

普遍性

alg-d

http://alg-d.com/math/kan_extension/

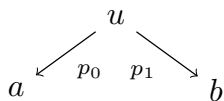
2017年4月27日

圏論で重要な考え方の一つが普遍性 (universal property) である。普遍性を使うと、与えられた圏 C の中で様々な「構成」が可能となる。

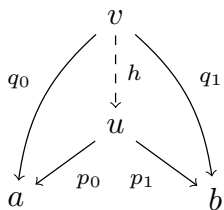
例えば「構成」の例として、Set, Grp, Top などの多くの圏においては、二つの対象 a, b が与えられたときに直積と呼ばれる新しい対象 $a \times b$ が定義される。実は、一般の圏 C においても (存在するかは分からないが) 直積が定義されるのである。まずはそれを見てみよう。

定義. C を圏, $a, b \in C$ を対象とする。 a と b の直積 (product) とは、三つ組 $\langle u, p_0, p_1 \rangle$ であって以下の条件を満たすものである。

- (1) u は C の対象である。
- (2) $p_0: u \rightarrow a, p_1: u \rightarrow b$ は C の射である。



- (3) $\langle v, q_0, q_1 \rangle$ が同じ条件 (即ち, v が対象で $q_0: v \rightarrow a, q_1: v \rightarrow b$ が射となる) を満たすならば, 射 $h: v \rightarrow u$ が一意に存在して $q_0 = p_0 \circ h, q_1 = p_1 \circ h$ となる。即ち次の図式が可換である。

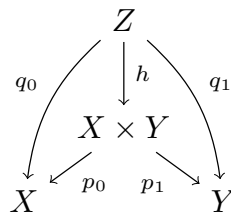


この三番目の「同じ条件を満たすものがあるならば、射が一意的に存在して可換となる」という条件が重要で、このような形の条件を普遍性 (universal property) と呼ぶ。この場合は直積の定義に現れている普遍性なので、条件 (3) を「直積の普遍性」などと呼ぶ。また、定義にあるように、直積とは三つ組 $\langle u, p_0, p_1 \rangle$ のことなのであるが、単に u を直積と呼ぶことも多い。この場合 p_0, p_1 に当たる射は明示されていないが、暗黙のうちに与えられているのである。

まずは例をいくつか見てみよう。

例 1. 集合の圏 Set の場合、通常の意味での直積が、上で定義した意味での直積となる。詳しく言えば、 $X, Y \in \text{Set}$ に対して $X \times Y$ を直積集合、 $p_0: X \times Y \rightarrow X$ 、 $p_1: X \times Y \rightarrow Y$ を標準射影としたとき $\langle X \times Y, p_0, p_1 \rangle$ が X と Y の直積である。

それを示すため集合 $Z \in \text{Set}$ と写像 $q_0: Z \rightarrow X$ 、 $q_1: Z \rightarrow Y$ を任意に取る。このとき写像 $h: Z \rightarrow X \times Y$ を $h(a) := \langle q_0(a), q_1(a) \rangle \in X \times Y$ で定義する。



明らかに $q_0 = p_0 \circ h$ 、 $q_1 = p_1 \circ h$ を満たす。また可換性を満たす h がこれ一つしかないことも明らかである。故に $\langle X \times Y, p_0, p_1 \rangle$ が X と Y の直積である。 □

例 2. 群の圏 Grp の直積は、通常の意味での直積である。 □

例 3. 位相空間の圏 Top の直積は、通常の意味での直積位相空間である。 □

例 4. 順序集合 (X, \leq) を圏とみなす。 $a, b \in X$ の直積を考える。 a と b の直積 $\langle u, p_0, p_1 \rangle$ の定義を、圏 X の射の定義を使って書き直すと以下のようなになる。

- (1) $u \in X$ である。
- (2) $u \leq a$ 、 $u \leq b$ である。
- (3) $v \in X$ が $v \leq a$ 、 $v \leq b$ を満たすならば $v \leq u$ である。

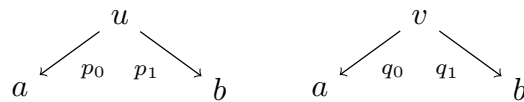
即ち、 u は $\{a, b\}$ の下限 (= 最大下界) である。つまりこの場合、直積は存在しない可能性がある。もし (X, \leq) が全順序集合ならば、直積は常に存在して、 $\min\{a, b\}$ が a, b の直積となる。 □

例 5. X を集合として冪集合 $\mathcal{P}(X)$ を考える．これは包含関係 \subset により順序集合となる．故に直積は下限だから， $Y, Z \in \mathcal{P}(X)$ の直積は共通部分 $Y \cap Z$ となることが分かる．従ってこの場合は直積は常に存在する． \square

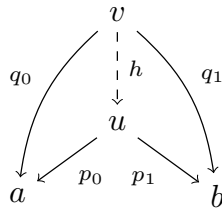
C を圏， $a, b \in C$ を対象とする．このとき一般には a と b の直積は存在するか分からないし，例え存在したとしても唯一つとは限らない．しかし実は普遍性を使うと次の命題を示すことができる．

命題 6. C を圏， $a, b \in C$ を対象とする． $\langle u, p_0, p_1 \rangle$ ， $\langle v, q_0, q_1 \rangle$ を a と b の直積とする．このとき同型 $u \cong v$ が成り立つ．

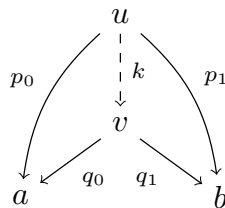
証明. $\langle u, p_0, p_1 \rangle$ ， $\langle v, q_0, q_1 \rangle$ を a と b の直積とすると次の 2 つの図式を得る．



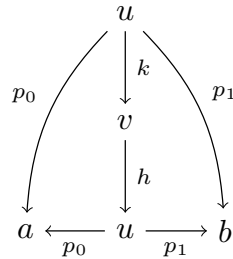
さて，まず $\langle u, p_0, p_1 \rangle$ が a と b の直積だから，直積の普遍性により，射 $h: v \rightarrow u$ が一意に存在して次が可換となる．



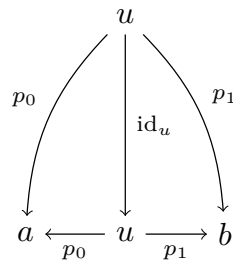
次に $\langle v, q_0, q_1 \rangle$ の普遍性から，射 $k: u \rightarrow v$ が一意に存在して次が可換となる．



この二つを組み合わせて次の可換図式を得る .



一方 , 次の図式は可換である .



故に $\langle u, p_0, p_1 \rangle$ の普遍性から $h \circ k = \text{id}_u$ でなければならない . 同様に $k \circ h = \text{id}_v$ も分かる . 従って $u \cong v$ である . \square

つまり , a と b の直積は , もし存在すれば同型を除いて一意なのである . そこで a と b の直積が存在するとき , そのうちのひとつ $\langle u, p_0, p_1 \rangle$ を取り , この u を $a \times b$ と書く . $a \times b$ は一意には定まらないけれども , どれを取ったとしても全て同型となっているので特に困らないわけである .

さて , 直積と同じように , 普遍性を使って定義される概念は他にも色々あるので , 代表的なものを紹介する .

定義 . 圏 C の終対象 (terminal object または final object) とは , 以下を満たす u である .

- (1) u は C の対象である .
- (2) v が同じ条件 (即ち , v が C の対象となる) を満たすならば , 射 $h: v \rightarrow u$ が一意に存在する .

※ 直積の定義と同じ形式で書いたため少し分かりにくくなってしまったが , 要するに

u が終対象 \iff 任意の $v \in C$ に対して射 $v \rightarrow u$ が一意に存在する

である . また , 終対象は記号 1 で表すことが多い .

定義. C を圏, $a, b, c \in C$ を対象, $f: a \rightarrow c, g: b \rightarrow c$ を射とする.

$$\begin{array}{ccc} & b & \\ & \downarrow g & \\ a & \xrightarrow{f} & c \end{array}$$

f と g の pullback とは, 三つ組 $\langle u, p_0, p_1 \rangle$ であって以下の条件を満たすものである.

- (1) u は C の対象である.
- (2) $p_0: u \rightarrow a, p_1: u \rightarrow b$ は C の射で, $f \circ p_0 = g \circ p_1$ を満たす (即ち次の図式が可換である).

$$\begin{array}{ccc} u & \xrightarrow{p_1} & b \\ p_0 \downarrow & & \downarrow g \\ a & \xrightarrow{f} & c \end{array}$$

- (3) $\langle v, q_0, q_1 \rangle$ が同じ条件 (即ち, v が対象で $q_0: v \rightarrow a, q_1: v \rightarrow b$ が射で, $f \circ q_0 = g \circ q_1$ となる) を満たすならば, 射 $h: v \rightarrow u$ が一意に存在して $q_0 = p_0 \circ h, q_1 = p_1 \circ h$ となる. 即ち次の図式が可換である.

$$\begin{array}{ccccc} v & & & & b \\ & \searrow q_1 & & & \downarrow g \\ & & u & \xrightarrow{p_1} & b \\ & & p_0 \downarrow & & \downarrow g \\ & & a & \xrightarrow{f} & c \\ & \swarrow q_0 & & & \\ v & & & & \end{array}$$

(Note: The diagram above is a simplified representation of the commutative diagram in the image. The image shows a larger diagram with v at the top left, u and b in the middle, and a and c at the bottom. Arrows include q_1 from v to b , q_0 from v to a , p_1 from u to b , p_0 from u to a , f from a to c , and g from b to c . A dashed arrow h points from v to u , and a solid arrow h points from v to u along the left edge.)

u を記号 $a \times_c b$ で表す.

※ 図式

$$\begin{array}{ccc} u & \xrightarrow{p_1} & b \\ p_0 \downarrow & & \downarrow g \\ a & \xrightarrow{f} & c \end{array}$$

において u が pullback になっていることを表すために

$$\begin{array}{ccc}
 u & \xrightarrow{p_1} & b \\
 p_0 \downarrow & \lrcorner & \downarrow g \\
 a & \xrightarrow{f} & c
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 u & \xrightarrow{p_1} & b \\
 p_0 \downarrow & \text{p.b.} & \downarrow g \\
 a & \xrightarrow{f} & c
 \end{array}$$

などのような表記を使うことがある。

定義. C を圏, $a, b \in C$ を対象, $f, g: a \rightarrow b$ を射とする. f と g の equalizer とは, 二つ組 $\langle u, e \rangle$ であって以下の条件を満たすものである.

- (1) u は C の対象である.
- (2) $e: u \rightarrow a$ は C の射で, $f \circ e = g \circ e$ を満たす.

$$u \xrightarrow{e} a \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} b$$

- (3) $\langle v, e' \rangle$ が同じ条件 (即ち, v が対象で $e': v \rightarrow a$ が射で, $f \circ e' = g \circ e'$ となる) を満たすならば, 射 $h: v \rightarrow u$ が一意に存在して $e' = e \circ h$ となる. 即ち次の図式が可換である.

$$\begin{array}{ccc}
 u & \xrightarrow{e} & a \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} b \\
 \nearrow h & & \nearrow e' \\
 v & &
 \end{array}$$

終対象, pullback, equalizer も, 直積と同様の方法で, 存在すれば同型を除いて一意となることが分かる.

例 7. 集合の圏 Set の場合. 終対象は一元集合 $1 = \{*\}$ である.

X, Y, Z を集合, $X \xrightarrow{f} Z \xleftarrow{g} Y$ を写像とするとき pullback $X \times_Z Y$ は $X \times_Z Y := \{(a, b) \in X \times Y \mid f(a) = g(b)\}$ と定義すればよい. (p_0, p_1 は射影とする.)

$f, g: X \rightarrow Y$ を写像とするとき, f, g の equalizer は $U := \{a \in X \mid f(a) = g(a)\}$ とし, 包含写像 $i: U \rightarrow X$ で与えられる. \square

例 8. アーベル群の圏 Ab を考える. 終対象は自明なアーベル群 0 である. A, B をアーベル群として, $f: A \rightarrow B$ を準同型とする. また準同型 $0: A \rightarrow B$ を $0(x) := 0$ で定

義する．このとき $i: \ker(f) \rightarrow A$ を包含写像としたとき図式

$$\ker(f) \xrightarrow{i} A \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{0} \end{array} B$$

を得る．このとき $\langle \ker(f), i \rangle$ が f と 0 の equalizer であることが分かる． □

練習のため，普遍性を使って示せる命題をいくつか示してみる．

命題 9. 図式

$$\begin{array}{ccccc} a & \xrightarrow{\quad} & b & \xrightarrow{\quad} & c \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ x & \xrightarrow{\quad} & y & \xrightarrow{\quad} & z \end{array}$$

において右の四角が pullback を与えているとする．このとき

左の四角が pullback を与える \iff 外側の四角が pullback を与える

証明. (\implies) 左の四角が pullback を与えるとする．外側の四角が pullback を与えることを示すため，次の射を可換になるように取る．

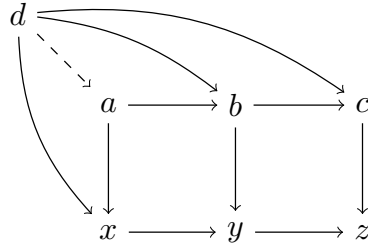
$$\begin{array}{ccccc} & & & & d \\ & & & & \downarrow \\ & & & & \downarrow \\ & & & & \downarrow \\ d & \xrightarrow{\quad} & c & & \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ a & \xrightarrow{\quad} & b & \xrightarrow{\quad} & c \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ x & \xrightarrow{\quad} & y & \xrightarrow{\quad} & z \end{array}$$

図式を可換にする射 $d \rightarrow a$ が一意に存在することを示せばよい．

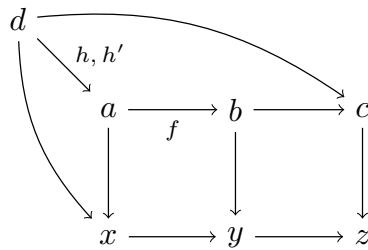
まず射の存在を示す．右の四角が pullback だから，射 $d \rightarrow b$ が一意に存在して可換となる．

$$\begin{array}{ccccc} & & & & d \\ & & & & \downarrow \\ & & & & \downarrow \\ & & & & \downarrow \\ d & \xrightarrow{\quad} & c & & \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ a & \xrightarrow{\quad} & b & \xrightarrow{\quad} & c \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ x & \xrightarrow{\quad} & y & \xrightarrow{\quad} & z \end{array}$$

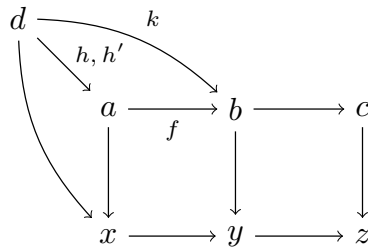
よって、左の四角が pullback だから、射 $d \rightarrow a$ が一意に存在して可換となる。



故に射が存在することは示せた。一意性を示すため、 $h, h': d \rightarrow a$ を、次の図式を可換にする射とする。

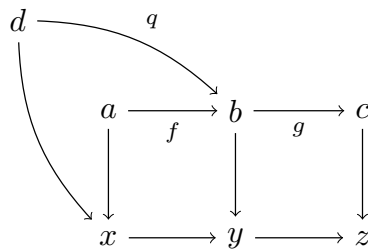


右の四角が pullback だから、その普遍性より $f \circ h = f \circ h'$ でなければならない。
 $k := f \circ h$ とすれば次の可換図式を得る。



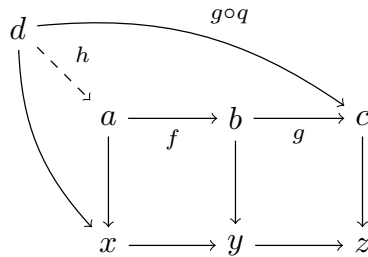
左の四角が pullback だから、その普遍性より $h = h'$ が分かる。

(\Leftarrow) 外側の四角が pullback であるとする。左の四角が pullback を与えることを示すため、次の射を可換になるように取る。

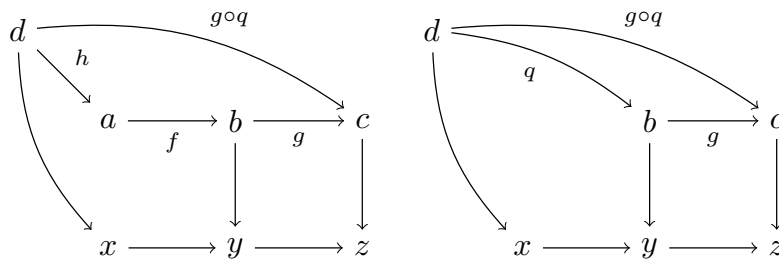


図式を可換にする射 $d \rightarrow a$ が一意に存在することを示せばよい。

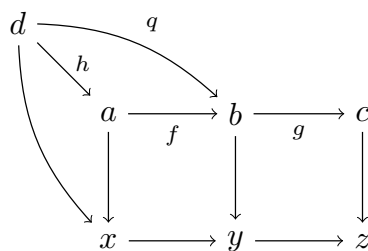
まず射が存在することを示す。合成 $g \circ q$ を考えれば次の実線の可換図式を得るから、外側の pullback の普遍性により点線の射 $h: d \rightarrow a$ を得る。



よって次の二つの可換図式が得られたことになる。



右の四角が pullback だから、その普遍性により $f \circ h = q$ であることが分かる。即ち次の図式は可換であり、 $d \rightarrow a$ の存在が分かった。



一意性は外側の pullback の普遍性から明らか。 □

定義. C を圏とする。

- (1) C が直積を持つ \iff 任意の対象 $a, b \in C$ の直積が存在する。
- (2) C が pullback を持つ \iff 任意の $a \xrightarrow{f} c \xleftarrow{g} b$ の pullback が存在する。
- (3) C が equalizer を持つ \iff 任意の $f, g: a \rightarrow b$ の equalizer が存在する。

命題 10. 圏 C が直積と equalizer を持つとき、pullback を持つ。

証明. $f: a \rightarrow c, g: b \rightarrow c$ を C の射とする. a と b の直積 $\langle a \times b, p_0, p_1 \rangle$ を取り, $f \circ p_0, g \circ p_1: a \times b \rightarrow c$ の equalizer を $\langle u, e \rangle$ とする.

$$\begin{array}{ccccc} u & \xrightarrow{e} & a \times b & \xrightarrow{p_1} & b \\ & & \downarrow p_0 & & \downarrow g \\ & & a & \xrightarrow{f} & c \end{array}$$

$\langle u, p_0 \circ e, p_1 \circ e \rangle$ が f と g の pullback であることを示そう.

その為に $f \circ q_0 = g \circ q_1$ を満たすような v, q_0, q_1 を取る.

$$\begin{array}{ccccc} v & & & & \\ & \searrow^{q_1} & & & \\ & & u & \xrightarrow{e} & a \times b & \xrightarrow{p_1} & b \\ & & \downarrow p_0 & & \downarrow g \\ & \searrow^{q_0} & & & a & \xrightarrow{f} & c \end{array}$$

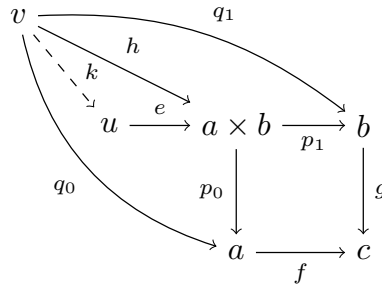
$v \rightarrow u$ が一意に存在すればよい.

まず射の存在を示す. 直積 $a \times b$ の普遍性から, $h: v \rightarrow a \times b$ が存在して $p_0 \circ h = q_0, p_1 \circ h = q_1$ となる.

$$\begin{array}{ccccc} v & & & & \\ & \searrow^{q_1} & & & \\ & \searrow^{h} & & & \\ & & u & \xrightarrow{e} & a \times b & \xrightarrow{p_1} & b \\ & & \downarrow p_0 & & \downarrow g \\ & \searrow^{q_0} & & & a & \xrightarrow{f} & c \end{array}$$

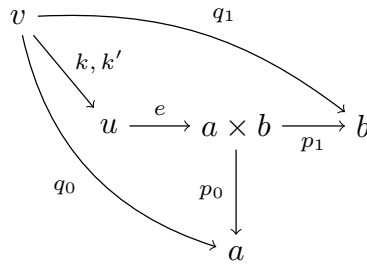
よって $(f \circ p_0) \circ h = (g \circ p_1) \circ h$ となるから, equalizer e の普遍性により, $k: v \rightarrow u$

が存在して $e \circ k = h$ となる .

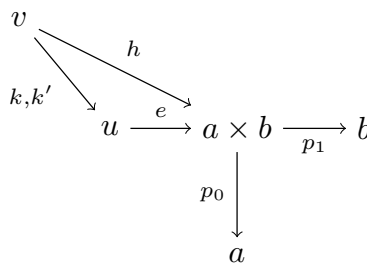


故に存在が分かった .

一意性を示す . $k, k' : v \rightarrow u$ を次を可換とする射とする .



直積 $a \times b$ の普遍性から $e \circ k = e \circ k'$ である . よって $h := e \circ k$ とすれば次の図式が可換である .

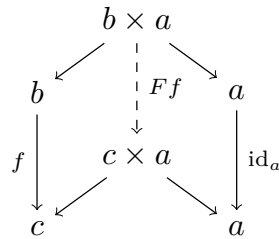


equalizer e の普遍性から $k = k'$ が分かる . □

命題 11. C を直積を持つ圏として , 対象 $a \in C$ を取る . このとき「右から a を直積する関数」 $F : \text{Ob}(C) \ni b \mapsto b \times a \in \text{Ob}(C)$ は関手 $F : C \rightarrow C$ を定める .

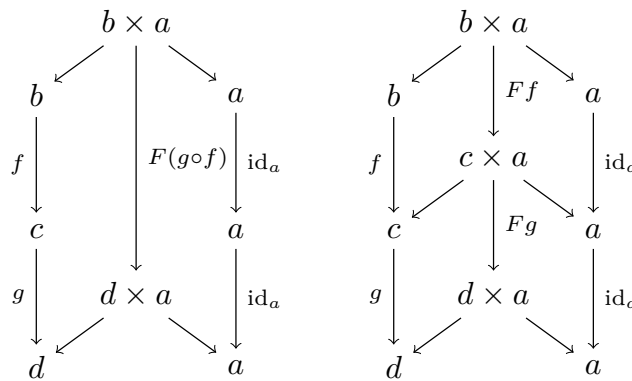
証明. まず関手 F を定義しよう . $f : b \rightarrow c$ を C の射とするとき次の図式の実線部分を考えれば , 直積 $c \times a$ の普遍性から , 図式を可換にする点線の射が一意に存在する . これ

を Ff と定める .



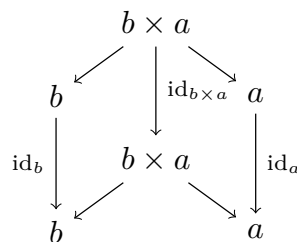
この定義により F が関手となることを示せばよい .

まず $f: b \rightarrow c, g: c \rightarrow d$ とする . $F(g \circ f) = Fg \circ Ff$ を示す . 定義から , $F(g \circ f)$ は次の左の図式を可換とするような射である . 一方 , Ff と Fg の定義から右の図式も可換である .



故に直積 $d \times a$ の普遍性から $F(g \circ f) = Fg \circ Ff$ が分かる .

後は $F(\text{id}_b) = \text{id}_{Fb}$ を示せばよいが , 図式



が可換だから , 普遍性により $F(\text{id}_b) = \text{id}_{b \times a} = \text{id}_{Fb}$ となる . □

以上の様な概念を一般化したものが , 圏論における「極限」である . 上で述べてきた概念は , どれも次のような形の定義をしている

(1) まず対象・射がいくつか与えられている . これを「図式」と呼ぶ .

- pullback であれば $a \xrightarrow{f} c \xleftarrow{g} b$ である .

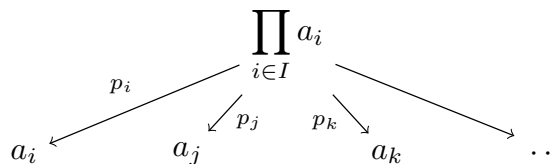
- equalizer であれば $a \begin{matrix} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{matrix} b$ である .
- 直積の場合は $a \quad b$ を (射のない) 図式とみなす .
- 終対象の場合は空な図式とみなす .

- (2) 対象が一つと, そこから図式の各対象への射が与えられて, 可換となる .
- (3) 同じ条件を満たす対象と射があったとき, 一意に射が存在して可換となる (普遍性) .

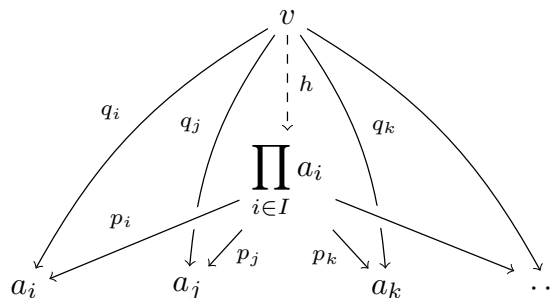
このように定義される概念を「極限」と言う*1 . つまり図式が一つ与えられると, その極限が定義されるのである .

例 12. C を圏として, $\{a_i\}_{i \in I}$ を C の対象からなる族とする . $\{a_i\}_{i \in I}$ を射のない図式だとみなしたときの「極限」を $\{a_i\}_{i \in I}$ の直積といい, 記号で $\prod_{i \in I} a_i$ と表す . 正確に書けば, $\{a_i\}_{i \in I}$ の直積とは組 $\langle \prod_{i \in I} a_i, \{p_i\}_{i \in I} \rangle$ であって以下の条件を満たすものである .

- (1) $\prod_{i \in I} a_i$ は C の対象である .
- (2) $p_i: \prod_{i \in I} a_i \rightarrow a_i$ は C の射である .



- (3) $\langle v, \{q_i\}_{i \in I} \rangle$ が同じ条件を満たすならば, 射 $h: v \rightarrow \prod_{i \in I} a_i$ が一意に存在して $q_i = p_i \circ h$ となる .



*1 極限の正式な定義は第一章の「極限」を参照 .

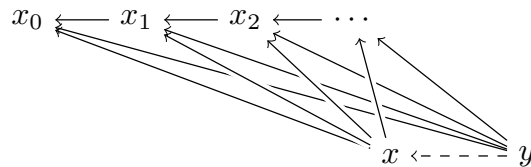
a と b の直積 $a \times b$ は $|I| = 2$ の場合である．また圏 Set , Grp , Top などにおいては，通常の直積がこの意味での直積となる． \square

例 13. 実数の減少列 $x_0 \geq x_1 \geq \dots$ を取る．順序集合 \mathbb{R} を圏とみなせば，無限個の対象・射からなる次の図式が得られる．

$$x_0 \longleftarrow x_1 \longleftarrow x_2 \longleftarrow \dots$$

この図式の極限は次の条件を満たす $x \in \mathbb{R}$ である．

- (1) 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $x_n \geq x$ である．
- (2) $y \in \mathbb{R}$ が「任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $x_n \geq y$ 」を満たすならば， $x \geq y$ である．



つまり，この図式の極限とは数列 $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ の下限 $\inf_{n \in \mathbb{N}} x_n$ である．故にこの図式の極限は数列の極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ である． \square

例 14. p を素数とする． $n > 0$ に対して写像 $f_n: \mathbb{Z}/p^{n+1}\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ を

$$f_n(x \bmod p^{n+1}) := x \bmod p^n$$

で定義すると Set における次の図式が得られる．

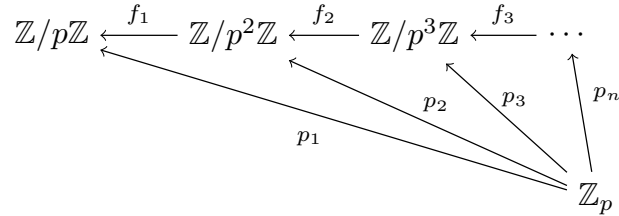
$$\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \xleftarrow{f_1} \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z} \xleftarrow{f_2} \mathbb{Z}/p^3\mathbb{Z} \xleftarrow{f_3} \dots$$

この図式の極限^{*2}を p 進整数環といい \mathbb{Z}_p で表す．正確に書けば，この図式の極限とは組 $\langle \mathbb{Z}_p, \{p_n\}_{n>0} \rangle$ であって以下の条件を満たすものである．

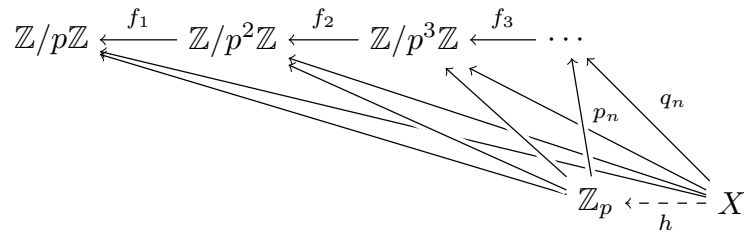
- (1) \mathbb{Z}_p は集合である．

^{*2} 通常この極限は Set ではなく可換環の圏 CRing で考えることが多い．つまり \mathbb{Z}_p は可換環となる．ただどちらの圏で考えても集合としては同じものになることが分かるので，ここでは簡単のため Set で考える．

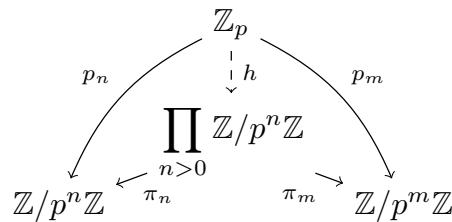
(2) $p_n: \mathbb{Z}_p \rightarrow \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ は写像であり, 任意の $n > 0$ に対して $f_n \circ p_{n+1} = p_n$ となる.



(3) $\langle X, \{q_n\}_{n>0} \rangle$ が同じ条件を満たすならば, 写像 $h: X \rightarrow \mathbb{Z}_p$ が一意に存在して, $n > 0$ に対して $p_n \circ h = q_n$ となる.



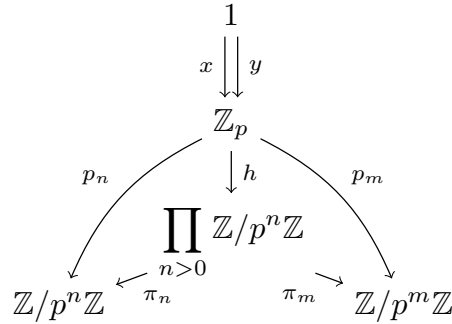
この極限 $\langle \mathbb{Z}_p, \{p_n\}_{n>0} \rangle$ が存在したとする. $\langle \prod_{n>0} \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}, \{\pi_n\}_{n>0} \rangle$ を $\{\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}\}_{n>0}$ の直積とする. $n > 0$ に対して $p_n: \mathbb{Z}_p \rightarrow \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ が写像だから, 直積の普遍性により写像 $h: \mathbb{Z}_p \rightarrow \prod_{n>0} \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ が一意に存在して次の図式が可換となる.



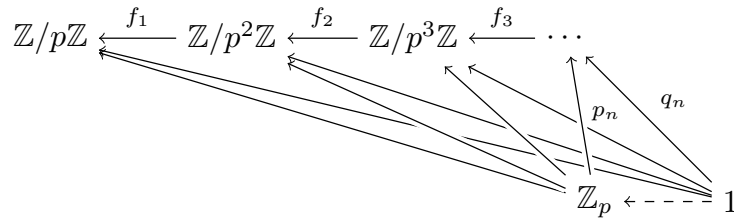
この h は単射である.

(\therefore) $x, y \in X$ で $h(x) = h(y)$ となるものを取る. $1 = \{*\}$ を一元集合として, x, y を

写像 $x, y: 1 \rightarrow \mathbb{Z}_p$ と同一視すると $p_n \circ x = \pi_n \circ h \circ x = \pi_n \circ h \circ y = p_n \circ y$ である .



$q_n := p_n \circ x (= p_n \circ y)$ とおく . $f_n \circ q_{n+1} = f_n \circ p_{n+1} \circ x = p_n \circ x = q_n$ である .
 よって \mathbb{Z}_p の普遍性から $1 \rightarrow \mathbb{Z}_p$ が一意に存在して次の図式が可換となる .



ところで $x, y: 1 \rightarrow \mathbb{Z}_p$ はこの条件を満たすから , 一意性により $x = y$ である .

故に $\mathbb{Z}_p \subset \prod_{n>0} \mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z}$ としてよい . このとき $x = \langle x_n \bmod p^n \rangle_{n>0} \in \mathbb{Z}_p$ とすると $p_n = \pi_n \circ h$ より $p_n(x) = \pi_n(x) = x_n \bmod p^n$ となる .

また $f_n \circ p_{n+1} = p_n$ だから $x_{n+1} \bmod p^n = x_n \bmod p^n$ である . そこで

$$\mathbb{Z}_p := \left\{ \langle x_n \bmod p^n \rangle_{n>0} \in \prod_{n>0} \mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z} \mid n > 0, x_{n+1} \bmod p^n = x_n \bmod p^n \right\}$$

と定義して $p_n: \mathbb{Z}_p \rightarrow \mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z}$ を射影とする . このとき , この $\langle \mathbb{Z}_p, \{p_n\}_{n>0} \rangle$ が「極限」
 となることが分かる . 故にこの「極限」は存在し , それは上記のように書き表せる . \square