc}
 b_0 \xrightarrow{v_0} b_1 & & b_0 \xrightarrow{v_0} b_1 \xrightarrow{v_1} b_2 \\
 \downarrow g_1 & = & \downarrow g_2 \\
 c_1 \xrightarrow{w_1} c_2 & & c_2 \\
 & & = 0_{b_0 c_2}
 \end{array}$$

だから、 $\ker(w_1)$ の普遍性により、 $h: b_0 \rightarrow c'_0$ が存在し可換となる。

$$\begin{array}{ccccc}
 a_0 & \xrightarrow{u_0} & a_1 & \xrightarrow{u_1} & a_2 \\
 f_0 \downarrow & & \downarrow f_1 & & \downarrow f_2 \\
 b_0 & \xrightarrow{v_0} & b_1 & \xrightarrow{v_1} & b_2 \\
 h \downarrow & & \downarrow g_1 & & \downarrow g_2 \\
 c'_0 & \xrightarrow{\ker(w_1)} & c_1 & \xrightarrow{w_1} & c_2
 \end{array}$$

故に 9 項補題により左の縦列が短完全列であることが分かる。すると g_0 と h の両方が f_0 の余核となるから、同型 $k: c_0 \rightarrow c'_0$ が存在し $k \circ g_0 = h$ となる。

$$\begin{array}{ccc}
 & a_0 & \\
 & \downarrow f_0 & \\
 & b_0 & \xrightarrow{v_0} b_1 \\
 & \downarrow h & \downarrow g_1 \\
 & c'_0 & \xrightarrow{\ker(w_1)} c_1 \\
 g_0 \swarrow & & \nearrow w_0 \\
 c_0 & &
 \end{array}$$

このとき $\ker(w_1) \circ k = w_0$ である。

∴)

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{ccc}
 & b_0 & \\
 & \downarrow g_0 & \\
 c_0 & &
 \end{array}
 \xrightarrow{w_0}
 \begin{array}{ccc}
 b_0 & \xrightarrow{v_0} & b_1 \\
 \downarrow g_1 & & \\
 c_1 & &
 \end{array}
 =
 \begin{array}{ccc}
 b_0 & \downarrow h & \\
 c'_0 & \xrightarrow{\ker(w_1)} & c_1
 \end{array}
 =
 \begin{array}{ccc}
 & b_0 & \\
 & \downarrow g_0 & \\
 c_0 & &
 \end{array}
 \xrightarrow{\ker(w_1)}
 \begin{array}{ccc}
 & c'_0 & \\
 & \downarrow k & \\
 & c_1 &
 \end{array}
 \end{array}$$

であり、 g_0 が deflation 即ちエビ射だから $w_1 = \ker(w_1) \circ k$ が分かる。

k が同型射だったから w_0 が w_1 の核になることが分かり $c_0 \xrightarrow{w_0} c_1 \xrightarrow{w_1} c_2$ は短完全列である。□

命題 31. $a \xrightarrow{f} b \xrightarrow{g} c$ で g と $g \circ f$ が inflation ならば f も inflation である。

証明. 次の実線の可換図式が得られる.

$$\begin{array}{ccccc}
 a & \xrightarrow{f} & b & & \\
 \text{id} \downarrow & & \downarrow g & & \\
 a & \xrightarrow{g \circ f} & c & \xrightarrow{\text{coker}(g \circ f)} & s \\
 \downarrow & & \downarrow \text{coker}(g) & & \downarrow h \\
 0 & \xrightarrow{\quad} & t & \xrightarrow{\text{id}} & t
 \end{array}$$

よって余核 $\text{coker}(g \circ f)$ の普遍性により点線の射 h が存在し可換となる. 弱完全圏の条件 4 により h は deflation である. 故に h の核が存在する.

$$\begin{array}{ccccc}
 a & \xrightarrow{f} & b & \overset{k}{\dashrightarrow} & u \\
 \text{id} \downarrow & & \downarrow g & & \downarrow \text{ker}(h) \\
 a & \xrightarrow{g \circ f} & c & \xrightarrow{\text{coker}(g \circ f)} & s \\
 \downarrow & & \downarrow \text{coker}(g) & & \downarrow h \\
 0 & \xrightarrow{\quad} & t & \xrightarrow{\text{id}} & t
 \end{array}$$

核 $\text{ker}(h)$ の普遍性により, 点線の射 k が存在し可換となる. 9 項補題により上の横列は短完全列である. 従って f は inflation である. \square

定義. 射の有限列 $a_0 \xrightarrow{f_0} a_1 \xrightarrow{f_1} \cdots \xrightarrow{f_n} a_{n+1}$ が完全列 (exact sequence) とは, $0 \leq k \leq n$ に対して $f_k = (a_k \xrightarrow{f'_k} x_k \xrightarrow{f''_k} a_{k+1})$ (f'_k は deflation, f''_k は inflation) と書いて, $0 \leq k < n$ に対して $x_k \xrightarrow{f''_k} a_{k+1} \xrightarrow{f'_{k+1}} x_{k+1}$ が短完全列になることをいう.

$$\begin{array}{ccccccc}
 \cdots & a_k & \xrightarrow{f_k} & a_{k+1} & \xrightarrow{f_{k+1}} & a_{k+2} & \cdots \\
 & \searrow f'_k & & \nearrow f''_k & \searrow f'_{k+1} & \nearrow f''_{k+1} & \\
 & & x_k & & x_{k+1} & &
 \end{array}$$

定理 32 (蛇の補題). 次の可換図式で横列は両方とも短完全列とする.

$$\begin{array}{ccccc}
 a_0 & \xrightarrow{u_0} & a_1 & \xrightarrow{u_1} & a_2 \\
 f_0 \downarrow & & \downarrow f_1 & & \downarrow f_2 \\
 b_0 & \xrightarrow{v_0} & b_1 & \xrightarrow{v_1} & b_2
 \end{array}$$

また各 $f_i: a_i \rightarrow b_i$ は $f_i = (a_i \xrightarrow{f'_i} x_i \xrightarrow{f''_i} b_i)$ (f'_i は deflation, f''_i は inflation) の形で書けるとする. f'_i の核を $\ker(f'_i): d_i \rightarrow a_i$, f''_i の余核を $\text{coker}(f''_i): b_i \rightarrow c_i$ とする. このとき完全列

$$d_0 \xrightarrow{\bar{u}_0} d_1 \xrightarrow{\bar{u}_1} d_2 \xrightarrow{\delta} c_0 \xrightarrow{\bar{v}_0} c_1 \xrightarrow{\bar{v}_1} c_2$$

が存在し, 更に \bar{u}_0 は inflation で \bar{v}_1 は deflation である.

証明. これから以下の射を定義し, 完全列となっていることを示す.

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
 d_0 & \xrightarrow{\bar{u}_0} & d_1 & \xrightarrow{\bar{u}_1} & d_2 & \xrightarrow{\delta} & c_0 & \xrightarrow{\bar{v}_0} & c_1 & \xrightarrow{\bar{v}_1} & c_2 \\
 \text{id} \searrow & & \nearrow \bar{u}_0 & & \searrow \bar{u}_1' & & \nearrow \ker(\delta') & & \searrow \bar{v}_0' & & \nearrow \ker(\bar{v}_1) & & \searrow \bar{v}_1 & & \nearrow \text{id} \\
 d_0 & & & & z_0 & & z_1 & & z_2 & & c_2 & & & &
 \end{array}$$

まず次の図式を考える.

$$\begin{array}{ccc}
 a_1 & \xrightarrow{u_1} & a_2 \\
 f_1 \downarrow & & \downarrow f_2 \\
 b_1 & \xrightarrow{v_1} & b_2 \\
 \text{coker}(f''_1) \downarrow & & \downarrow \text{coker}(f''_2) \\
 c_1 & & c_2
 \end{array}$$

f'_1 が deflation, 従ってエピ射であるから命題 18 により $\text{coker}(f''_1) = \text{coker}(f_1)$ である. 従って $\text{coker}(f_1)$ の普遍性により次の点線の射が得られ, 可換となる.

$$\begin{array}{ccc}
 x_1 & & x_2 \\
 f''_1 \downarrow & & \downarrow f''_2 \\
 b_1 & \xrightarrow{v_1} & b_2 \\
 \text{coker}(f''_1) \downarrow & & \downarrow \text{coker}(f''_2) \\
 c_1 & \dashrightarrow_{\bar{v}_1} & c_2
 \end{array}$$

$v_1, \text{coker}(f''_2)$ が deflation だから, 条件 3 より $\text{coker}(f''_2) \circ v_1 = \bar{v}_1 \circ \text{coker}(f''_1)$ も deflation である. 故に条件 4 より \bar{v}_1 も deflation である. 従って \bar{v}_1 の核を考えれば短完全列

$z_2 \xrightarrow{\ker(\bar{v}_1)} c_1 \xrightarrow{\bar{v}_1} c_2$ を得る. すると

$$\begin{array}{ccc}
 x_1 & & x_1 \\
 f_1'' \downarrow & & f_1'' \downarrow \\
 b_1 \xrightarrow{v_1} b_2 & = & b_1 \\
 \downarrow \text{coker}(f_2'') & & \downarrow \text{coker}(f_1'') \\
 c_2 & & c_1 \xrightarrow{\bar{v}_1} c_2
 \end{array} = 0_{a_1 b_2}$$

だから核 f_2'' の普遍性により, $w_1: x_1 \rightarrow x_2$ が存在する. このとき次の図式は可換である.

$$\begin{array}{ccc}
 a_1 & \xrightarrow{u_1} & a_2 \\
 f_1' \downarrow & & \downarrow f_2' \\
 x_1 & \xrightarrow{w_1} & x_2 \\
 f_1'' \downarrow & & \downarrow f_2'' \\
 b_1 & \xrightarrow{v_1} & b_2
 \end{array}$$

∴) 下の四角は w_1 の取り方より可換なので, 上の四角が可換であることを示せばよい. f_2'' がモノ射だから

$$\begin{array}{ccc}
 a_1 \xrightarrow{u_1} a_2 & & a_1 \\
 \downarrow f_2' & & \downarrow f_1' \\
 x_2 & = & x_1 \\
 \downarrow f_2'' & & \downarrow f_1'' \\
 b_2 & & b_1 \xrightarrow{v_1} b_2
 \end{array} = \begin{array}{ccc}
 a_1 & & a_1 \\
 \downarrow f_1' & & \downarrow f_1' \\
 x_1 & \xrightarrow{w_1} & x_2 \\
 \downarrow f_2'' & & \downarrow f_2'' \\
 & & b_2
 \end{array}$$

より $f_2' \circ u_1 = w_1 \circ f_1'$ を得る.

よって再び条件 3, 4 により w_1 は deflation である.

核の普遍性により次の点線の射が得られ、可換となる。

$$\begin{array}{ccccc}
 s & \xrightarrow{\ker(w_1)} & x_1 & \xrightarrow{w_1} & x_2 \\
 \downarrow i_0 & & \downarrow f_1'' & & \downarrow f_2'' \\
 b_0 & \xrightarrow{v_0} & b_1 & \xrightarrow{v_1} & b_2 \\
 \downarrow p_0 & & \downarrow \text{coker}(f_1'') & & \downarrow \text{coker}(f_2'') \\
 z_2 & \xrightarrow{\ker(\bar{v}_1)} & c_1 & \xrightarrow{\bar{v}_1} & c_2
 \end{array}$$

9 項補題により、左の縦列は短完全列である。

\bar{v}_1 の定義と同様にして \bar{v}_0 を取る。

$$\begin{array}{ccccc}
 x_0 & & x_1 & \xrightarrow{w_1} & x_2 \\
 \downarrow f_0'' & & \downarrow f_1'' & & \downarrow f_2'' \\
 b_0 & \xrightarrow{v_0} & b_1 & \xrightarrow{v_1} & b_2 \\
 \downarrow \text{coker}(f_0'') & & \downarrow \text{coker}(f_1'') & & \downarrow \text{coker}(f_2'') \\
 c_0 & \xrightarrow{\bar{v}_0} & c_1 & \xrightarrow{\bar{v}_1} & c_2
 \end{array}$$

$\text{coker}(f_0'')$ の普遍性により $\bar{v}_1 \circ \bar{v}_0 = 0$ が分かる。故に $\ker(\bar{v}_1)$ の普遍性により $\bar{v}_0' : c_0 \rightarrow z_2$ が存在して次の図式が可換となる。

$$\begin{array}{ccccccc}
 b_0 & \xrightarrow{v_0} & & b_1 & & & \\
 \downarrow \text{coker}(f_0'') & & \searrow p_0 & & \downarrow \text{coker}(f_1'') & & \\
 c_0 & \xrightarrow{\bar{v}_0'} & z_2 & \xrightarrow{\ker(\bar{v}_1)} & c_1 & \xrightarrow{\bar{v}_1} & c_2 \\
 & \underbrace{\hspace{10em}}_{\bar{v}_0} & & & & &
 \end{array}$$

よって条件 4 により \bar{v}_0' も deflation であることが分かる。従って \bar{v}_0' の核を考えれば短完全列 $z_1 \xrightarrow{\ker(\bar{v}_0')} c_0 \xrightarrow{\bar{v}_0'} z_2$ を得る。再び核の普遍性により次の点線の射が得られ、可

換となる.

$$\begin{array}{ccccc}
 x_0 & \xrightarrow{\text{id}} & x_0 & \xrightarrow{\quad} & 0 \\
 \downarrow i_1 & & \downarrow f_0'' & & \downarrow \\
 s & \xrightarrow{i_0} & b_0 & \xrightarrow{p_0} & z_2 \\
 \downarrow p_1 & & \downarrow \text{coker}(f_0'') & & \downarrow \text{id} \\
 z_1 & \xrightarrow{\text{ker}(v_0')} & c_0 & \xrightarrow{\overline{v_0'}} & z_2
 \end{array}$$

9 項補題により左の縦列は短完全列である.

再び核 $\ker(f_2' \circ u_1)$ の普遍性により次の点線の射が得られ, 可換となる.

$$\begin{array}{ccccc}
 a_0 & \overset{i_2}{\dashrightarrow} & s & \overset{p_2}{\dashrightarrow} & d_2 \\
 \text{id} \downarrow & \text{ker}(f_2' \circ u_1) \downarrow & & & \downarrow \text{ker}(f_2') \\
 a_0 & \xrightarrow{u_0} & a_1 & \xrightarrow{u_1} & a_2 \\
 \downarrow & & \downarrow f_2' \circ u_1 & & \downarrow f_2' \\
 0 & \xrightarrow{\quad} & x_2 & \xrightarrow{\text{id}} & x_2
 \end{array}$$

9 項補題により上の横列は短完全列である. w_1 の定義より

$$\begin{array}{ccc}
 a_1 & \xrightarrow{u_1} & a_2 \\
 f_1' \downarrow & & \downarrow f_2' \\
 x_1 & \xrightarrow{w_1} & x_2
 \end{array}$$

が可換だったから, $\ker(w_1 \circ f_1') = \ker(f_2' \circ u_1)$ となる. よって次の図式が得られる. 再び核の普遍性により次の点線の射が得られ, 可換となる.

$$\begin{array}{ccccc}
 d_1 & \xrightarrow{\text{id}} & d_1 & \xrightarrow{\quad} & 0 \\
 \downarrow i_3 & & \downarrow \text{ker}(f_1') & & \downarrow \\
 s & \xrightarrow{\quad} & a_1 & \xrightarrow{w_1 \circ f_1'} & x_2 \\
 \downarrow p_3 & & \downarrow \text{ker}(f_2' \circ u_1) & & \downarrow \text{id} \\
 x_0' & \xrightarrow{\text{ker}(w_1)} & x_1 & \xrightarrow{w_1} & x_2
 \end{array}$$

9 項補題により左の縦列は短完全列である.

次の図式の実線は可換である.

$$\begin{array}{ccccc}
 a_0 & \xrightarrow{i_2} & s & \xrightarrow{p_2} & d_2 \\
 f'_0 \downarrow & & \downarrow p_3 & & \downarrow \delta' \\
 x_0 & \xrightarrow{i_1} & x'_0 & \xrightarrow{p_1} & z_1
 \end{array}$$

∴) 次の図式を考える.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & & \xrightarrow{u_0} & \\
 a_0 & \xrightarrow{i_2} & s & \xrightarrow{\ker(f'_2 \circ u_1)} & a_1 \\
 f'_0 \downarrow & & \downarrow p_3 & & \downarrow f'_1 \\
 x_0 & \xrightarrow{i_1} & x'_0 & \xrightarrow{\ker(w_1)} & x_1 \\
 f''_0 \downarrow & \swarrow i_0 & & & \downarrow f''_1 \\
 b_0 & \xrightarrow{v_0} & & & b_1
 \end{array}$$

$v_0 \circ i_0$ がモノ射だから $v_0 \circ i_0 \circ i_1 \circ f'_0 = v_0 \circ i_0 \circ p_3 \circ i_2$ を示せばよい. それは

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{ccc}
 a_0 & & \\
 f'_0 \downarrow & & \\
 x_0 & \xrightarrow{i_1} & x'_0 \\
 & \swarrow i_0 & \\
 b_0 & \xrightarrow{v_0} & b_1
 \end{array} & = & \begin{array}{ccc}
 a_0 & & \\
 f'_0 \downarrow & & \\
 x_0 & & \\
 & \downarrow f''_0 & \\
 b_0 & \xrightarrow{v_0} & b_1
 \end{array} \\
 \\
 \begin{array}{ccc}
 a_0 & \xrightarrow{i_2} & s & \xrightarrow{\ker(f'_2 \circ u_1)} & a_1 \\
 & & \downarrow f'_1 & & \\
 & & x_1 & & \\
 & & \downarrow f''_1 & & \\
 & & b_1 & &
 \end{array} & = & \begin{array}{ccc}
 a_0 & \xrightarrow{i_2} & s \\
 & & \downarrow p_3 \\
 & & x'_0 \\
 & \swarrow i_0 & \\
 b_0 & \xrightarrow{v_0} & b_1
 \end{array}
 \end{array}$$

より分かる.

よって余核 p_2 の普遍性により $\delta': d_2 \rightarrow z_0$ を得る. 条件 3, 4 により δ' は deflation である. 従って δ' の核を考えれば短完全列 $z_0 \xrightarrow{\ker(\delta')} d_2 \xrightarrow{\delta'} z_1$ を得る. また $\delta := \ker(v'_0) \circ \delta'$ と定義する.

定理 33 (5 項補題). ここでは inflation の合成が inflation になると仮定する*3. 次の可換図式で, 横の列は完全列であるとする.

$$\begin{array}{ccccccccc}
 a_0 & \xrightarrow{u_0} & a_1 & \xrightarrow{u_1} & a_2 & \xrightarrow{u_2} & a_3 & \xrightarrow{u_3} & a_4 \\
 f_0 \downarrow & & \downarrow f_1 & & \downarrow f_2 & & \downarrow f_3 & & \downarrow f_4 \\
 b_0 & \xrightarrow{v_0} & b_1 & \xrightarrow{v_1} & b_2 & \xrightarrow{v_2} & b_3 & \xrightarrow{v_3} & b_4
 \end{array}$$

また $f_2 = (a_2 \xrightarrow{f'_2} x_2 \xrightarrow{f''_2} b_2)$ (f'_2 は deflation, f''_2 は inflation) の形で書けるとする. このとき

- (1) f_0 が deflation で, f_1, f_3 が inflation ならば f_2 も inflation である.
- (2) f_4 が inflation で, f_1, f_3 が deflation ならば f_2 も deflation である.

証明. 分解 $u_i = (a_i \xrightarrow{u'_i} s_i \xrightarrow{u''_i} a_{i+1})$, $v_i = (b_i \xrightarrow{v'_i} t_i \xrightarrow{v''_i} b_{i+1})$ が横の完全列の条件を満たすとする. つまり次の実線部分は可換である.

$$\begin{array}{cccccccccccccccc}
 a_0 & \xrightarrow{u'_0} & s_0 & \xrightarrow{u''_0} & a_1 & \xrightarrow{u'_1} & s_1 & \xrightarrow{u''_1} & a_2 & \xrightarrow{u'_2} & s_2 & \xrightarrow{u''_2} & a_3 & \xrightarrow{u'_3} & s_3 & \xrightarrow{u''_3} & a_4 \\
 f_0 \downarrow & & \downarrow g_0 & & \downarrow f_1 & & \downarrow g_1 & & \downarrow f_2 & & \downarrow g_2 & & \downarrow f_3 & & \downarrow g_3 & & \downarrow f_4 \\
 b_0 & \xrightarrow{v'_0} & t_0 & \xrightarrow{v''_0} & b_1 & \xrightarrow{v'_1} & t_1 & \xrightarrow{v''_1} & b_2 & \xrightarrow{v'_2} & t_2 & \xrightarrow{v''_2} & b_3 & \xrightarrow{v'_3} & t_3 & \xrightarrow{v''_3} & b_4
 \end{array}$$

容易に分かるように, 核や余核の普遍性から点線の射が存在して可換となる.

(1) f_0 を deflation で, f_1, f_3 を inflation とする. 条件 4 により g_0 は deflation である. また定理の仮定より $f_1 \circ u''_0 (= v''_0 \circ g_0)$ は inflation であるから命題 31 より g_0 は inflation である. 従って $\text{coker}(g_0)$ は存在し, 一意な射 $t_0 \rightarrow 0$ となる. また g_0 と同様にして g_2 も inflation である. よって次の実線の可換図式を得る.

$$\begin{array}{cccccccccccccccc}
 a_0 & \xrightarrow{u'_0} & s_0 & \xrightarrow{u''_0} & a_1 & \xrightarrow{u'_1} & s_1 & \xrightarrow{u''_1} & a_2 & \xrightarrow{u'_2} & s_2 & \xrightarrow{u''_2} & a_3 & & & & & \\
 f_0 \downarrow & & \downarrow g_0 & & \downarrow f_1 & & \downarrow g_1 & & \downarrow f_2 & & \downarrow g_2 & & \downarrow f_3 & & & & & \\
 b_0 & \xrightarrow{v'_0} & t_0 & \xrightarrow{v''_0} & b_1 & \xrightarrow{v'_1} & t_1 & \xrightarrow{v''_1} & b_2 & \xrightarrow{v'_2} & t_2 & \xrightarrow{v''_2} & b_3 & & & & & \\
 & & & & & & \downarrow \text{coker}(f_1) & & & & & & & & & & & \\
 & & & & & & 0 & \dashrightarrow & \overline{b_1} & & & & & & & & &
 \end{array}$$

*3 この仮定を付けないと証明できなかった為. この仮定なしで証明できる方は教えてください.

$\text{coker}(g_0)$ の普遍性から点線の射が存在し可換となるが、この射は一意的な射 $0 \rightarrow \overline{b_1}$ だから inflation である。故にこれは余核 $\text{id}: \overline{b_1} \rightarrow \overline{b_1}$ を持つ。

$$\begin{array}{cccccccccccc}
 a_0 & \xrightarrow{u'_0} & s_0 & \xrightarrow{u''_0} & a_1 & \xrightarrow{u'_1} & s_1 & \xrightarrow{u''_1} & a_2 & \xrightarrow{u'_2} & s_2 & \xrightarrow{u''_2} & a_3 \\
 f_0 \downarrow & & \downarrow g_0 & & \downarrow f_1 & & \downarrow g_1 & & \downarrow f_2 & & \downarrow g_2 & & \downarrow f_3 \\
 b_0 & \xrightarrow{v'_0} & t_0 & \xrightarrow{v''_0} & b_1 & \xrightarrow{v'_1} & t_1 & \xrightarrow{v''_1} & b_2 & \xrightarrow{v'_2} & t_2 & \xrightarrow{v''_2} & b_3 \\
 & & \downarrow & & \downarrow \text{coker}(f_1) & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \xrightarrow{\quad} & \overline{b_1} & \xrightarrow{\quad} & \overline{b_1} & & & & & & & & &
 \end{array}$$

$v'_1 = \text{coker}(v''_0)$ の普遍性から点線の射が存在し可換となる。9 項補題によりこの縦列は短完全列である。以上により次の可換図式を得る。

$$\begin{array}{ccccc}
 s_1 & \xrightarrow{u''_1} & a_2 & \xrightarrow{u'_2} & s_2 \\
 \downarrow \text{id} & & \downarrow f'_2 & & \downarrow \text{id} \\
 s_1 & & x_2 & & s_2 \\
 \downarrow g_1 & & \downarrow f''_2 & & \downarrow g_2 \\
 t_1 & \xrightarrow{v''_1} & b_2 & \xrightarrow{v'_2} & t_2
 \end{array}$$

これに蛇の補題を適用すると完全列 $0 \rightarrow \ker(f'_2) \rightarrow 0 \rightarrow \overline{b_1} \rightarrow \text{coker}(f''_2) \rightarrow \text{coker}(g_2)$ を得る。よって f'_2 は同型射即ち inflation であり、 $f_2 = f''_2 \circ f'_2$ が inflation であることが分かる。

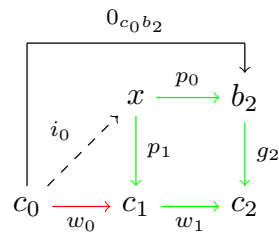
(2) 1 と同様、次の図式から分かる。

$$\begin{array}{cccccccccccc}
 & & & & \overline{a_3} & \xrightarrow{\text{id}} & \overline{a_3} & \xrightarrow{\quad} & 0 & & & & & \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & & \\
 a_1 & \xrightarrow{u'_1} & s_1 & \xrightarrow{u''_1} & a_2 & \xrightarrow{u'_2} & s_2 & \xrightarrow{u''_2} & a_3 & \xrightarrow{u'_3} & s_3 & \xrightarrow{u''_3} & a_4 \\
 \downarrow f_1 & & \downarrow g_1 & & \downarrow f_2 & & \downarrow g_2 & & \downarrow f_3 & & \downarrow g_3 & & \downarrow f_4 \\
 b_1 & \xrightarrow{v'_1} & t_1 & \xrightarrow{v''_1} & b_2 & \xrightarrow{v'_2} & t_2 & \xrightarrow{v''_2} & b_3 & \xrightarrow{v'_3} & t_3 & \xrightarrow{v''_3} & b_4
 \end{array}$$

□

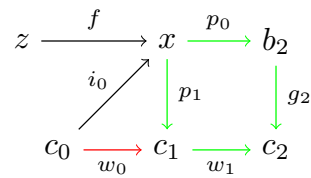
補題 34. C を零対象を持つ圏として $D \subset \text{Mor}(C)$ が弱完全圏の条件 1~4 を満たすとす。このとき次の 2 条件を満たせば条件 5 が成り立つ (従って弱完全圏になる):

存在し可換となる.



$\ker(p_0) = i_0$ である.

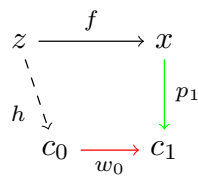
$\therefore f: z \rightarrow x$ が $p_0 \circ f = 0_{z b_2}$ を満たすとする.



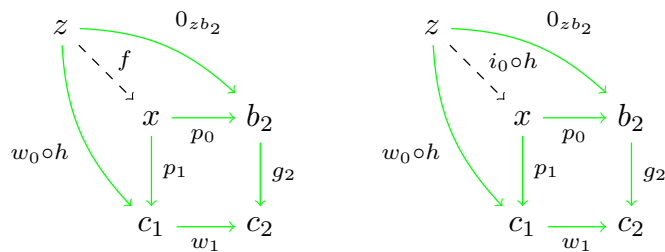
今

$$\begin{array}{ccc}
 z & \xrightarrow{f} & x \\
 & & \downarrow p_1 \\
 & & C_1 \xrightarrow{w_1} C_2
 \end{array}
 =
 \begin{array}{ccc}
 z & \xrightarrow{f} & x \xrightarrow{p_0} b_2 \\
 & & \downarrow g_2 \\
 & & C_2
 \end{array}
 = 0_{z C_2}$$

だから, $w_0 = \ker(w_1)$ の普遍性により次の点線の射 h が存在して可換となる.

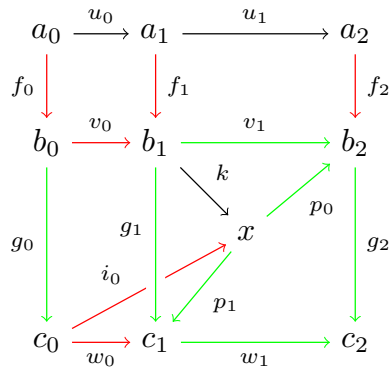


このとき次の図式が可換であるから, pullback の普遍性により $i_0 \circ h = f$ が分かる.



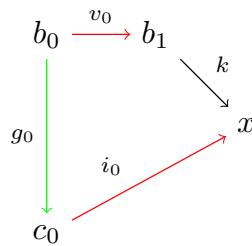
あとはこのような h の一意性を示せばよいが、それは w_0 がモノ射であるから明らか。

これらを組み合わせて次の図式を得る。

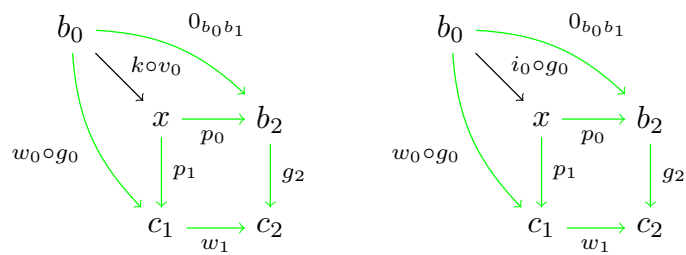


この図式は可換である。

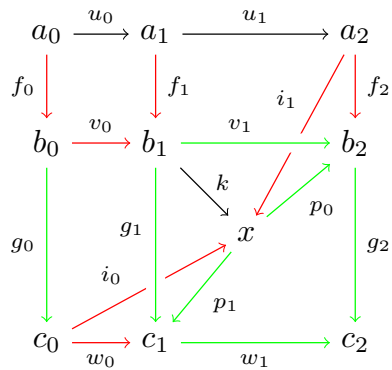
∴) 次の図式が可換であることを示せばよい。



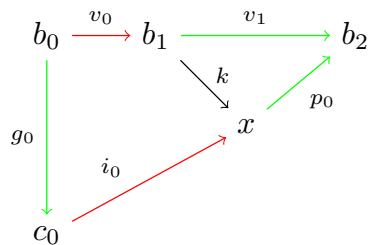
それは次の図式が可換であるから pullback の普遍性により分かる。



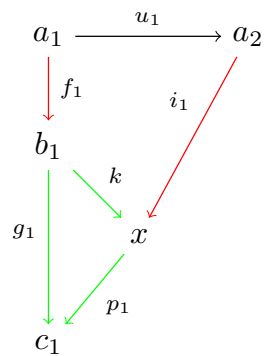
図式が対称だから、 i_0 と全く同様にして $i_1 = \ker(p_1)$ が存在し次の図式が可換となる。



図式



に条件 b を適用すれば k が deflation であることが分かる。更に図式



に条件 b を適用すれば u_1 が deflation であることが分かる。

後は $\ker(u_1) = u_0$ であることを示せばよい。まず $\ker(k) = v_0 \circ f_0$ である。

∴) まず

$$\begin{array}{c} a_0 \\ \downarrow f_0 \\ b_0 \end{array} \xrightarrow{v_0} b_1 \xrightarrow{k} x = \begin{array}{c} a_0 \\ \downarrow f_0 \\ b_0 \\ \downarrow g_0 \\ c_0 \end{array} \xrightarrow{i_0} x = 0_{a_0 x}$$

である. 次に $f: z \rightarrow b_1$ が $k \circ f = 0_{a_0 x}$ を満たすとする. このとき

$$\begin{array}{c} z \\ \downarrow f \\ b_1 \end{array} \xrightarrow{v_1} b_2 = \begin{array}{c} z \\ \downarrow f \\ b_1 \\ \downarrow k \\ x \end{array} \xrightarrow{p_0} b_2 = 0_{z b_2}$$

だから $v_0 = \ker(v_1)$ の普遍性により次の点線の射 h' が存在し可換となる.

$$\begin{array}{c} z \\ \swarrow h' \\ b_0 \end{array} \xrightarrow{v_0} b_1 \xrightarrow{v_1} b_2 \quad \begin{array}{c} z \\ \downarrow f \\ b_1 \end{array}$$

このとき

$$\begin{array}{c} z \\ \swarrow h' \\ b_0 \\ \downarrow g_0 \\ c_0 \end{array} \xrightarrow{i_0} x = \begin{array}{c} z \\ \downarrow f \\ b_1 \\ \downarrow k \\ x \end{array} = 0_{z x} = 0_{z c_0} \xrightarrow{i_0} x$$

となるから, i_0 がモノ射であることより

$$\begin{array}{ccc}
 & & z \\
 & \swarrow h' & \\
 & b_0 & \\
 \downarrow g_0 & & \\
 c_0 & &
 \end{array}
 = 0_{zc_0}$$

が分かる. 従って $f_0 = \ker(g_0)$ の普遍性により次の点線の射 h が存在し可換となる.

$$\begin{array}{ccc}
 a_0 & \xleftarrow{h} & z \\
 \downarrow f_0 & \swarrow h' & \downarrow f \\
 b_0 & \xrightarrow{v_0} & b_1
 \end{array}$$

あとはこのような h が一意であることを示せばよいが, それは f_0, v_0 がモノ射であるから明らか.

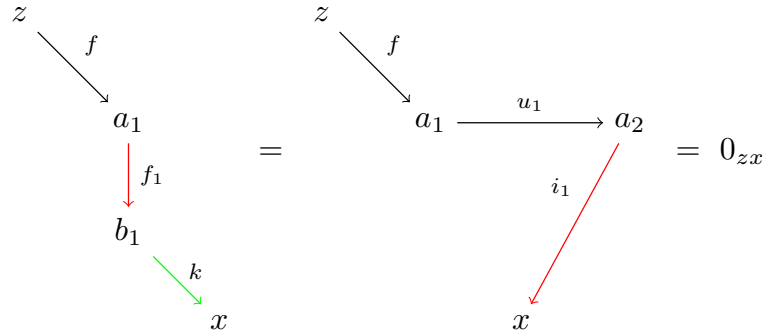
よって $u_1 \circ u_0 = 0_{a_0 a_2}$ である.

$\therefore i_1$ がモノ射だから次の等式より分かる.

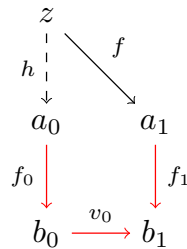
$$\begin{array}{ccc}
 a_0 \xrightarrow{u_0} a_1 \xrightarrow{u_1} a_2 & & a_0 \\
 \searrow i_1 & & \downarrow f_0 \\
 x & & b_0 \xrightarrow{v_0} b_1 \\
 & & \searrow k \\
 & & x
 \end{array}
 = 0_{a_0 x}$$

$$= \begin{array}{ccc}
 a_0 & \xrightarrow{0_{a_0 a_x}} & a_2 \\
 & & \searrow i_1 \\
 & & x
 \end{array}$$

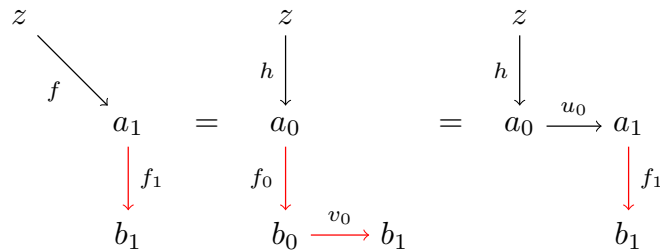
$\ker(u_1) = u_0$ を示すため $f: z \rightarrow a_1$ が $u_1 \circ f = 0_{za_2}$ を満たすとする.



だから $\ker(k) = v_0 \circ f_0$ の普遍性により次の点線の射 h が存在して可換となる.

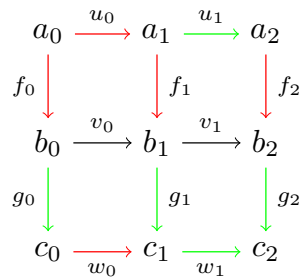


このとき

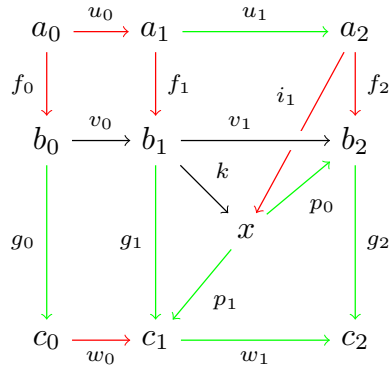


で f_1 がモノ射だから $u_0 \circ h = f$ が分かる. 後はこのような h の一意性を示せばよいが, それは f_0, v_0 がモノ射より分かる. □

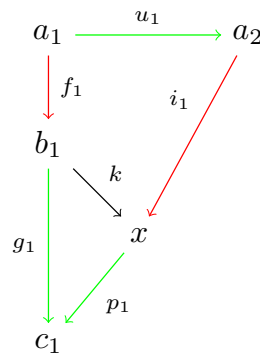
命題 35 (9 項補題 (中)). 弱完全圏 C が補題 34 の条件を満たすとする. 次の可換図式で縦列が全て短完全列のとき, 上と下の横列が短完全列で, $v_1 \circ v_0 = 0$ ならば中央の横列も短完全列となる.



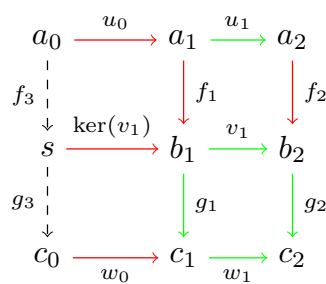
証明. 補題 34 の証明と同様にして次の可換図式を得る.



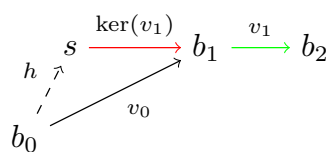
条件 b を



に適用することで k が deflation であることが分かる. 故に $v_1 = p_0 \circ k$ も deflation である. v_1 の核を $\ker(v_1): s \rightarrow b_1$ とすると核の普遍性により次の点線の射が得られる.



9 項補題により左の縦列は短完全列である. 仮定より $v_1 \circ v_0 = 0$ であるから, 核 $\ker(v_1)$ の普遍性により $h: b_0 \rightarrow s$ が存在して $\ker(v_1) \circ h = v_0$ となる.



このとき次の図式は可換である.

$$\begin{array}{ccccc}
 a_0 & \xrightarrow{u_0} & a_1 & \xrightarrow{u_1} & a_2 \\
 f_0 \downarrow & \searrow f_3 & \downarrow f_1 & & \downarrow f_2 \\
 b_0 & \xrightarrow{h} & s & \xrightarrow{\ker(v_1)} & b_1 & \xrightarrow{v_1} & b_2 \\
 g_0 \downarrow & \nearrow g_3 & \downarrow g_1 & & \downarrow g_2 \\
 c_0 & \xrightarrow{w_0} & c_1 & \xrightarrow{w_1} & c_2
 \end{array}$$

∴) 左側の二つの三角形が可換であることを示せばよいが

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{ccc}
 a_0 & & \\
 f_0 \downarrow & & \\
 b_0 & \xrightarrow{h} & s \xrightarrow{\ker(v_1)} b_1
 \end{array}
 \quad = \quad
 \begin{array}{ccc}
 a_0 & \xrightarrow{u_0} & a_1 \\
 & & \downarrow f_1 \\
 & & b_1
 \end{array}
 \quad = \quad
 \begin{array}{ccc}
 a_0 & & \\
 & \searrow f_3 & \\
 & & s \xrightarrow{\ker(v_1)} b_1
 \end{array}
 \\
 \\
 \begin{array}{ccc}
 b_0 & \xrightarrow{h} & s \quad b_1 \\
 \searrow g_3 & & \\
 c_0 & \xrightarrow{w_0} & c_1
 \end{array}
 \quad = \quad
 \begin{array}{ccc}
 b_0 & \xrightarrow{h} & s \xrightarrow{\ker(v_1)} b_1 \\
 & & \downarrow g_1 \\
 & & c_1
 \end{array}
 \quad = \quad
 \begin{array}{ccc}
 b_0 & & \\
 \downarrow g_0 & & \\
 c_0 & \xrightarrow{w_0} & c_1
 \end{array}
 \end{array}$$

で $\ker(v_1)$ と w_0 がモノ射であることから分かる.

条件 b を

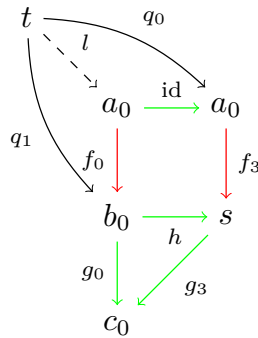
$$\begin{array}{ccc}
 a_0 & \xrightarrow{\text{id}} & a_0 \\
 f_0 \downarrow & & \downarrow f_3 \\
 b_0 & \xrightarrow{h} & s \\
 g_0 \downarrow & \nearrow g_3 & \\
 c_0 & &
 \end{array}$$

に適用すれば h が deflation であることが分かる. 今, 図式

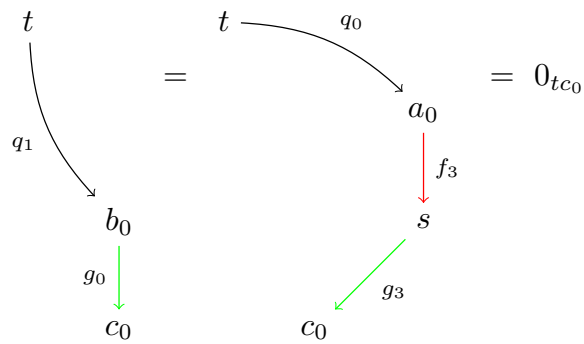
$$\begin{array}{ccc}
 a_0 & \xrightarrow{\text{id}} & a_0 \\
 f_0 \downarrow & & \downarrow f_3 \\
 b_0 & \xrightarrow{h} & s
 \end{array}$$

は pullback である.

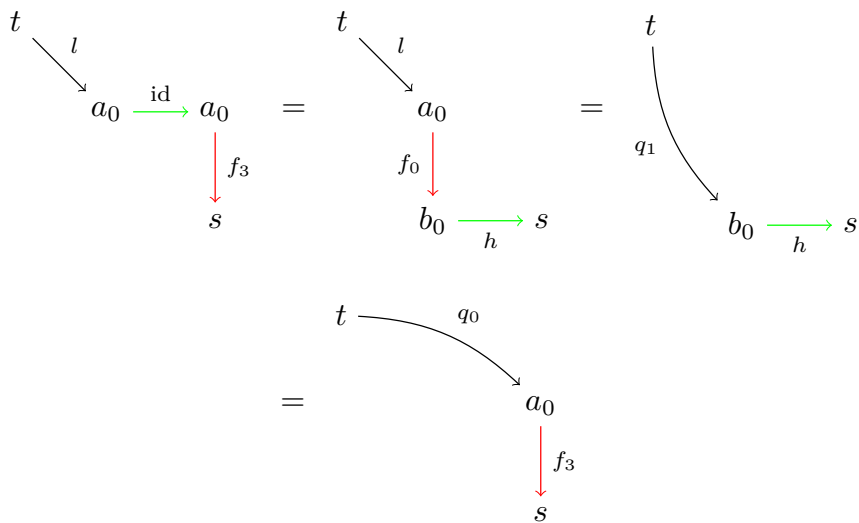
∴) 次の実線の可換図式を考える.



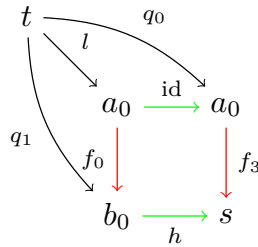
今



だから, 核 $f_0 = \ker(g_0)$ の普遍性により $l: t \rightarrow a_0$ が存在して $f_0 \circ l = q_1$ となる. このとき

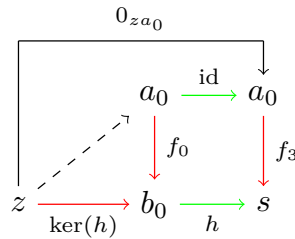


となり, f_3 がモノ射だから $q_0 = l$ が分かる. 故に



は可換である. また f_0 がモノ射だからこのような l は一意である.

よって h の核を $\ker(h): z \rightarrow b_0$ とすると, 次の図式を可換にする点線の射が存在する.



補題 34 の証明の時と同様にして, この点線の射が id の核になることが分かる. よって $z = 0$ である. 故に $h = \text{coker}(\ker(h))$ は同型射となる. 従って $v_0 = \ker(v_1)$ である. □

8 弱完全圏の例

弱完全圏において deflation は正則エピ射である. そこで次の定義をする.

定義. 零対象を持つ圏 C が weakly homological

$\iff D := \{f \in \text{Mor}(C) \mid f \text{ は正則エピ射}\}$ により C が弱完全圏になる.

例 36. 群の圏 \mathbf{Grp} は正則圏であることが知られている. よって次の定理により, \mathbf{Grp} は weakly homological であることが分かる. \mathbf{Grp} においては任意のエピ射が正則エピ射となるから, \mathbf{Grp} は $D = \{f \in \text{Mor}(C) \mid f \text{ はエピ射}\}$ により弱完全圏となることが分かる. □

定理 37. 零対象を持つ正則圏 C が weakly homological

\iff 任意の正則エピ射 $f: a \rightarrow b$ に対して $f = \text{coker}(\ker(f))$ である.

証明. (\implies) 正則エピ射 $f: a \rightarrow b$ は deflation であり, よって $f = \text{coker}(\ker(f))$ となる.

(\impliedby) 弱完全圏の条件 1~4 と補題 34 の条件 a, b を示す.

(1) 明らか.

(2) 明らか.

(3) $f: a \rightarrow b$ と $g: b \rightarrow c$ が正則エピ射であるとする. $g \circ f$ を $a \xrightarrow{p} x \xrightarrow{i} c$ (p は正則エピ射, i はモノ射) と分解する.

$$\begin{array}{ccccc} & & x & & \\ & \curvearrowright & & \curvearrowleft & \\ a & \xrightarrow{f} & b & \xrightarrow{g} & c \end{array}$$

i が同型射であることを示せばよい. その為に g と i の pullback z を考える.

$$\begin{array}{ccccc} & & & & p \\ & & & & \downarrow \\ & & z & \xrightarrow{k} & x \\ & \nearrow h & \downarrow j & & \downarrow i \\ a & \xrightarrow{f} & b & \xrightarrow{g} & c \end{array}$$

pullback の普遍性により点線の射 h が存在して可換となる. f が正則エピ射だから $f = \text{coker}(\ker(f))$ であり

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & z & \\ & \nearrow h & \downarrow j \\ s \xrightarrow{\ker(f)} a & & b \end{array} = \begin{array}{ccc} s \xrightarrow{\ker(f)} a & \xrightarrow{f} & b \end{array} = 0_{sb} = \begin{array}{ccc} & z & \\ & \nearrow 0_{sz} & \downarrow j \\ s & & b \end{array} \end{array}$$

となる. モノ射の pullback はモノ射だから j はモノ射となり, よって

$$\begin{array}{ccc} & z & \\ & \nearrow h & \\ s \xrightarrow{\ker(f)} a & & \end{array} = \begin{array}{ccc} & z & \\ & \nearrow 0_{sz} & \\ s & & \end{array}$$

となる. 従って余核 f の普遍性により, $l: b \rightarrow z$ が存在して $l \circ f = h$ となる.

$$\begin{array}{ccc} & z & \\ & \nearrow h & \uparrow l \\ s \xrightarrow{\ker(f)} a & \xrightarrow{f} & b \end{array} \downarrow j$$

このとき $l = j^{-1}$ である.

∴) まず

$$\begin{array}{c}
 z \\
 \uparrow \downarrow \\
 a \xrightarrow{f} b
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 l \\
 \uparrow \\
 j \\
 \downarrow
 \end{array}
 =
 \begin{array}{c}
 z \\
 \nearrow \\
 a
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \searrow \\
 b \\
 \downarrow \\
 j
 \end{array}
 =
 \begin{array}{c}
 z \\
 \downarrow \\
 a \xrightarrow{f} b
 \end{array}$$

で f がエピ射だから $j \circ l = \text{id}_b$ である. 従って $j \circ l \circ j = j$ となり, 今 j がモノ射だから $l \circ j = \text{id}_z$ も分かる.

故に次の可換図式を得る.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & & & p \\
 & & & & \downarrow \\
 & & & & x \\
 & & & \nearrow & \downarrow i \\
 & & k \circ l & & c \\
 & & \nearrow & & \\
 a & \xrightarrow{f} & b & \xrightarrow{g} & c \\
 & & & & \downarrow \\
 & & & & c
 \end{array}$$

g が正則エピ射だから, 同様の議論により i が同型射となることが分かる.

(4) $a \xrightarrow{f} b \xrightarrow{g} c$ で $g \circ f$ が正則エピ射であるとする. $g = (b \xrightarrow{p} x \xrightarrow{i} c)$ (p は正則エピ射, i はモノ射) と分解する.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & & & x \\
 & & & & \nearrow \\
 s & \xrightarrow{\text{ker}(g \circ f)} & a & \xrightarrow{f} & b & \xrightarrow{g} & c \\
 & & & & \nearrow p & & \downarrow i \\
 & & & & x & & c
 \end{array}$$

このとき

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{ccccc}
 s & \xrightarrow{\text{ker}(g \circ f)} & a & \xrightarrow{f} & b \\
 & & & & \nearrow p \\
 & & & & x \\
 & & & & \downarrow i \\
 & & & & c
 \end{array}
 = \\
 \begin{array}{ccccc}
 s & \xrightarrow{\text{ker}(g \circ f)} & a & \xrightarrow{f} & b & \xrightarrow{g} & c \\
 & & & & \nearrow p & & \downarrow i \\
 & & & & x & & c
 \end{array} \\
 = 0_{sc} = \\
 \begin{array}{ccc}
 s & \xrightarrow{0_{sx}} & x \\
 & & \downarrow i \\
 & & c
 \end{array}
 \end{array}$$

となり, i がモノ射だから

$$\begin{array}{ccc}
 & & x \\
 & \nearrow p & \\
 s & \xrightarrow[\ker(g \circ f)]{} a & \xrightarrow{f} b
 \end{array}
 =
 \begin{array}{ccc}
 & & x \\
 & \nearrow 0_{sx} & \\
 s & &
 \end{array}$$

となる. 従って余核 $g \circ f$ の普遍性により, $l: c \rightarrow x$ が存在して $l \circ g \circ f = p \circ f$ となる.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & & & x \\
 & & & \nearrow p \circ f & \uparrow i \\
 s & \xrightarrow[\ker(g \circ f)]{} a & \xrightarrow{f} b & \xrightarrow{g} c & \downarrow l \\
 & & & & c
 \end{array}$$

3 の証明の時と同様にして i が同型射となることが分かる. よって g は正則エピ射である.

(a) 正則エピ射の pullback が正則エピ射なので明らか.

(b の \Leftarrow) 次の図式で, 左の四角が pullback であることを示せばよい.

$$\begin{array}{ccccc}
 a_0 & \xrightarrow{u_0} & a_1 & & \\
 f_0 \downarrow & & f_1 \downarrow & \searrow u_1 & \\
 b_0 & \xrightarrow{v_0} & b_1 & \xrightarrow{v_1} & a_2
 \end{array}$$

その為に次の図式が可換であるとする.

$$\begin{array}{ccccc}
 x & & & & \\
 \searrow q_0 & & & & \\
 & a_0 & \xrightarrow{u_0} & a_1 & \\
 & f_0 \downarrow & & f_1 \downarrow & \searrow u_1 \\
 & b_0 & \xrightarrow{v_0} & b_1 & \xrightarrow{v_1} & a_2 \\
 \nearrow q_1 & & & &
 \end{array}$$

すると

$$\begin{array}{ccc}
 x & \xrightarrow{q_0} & a_1 \\
 & & \searrow u_1 \\
 & & a_2
 \end{array}
 =
 \begin{array}{ccc}
 x & \xrightarrow{q_0} & a_1 \\
 & & \downarrow f_1 \\
 & & b_1 \xrightarrow{v_1} a_2
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 & x & \\
 = & \downarrow q_1 & \\
 & b_0 \xrightarrow{v_0} b_1 \xrightarrow{v_1} a_2 & \\
 & & = 0_{xa_2}
 \end{array}$$

となるから $u_0 = \ker(u_1)$ の普遍性により点線の射 h が存在して $u_0 \circ h = q_0$ となる.

$$\begin{array}{ccccc}
 x & & & & \\
 \downarrow q_1 & & \downarrow q_0 & & \\
 a_0 & \xrightarrow{u_0} & a_1 & & \\
 \downarrow f_0 & & \downarrow f_1 & \searrow u_1 & \\
 b_0 & \xrightarrow{v_0} & b_1 & \xrightarrow{v_1} & a_2
 \end{array}$$

v_0 がモノ射だからこの図式は可換である. また u_0 がモノ射だからこのような h は一意である.

(b の \implies) 次の図式を考える.

$$\begin{array}{ccccc}
 a_0 & \xrightarrow{u_0} & a_1 & & \\
 \downarrow f_0 & & \downarrow f_1 & \searrow u_1 & \\
 b_0 & \xrightarrow{v_0} & b_1 & \xrightarrow{v_1} & a_2
 \end{array}$$

$f_1 = (a_1 \xrightarrow{f'_1} x \xrightarrow{f''_1} b_1)$ (f'_1 は正則エピ射, f''_1 はモノ射) と分解する. 核 $\ker(f_1)$ の普遍性から次の点線の射 \bar{u}_0 を得る.

$$\begin{array}{ccccc}
 \bar{a}_0 & \xrightarrow{\bar{u}_0} & \bar{a}_1 & & \\
 \downarrow \ker(f_0) & & \downarrow \ker(f_1) & & \\
 a_0 & \xrightarrow{u_0} & a_1 & & \\
 \downarrow f_0 & & \downarrow f_1 & & \\
 b_0 & \xrightarrow{v_0} & b_1 & &
 \end{array}$$

よって余核 $f_0 = \text{coker}(\ker(f_0))$ の普遍性から次の点線の射 w_0 を得る.

$$\begin{array}{ccc}
 \overline{a_0} & \xrightarrow{\overline{u_0}} & \overline{a_1} \\
 \ker(f_0) \downarrow & & \downarrow \ker(f_1) = \ker(f'_1) \\
 a_0 & \xrightarrow{u_0} & a_1 \\
 f_0 \downarrow & & \downarrow f'_1 \\
 b_0 & \xrightarrow{w_0} & x
 \end{array}$$

このとき次の図式は可換である.

$$\begin{array}{ccccc}
 a_0 & \xrightarrow{u_0} & a_1 & & \\
 f_0 \downarrow & & f'_1 \downarrow & \searrow u_1 & \\
 b_0 & \xrightarrow{w_0} & x & \xrightarrow{v_1 \circ f''_1} & a_2 \\
 \text{id} \downarrow & & f'_1 \downarrow & & \downarrow \text{id} \\
 b_0 & \xrightarrow{v_0} & b_1 & \xrightarrow{v_1} & a_2
 \end{array}$$

既に示した条件 4 により $v_1 \circ f''_1$ は正則エピ射である. 右下の四角は pullback である.

∴) 何故?

従って正則圏の定義から f''_1 は正則エピ射であり, 故に既に示した 3 により $f_1 = f''_1 \circ f'_1$ も正則エピ射である. □

アーベル圏は正則圏であることが知られている. 故に定理 37 よりアーベル圏は weakly homological である. R を単位的環とするとき左 R 加群の圏 $R\text{-Mod}$ はアーベル圏であるから weakly homological であることが分かる.

補題 38. 弱完全圏において $a \xrightarrow{f} b \xrightarrow{g} c$ が短完全列 $\iff 0 \rightarrow a \xrightarrow{f} b \xrightarrow{g} c \rightarrow 0$ が完全列である.

証明. (\implies) $f = f \circ \text{id}_a$, $g = \text{id}_c \circ g$ とすれば明らか.

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \xrightarrow{\quad} & a & \xrightarrow{f} & b & \xrightarrow{g} & c & \xrightarrow{\quad} & 0 \\
 & \searrow & \downarrow \text{id}_a & \searrow f & \downarrow g & \searrow \text{id}_c & \downarrow & \searrow & \\
 & & 0 & & a & & c & & 0
 \end{array}$$

(\Leftarrow) 次のように書いて完全列の条件を満たしたとする.

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 0 & \xrightarrow{\quad} & a & \xrightarrow{f} & b & \xrightarrow{g} & c & \xrightarrow{\quad} & 0 \\
 & \searrow h' & & \nearrow h'' & \searrow f' & \nearrow f'' & \searrow g' & \nearrow g'' & \searrow k' & \nearrow k'' \\
 & & x_0 & & x_1 & & x_2 & & x_3 & &
 \end{array}$$

h' が deflation, k'' が inflation だから $x_0 = 0, x_3 = 0$ である. よって h'' と k' は一意な射である. よって f' と g'' は同型射であるから, g は deflation で $f = \ker(g)$ が分かる. \square

命題 39. C は weak homological な弱完全圏で, 余核を持ち正規かつ余正規であるとする. このとき

$a_0 \xrightarrow{f_0} a_1 \xrightarrow{f_1} \dots \xrightarrow{f_n} a_{n+1}$ が完全列 \iff 各 $0 \leq i < n$ について $\text{Im}(f_i) = \ker(f_{i+1})$ である.

証明. (\implies) $f_i = (a_i \xrightarrow{f'_i} x_i \xrightarrow{f''_i} a_{i+1})$ (f'_i は deflation, f''_i は inflation) が完全列の条件を満たすとする.

$$\begin{array}{ccccccc}
 \dots & a_i & \xrightarrow{f_i} & a_{i+1} & \xrightarrow{f_{i+1}} & a_{i+2} & \dots \\
 & \searrow f'_i & & \nearrow f''_i & \searrow f'_{i+1} & \nearrow f''_{i+1} & \\
 & & x_i & & x_{i+1} & &
 \end{array}$$

このとき $\text{Im}(f_i) = \ker(\text{coker}(f_i)) = \ker(\text{coker}(f''_i)) = \ker(f'_{i+1}) = \ker(f_{i+1})$ である.

(\Leftarrow) $f_i = (a_i \xrightarrow{f'_i} x_i \xrightarrow{\text{Im}(f_i)} a_{i+1})$ と分解する. $\text{Im}(f_i)$ がモノ射だから $\ker(f'_{i+1}) = \ker(f_{i+1}) = \text{Im}(f_i)$ である. 故に f'_{i+1} が正則エピ射であることを示せばよい. 命題 4 の双対により f'_{i+1} はエピ射である. 今 C が余正規だから f'_{i+1} は正規エピ射即ち正則エピ射である. \square

故に, 例えばアーベル圏などであれば, 完全列とは $\text{Im}(f_i) = \ker(f_{i+1})$ を満たす列のことという事になる.

参考文献

- [1] Martti Karvonen, Biproducts without zero morphisms, <https://arxiv.org/abs/1801.06488>
- [2] マックレーン, 圏論の基礎

- [3] Amir Jafari, Weakly Exact Categories and the Snake Lemma, <https://arxiv.org/abs/0901.2372>
- [4] Francis Borceux, Handbook of Categorical Algebra Volume 2, Cambridge University Press (1994)