

# 米田の補題

alg-d

[http://alg-d.com/math/kan\\_extension/](http://alg-d.com/math/kan_extension/)

2020年6月24日

$C$  を圏とする.  $a, b \in C$  に対して  $\text{Hom}_C(a, b) \in \mathbf{Set}$  だった. よって  $a$  を固定したとき関数

$$\begin{array}{ccc} F: \text{Ob}(C) & \longrightarrow & \text{Ob}(\mathbf{Set}) \\ \Psi & & \Psi \\ b & \longmapsto & \text{Hom}_C(a, b) \end{array}$$

を考察することができる. これは実は関手になる. そのためには  $C$  の射  $g: b \rightarrow b'$  に対して写像  $F(g): \text{Hom}_C(a, b) \rightarrow \text{Hom}_C(a, b')$  を

$$\begin{array}{ccc} F(g): \text{Hom}_C(a, b) & \longrightarrow & \text{Hom}_C(a, b') \\ \Psi & & \Psi \\ (a \xrightarrow{h} b) & \longmapsto & (a \xrightarrow{h} b \xrightarrow{g} b') \end{array}$$

で定めればよい.

∴) この  $F$  が関手になっていることを示すには  $b \in C$  に対して  $F(\text{id}_b) = \text{id}_{Fb}$  と,  $b \xrightarrow{g} b' \xrightarrow{g'} b''$  に対して  $F(g' \circ g) = Fg' \circ Fg$  を示せばよい.

$h \in \text{Hom}_C(a, b)$  とする. 定義より  $F(\text{id}_b)(h) = \text{id}_b \circ h = h$  だから  $F(\text{id}_b) = \text{id}_{Fb}$  である. また

$$\begin{aligned} (Fg' \circ Fg)(h) &= Fg'(Fg(h)) = Fg'(g \circ h) = g' \circ (g \circ h) \\ &= (g' \circ g) \circ h = F(g' \circ g)(h) \end{aligned}$$

だから  $F(g' \circ g) = Fg' \circ Fg$  である.

この関手  $F$  を Hom 関手といい,  $\text{Hom}_C(a, -)$  で表す. この記号を使えば, 射  $g: b \rightarrow b'$  に対して  $\text{Hom}_C(a, g)$  は写像  $\text{Hom}_C(a, b) \rightarrow \text{Hom}_C(a, b')$  であり,  $\text{Hom}_C(a, g)(h) = g \circ h$

となる．そこで写像  $\text{Hom}_C(a, g)$  を単に  $g \circ -$  とも書くことにする．

次に圏  $C$  の代わりに  $C^{\text{op}}$  を考えると関手  $\text{Hom}_{C^{\text{op}}}(a, -): C^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$  が得られる．定義より  $\text{Hom}_{C^{\text{op}}}(a, b) = \text{Hom}_C(b, a)$  だった．そこで  $\text{Hom}_C(-, a) := \text{Hom}_{C^{\text{op}}}(a, -)$  と書く．つまり関手  $\text{Hom}_C(-, a): C^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$  は，射  $f: b' \rightarrow b$  に対して

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_C(f, a): \text{Hom}_C(b, a) & \longrightarrow & \text{Hom}_C(b', a) \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ (b \xrightarrow{h} a) & \longmapsto & (b' \xrightarrow{f} b \xrightarrow{h} a) \end{array}$$

で与えられるものである．先の場合と同様に  $\text{Hom}_C(f, a)$  を単に  $- \circ f$  とも書くことにする．

更にこの二つを組み合わせて考えれば，2変数の関手  $\text{Hom}_C: C^{\text{op}} \times C \rightarrow \mathbf{Set}$  を考えることもできる．つまり， $f: a' \rightarrow a$  と  $g: b \rightarrow b'$  に対して

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_C(f, g): \text{Hom}_C(a, b) & \longrightarrow & \text{Hom}_C(a', b') \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ (a \xrightarrow{h} b) & \longmapsto & (a' \xrightarrow{f} a \xrightarrow{h} b \xrightarrow{g} b') \end{array}$$

と定義する．この  $\text{Hom}_C$  が関手となることは容易に分かるであろう．

よって「自然変換・関手圏」のPDFで述べた通り，この関手  $\text{Hom}_C: C^{\text{op}} \times C \rightarrow \mathbf{Set}$  から関手  $y: C \rightarrow \mathbf{Set}^{C^{\text{op}}}$  が得られる．

※ 定義によれば，この関手  $y: C \rightarrow \mathbf{Set}^{C^{\text{op}}}$  は次のような関手である．まず対象  $a \in C$  に対しては  $y(a) = \text{Hom}_C(-, a)$  である．次に  $f: a \rightarrow b$  を  $C$  の射とすると  $y(f): y(a) \Rightarrow y(b)$  は自然変換である．これは  $s \in C$  に対して

$$y(f)_s = f \circ -: \text{Hom}_C(s, a) \rightarrow \text{Hom}_C(s, b)$$

で与えられる自然変換である．

圏  $C$  に対して  $\widehat{C} := \mathbf{Set}^{C^{\text{op}}}$  と書き，この関手  $y: C \rightarrow \widehat{C}$  を米田埋込と呼ぶ．米田埋込は圏論で重要な役割を持つが，まず基本的な性質として次の定理がある．

**定理 1 (米田の補題)**． $C$  を圏， $a \in C$  を対象， $P: C^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$  を関手とする．このとき全単射  $\varphi_{a,P}: \text{Hom}_{\widehat{C}}(y(a), P) \rightarrow P(a)$  が存在する．

**証明**． $\alpha \in \text{Hom}_{\widehat{C}}(y(a), P)$  とすれば， $\alpha_a$  は写像  $\text{Hom}_C(a, a) \rightarrow P(a)$  である．そこで写像  $\varphi = \varphi_{a,P}: \text{Hom}_{\widehat{C}}(y(a), P) \rightarrow P(a)$  を  $\varphi(\alpha) := \alpha_a(\text{id}_a)$  で定める．これが全単射であ

ることを示すため、逆写像  $\psi = \psi_{a,P}: P(a) \rightarrow \text{Hom}_{\widehat{C}}(y(a), P)$  を定義しよう.

※ そのためには  $\psi$  をどのように定義すればよいか、考察してみる.  $x \in P(a)$  に対して  $\beta = \psi(x): y(a) \Rightarrow P$  が定義できたとする.  $\beta$  はどのような自然変換だろうか. まず  $\varphi \circ \psi = \text{id}$  とならないといけないので,  $x = \varphi \circ \psi(x) = \varphi(\beta) = \beta_a(\text{id}_a)$  である. これで  $\text{id}_a \in \text{Hom}_C(a, a)$  の行き先  $\beta_a(\text{id}_a)$  は定まった. 他の  $f \in \text{Hom}_C(a, a)$  の行き先はどうなるであろうか. ここで  $\beta$  が自然変換であることを考えると, 次の図式が可換でなければならない.

$$\begin{array}{ccc}
 a & \text{Hom}_C(a, a) & \xrightarrow{\beta_a} & Pa \\
 \downarrow f & \uparrow -\circ f & & \uparrow Pf \\
 a & \text{Hom}_C(a, a) & \xrightarrow{\beta_a} & Pa
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 f & \xrightarrow{\beta_a} & \beta_a(f) \\
 \uparrow -\circ f & & \uparrow Pf \\
 \text{id}_a & \xrightarrow{\beta_a} & x
 \end{array}$$

よって  $\beta_a(f) = Pf(x)$  でなければならない. こうして  $\beta_a$  は確定した. 他の  $s \in C$ ,  $f \in \text{Hom}(s, a)$  に対しても同様にして,  $\beta_s$  が以下の可換図式により定まる.

$$\begin{array}{ccc}
 s & \text{Hom}_C(s, a) & \xrightarrow{\beta_s} & Ps \\
 \downarrow f & \uparrow -\circ f & & \uparrow Pf \\
 a & \text{Hom}_C(a, a) & \xrightarrow{\beta_a} & Pa
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 f & \xrightarrow{\beta_s} & \beta_s(f) \\
 \uparrow -\circ f & & \uparrow Pf \\
 \text{id}_a & \xrightarrow{\beta_a} & x
 \end{array}$$

即ち  $\beta_s(f) = Pf(x)$  である.

まず  $x \in P(a)$  に対して  $\psi(x)_s: \text{Hom}_C(s, a) \rightarrow P(s)$  を  $\psi(x)_s(f) := Pf(x)$  により定める. このとき  $\psi(x)$  は自然変換  $y(a) \Rightarrow P$  である.

∴)  $f: s \rightarrow t$  に対して次が可換であることを示せばよい.

$$\begin{array}{ccc}
 s & \text{Hom}_C(s, a) & \xrightarrow{\psi(x)_s} & P_s & & g \circ f & \xrightarrow{\psi(x)_s} & P(g \circ f)(x) \\
 \downarrow f & \uparrow -\circ f & & \uparrow Pf & & \uparrow -\circ f & & \uparrow Pf \\
 t & \text{Hom}_C(t, a) & \xrightarrow{\psi(x)_t} & P_t & & g & \xrightarrow{\psi(x)_t} & P_g(x) \\
 & & & & & & & \downarrow Pf
 \end{array}$$

しかしそれは  $P$  が関手だから  $P(g \circ f)(x) = (Pf \circ P_g)(x) = Pf(P_g(x))$  となり明らか.

従って  $\psi$  は写像  $\psi: P(a) \rightarrow \text{Hom}_{\widehat{C}}(y(a), P)$  となる. 後は  $\varphi \circ \psi = \text{id}$  と  $\psi \circ \varphi = \text{id}$  を示せばよい. 前者は  $x \in P(a)$  に対して

$$\varphi \circ \psi(x) = \varphi(\psi(x)) = \psi(x)_a(\text{id}_a) = P(\text{id}_a)(x) = \text{id}(x) = x$$

だからよい. 後者は  $\alpha: y(a) \Rightarrow P$  を自然変換とすると,  $\psi \circ \varphi(\alpha) = \psi(\alpha_a(\text{id}_a))$  だったから  $\psi(\alpha_a(\text{id}_a)) = \alpha$  を示せばよい. その為には  $s \in C$  に対して  $\psi(\alpha_a(\text{id}_a))_s = \alpha_s$  を示せばよい.  $\alpha$  が自然変換だから,  $f: s \rightarrow a$  に対して次が可換である.

$$\begin{array}{ccc}
 s & \text{Hom}_C(s, a) & \xrightarrow{\alpha_s} & P_s & & f & \xrightarrow{\alpha_s} & \alpha_s(f) \\
 \downarrow f & \uparrow -\circ f & & \uparrow Pf & & \uparrow -\circ f & & \uparrow Pf \\
 a & \text{Hom}_C(a, a) & \xrightarrow{\alpha_a} & P_a & & \text{id}_a & \xrightarrow{\alpha_a} & \alpha_a(\text{id}_a) \\
 & & & & & & & \downarrow Pf
 \end{array}$$

故に  $\psi(\alpha_a(\text{id}_a))_s(f) = Pf(\alpha_a(\text{id}_a)) = \alpha_s(f)$  となり,  $\psi(\alpha_a(\text{id}_a))_s = \alpha_s$  が分かった.  $\square$

$C$  として  $C^{\text{op}}$  を考えれば,  $P: C \rightarrow \mathbf{Set}$  に対して  $\text{Hom}_{\mathbf{Set}^C}(\text{Hom}_C(a, -), P) \cong P(a)$  となることも分かる.

系 2.  $y: C \rightarrow \widehat{C}$  は忠実充満である.

証明.  $a, b \in C$  とする. 定理 1 で  $P := y(b)$  とすれば  $\text{Hom}_{\widehat{C}}(y(a), y(b)) \cong \text{Hom}_C(a, b)$  を得る. 定理 1 の証明より, この同型は  $\psi_{a, y(b)}: \text{Hom}_C(a, b) \rightarrow \text{Hom}_{\widehat{C}}(y(a), y(b))$  で与えられる. この  $\psi_{a, y(b)}$  が  $y: \text{Hom}_C(a, b) \rightarrow \text{Hom}_{\widehat{C}}(y(a), y(b))$  に一致することを示せばよい. その為には  $f \in \text{Hom}_C(a, b)$  に対して, 自然変換の等式  $\psi_{a, y(b)}(f) = y(f)$  を示せばよい.

定義から  $s \in C$ ,  $g \in \text{Hom}_C(s, a)$  に対して

$$\psi_{a,y(b)}(f)_s(g) = (y(b)(g))(f) = (\text{Hom}(g, b))(f) = f \circ g$$

である. 故に  $y(f)$  の定義から  $y(f) = \psi_{a,y(b)}(f)$  が分かる. □

また忠実充満関手の性質 (「自然変換・圏同値」の PDF を参照) から次が分かる.

**系 3.**  $y(a) \cong y(b)$  ならば  $a \cong b$  である. □

ここで,  $y(a) \cong y(b)$  というのは勿論自然同型を表している. そこで, 自然同型であるという条件を具体的に書き下すと次の定理が得られる.

**定理 4.**  $C$  を圏,  $a, b \in C$  とする.  $x \in C$  について自然に  $\text{Hom}_C(x, a) \cong \text{Hom}_C(x, b)$  ならば,  $a \cong b$  である. □

双対を考えれば次の定理も得られる.

**定理 5.**  $C$  を圏,  $a, b \in C$  とする.  $x \in C$  について自然に  $\text{Hom}_C(a, x) \cong \text{Hom}_C(b, x)$  ならば,  $a \cong b$  である. □

即ち, 圏の対象が同型であるかどうかは, 射の集合によって決定されるのである. (これは非常に良く使う重要な事実である.)

もう少し強い主張として, 次のようなことも言える.

**命題 6.**  $P, Q: C \rightarrow D$  を関手とする. このとき対象  $c \in C$ ,  $d \in D$  について自然な同型  $\text{Hom}_D(d, Pc) \cong \text{Hom}_D(d, Qc)$  が成り立つならば  $P \cong Q$  である.

**証明.**  $\theta_{cd}: \text{Hom}_D(d, Pc) \rightarrow \text{Hom}_D(d, Qc)$  を  $c \in C$ ,  $d \in D$  について自然な同型とする. このとき  $c \in C$  に対して, 定理 4 より同型  $Pc \cong Qc$  が成り立つ. この同型  $\sigma_c: Pc \rightarrow Qc$  は, 上記の証明によれば  $\theta_{cd} = \sigma_c \circ -$  を満たすように取ることができる. この  $\sigma_c$  が  $c \in C$  について自然であることを示せばよい. そこで  $f: c \rightarrow c'$  を  $C$  の射とすると,  $\theta_{cd}$  が  $c$  について自然だから次の図式が可換である.

$$\begin{array}{ccc}
 c & \text{Hom}_D(Pc, Pc) & \xrightarrow{\theta_{c,Pc}} & \text{Hom}_D(Pc, Qc) & & \text{id}_{Pc} & \xrightarrow{\theta_{Pc,c}} & \sigma_c \\
 \downarrow f & \downarrow Pf \circ - & & \downarrow Qf \circ - & & \downarrow Pf \circ - & & \downarrow Qf \circ - \\
 c' & \text{Hom}_D(Pc, Pc') & \xrightarrow{\theta_{c',Pc}} & \text{Hom}_D(Pc, Qc) & & Pf & \xrightarrow{\theta_{c'}} & \sigma_{c'} \circ Pf
 \end{array}$$

従って  $\text{id}_{Pc} \in \text{Hom}_D(Pc, Pc)$  の行き先を考えれば  $\sigma_{c'} \circ Pf = Qf \circ \sigma_c$  が分かる.

$$\begin{array}{ccc} Pc & \xrightarrow{\sigma_c} & Qc \\ Pf \downarrow & & \downarrow Qf \\ Pc' & \xrightarrow{\sigma_{c'}} & Qc' \end{array}$$

つまり  $\sigma_c$  は  $c \in C$  について自然である. □

さて最後に, 米田の補題による同型が自然であるということを示そう.

**定理 7.** 定理 1 で得られた全単射  $\varphi_{a,P}: \text{Hom}_{\widehat{C}}(y(a), P) \rightarrow P(a)$  は  $a$  について自然である. 即ち,  $\varphi_{a,P}$  は自然同型  $\text{Hom}_{\widehat{C}}(y(-), P) \Rightarrow P$  を与える.

**証明.**  $C$  の射  $f: a \rightarrow b$  に対して, 次が可換になればよい.

$$\begin{array}{ccccc} a & \text{Hom}_{\widehat{C}}(y(a), P) & \xrightarrow{\varphi_{a,P}} & Pa & \\ f \downarrow & \uparrow - \circ y(f) & & \uparrow Pf & \\ b & \text{Hom}_{\widehat{C}}(y(b), P) & \xrightarrow{\varphi_{b,P}} & Pb & \end{array}$$

よって  $\alpha \in \text{Hom}_{\widehat{C}}(y(b), P)$  に対して  $Pf(\varphi_{b,P}(\alpha)) = \varphi_{a,P}(\alpha \circ y(f))$  を示せばよい. まず  $\varphi_{b,P}$  の定義から  $Pf(\varphi_{b,P}(\alpha)) = Pf(\alpha_b(\text{id}_b))$  である. 一方

$$\begin{aligned} \varphi_{a,P}(\alpha \circ y(f)) &= (\alpha \circ y(f))_a(\text{id}_a) = (\alpha_a \circ y(f)_a)(\text{id}_a) = \alpha_a(y(f)_a(\text{id}_a)) \\ &= \alpha_a(\text{Hom}_C(a, f)(\text{id}_a)) = \alpha_a(f) \end{aligned}$$

となる. ここで  $\alpha: y(b) \Rightarrow P$  が自然変換であるから, 次が可換である.

$$\begin{array}{ccccc} a & \text{Hom}_C(a, b) & \xrightarrow{\alpha_a} & Pa & \\ f \downarrow & \uparrow - \circ f & & \uparrow Pf & \\ b & \text{Hom}_C(b, b) & \xrightarrow{\alpha_b} & Pb & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} f \vdash & \xrightarrow{\alpha_a} & \alpha_a(f) \\ & & \uparrow Pf \\ - \circ f \vdash & & Pf(\alpha_b(\text{id}_b)) \\ & & \uparrow Pf \\ \text{id}_b \vdash & \xrightarrow{\alpha_b} & \alpha_b(\text{id}_b) \end{array}$$

よって  $\alpha_a(f) = Pf(\alpha_b(\text{id}_b))$  となり,  $Pf(\varphi_{b,P}(\alpha)) = \varphi_{a,P}(\alpha \circ y(f))$  が分かった. □

**定理 8.** 定理 1 で得られた全単射  $\varphi_{a,P}: \text{Hom}_{\widehat{C}}(y(a), P) \rightarrow P(a)$  は  $P$  についても自然である. 即ち, 自然同型  $\text{Hom}_{\widehat{C}}(y(a), -) \Rightarrow \text{ev}_a$  が得られる.

証明. 自然変換  $\theta: P \Rightarrow Q$  に対して, 次の図式が可換になればよい.

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{\widehat{C}}(y(a), P) & \xrightarrow{\varphi_{a,P}} & Pa \\ \theta \circ - \downarrow & & \downarrow \theta_a \\ \mathrm{Hom}_{\widehat{C}}(y(a), Q) & \xrightarrow{\varphi_{a,Q}} & Qa \end{array}$$

よって  $\alpha \in \mathrm{Hom}_{\widehat{C}}(y(a), P)$  に対して  $\theta_a(\varphi_{a,P}(\alpha)) = \varphi_{a,Q}(\theta \circ \alpha)$  を示せばよいが, それは

$$\begin{aligned} \theta_a(\varphi_{a,P}(\alpha)) &= \theta_a(\alpha_a(\mathrm{id}_a)) \\ \varphi_{a,Q}(\theta \circ \alpha) &= (\theta_a \circ \alpha_a)(\mathrm{id}_a) \end{aligned}$$

だから成り立つ. □