米田の補題

alg-d
http://alg-d.com/math/kan_extension/

2018 年 4 月 11 日

C を圏とする．$a, b \in C$ に対して $\mathrm{Hom}_C(a,b) \in \mathbf{Set}$ だった．よって関数

$$\begin{array}{rccc} F\colon & \mathrm{Ob}(C) & \longrightarrow & \mathrm{Ob}(\mathbf{Set}) \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & b & \longmapsto & \mathrm{Hom}_C(a,b) \end{array}$$

を考えることができる．これは実は関手になる．その為には C の射 $g\colon b \to b'$ に対して写像 $F(g)\colon \mathrm{Hom}_C(a,b) \to \mathrm{Hom}_C(a,b')$ を

$$\begin{array}{rccc} F(g)\colon & \mathrm{Hom}_C(a,b) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_C(a,b') \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & (a \xrightarrow{h} b) & \longmapsto & (a \xrightarrow{h} b \xrightarrow{g} b') \end{array}$$

で定めればよい．

$\because$) この F が関手になっていることを示すには $b \in C$ に対して $F(\mathrm{id}_b) = \mathrm{id}_{Fb}$ と，$b \xrightarrow{g} b' \xrightarrow{g'} b''$ に対して $F(g' \circ g) = Fg' \circ Fg$ を示せばよい．

$h \in \mathrm{Hom}_C(a,b)$ とする．定義より $F(\mathrm{id}_b)(h) = \mathrm{id}_b \circ h = h$ だから $F(\mathrm{id}_b) = \mathrm{id}_{Fb}$ である．また

$$\begin{aligned} (Fg' \circ Fg)(h) &= Fg'(Fg(h)) = Fg'(g \circ h) = g' \circ (g \circ h) \\ &= (g' \circ g) \circ h = F(g' \circ g)(h) \end{aligned}$$

だから $F(g' \circ g) = Fg' \circ Fg$ である．

この関手 F を Hom 関手といい，$\mathrm{Hom}_C(a,-)$ で表す．この記号を使えば $\mathrm{Hom}_C(a,g)$ は写像 $\mathrm{Hom}_C(a,b) \to \mathrm{Hom}_C(a,b')$ であって $\mathrm{Hom}_C(a,g)(h) = g \circ h$ となる．そこで写像 $\mathrm{Hom}_C(a,g)$ を単に $g \circ -$ とも書くことにする．

同様にして関手 $\mathrm{Hom}_C(-,b)\colon C^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ を考えることもできる．つまり $f\colon a' \to a$ に対して

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{Hom}_C(f,b)\colon & \mathrm{Hom}_C(a,b) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_C(a',b) \\ & \cup & & \cup \\ & (a \xrightarrow{h} b) & \longmapsto & (a' \xrightarrow{f} a \xrightarrow{h} b) \end{array}$$

と定めるのである．この $\mathrm{Hom}_C(-,b)$ も Hom 関手という．先の場合と同様 $\mathrm{Hom}_C(f,b)$ を単に $-\circ f$ とも書くことにする．

更に，この二つを組み合わせて考えれば，2 変数の関手 $\mathrm{Hom}_C\colon C^{\mathrm{op}} \times C \to \mathbf{Set}$ を考えることもできる．つまり，$f\colon a' \to a$ と $g\colon b \to b'$ に対して

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{Hom}_C(f,g)\colon & \mathrm{Hom}_C(a,b) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_C(a',b') \\ & \cup & & \cup \\ & (a \xrightarrow{h} b) & \longmapsto & (a' \xrightarrow{f} a \xrightarrow{h} b \xrightarrow{g} b') \end{array}$$

と定義する．この Hom_C が関手となることは容易に分かるであろう．

よって「自然変換・関手圏」の PDF で述べた通り，この関手 $\mathrm{Hom}_C\colon C^{\mathrm{op}} \times C \to \mathbf{Set}$ から関手 $y\colon C \to \mathbf{Set}^{C^{\mathrm{op}}}$ が得られる．つまり $a \in C$ に対して $y(a) = \mathrm{Hom}_C(-,a)$ である．圏 C に対して $\widehat{C} := \mathbf{Set}^{C^{\mathrm{op}}}$ と書き，この関手 $y\colon C \to \widehat{C}$ を米田埋込と呼ぶ．米田埋込は圏論で重要な役割を持つが，まず基本的な性質として次の定理がある．

定理 1 (米田の補題)**.** C を圏，$a \in C$ を対象，$P\colon C^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ を関手とする．このとき全単射 $\varphi_{a,P}\colon \mathrm{Hom}_{\widehat{C}}(y(a),P) \to P(a)$ が存在する．

証明. $\alpha \in \mathrm{Hom}_{\widehat{C}}(y(a),P)$ とすれば，α_a は写像 $\mathrm{Hom}_C(a,a) \to P(a)$ である．そこで写像 $\varphi = \varphi_{a,P}\colon \mathrm{Hom}_{\widehat{C}}(y(a),P) \to P(a)$ を $\varphi(\alpha) := \alpha_a(\mathrm{id}_a)$ で定める．これが全単射であることを示すため，逆写像 $\psi = \psi_{a,P}\colon P(a) \to \mathrm{Hom}_{\widehat{C}}(y(a),P)$ を定義する．

※ そのためには ψ をどのように定義すればよいか，考察してみる．$x \in P(a)$ に対して $\beta = \psi(x)\colon y(a) \Rightarrow P$ が定義できたとする．β はどのような自然変換だろうか．まず $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}$ とならないといけないので，$x = \varphi \circ \psi(x) = \varphi(\beta) = \beta_a(\mathrm{id}_a)$ である．これで $\mathrm{id}_a \in \mathrm{Hom}_C(a,a)$ の行き先 $\beta_a(\mathrm{id}_a)$ は定まった．他の $f \in \mathrm{Hom}_C(a,a)$ の行き先はどうなるであろうか．ここで β が自然変換であることを考えると，次の図式が

可換でなければならない.

$$
\begin{tikzcd}
a \arrow[d, "f"'] & \mathrm{Hom}_C(a,a) \arrow[r, "\beta_a"] & Pa & f \arrow[r, mapsto, "\beta_a"] & \beta_a(f) \\
& & & & Pf(x) \\
a & \mathrm{Hom}_C(a,a) \arrow[uu, "-\circ f"] \arrow[r, "\beta_a"'] & Pa \arrow[uu, "Pf"'] & \mathrm{id}_a \arrow[uu, mapsto, "-\circ f"] \arrow[r, mapsto, "\beta_a"'] & x \arrow[u, mapsto, "Pf"']
\end{tikzcd}
$$

よって $\beta_a(f) = Pf(x)$ でなければならない．こうして β_a は確定した．他の $s \in C$, $f \in \mathrm{Hom}(s,a)$ に対しても同様にして，β_s が以下の可換図式により定まる.

$$
\begin{tikzcd}
s \arrow[d, "f"'] & \mathrm{Hom}_C(s,a) \arrow[r, "\beta_s"] & Ps & f \arrow[r, mapsto, "\beta_s"] & \beta_s(f) \\
& & & & Pf(x) \\
a & \mathrm{Hom}_C(a,a) \arrow[uu, "-\circ f"] \arrow[r, "\beta_a"'] & Pa \arrow[uu, "Pf"'] & \mathrm{id}_a \arrow[uu, mapsto, "-\circ f"] \arrow[r, mapsto, "\beta_a"'] & x \arrow[u, mapsto, "Pf"']
\end{tikzcd}
$$

即ち $\beta_s(f) = Pf(x)$ である.

$x \in P(a)$ に対して $\psi(x)_s \colon \mathrm{Hom}_C(s,a) \to P(s)$ を $\psi(x)_s(f) := Pf(x)$ で定める．このとき $\psi(x)$ は自然変換 $\mathrm{Hom}_C(-,a) \Rightarrow P$ である.

$\because$) $f \colon s \to t$ に対して次が可換であることを示せばよい.

$$
\begin{tikzcd}
s \arrow[d, "f"'] & \mathrm{Hom}_C(s,a) \arrow[r, "\psi(x)_s"] & Ps & g \circ f \arrow[r, mapsto, "\psi(x)_s"] & P(g \circ f)(x) \\
& & & & Pf(Pg(x)) \\
t & \mathrm{Hom}_C(t,a) \arrow[uu, "-\circ f"] \arrow[r, "\psi(x)_t"'] & Pt \arrow[uu, "Pf"'] & g \arrow[uu, mapsto, "-\circ f"] \arrow[r, mapsto, "\psi(x)_t"'] & Pg(x) \arrow[u, mapsto, "Pf"']
\end{tikzcd}
$$

しかしそれは P が関手だから $P(g \circ f)(x) = (Pf \circ Pg)(x) = Pf(Pg(x))$ となり明らか.

後は $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}$ と $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}$ を示せばよい．前者は $x \in P(a)$ に対して

$$\varphi \circ \psi(x) = \varphi(\psi(x)) = \psi(x)_a(\mathrm{id}_a) = P(\mathrm{id}_a)(x) = \mathrm{id}(x) = x$$

だからよい．後者は $\alpha \colon y(a) \Rightarrow P$ を自然変換とすると，$\psi \circ \varphi(\alpha) = \psi(\alpha_a(\mathrm{id}_a))$ だったか

ら $\psi(\alpha_a(\mathrm{id}_a)) = \alpha$ を示せばよい．その為には $s \in C$ に対して $\psi(\alpha_a(\mathrm{id}_a))_s = \alpha_s$ を示せばよい．α が自然変換だから，$f \in \mathrm{Hom}_C(s,a)$ に対して次が可換である．

$$
\begin{tikzcd}
s \arrow[d, "f"'] & \mathrm{Hom}_C(s,a) \arrow[r, "\alpha_s"] & Ps & f \arrow[r, mapsto, "\alpha_s"] & \alpha_s(f) \\
& & & & Pf(\alpha_a(\mathrm{id}_a)) \\
a & \mathrm{Hom}_C(a,a) \arrow[r, "\alpha_a"'] \arrow[uu, "-\circ f"] & Pa \arrow[uu, "Pf"'] & \mathrm{id}_a \arrow[r, mapsto, "\alpha_a"'] \arrow[uu, mapsto, "-\circ f"] & \alpha_a(\mathrm{id}_a) \arrow[u, mapsto, "Pf"']
\end{tikzcd}
$$

故に $\psi(\alpha_a(\mathrm{id}_a))_s(f) = Pf(\alpha_a(\mathrm{id}_a)) = \alpha_s(f)$ となることが分かり，$\psi(\alpha_a(\mathrm{id}_a))_s = \alpha_s$ である． $\square$

C として C^{op} を考えれば，$P\colon C \to \mathbf{Set}$ に対して $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}^C}(\mathrm{Hom}_C(a,-), P) \cong P(a)$ となることも分かる．

系 2. $y\colon C \to \widehat{C}$ は忠実充満である．

証明. $a, b \in C$ とする．定理 1 で $P := y(b)$ とすれば $\mathrm{Hom}_{\widehat{C}}(y(a), y(b)) \cong \mathrm{Hom}_C(a,b)$ を得る．定理 1 の証明より，この同型は $\psi_{a,y(b)}\colon \mathrm{Hom}_C(a,b) \to \mathrm{Hom}_{\widehat{C}}(y(a), y(b))$ で与えられる．この $\psi_{a,y(b)}$ が $y\colon \mathrm{Hom}_C(a,b) \to \mathrm{Hom}_{\widehat{C}}(y(a), y(b))$ に一致することを示せばよい．その為には $f \in \mathrm{Hom}_C(a,b)$ に対して，自然変換の等式 $\psi_{a,y(b)}(f) = y(f)$ を示せばよい．

定義から $s \in C$，$g \in \mathrm{Hom}_C(s,a)$ に対して

$$\psi_{a,y(b)}(f)_s(g) = \big(y(b)(g)\big)(f) = \big(\mathrm{Hom}(g,b)\big)(f) = f \circ g$$

である．故に $y(f)$ の定義から $y(f) = \psi_{a,y(b)}(f)$ が分かる． $\square$

また忠実充満関手の性質 (「自然変換・圏同値」の PDF を参照) から次が分かる．

系 3. $y(a) \cong y(b)$ ならば $a \cong b$ である． $\square$

ここで，$y(a) \cong y(b)$ というのは勿論自然同型を表している．そこで，自然同型であるという条件を具体的に書き下すと次の定理が得られる．

定理 4. C を圏，$a, b \in C$ とする．$x \in C$ について自然に $\mathrm{Hom}_C(x,a) \cong \mathrm{Hom}_C(x,b)$ ならば，$a \cong b$ である． $\square$

双対を考えれば次の定理も得られる．

定理 5. C を圏，$a, b \in C$ とする．$x \in C$ について自然に $\mathrm{Hom}_C(a, x) \cong \mathrm{Hom}_C(b, x)$ ならば，$a \cong b$ である． □

即ち，圏の対象が同型であるかどうかは，射の集合によって決定されるのである．(これは非常に良く使う重要な事実である．)

定理 6. 定理 1 で得られた全単射 $\varphi_{a,P}\colon \mathrm{Hom}_{\widehat{C}}(y(a), P) \to P(a)$ は a について自然である．即ち，$\varphi_{a,P}$ は自然同型 $\mathrm{Hom}_{\widehat{C}}(y(-), P) \Rightarrow P$ を与える．

証明. C の射 $f\colon a \to b$ に対して，次が可換になればよい．

$$
\begin{tikzcd}
a \arrow[d, "f"'] & \mathrm{Hom}_{\widehat{C}}(y(a), P) \arrow[r, "\varphi_{a,P}"] & Pa \\
b & \mathrm{Hom}_{\widehat{C}}(y(b), P) \arrow[r, "\varphi_{b,P}"'] \arrow[u, "- \circ y(f)"] & Pb \arrow[u, "Pf"']
\end{tikzcd}
$$

よって $\alpha \in \mathrm{Hom}_{\widehat{C}}(y(b), P)$ に対して $Pf(\varphi_{b,P}(\alpha)) = \varphi_{a,P}(\alpha \circ y(f))$ を示せばよい．まず $\varphi_{b,P}$ の定義から $Pf(\varphi_{b,P}(\alpha)) = Pf(\alpha_b(\mathrm{id}_b))$ である．一方

$$
\begin{aligned}
\varphi_{a,P}(\alpha \circ y(f)) &= \big(\alpha \circ y(f)\big)_a(\mathrm{id}_a) = \big(\alpha_a \circ y(f)_a\big)(\mathrm{id}_a) = \alpha_a\big(y(f)_a(\mathrm{id}_a)\big) \\
&= \alpha_a\big(\mathrm{Hom}_C(a, f)(\mathrm{id}_a)\big) = \alpha_a(f)
\end{aligned}
$$

となる．ここで $\alpha\colon y(b) \Rightarrow P$ が自然変換であるから，次が可換である．

$$
\begin{tikzcd}
a \arrow[d, "f"'] & \mathrm{Hom}_C(a, b) \arrow[r, "\alpha_a"] & Pa & f \arrow[r, mapsto, "\alpha_a"] & \alpha_a(f) \\
 & & & & Pf(\alpha_b(\mathrm{id}_b)) \\
b & \mathrm{Hom}_C(b, b) \arrow[r, "\alpha_b"'] \arrow[uu, "- \circ f"] & Pb \arrow[uu, "Pf"'] & \mathrm{id}_b \arrow[r, mapsto, "\alpha_b"'] \arrow[uu, mapsto, "- \circ f"] & \alpha_b(\mathrm{id}_b) \arrow[u, mapsto, "Pf"']
\end{tikzcd}
$$

よって $\alpha_a(f) = Pf(\alpha_b(\mathrm{id}_b))$ となり，$Pf(\varphi_{b,P}(\alpha)) = \varphi_{a,P}(\alpha \circ y(f))$ が分かった． □

定理 7. 定理 1 で得られた全単射 $\varphi_{a,P}\colon \mathrm{Hom}_{\widehat{C}}(y(a), P) \to P(a)$ は P についても自然である．即ち，自然同型 $\mathrm{Hom}_{\widehat{C}}(y(a), -) \Rightarrow \mathrm{ev}_a$ が得られる．

証明. 自然変換 $\theta\colon P \Rightarrow Q$ に対して，次の図式が可換になればよい．

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\widehat{C}}(y(a),P) \arrow[r, "\varphi_{a,P}"] \arrow[d, "\theta\circ -"'] & Pa \arrow[d, "\theta_a"] \\
\mathrm{Hom}_{\widehat{C}}(y(a),Q) \arrow[r, "\varphi_{a,Q}"'] & Qa
\end{tikzcd}$$

よって $\alpha \in \mathrm{Hom}_{\widehat{C}}(y(a),P)$ に対して $\theta_a(\varphi_{a,P}(\alpha)) = \varphi_{a,Q}(\theta\circ\alpha)$ を示せばよいが，それは

$$\begin{aligned}
\theta_a(\varphi_{a,P}(\alpha)) &= \theta_a(\alpha_a(\mathrm{id}_a)) \\
\varphi_{a,Q}(\theta\circ\alpha) &= (\theta_a\circ\alpha_a)(\mathrm{id}_a)
\end{aligned}$$

だから成り立つ． □