

例: 単体的集合

alg-d

http://alg-d.com/math/kan_extension/

2021年12月28日

普遍随伴が現れる例としてここでは単体的集合を扱う。またここでは \mathbf{Cat} を小圏全体と関手がなす圏とする。また $0 \in \mathbb{N}$ とする。

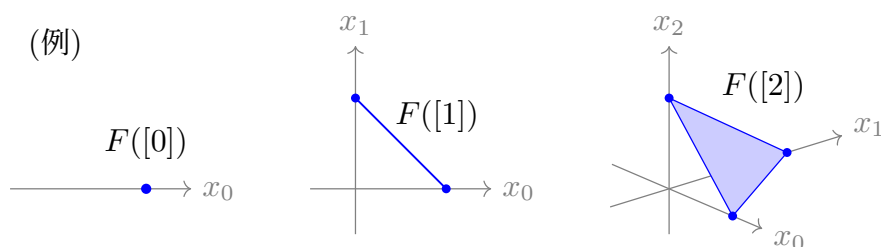
定義. $[n] := \{0, 1, \dots, n\}$ として, これを通常的大小関係で順序集合, 即ち圏とみなす. このとき $\{[n] \mid n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbf{Ob}(\mathbf{Cat})$ が定める充満部分圏を単体圏 (simplex category) といい Δ で表す. (従って Δ の射とは順序を保つ写像である.)

定義. 関手 $\Delta^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$ を単体的集合 (simplicial set) という. また単体的集合の間の射とは自然変換のこととする. 故に $\widehat{\Delta}$ が単体的集合の圏である*1.

$X \in \widehat{\Delta}$ とするとき, $k \in \mathbb{N}$ に対して通常 $X_k := X([k])$ と書く. $\Delta^n := y([n]) \in \widehat{\Delta}$ を standard n -simplex という. つまり $k \in \mathbb{N}$ に対して $\Delta_k^n = \text{Hom}_{\Delta}([k], [n])$ である. また Kan 拡張の一般論により, 任意の単体的集合 X は Δ^n の余極限で書ける. (即ちある関手 $T: J \rightarrow \Delta$ が存在して $X \cong \text{colim}(y \circ T) \cong \text{colim}_{j \in J} \Delta^{n_j}$ となる. ここで n_j は $[n_j] = Tj$ となるように取った.)

$n \in \mathbb{N}$ に対して位相空間 $F([n]) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ を次により定める.

$$F([n]) := \{ \langle x_0, \dots, x_n \rangle \in [0, 1]^{n+1} \mid x_0 + \dots + x_n = 1 \}$$



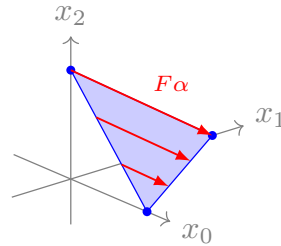
*1 この圏を \mathbf{sSet} , \mathbf{Set}_{Δ} などの記号で表すことが多い.

次に Δ の射^{*2} $\alpha: [m] \rightarrow [n]$ に対して $F\alpha: F([m]) \rightarrow F([n])$ を次により定める.

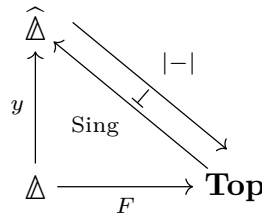
$$F\alpha(x_0, \dots, x_m) := \left\langle \sum_{i \in \alpha^{-1}(0)} x_i, \dots, \sum_{i \in \alpha^{-1}(n)} x_i \right\rangle$$

(例) $\alpha: [2] \rightarrow [1]$ $F\alpha: F([2]) \rightarrow F([1])$

$$\begin{aligned} \alpha(0) &:= 0 \\ \alpha(1) &:= 1 \\ \alpha(2) &:= 1 \end{aligned}$$

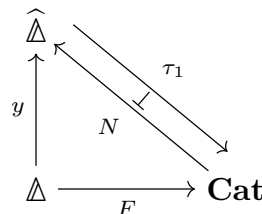


このとき F は関手 $F: \Delta \rightarrow \mathbf{Top}$ になることが容易に分かるから普遍随伴 $y^\dagger F \dashv F^\dagger y$ が得られる. $|-| := y^\dagger F: \widehat{\Delta} \rightarrow \mathbf{Top}$ を幾何学的実現, $\text{Sing} := F^\dagger y: \mathbf{Top} \rightarrow \widehat{\Delta}$ を singular functor と呼ぶ.



y が忠実充満だから $|\Delta^n| \cong F([n])$ である. また左随伴は余極限と交換するから, 単体的集合 X を上記のように $X \cong \text{colim}_{j \in J} \Delta^{n_j}$ と書けばその幾何学的実現は $|X| \cong \text{colim}_{j \in J} F([n_j])$ となる. (つまり $|X|$ は $F([n])$ を貼り合わせることで得られる位相空間である.)

次に $\Delta \subset \mathbf{Cat}$ が充満部分圏だったから, これの包含関手を $F: \Delta \rightarrow \mathbf{Cat}$ とすれば普遍随伴 $y^\dagger F \dashv F^\dagger y$ が得られる. $\tau_1 := y^\dagger F$ と書き, $X \in \widehat{\Delta}$ に対して $\tau_1(X)$ を X の fundamental category と呼ぶ. また $N := F^\dagger y: \mathbf{Cat} \rightarrow \widehat{\Delta}$ を nerve functor という.



^{*2} この PDF では圏 Δ の射をギリシャ文字 α, β などで表し, 逆に $\widehat{\Delta}$ の射を f, g などで表すことにする.

これらの随伴は普遍随伴の具体例の中でも特に重要なものであり、これらの随伴を通して単体的集合、位相空間、圏の3つには様々な関係がある。以下ではその一部を紹介して、最後に quasi-category を定義しよう。

$0 \leq i \leq n$ に対して Δ の射 $\delta_i^n: [n-1] \rightarrow [n]$ と $\sigma_i^n: [n+1] \rightarrow [n]$ を以下により定める。

$$\delta_i^n(x) := \begin{cases} x & (0 \leq x < i) \\ x+1 & (i \leq x \leq n-1) \end{cases}$$

$$\sigma_i^n(x) := \begin{cases} x & (0 \leq x \leq i) \\ x-1 & (i < x \leq n+1) \end{cases}$$

$$\begin{array}{ccc} [n-1] & \xrightarrow{\delta_i^n} & [n] \\ \begin{array}{c} n-1 \\ \vdots \\ i \\ i-1 \\ \vdots \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} \nearrow \\ \vdots \\ \nearrow \\ \longrightarrow \\ \vdots \\ \longrightarrow \end{array} & \begin{array}{c} n \\ \vdots \\ i+1 \\ i \\ \vdots \\ 0 \end{array} \end{array} \quad \begin{array}{ccc} [n+1] & \xrightarrow{\sigma_i^n} & [n] \\ \begin{array}{c} n+1 \\ \vdots \\ i+2 \\ i+1 \\ \vdots \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} \searrow \\ \vdots \\ \searrow \\ \searrow \\ \vdots \\ \longrightarrow \end{array} & \begin{array}{c} n \\ \vdots \\ i+1 \\ i \\ \vdots \\ 0 \end{array} \end{array}$$

この記号を使うと Δ は次のような圏である。

$$\begin{array}{ccccc} & & \xrightarrow{\delta_0^2} & & \xrightarrow{\delta_0^3} \\ & \xrightarrow{\delta_0^1} & \xleftarrow{\sigma_0^1} & & \vdots \\ [0] & \xleftarrow{\sigma_0^0} & [1] & \xrightarrow{\delta_1^2} & [2] & \cdots \\ & \xrightarrow{\delta_1^1} & \xleftarrow{\sigma_1^1} & & \vdots \\ & & \xrightarrow{\delta_2^2} & & \xrightarrow{\delta_3^3} \end{array}$$

これらは次のような性質を持つ。

命題 1. Δ の任意の射は δ_i^n, σ_i^n の合成で表せる。 □

命題 2. 以下の等式が成り立つ。

$$\delta_j^{n+1} \circ \delta_i^n = \delta_i^{n+1} \circ \delta_{j-1}^n \quad (i < j)$$

$$\sigma_j^n \circ \sigma_i^{n+1} = \sigma_i^n \circ \sigma_{j+1}^{n+1} \quad (i \leq j)$$

$$\sigma_j^n \circ \delta_i^{n+1} = \begin{cases} \delta_i^n \circ \sigma_{j-1}^{n-1} & (i < j) \\ \text{id}_{[n]} & (i = j, j+1) \\ \delta_{i-1}^n \circ \sigma_j^{n-1} & (i > j+1) \end{cases}$$

□

X を単体的集合とするととき $d_i^n := X(\delta_i^n)$, $s_i^n := X(\sigma_i^n)$ と書く. 命題 2 により

$$\begin{aligned} d_i^n \circ d_j^{n+1} &= d_{j-1}^n \circ d_i^{n+1} \quad (i < j) \\ s_i^{n+1} \circ s_j^n &= s_{j+1}^{n+1} \circ s_i^n \quad (i \leq j) \\ d_i^{n+1} \circ s_j^n &= \begin{cases} s_{j-1}^{n-1} \circ d_i^n & (i < j) \\ \text{id}_{X_n} & (i = j, j+1) \\ s_j^{n-1} \circ d_{i-1}^n & (i > j+1) \end{cases} \end{aligned}$$

が成り立つ.

X, Y を単体的集合とする. 各 $k \in \mathbb{N}$ に対して $X_k \subset Y_k$ であり, その包含写像 $f_k: X_k \rightarrow Y_k$ が射 $f: X \rightarrow Y$ を与えるとき, X を Y の部分集合といい $X \subset Y$ と書く.

X を単体的集合, $n \in \mathbb{N}$ として $A \subset X_n$ とすると, A を含む最小の部分集合 $Y \subset X$ が存在する. この Y を A で生成される X の部分集合という. また A で生成される X の部分集合が X 自身となるとき, X は A で生成されるという.

命題 3. $A \subset X_n$ で生成される X の部分集合を Y とするとき

$$Y_k = \{X\alpha(a) \mid a \in A, \alpha: [k] \rightarrow [n]\}$$

となる.

証明. $Z_k := \{X\alpha(a) \mid a \in A, \alpha: [k] \rightarrow [n]\}$ と書く. これは単体的集合 Z を定める.

\therefore) $\beta: [k] \rightarrow [l]$ を Δ の射とする. $z \in Z_l$ に対して $X\beta(z) \in Z_k$ である.

\therefore) 定義よりある $a \in A$ と $\alpha: [l] \rightarrow [n]$ が存在して $z = X\alpha(a)$ と書ける. このとき $X\beta(z) = X\beta(X\alpha(a)) = X(\alpha \circ \beta)(a)$ となり $\alpha \circ \beta: [k] \rightarrow [n]$ だから $X\beta(z) \in Z_k$ である.

従って写像 $Z\beta: Z_l \rightarrow Z_k$ を $Z\beta := X\beta|_{Z_l}$ で定義することができる. $X: \Delta^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$ が関手だから $Z: \Delta^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$ も関手であり, 従って Z は単体的集合である.

定義から明らかに包含写像 $Z_k \rightarrow X_k$ は自然だから, $Z \subset X$ は部分集合であり $A \subset Z_n$ となる. 故に Y の最小性より $Y \subset Z$ である.

後は $Z \subset Y$ を示せばよい. そこで $z \in Z_k$ を取る. ある $a \in A$ と $\alpha: [k] \rightarrow [n]$ が存在

して $z = X\alpha(a)$ と書ける. 包含写像 $Y_k \rightarrow X_k$ が自然だから次の図式が可換である.

$$\begin{array}{ccc} Y_k & \xrightarrow{\subset} & X_k \\ Y\alpha \uparrow & & \uparrow X\alpha \\ Y_n & \xrightarrow{\subset} & X_n \end{array}$$

$a \in A \subset Y_n$ だから $X\alpha(a) \in Y_k$ でなければならない. 故に $Z_k \subset Y_k$ が分かる. \square

命題 4. X が $A \subset X_n$ で生成されているとき, 射 $f: X \rightarrow Y$ は $f_n(a)$ ($a \in A$) で決定される. 即ち, $f, g: X \rightarrow Y$ が「任意の $a \in A$ に対して $f_n(a) = g_n(a)$ 」を満たすならば $f = g$ である.

証明. $f, g: X \rightarrow Y$ が, 任意の $a \in A$ に対して $f_n(a) = g_n(a)$ を満たすとする. 任意の $k \in \mathbb{N}$, $x \in X_k$ に対して $f_k(x) = g_k(x)$ を示せばよい. まず X が A で生成されているから, 命題 3 よりある $a \in A$ と $\alpha: [k] \rightarrow [n]$ が存在して $x = X\alpha(a)$ と書ける. このとき次の図式が可換である.

$$\begin{array}{ccc} X_k & \xrightarrow{f_k} & Y_k \\ X\alpha \uparrow & & \uparrow Y\alpha \\ X_n & \xrightarrow{f_n} & Y_n \end{array} \quad \begin{array}{ccc} X_k & \xrightarrow{g_k} & Y_k \\ X\alpha \uparrow & & \uparrow Y\alpha \\ X_n & \xrightarrow{g_n} & Y_n \end{array}$$

従って $f_k(x) = f_k(X\alpha(a)) = Y\alpha(f_n(a)) = Y\alpha(g_n(a)) = g_k(X\alpha(a)) = g_k(x)$ である. \square

例 5. Δ^n は $\{\text{id}_{[n]}\} \subset \Delta^n = \text{Hom}_\Delta([n], [n])$ で生成される.

証明. $X \subset \Delta^n$ を $\{\text{id}_{[n]}\} \subset \Delta^n$ で生成された部分集合とする. 命題 3 より

$$X_k = \{X\alpha(\text{id}_{[n]}) \mid \alpha: [k] \rightarrow [n]\} = \text{Hom}_\Delta([k], [n]) = \Delta_k^n$$

である. \square

定義. $0 \leq k \leq n$ とする.

- (1) $\{\delta_k^n\} \subset \Delta_{n-1}^n$ で生成される Δ^n の部分集合を $\partial_k \Delta^n$ と書く.
- (2) $\{\delta_i^n \mid 0 \leq i \leq n\} \subset \Delta_{n-1}^n$ で生成される Δ^n の部分集合を $\partial \Delta^n$ と書き simplicial n -sphere という.

- (3) $\{\delta_i^n \mid 0 \leq i \leq n, i \neq k\} \subset \Delta_{n-1}^n$ で生成される Δ^n の部分集合を horn といい, 記号で $\Lambda^{n,k}$ と書く. $0 < k < n$ のときの $\Lambda^{n,k}$ を inner horn といい, $k = 0, n$ のときの $\Lambda^{n,k}$ を outer horn という.

以下, 包含 $\Lambda^{n,k} \subset \Delta^n$ が与える射を inc で表す.

命題 6. $|\partial\Delta^n| \cong S^n$. (n 次元球面)

証明. 略. □

定義. $X \in \widehat{\Delta}$ が Kan 複体 (Kan complex)

$\iff 0 \leq k \leq n$ とするとき, 任意の射 $f: \Lambda^{n,k} \rightarrow X$ に対してある射 $h: \Delta^n \rightarrow X$ が存在して次が可換となる.

$$\begin{array}{ccc} \Lambda^{n,k} & \xrightarrow{f} & X \\ \text{inc} \downarrow & \nearrow h & \\ \Delta^n & & \end{array}$$

定理 7. $S \in \mathbf{Top}$ に対して $\text{Sing}(S)$ は Kan 複体である.

証明. $f: \Lambda^{n,k} \rightarrow \text{Sing}(S)$ を取る. 随伴により $\tilde{f}: |\Lambda^{n,k}| \rightarrow S$ を得る. このとき次の図式を可換にする \tilde{h} が存在する.

$$\begin{array}{ccc} |\Lambda^{n,k}| & \xrightarrow{\tilde{f}} & S \\ |\text{inc}| \downarrow & \nearrow \tilde{h} & \\ |\Delta^n| & & \end{array}$$

故に再び随伴により可換図式

$$\begin{array}{ccc} \Lambda^{n,k} & \xrightarrow{f} & \text{Sing}(S) \\ \text{inc} \downarrow & \nearrow h & \\ \Delta^n & & \end{array}$$

を得る. □

C を圏とするととき Kan 拡張の一般論より $N(C)$ は $N(C)_n \cong \text{Hom}_{\mathbf{Cat}}([n], C)$ で与えられる. つまり $N(C)_n$ の元は圏 C における図式

$$a_0 \xrightarrow{f_0} a_1 \xrightarrow{f_1} \cdots \xrightarrow{f_{n-2}} a_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} a_n$$

と同一視できる. この同一視をしたとき, d_i^n, s_i^n は

$$\begin{aligned}
& d_i^n(a_0 \xrightarrow{f_0} \cdots \xrightarrow{f_{n-1}} a_n) \\
&= \begin{cases} a_1 \xrightarrow{f_1} \cdots \xrightarrow{f_{n-1}} a_n & (i=0) \\ a_0 \xrightarrow{f_0} \cdots \xrightarrow{f_{i-2}} a_{i-1} \xrightarrow{f_i \circ f_{i-1}} a_{i+1} \xrightarrow{f_{i+1}} \cdots \xrightarrow{f_{n-1}} a_n & (0 < i < n) \\ a_0 \xrightarrow{f_0} \cdots \xrightarrow{f_{n-2}} a_{n-1} & (i=n) \end{cases} \\
& s_i^n(a_0 \xrightarrow{f_0} \cdots \xrightarrow{f_{n-1}} a_n) \\
&= a_0 \xrightarrow{f_0} \cdots \xrightarrow{f_{i-1}} a_i \xrightarrow{\text{id}} a_i \xrightarrow{f_i} \cdots \xrightarrow{f_{n-1}} a_n
\end{aligned}$$

で与えられる. 特に $N(C)_0 \cong \text{Ob}(C)$, $N(C)_1 \cong \text{Mor}(C)$ であり, また $d_0^1(f) = \text{cod}(f)$, $d_1^1(f) = \text{dom}(f)$, $d_1^2(a \xrightarrow{f} b \xrightarrow{g} c) = (a \xrightarrow{g \circ f} c)$, $s_0^0(a) = \text{id}_a$ となる.

以上を踏まえて, 一般の単体的集合 X に対しても以下のような記法を使うことにする. まず $x \in X_1$ に対して $x_0 := d_0^1(x)$, $x_1 := d_1^1(x)$ とすれば $x_0, x_1 \in X_0$ である. このとき $x: x_1 \rightarrow x_0$ と書き表すことにする.

今度は $x \in X_2$ として $x_0 := d_0^2(x)$, $x_1 := d_1^2(x)$, $x_2 := d_2^2(x)$ とすると $x_0, x_1, x_2 \in X_1$ である. よって $x_{00} := (x_0)_0$ 等を考えることができるが, 命題 2 により

$$\begin{aligned}
x_{00} &= d_0^1(d_0^2(x)) = d_0^1(d_1^2(x)) = x_{10} \\
x_{01} &= d_1^1(d_0^2(x)) = d_0^1(d_2^2(x)) = x_{20} \\
x_{11} &= d_1^1(d_1^2(x)) = d_1^1(d_2^2(x)) = x_{21}
\end{aligned}$$

となるから $a := x_{11}$, $b := x_{01}$, $c := x_{00}$ と置けば $x_0: b \rightarrow c$, $x_1: a \rightarrow c$, $x_2: a \rightarrow b$ である. この状況を

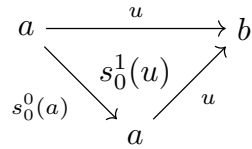
$$\begin{array}{ccc}
a & \xrightarrow{x_1} & c \\
& \searrow x & \nearrow x_0 \\
& & b
\end{array}$$

と書き表すことにする.

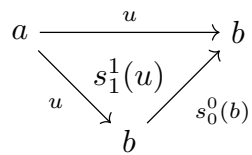
$u: a \rightarrow b$ とする. 即ち $u \in X_1$ で $a := d_1^1(u)$, $b := d_0^1(u)$ である. $x := s_0^1(u)$ と置く. このとき命題 2 により

$$\begin{aligned}
x_0 &= d_0^2(x) = d_0^2(s_0^1(u)) = u \\
x_1 &= d_1^2(x) = d_1^2(s_0^1(u)) = u \\
x_2 &= d_2^2(x) = d_2^2(s_0^1(u)) = s_0^0(d_1^1(u)) = s_0^0(a)
\end{aligned}$$

であるから、上記の記法で表せば次のようになる。



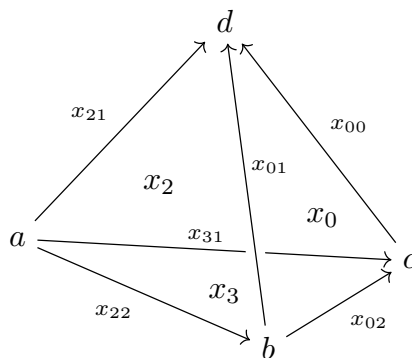
同様にして $s_1^1(u)$ については次のようになる。



次に $x \in X_3$ としたときに、同様の記法を使えば 4 つの $x_0, x_1, x_2, x_3 \in X_2$ があり、命題 2 により

$$\begin{aligned} x_{00} &= d_0^2(d_0^3(x)) = d_0^2(d_1^3(x)) = x_{10} \\ x_{01} &= d_1^2(d_0^3(x)) = d_0^2(d_2^3(x)) = x_{20} \\ x_{02} &= d_2^2(d_0^3(x)) = d_0^2(d_3^3(x)) = x_{30} \\ x_{11} &= d_1^2(d_1^3(x)) = d_1^2(d_2^3(x)) = x_{21} \\ x_{12} &= d_2^2(d_1^3(x)) = d_1^2(d_3^3(x)) = x_{31} \\ x_{22} &= d_2^2(d_2^3(x)) = d_2^2(d_3^3(x)) = x_{32} \end{aligned}$$

となるから



のようになっている (注: 奥の三角形は x_1).

$f: \Lambda^{2,0} \rightarrow X$ を射とする. $\Lambda^{2,0}$ は $\{\delta_1^2, \delta_2^2\}$ で生成されているから, f は $x_1 := f_1(\delta_1^2)$,

$x_2 := f_1(\delta_2^2)$ で定まる. また f が自然変換だから

$$\begin{array}{ccc} \Lambda_1^{2,0} & \xrightarrow{f_1} & X_1 \\ -\circ\delta_1^1 \downarrow & & \downarrow d_1^1 \\ \Lambda_0^{2,0} & \xrightarrow{f_0} & X_0 \end{array}$$

が可換である. 命題 2 より $\delta_2^2 \circ \delta_1^1 = \delta_1^2 \circ \delta_1^1$ だから

$$d_1^1(x_1) = d_1^1 \circ f_1(\delta_1^2) = f_0(\delta_1^2 \circ \delta_1^1) = f_0(\delta_2^2 \circ \delta_1^1) = d_1^1 \circ f_1(\delta_2^2) = d_1^1(x_2)$$

となる. つまり次のような状況である.

$$\begin{array}{ccc} a & \xrightarrow{x_1} & c \\ & \searrow x_2 & \\ & & b \end{array}$$

逆に $x_1, x_2 \in X_1$ が

$$\begin{array}{ccc} a & \xrightarrow{x_1} & c \\ & \searrow x_2 & \\ & & b \end{array}$$

となっていれば, 射 $f: \Lambda^{2,0} \rightarrow X$ を $f_1(\delta_1^2) := x_1$, $f_1(\delta_2^2) := x_2$ により定義することができる. つまり, 射 $\Lambda^{2,0} \rightarrow X$ は

$$\begin{array}{ccc} a & \xrightarrow{x_1} & c \\ & \searrow x_2 & \\ & & b \end{array}$$

と同一視することができる. 同様にして, 射 $f: \Lambda^{2,1} \rightarrow X$, $g: \Lambda^{2,2} \rightarrow X$ はそれぞれ

$$\begin{array}{ccc} a & & c \\ & \searrow f_1(\delta_2^2) & \nearrow f_1(\delta_0^2) \\ & & b \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} a & \xrightarrow{g_1(\delta_1^2)} & c \\ & & \nearrow g_1(\delta_0^2) \\ & & b \end{array}$$

と同一視できる.

$0 \leq i < j \leq n$ に対して射 $\gamma_{ij}^n: [1] \rightarrow [n]$ を $\gamma_{ij}^n(0) := i$, $\gamma_{ij}^n(1) := j$ により定める. また $\gamma_i^n := \gamma_{i,i+1}^n$ と書く.

補題 8. 圏 C に対して射 $f: \Delta^n \rightarrow N(C)$ は $f_1(\gamma_0^n), \dots, f_1(\gamma_{n-1}^n)$ により決定される.

証明. 米田の補題により $f \in N(C)_n$ とみなしたときの図式を

$$a_0 \xrightarrow{p_0} a_1 \xrightarrow{p_1} \dots \xrightarrow{p_{n-2}} a_{n-1} \xrightarrow{p_{n-1}} a_n$$

とする. 米田の補題の証明 (即ち, 図式

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{\widehat{\Delta}}(\Delta^1, N(C)) \xrightarrow{\sim} N(C)_1 & & f \circ y(\gamma_i^n) \longmapsto (a_i \xrightarrow{p_i} a_{i+1}) \\ \begin{array}{c} \uparrow \\ - \circ y(\gamma_i^n) \end{array} & & \begin{array}{c} \uparrow \\ N(C)(\gamma_i^n) \end{array} & & \begin{array}{c} \uparrow \\ \end{array} \\ \mathrm{Hom}_{\widehat{\Delta}}(\Delta^n, N(C)) \xrightarrow{\sim} N(C)_n & & f \longmapsto (f \text{ に対応する図式}) & & \begin{array}{c} \uparrow \\ \end{array} \end{array}$$

の可換性) より $f_1(\gamma_i^n) = p_i$ が分かる. つまり f は $f_1(\gamma_0^n), \dots, f_1(\gamma_{n-1}^n)$ により決定される. \square

補題 9. $0 < k < n$ とする. 射 $f: \Lambda^{n,k} \rightarrow N(C)$ は $f_1(\gamma_0^n), \dots, f_1(\gamma_{n-1}^n)$ により決定される.

証明. $0 \leq l \leq n$, $l \neq k$ に対して $f^l := (\Delta^{n-1} \xrightarrow{y(\delta_l^n)} \Lambda^{n,k} \xrightarrow{f} N(C))$ とすれば, f は f^l によって決定される.

∴) 命題 4 より f は $f(\delta_i^n)$ ($0 \leq i \leq n$, $i \neq k$) で決定される. ここで米田の補題の同型の自然性 (「米田の補題」の PDF を参照) より

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{\widehat{\Delta}}(\Delta^n, \Lambda^{n,k}) \xrightarrow{\sim} \Lambda^{n,k} & & y(\delta_i^n) \longmapsto \delta_i^n \\ \begin{array}{c} \downarrow \\ f \circ - \end{array} & & \begin{array}{c} \downarrow \\ f_n \end{array} & & \begin{array}{c} \downarrow \\ f_n \end{array} \\ \mathrm{Hom}_{\widehat{\Delta}}(\Delta^n, N(C)) \xrightarrow{\sim} N(C)_n & & f^l \longmapsto f_n(\delta_i^n) \end{array}$$

は可換である. 故に f は f^l で決定されることが分かる.

そこで $f^l \in N(C)_{n-1}$ とみなしたときの図式を

$$a_0^l \xrightarrow{p_0^l} a_1^l \xrightarrow{p_1^l} \dots \xrightarrow{p_{n-3}^l} a_{n-2}^l \xrightarrow{p_{n-2}^l} a_{n-1}^l$$

とすれば, f は p_i^l ($0 \leq l \leq n$, $l \neq k$, $0 \leq i \leq n-2$) により決定されることになる. 補題 8 の証明を $f^l: \Delta^{n-1} \rightarrow N(C)$ に適用すると

$$p_i^l = f_1^l(\gamma_i^{n-1}) = f_1(\delta_i^n \circ \gamma_i^{n-1}) = \begin{cases} f_1(\gamma_i^n) & (i < l-1) \\ f_1(\gamma_{l-1, l+1}^n) & (i = l-1) \\ f_1(\gamma_{i+1}^n) & (i > l-1) \end{cases}$$

$$\begin{array}{c}
[1] \xrightarrow{\gamma_{l-1,l}^{n-1}} [n-1] \xrightarrow{\delta_l^n} [n] \\
\\
\begin{array}{ccc}
& & n \\
& & \vdots \\
n-1 & \swarrow & \\
& & l+1 \\
& & \vdots \\
& & l \\
& \swarrow & \\
& & l-1 \\
1 & \swarrow & \\
& & \vdots \\
0 & \swarrow & \\
& & 0
\end{array}
\end{array}$$

が分かる。故に

$$\begin{aligned}
f_1(\gamma_1^n) &= p_0^0 \\
f_1(\gamma_2^n) &= p_1^0 = p_1^1 \\
&\vdots \\
f_1(\gamma_k^n) &= p_{k-1}^0 = \cdots = p_{k-1}^{k-1} \\
f_1(\gamma_{k+1}^n) &= p_k^0 = \cdots = p_k^{k-1} \\
f_1(\gamma_{k+2}^n) &= p_{k+1}^0 = \cdots = p_{k+1}^{k-1} = p_{k+1}^{k+1} \\
&\vdots \\
f_1(\gamma_{n-2}^n) &= p_{n-3}^0 = \cdots = p_{n-3}^{k-1} = p_{n-3}^{k+1} = \cdots = p_{n-3}^{n-3} \\
f_1(\gamma_{n-1}^n) &= p_{n-2}^0 = \cdots = p_{n-2}^{k-1} = p_{n-2}^{k+1} = \cdots = p_{n-2}^{n-3} = p_{n-2}^{n-2}
\end{aligned}$$

となる。同様にして

$$\begin{aligned}
f_1(\gamma_0^n) &= p_0^2 = p_0^3 = \cdots = p_0^{k-1} = p_0^{k+1} = \cdots = p_0^n \\
f_1(\gamma_1^n) &= p_1^3 = \cdots = p_1^{k-1} = p_1^{k+1} = \cdots = p_1^n \\
&\vdots \\
f_1(\gamma_{k-3}^n) &= p_{k-3}^{k-1} = p_{k-3}^{k+1} = \cdots = p_{k-3}^n \\
f_1(\gamma_{k-2}^n) &= p_{k-2}^{k+1} = \cdots = p_{k-2}^n \\
f_1(\gamma_{k-1}^n) &= p_{k-1}^{k+1} = \cdots = p_{k-1}^n \\
&\vdots \\
f_1(\gamma_{n-3}^n) &= p_{n-3}^{n-1} = p_{n-3}^n \\
f_1(\gamma_{n-2}^n) &= p_{n-2}^n
\end{aligned}$$

であり, また

$$\begin{aligned} f_1(\gamma_{02}^n) &= p_0^1, \quad \cdots, \quad f_1(\gamma_{k-2,k}^n) = p_{k-2}^{k-1}, \\ f_1(\gamma_{k,k+2}^n) &= p_k^{k+1}, \quad \cdots, \quad f_1(\gamma_{n-2,n}^n) = p_{n-2}^{n-1} \end{aligned}$$

となる. 即ち f は

$$f_1(\gamma_0^n), \cdots, f_1(\gamma_{n-1}^n), f_1(\gamma_{02}^n), \cdots, f_1(\gamma_{k-2,k}^n), f_1(\gamma_{k,k+2}^n), \cdots, f_1(\gamma_{n-2,n}^n)$$

で決定される. ここで $0 \leq j \leq n-3$ に対して $\nu_j: [2] \rightarrow [n-1]$ を

$$\nu_j(0) := j, \quad \nu_j(1) := j+1, \quad \nu_j(2) := j+2$$

で定義すると, 再び米田の補題の証明 (即ち図式

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{\widehat{\Delta}}(\Delta^2, N(C)) & \xrightarrow{\sim} & N(C)_2 \\ \begin{array}{c} \uparrow \\ -\circ y(\nu_j) \end{array} & & \begin{array}{c} \uparrow \\ N(C)(\nu_j) \end{array} \\ \mathrm{Hom}_{\widehat{\Delta}}(\Delta^{n-1}, N(C)) & \xrightarrow{\sim} & N(C)_{n-1} \\ \\ f^l \circ y(\nu_j) & \xrightarrow{\sim} & (a_j^l \xrightarrow{p_j^l} a_{j+1}^l \xrightarrow{p_{j+1}^l} a_{j+2}^l) \\ \begin{array}{c} \uparrow \\ -\circ y(\nu_j) \end{array} & & \begin{array}{c} \uparrow \\ N(C)(\nu_j) \end{array} \\ f^l & \xrightarrow{\sim} & (f^l \text{ に対応する図式}) \end{array}$$

が可換であること) より $f_2^l(\nu_j) = (a_j^l \xrightarrow{p_j^l} a_{j+1}^l \xrightarrow{p_{j+1}^l} a_{j+2}^l)$ が分かる. 故に図式

$$\begin{array}{ccc} \Delta_1^{n-1} & \xrightarrow{f_1^l} & N(C)_1 & \gamma_{j,j+2}^{n-1} & \xrightarrow{f_1^l} & (a_j^l \xrightarrow{p_{j+1}^l \circ p_j^l} a_{j+2}^l) \\ \begin{array}{c} \uparrow \\ -\circ \delta_1^2 \end{array} & & \begin{array}{c} \uparrow \\ N(C)(\delta_1^2) \end{array} & \begin{array}{c} \uparrow \\ -\circ \delta_1^2 \end{array} & & \begin{array}{c} \uparrow \\ N(C)(\delta_1^2) \end{array} \\ \Delta_2^{n-1} & \xrightarrow{f_2^l} & N(C)_2 & \nu_j & \xrightarrow{f_2^l} & (a_j^l \xrightarrow{p_j^l} a_{j+1}^l \xrightarrow{p_{j+1}^l} a_{j+2}^l) \end{array}$$

の可換性から $f_1^l(\gamma_{j,j+2}^{n-1}) = p_{j+1}^l \circ p_j^l$ となる. 従って $0 \leq i \leq k-2$ に対しては

$$f_1(\gamma_{i,i+2}^n) = f_1(\delta_n^n \circ \gamma_{i,i+2}^{n-1}) = f_1^n(\gamma_{i,i+2}^{n-1}) = p_{i+1}^n \circ p_i^n = f_1(\gamma_{i+1}^n) \circ f_1(\gamma_i^n)$$

を与えるから、 $N(C)_n$ の対象を定める。これを米田の補題により $h: \Delta^n \rightarrow N(C)$ とみなす。このとき

$$\begin{array}{ccc} \Lambda^{n,k} & \xrightarrow{f} & N(C) \\ \text{inc} \downarrow & \nearrow h & \\ \Delta^n & & \end{array}$$

は可換である。

∴ 補題 9 より、 $0 \leq i \leq n-1$ に対して $f_1(\gamma_i^n) = h_1(\gamma_i^n)$ を示せばよいがそれは h の定義から明らか。

h の一意性を示すため

$$\begin{array}{ccc} \Lambda^{n,k} & \xrightarrow{f} & N(C) \\ \text{inc} \downarrow & \nearrow h' & \\ \Delta^n & & \end{array}$$

が可換であるとする。このとき $h'_1(\gamma_i^n) = f_1(\gamma_i^n) = h_1(\gamma_i^n)$ である。故に補題 9 より $h = h'$ となることが分かる。

(\Leftarrow) 圏 C を以下のように定義する。

- $\text{Ob}(C) := X_0$, $\text{Mor}(C) := X_1$.
- $f \in X_1$ に対して $\text{dom}(f) := d_1^1(f) \in X_0$, $\text{cod}(f) := d_0^1(f) \in X_0$ と定める。
- $a \xrightarrow{f} b \xrightarrow{g} c$ に対して $g \circ f: a \rightarrow c$ を定めたい。そのために $k: \Lambda^{2,1} \rightarrow X$ を

$$k_1(\delta_0^2) := g \in X_1, \quad k_1(\delta_2^2) := f \in X_1$$

により定める。つまり k は

$$\begin{array}{ccc} a & & c \\ & \searrow f & \nearrow g \\ & b & \end{array}$$

で定まる射である。仮定により $\tilde{k}: \Delta^2 \rightarrow X$ が一意に存在して

$$\begin{array}{ccc} \Lambda^{2,1} & \xrightarrow{k} & X \\ \text{inc} \downarrow & \nearrow \tilde{k} & \\ \Delta^2 & & \end{array}$$

が可換となる. このとき米田の補題により $\tilde{k}: \Delta^2 \rightarrow X$ を $\tilde{k} \in X_2$ とみなして $g \circ f := d_1^2(\tilde{k})$ と定める. つまり次のような状況になる.

$$\begin{array}{ccc} a & \xrightarrow{g \circ f} & c \\ & \searrow f & \nearrow g \\ & & b \end{array}$$

- $a \in X_0$ に対して $\text{id}_a := s_0^0(a) \in X_1$ と定める. 命題 2 により

$$\text{dom}(\text{id}_a) = d_1^1 \circ s_0^0(a) = a, \quad \text{cod}(\text{id}_a) = d_0^1 \circ s_0^0(a) = a$$

である.

以上の定義により C は圏となる.

∴) まず恒等射について示す. $f \in X_1$ に対して $x := s_1^1(f)$ と置けば, $a := \text{dom}(f)$, $b := \text{cod}(f)$ としたとき

$$\begin{aligned} d_0^2(x) &= d_0^2(s_1^1(f)) = s_0^0(d_0^1(f)) = s_0^0(b) = \text{id}_b \\ d_1^2(x) &= d_1^2(s_1^1(f)) = \text{id}(f) = f \\ d_2^2(x) &= d_2^2(s_1^1(f)) = \text{id}(f) = f \end{aligned}$$

である.

$$\begin{array}{ccc} a & \xrightarrow{f} & b \\ & \searrow f & \nearrow \text{id}_b \\ & & b \end{array}$$

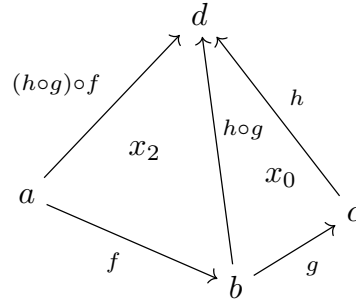
即ち

$$\begin{array}{ccc} \Lambda^{2,1} & \longrightarrow & X \\ \text{inc} \downarrow & \nearrow x & \\ \Delta^2 & & \end{array}$$

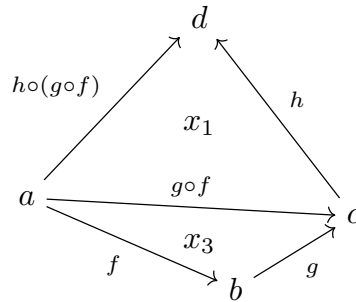
が可換となり, 合成の定義より $\text{id} \circ f = f$ となる. 同様にして $f \circ \text{id} = f$ も分かるので id は恒等射の条件を満たす.

後は結合律を示せばよい. $a \xrightarrow{f} b \xrightarrow{g} c \xrightarrow{h} d$ とする. $h \circ g$ を定める $x_0 \in X_2$ と

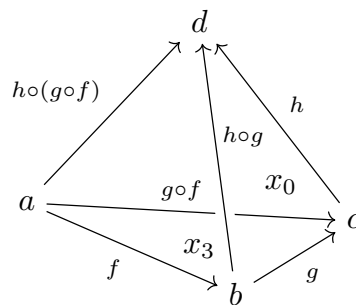
$(h \circ g) \circ f$ を定める $x_2 \in X_2$ を取ると次のようになる.



同様に $g \circ f$ を定める $x_3 \in X_2$ と $h \circ (g \circ f)$ を定める $x_1 \in X_2$ を取ると次のようになる.



このとき x_0, x_1, x_3 を組み合わせると



(11)

を得る (注: 三角錐の中身と, 手前左の三角形の部分が空いている. また奥の三角形は x_1). つまりこれは射 $k: \Lambda^{3,2} \rightarrow X$ であって

- $k_2(\delta_0^3) := x_0 \in X_2$.
- $k_2(\delta_1^3) := x_1 \in X_2$.
- $k_2(\delta_3^3) := x_3 \in X_2$.

により定まるものである。仮定により $x: \Delta^3 \rightarrow X$ が一意に存在して

$$\begin{array}{ccc} \Lambda^{3,2} & \xrightarrow{k} & X \\ \text{inc} \downarrow & \nearrow x & \\ \Delta^3 & & \end{array}$$

が可換となる。(つまり x は (11) の中身を埋める三角錐である。) このとき $u := d_2^3(x)$ と置くと

$$\begin{array}{ccccc} & & d & & \\ & \nearrow^{h \circ (g \circ f)} & & \nwarrow^h & \\ a & & u & & c \\ & \searrow^{g \circ f} & & \nearrow^{h \circ g} & \\ & & b & & \\ & \nearrow^f & & \nwarrow^g & \\ & & x_3 & & x_0 \end{array}$$

となるから、合成の定義より $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ である (計算で示す場合は

$$\begin{aligned} d_0^2(u) &= d_0^2(d_2^3(x)) = d_1^2(d_0^3(x)) = d_1^2(x_0) = h \circ g \\ d_2^2(u) &= d_2^2(d_2^3(x)) = d_2^2(d_3^3(x)) = d_2^2(x_3) = f \end{aligned}$$

となる)。

定義から $N(C)_0 = X_0$, $N(C)_1 = X_1$ である。そこで写像 $f_n: X_n \rightarrow N(C)_n$ を

$$f_n(x) = \begin{cases} x & (n = 0) \\ \bullet \xrightarrow{X\gamma_0^n(x)} \bullet \rightarrow \dots \rightarrow \bullet \xrightarrow{X\gamma_{n-1}^n(x)} \bullet & (n \geq 1) \end{cases}$$

で定める。この f_n は射 $X \rightarrow N(C)$ を定める。

∴) $\alpha: [m] \rightarrow [n]$ に対して

$$\begin{array}{ccc} X_m & \xrightarrow{f_m} & N(C)_m \\ X\alpha \uparrow & & \uparrow N(C)(\alpha) \\ X_n & \xrightarrow{f_n} & N(C)_n \end{array}$$

が可換であることを示せばよい。命題 1 より $\alpha = \delta_i^n, \sigma_i^n$ の場合に示せばよい。

(0) $\alpha = \delta_0^n$ の場合, $x \in X_n$ に対して

$$\begin{aligned} d_0^n \circ f_n(x) &= (\bullet \xrightarrow{X\gamma_1^n(x)} \bullet \rightarrow \cdots \rightarrow \bullet \xrightarrow{X\gamma_{n-1}^n(x)} \bullet) \\ f_{n-1} \circ X\delta_0^n(x) &= (\bullet \xrightarrow{X\gamma_0^{n-1}(X\delta_0^n(x))} \bullet \rightarrow \cdots \rightarrow \bullet \xrightarrow{X\gamma_{n-2}^{n-1}(X\delta_0^n(x))} \bullet) \end{aligned}$$

となる. 故に $0 \leq k \leq n-2$ に対して $X\gamma_k^{n-1}(X\delta_0^n(x)) = X\gamma_{k+1}^n(x)$ を示せばよい. そのためには $\delta_0^n \circ \gamma_k^{n-1} = \gamma_{k+1}^n$ を示せばよいが, それは定義より明らか.

(1) $\alpha = \delta_n^n$ の場合, $x \in X_n$ に対して

$$\begin{aligned} d_n^n \circ f_n(x) &= (\bullet \xrightarrow{X\gamma_0^n(x)} \bullet \rightarrow \cdots \rightarrow \bullet \xrightarrow{X\gamma_{n-2}^n(x)} \bullet) \\ f_{n-1} \circ X\delta_n^n(x) &= (\bullet \xrightarrow{X\gamma_0^{n-1}(X\delta_n^n(x))} \bullet \rightarrow \cdots \rightarrow \bullet \xrightarrow{X\gamma_{n-2}^{n-1}(X\delta_n^n(x))} \bullet) \end{aligned}$$

となる. 故に $0 \leq k \leq n-2$ に対して $X\gamma_k^{n-1}(X\delta_n^n(x)) = X\gamma_k^n(x)$ を示せばよい. そのためには $\delta_n^n \circ \gamma_k^{n-1} = \gamma_k^n$ を示せばよいが, それは定義より明らか.

(2) $\alpha = \delta_i^n$ ($0 < i < n$) の場合, $x \in X_n$ に対して

$$\begin{aligned} d_i^n \circ f_n(x) &= (\bullet \xrightarrow{X\gamma_0^n(x)} \bullet \rightarrow \cdots \rightarrow \bullet \xrightarrow{X\gamma_i^n(x) \circ X\gamma_{i-1}^n(x)} \bullet \rightarrow \cdots \rightarrow \bullet \xrightarrow{X\gamma_{n-1}^n(x)} \bullet) \\ f_{n-1} \circ X\delta_i^n(x) &= (\bullet \xrightarrow{X\gamma_0^{n-1}(X\delta_i^n(x))} \bullet \rightarrow \cdots \rightarrow \bullet \xrightarrow{X\gamma_{n-2}^{n-1}(X\delta_i^n(x))} \bullet) \end{aligned}$$

となる. 故に $0 \leq k \leq n-2$ に対して

$$X\gamma_k^{n-1}(X\delta_i^n(x)) = \begin{cases} X\gamma_k^n(x) & (0 \leq k < i-1) \\ X\gamma_i^n(x) \circ X\gamma_{i-1}^n(x) & (k = i-1) \\ X\gamma_{k+1}^n(x) & (i-1 < k \leq n-2) \end{cases}$$

を示せばよい. まず $k \neq i-1$ の場合は定義から明らか. $k = i-1$ の場合は $N(C)$

の定義より $X\gamma_{i-1}^{n-1}(X\delta_i^n(x)) = X\gamma_i^n(x) \circ X\gamma_{i-1}^n(x)$ である.

$$\begin{array}{ccc}
 [1] & \xrightarrow{\gamma_{i-1}^{n-1}} & [n-1] \xrightarrow{\delta_i^n} [n] \\
 & & \nearrow & \searrow \\
 & & n-1 & \nearrow & n \\
 & & \vdots & & \vdots \\
 & & i & \nearrow & i+1 \\
 & & \vdots & & \vdots \\
 1 & \nearrow & i-1 & \longrightarrow & i-1 \\
 & & \vdots & & \vdots \\
 0 & \nearrow & 0 & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

(3) $\alpha = \sigma_i^n$ ($0 \leq i \leq n$) の場合, $x \in X_n$ に対して

$$\begin{aligned}
 & s_i^n \circ f_n(x) \\
 &= (\bullet \xrightarrow{X\gamma_0^n(x)} \bullet \rightarrow \dots \rightarrow \bullet \xrightarrow{X\gamma_i^n(x)} \bullet \xrightarrow{\text{id}} \bullet \xrightarrow{X\gamma_{i+1}^n(x)} \bullet \rightarrow \dots \rightarrow \bullet \xrightarrow{X\gamma_{n-1}^n(x)} \bullet) \\
 & f_{n+1} \circ X\sigma_i^n(x) = (\bullet \xrightarrow{X\gamma_0^{n+1}(X\sigma_i^n(x))} \bullet \rightarrow \dots \rightarrow \bullet \xrightarrow{X\gamma_n^{n+1}(X\sigma_i^n(x))} \bullet)
 \end{aligned}$$

となる. 故に $0 \leq k \leq n$ に対して

$$X\gamma_k^{n+1}(X\sigma_i^n(x)) = \begin{cases} X\gamma_k^n(x) & (0 \leq k < i) \\ \text{id} & (k = i) \\ X\gamma_{k-1}^n(x) & (i < k \leq n) \end{cases}$$

を示せばよい. まず $k \neq i$ の場合は定義から明らか. $k = i$ の場合は β をうまくとることで $\sigma_i^n \circ \gamma_i^{n+1} = \beta \circ \sigma_0^0$ と書ける.

$$\begin{array}{ccc}
 [1] & \xrightarrow{\gamma_i^{n+1}} & [n+1] \xrightarrow{\sigma_i^n} [n] \\
 & & \nearrow & \searrow \\
 & & n+1 & \nearrow & n \\
 & & \vdots & & \vdots \\
 & & i+2 & \nearrow & i+1 \\
 & & \vdots & & \vdots \\
 & & i+1 & \nearrow & i+1 \\
 & & \vdots & & \vdots \\
 1 & \nearrow & i & \longrightarrow & i \\
 & & \vdots & & \vdots \\
 0 & \nearrow & 0 & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

よって $X\gamma_i^{n+1}(X\sigma_i^n(x)) = s_0^0(X\beta(x)) = \text{id}_{X\beta(x)}$ となる。

この f が同型であることを示せばよい。即ち各 n に対して f_n が全単射であることを示せばよい。米田の補題の同型の自然性 (「米田の補題」の PDF を参照) より

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\hat{\Delta}}(\Delta^n, X) & \xrightarrow{\sim} & X_n \\ f \circ - \downarrow & & \downarrow f_n \\ \text{Hom}_{\hat{\Delta}}(\Delta^n, N(C)) & \xrightarrow{\sim} & N(C)_n \end{array}$$

が可換であるから $f \circ -$ が全単射であることを示せばよい。それを n に関する帰納法により示す。

まず $n = 0, 1$ の場合は定義より明らかである。 $n \geq 2$ のとき、 $0 < k < n$ となる k を一つ取ると次の図式が可換である。

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\hat{\Delta}}(\Lambda^{n,k}, X) & \xrightarrow{f \circ -} & \text{Hom}_{\hat{\Delta}}(\Lambda^{n,k}, N(C)) \\ -\circ \text{inc} \uparrow & & \uparrow -\circ \text{inc} \\ \text{Hom}_{\hat{\Delta}}(\Delta^n, X) & \xrightarrow{f \circ -} & \text{Hom}_{\hat{\Delta}}(\Delta^n, N(C)) \end{array}$$

$-\circ \text{inc}$ は仮定より全単射だから、 $\varphi := f \circ -: \text{Hom}_{\hat{\Delta}}(\Lambda^{n,k}, X) \rightarrow \text{Hom}_{\hat{\Delta}}(\Lambda^{n,k}, N(C))$ が全単射であることを示せばよい。

まず単射であることを示すため $g, h: \Lambda^{n,k} \rightarrow X$ が $g \neq h$ を満たすとする。命題 3 よりある $0 \leq i \leq n$, $i \neq k$ が存在して $g_{n-1}(\delta_i^n) \neq h_{n-1}(\delta_i^n)$ となる。 $\delta_i^n \in \Lambda_{n-1}^{n,k}$ に対応する射を $p_i: \Delta^{n-1} \rightarrow \Lambda^{n,k}$ と書けば $g \circ p_i \neq h \circ p_i$ となる。また

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\hat{\Delta}}(\Delta^{n-1}, X) & \xrightarrow{f \circ -} & \text{Hom}_{\hat{\Delta}}(\Delta^{n-1}, N(C)) \\ -\circ p_i \uparrow & & \uparrow -\circ p_i \\ \text{Hom}_{\hat{\Delta}}(\Lambda^{n,k}, X) & \xrightarrow{\varphi} & \text{Hom}_{\hat{\Delta}}(\Lambda^{n,k}, N(C)) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} g \circ p_i & \xrightarrow{f \circ -} & f \circ g \circ p_i \\ \uparrow -\circ p_i & & \uparrow -\circ p_i \\ g & \xrightarrow{\varphi} & \varphi(g) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} h \circ p_i & \xrightarrow{f \circ -} & f \circ h \circ p_i \\ \uparrow -\circ p_i & & \uparrow -\circ p_i \\ h & \xrightarrow{\varphi} & \varphi(h) \end{array}$$

は可換であり、上側の $f \circ -$ は帰納法の仮定から単射である。故に $f \circ g \circ p_i \neq f \circ h \circ p_i$ となり、 $\varphi(g) \circ p_i \neq \varphi(h) \circ p_i$ が分かる。従って $\varphi(g) \neq \varphi(h)$ である。

次に全射であることを示すため $g: \Lambda^{n,k} \rightarrow N(C)$ とする. $0 \leq i \leq n$, $i \neq k$ に対して次の可換図式を考える.

$$\begin{array}{ccc}
X_{n-1} & \xrightarrow{f_{n-1}} & N(C)_{n-1} & \ni & g_{n-1}(\delta_i^n) \\
\wr \uparrow & & \uparrow \wr & & \uparrow \\
\text{Hom}_{\widehat{\Delta}}(\Delta^{n-1}, X) & \xrightarrow{f \circ -} & \text{Hom}_{\widehat{\Delta}}(\Delta^{n-1}, N(C)) & \ni & g \circ p_i \\
-\circ p_i \uparrow & & \uparrow -\circ p_i & & \uparrow \\
\text{Hom}_{\widehat{\Delta}}(\Lambda^{n,k}, X) & \xrightarrow{\varphi} & \text{Hom}_{\widehat{\Delta}}(\Lambda^{n,k}, N(C)) & \ni & g
\end{array}$$

帰納法の仮定から f_{n-1} は全単射である. よって $x_i \in X_{n-1}$ を $f_{n-1}(x_i) = g_{n-1}(\delta_i^n)$ となるように取ることができる. 命題 3 より, 任意の $l \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \Lambda_l^{n,k}$ に対してある i_α と $\beta_\alpha: [l] \rightarrow [n-1]$ が存在して $\alpha = \delta_{i_\alpha}^n \circ \beta_\alpha$ と書ける. そこで $q_l(\alpha) := X\beta_\alpha(x_{i_\alpha}) \in X_l$ と定義する. これは射 $q: \Lambda^{n,k} \rightarrow X$ を定める.

∴) まず q_l が well-defined であることを確かめる. そのために $\alpha = \delta_i^n \circ \beta = \delta_j^n \circ \gamma$ と書けたとする. f の自然性から次の図式が可換である.

$$\begin{array}{ccc}
X_l & \xrightarrow{f_l} & N(C)_l & & \Lambda_l^{n,k} & \xrightarrow{g_l} & N(C)_l \\
X\beta \uparrow & & \uparrow NC(\beta) & & -\circ \beta \uparrow & & \uparrow NC(\beta) \\
X_{n-1} & \xrightarrow{f_{n-1}} & N(C)_{n-1} & & \Lambda_{n-1}^{n,k} & \xrightarrow{g_{n-1}} & N(C)_{n-1}
\end{array}$$

従って

$$\begin{aligned}
f_l(X\beta(x_i)) &= NC(\beta)(f_{n-1}(x_i)) = NC(\beta)(g_{n-1}(\delta_i^n)) = g_l(\delta_i^n \circ \beta) \\
&= g_l(\alpha) \\
f_l(X\gamma(x_j)) &= NC(\gamma)(f_{n-1}(x_j)) = NC(\gamma)(g_{n-1}(\delta_j^n)) = g_l(\delta_j^n \circ \gamma) \\
&= g_l(\alpha)
\end{aligned}$$

となるから $f_l(X\beta(x_i)) = f_l(X\gamma(x_j))$ である. 既を示した通り f_l は単射だから $X\beta(x_i) = X\gamma(x_j)$ となり $q_l(\alpha)$ は well-defined である.

あとは $q_l: \Lambda_l^{n,k} \rightarrow X_l$ が自然であることを示せばよい. そこで $\tau: [l] \rightarrow [m]$ と

する.

$$\begin{array}{ccc}
 \Lambda_l^{n,k} & \xrightarrow{q_l} & X_l \\
 \uparrow -\circ\tau & & \uparrow X\tau \\
 \Lambda_m^{n,k} & \xrightarrow{q_m} & X_m
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 \alpha \circ \tau & \xrightarrow{q_l} & q_l(\alpha \circ \tau) \\
 \uparrow -\circ\tau & & \uparrow X\tau \\
 \alpha & \xrightarrow{q_m} & X\beta_\alpha(x_{i_\alpha})
 \end{array}$$

$\alpha = \delta_{i_\alpha}^n \circ \beta_\alpha$ だから $\alpha \circ \tau = \delta_{i_\alpha}^n \circ (\beta_\alpha \circ \tau)$ と書ける. よって $q_l(\alpha \circ \tau) = X(\beta_\alpha \circ \tau)(x_{i_\alpha})$ となる.

このとき $\varphi(q)_{n-1}(\delta_i^n) = (f \circ q)_{n-1}(\delta_i^n) = f_{n-1}(q_{n-1}(\delta_i^n)) = f_{n-1}(x_i) = g_{n-1}(\delta_i^n)$ だから $\varphi(q) = g$ である. \square

Kan 複体と定理 10 の共通の一般化として次の定義を得る.

定義. $X \in \widehat{\Delta}$ が quasi-category (もしくは弱 Kan 複体)

$\iff 0 < k < n$ とするとき, 任意の射 $f: \Lambda^{n,k} \rightarrow X$ に対してある射 $h: \Delta^n \rightarrow X$ が存在して次が可換となる.

$$\begin{array}{ccc}
 \Lambda^{n,k} & \xrightarrow{f} & X \\
 \text{inc} \downarrow & \nearrow h & \\
 \Delta^n & &
 \end{array}$$

この quasi-category が, [2] などで ∞ -category と呼ばれているものである.

参考文献

- [1] A. Joyal and M. Tierney, Notes on simplicial homotopy theory
- [2] J. Lurie, Higher Topos Theory, <https://www.math.ias.edu/~lurie/>
- [3] Stacks Project, <https://stacks.math.columbia.edu/>