例: 位相空間上の層

alg-d

http://alg-d.com/math/kan_extension/

2018 年 9 月 10 日

定義. $\langle X, \mathcal{O}_X \rangle$ を位相空間とする．$U \in \mathcal{O}_X$ に対して集合 $P(U)$ が与えられ, $U, V \in \mathcal{O}_X$，$U \subset V$ に対して，写像 $\rho_{UV} \colon P(V) \to P(U)$ が与えられているとする[*1]．以下の条件が成り立つとき，組 $\langle P, \rho \rangle$ を X 上の前層 (presheaf) という．

(1) $U, V, W \in \mathcal{O}_X$，$U \subset V \subset W$ に対して $\rho_{UV} \circ \rho_{VW} = \rho_{UW}$ である．

$$\begin{tikzcd} U & \subset & V & \subset & W \\ P(U) & & P(V) \arrow[ll, "\rho_{UV}"'] & & P(W) \arrow[ll, "\rho_{VW}"'] \arrow[llll, bend left, "\rho_{UW}"] \end{tikzcd}$$

(2) $U \in \mathcal{O}_X$ に対して $\rho_{UU} = \mathrm{id}_{P(U)}$ である．

例 1. $U \in \mathcal{O}_X$ に対して $P(U) := \{ f \colon U \to \mathbb{R} \mid f \text{ は連続} \}$ とする．$U, V \in \mathcal{O}_X$，$U \subset V$ のとき，$f \in P(V)$ に対して $\rho_{UV}(f) := f|_U$ と定義すれば写像 $\rho_{UV} \colon P(V) \to P(U)$ を得る．このとき $\langle P, \rho \rangle$ は前層である． □

例 2. 今度は $U \in \mathcal{O}_X$ に対して $P(U) := \{ f \colon U \to \mathbb{R} \mid f \text{ は定数関数} \}$ とすると，これも例 1 と同じ ρ により前層となる． □

例 3. X が C^∞ 級多様体の時，$U \in \mathcal{O}_X$ に対して $P(U) := \{ f \colon U \to \mathbb{R} \mid f \text{ は } C^\infty \text{ 級関数} \}$ とすればこれも例 1 と同じ ρ により前層となる． □

これらの例から，一般の前層 $\langle P, \rho \rangle$ においても写像 ρ_{UV} を制限写像といい，また $\rho_{UV}(f)$ を $f|_U$ と書いたりする．

[*1] 文献によっては ρ_{UV} を ρ_{VU} と書いたり ρ^V_U と書いたりなど，色々流儀がある．また ρ ではなく r を使ったりすることもある．

例 4. $U_0 \in \mathcal{O}_X$ を一つ取る．$U \in \mathcal{O}_X$ に対して

$$P(U) := \begin{cases} 1 = \{*\} & (U \subset U_0 \text{のとき}) \\ \emptyset & (U \not\subset U_0 \text{のとき}) \end{cases}$$

と定める．$U \subset V$ とすると，「$U \subset V \subset U_0$」「$U \subset U_0$，$V \not\subset U_0$」「$U, V \not\subset U_0$」の三通りの場合がある．それぞれの場合に ρ_{UV} を

$$\rho_{UV} := \begin{cases} \mathrm{id}_1 & (U \subset V \subset U_0 \text{のとき}) \\ \text{包含写像 } \emptyset \to 1 & (U \subset U_0,\ V \not\subset U_0 \text{のとき}) \\ \mathrm{id}_\emptyset & (U, V \not\subset U_0 \text{のとき}) \end{cases}$$

と定義すれば，$\langle P, \rho \rangle$ は前層となる．□

さて，$\mathcal{O}_X$ は包含関係によって順序集合となるから，圏とみなすことができる．つまり「$U \subset V \Longleftrightarrow$ 射 $U \to V$ が一意に存在する」である．$U \subset V$ のときの射 $U \to V$ をここでは f_{VU} で表すことにする．$\langle P, \rho \rangle$ を前層とするとき $P(f_{VU}) := \rho_{UV}$ とすれば P は関手 $\mathcal{O}_X^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ を定める．実際，前層の条件 1 から $P(g \circ f) = Pf \circ Pg$ が分かり，条件 2 から $P(\mathrm{id}_U) = \mathrm{id}_{P(U)}$ が分かる．

逆に関手 $P\colon \mathcal{O}_X^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ があれば，$U \subset V$ に対して $\rho_{UV} := P(f_{VU})$ と定義すれば $\langle P, \rho \rangle$ は X 上の前層となる．つまり X 上の前層とは関手 $\mathcal{O}_X^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ と同じものである．

※ 例 1 などの場合，$U \in \mathcal{O}_X$ に対して $P(U)$ は可換環になっている．更に各制限写像は環準同型である．故にこの場合 P は関手 $\mathcal{O}_X^{\mathrm{op}} \to \mathbf{CRing}$ を定めている．関手 $\mathcal{O}_X^{\mathrm{op}} \to \mathbf{CRing}$ を可換環の前層という．同様にアーベル群の前層や $\mathbb{C}$-線型空間の前層などを考えることもできる．また区別したい場合，関手 $\mathcal{O}_X^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ は集合の前層と呼ぶ．ホモロジー代数などでは環の前層などのような代数的構造のついた前層を考えることが多いが，ここでは集合の前層のみを考える．

より一般に次の定義をすることができる．

定義. 圏 C 上の前層とは関手 $C^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ のことである．

定義. X を位相空間，$P\colon \mathcal{O}_X^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ を X 上の前層とする．P が層 (sheaf) [*2]であるとは，任意の $U \in \mathcal{O}_X$ と任意の開被覆 $U = \bigcup_{i \in I} V_i$ に対して次の 2 条件が成り立つことをいう．

[*2] 層という名前は，層がまさに「層」をなしているように見えるという事のほかに，(ここでの数学的な意味での) 層はフランス語では faisceau (フェソーと読む?) と呼ばれていたので，この「ソー」を取ったらしい．

(1) $f, g \in P(U)$ が「任意の $i \in I$ に対して $f|_{V_i} = g|_{V_i}$」を満たすならば $f = g$ である．

(2) 族 $\langle f_i \rangle_{i \in I} \in \prod_{i \in I} P(V_i)$ が「任意の $i, j \in I$ に対して $f_i|_{V_i \cap V_j} = f_j|_{V_i \cap V_j}$」を満たすならば，$f \in P(U)$ が存在して，任意の $i \in I$ に対して $f|_{V_i} = f_i$ となる．

例 5. 例 1 の連続関数がなす前層の場合だと，条件 1 は「局所的に値が一致する関数は同じ関数である」という意味であり，条件 2 は「局所的に定義された関数が，共通部分で値が一致しているならば，それらを貼り合わせて全体で定義された関数を作ることができる」という意味である．よって連続関数がなす前層は層であることが分かる．同様に例 3 の前層も層である． □

例 6. 一方, 定数関数がなす前層 (例 2) は層でない場合がある．例えば位相空間 X において，開集合 $U, V \in \mathcal{O}_X$ で $U \cap V = \emptyset$ となるものが存在するとする．P を定数関数がなす前層として，$f_U \in P(U)$，$f_V \in P(V)$ を f_U と f_V の値が異なるようにとる．$U \cap V = \emptyset$ だから，f_U と f_V は「$U \cap V$ 上で値が一致」している．故に P が層だと仮定すると，層の条件 2 より $f \in P(U \cup V)$ で $f|_U = f_U$，$f|_V = f_V$ となるものが存在しなければならないが，明らかにそのような f は存在しない．故に P は層ではない． □

実は，層の条件は equalizer を使って表すことができる (命題 7)．それを説明する為，まず $U \subset X$ を開集合，$U = \bigcup_{i \in I} V_i$ を開被覆として，$\left\langle \prod_{i \in I} P(V_i), \langle p_i \rangle_{i \in I} \right\rangle$ を $\langle P(V_i) \rangle_{i \in I}$ の直積とする．$i \in I$ に対して制限写像 $\rho_{V_i U} \colon P(U) \to P(V_i)$ が存在するから，直積の普遍性により $e \colon P(U) \to \prod_{i \in I} P(V_i)$ が得られる．

$$
\begin{tikzcd}
 & P(U) \arrow[d, dashed, "e"] \arrow[ddl, bend right, "\rho_{V_i U}"'] \arrow[ddr, bend left, "\rho_{V_j U}"] & \\
 & \prod_{i \in I} P(V_i) \arrow[dl, "p_i"] \arrow[dr, "p_j"'] & \\
P(V_i) & & P(V_j)
\end{tikzcd}
$$

この e は $f \in P(U)$ に対して $e(f) = \langle f|_{V_i} \rangle_{i \in I}$ で与えられる．

次に $i, j \in I$ に対して制限写像 $\rho_{V_i \cap V_j, V_i} \colon P(V_i) \to P(V_i \cap V_j)$ が存在するから，合成して $\rho_{V_i \cap V_j, V_i} \circ p_i \colon \prod_{i \in I} P(V_i) \to P(V_i \cap V_j)$ が得られる．よって直積の普遍性から

$p\colon \prod_{i\in I} P(V_i) \to \prod_{i,j\in I} P(V_i\cap V_j)$ が得られる．

$$\begin{tikzcd}
 & \prod_{i\in I} P(V_i) \arrow[dl, "p_i"'] \arrow[dr, "p_{i'}"] \arrow[d, dashed, "p"] & \\
P(V_i) \arrow[d, "\rho_{V_i\cap V_j,V_i}"'] & \prod_{i,j\in I} P(V_i\cap V_j) \arrow[dl] \arrow[dr] & P(V_{i'}) \arrow[d, "\rho_{V_{i'}\cap V_{j'},V_{i'}}"] \\
P(V_i\cap V_j) & & P(V_{i'}\cap V_{j'})
\end{tikzcd}$$

同様にして，合成 $\rho_{V_i\cap V_j,V_j}\circ p_j\colon \prod_{i\in I} P(V_i)\to P(V_i\cap V_j)$ から，直積の普遍性により次の射 $q\colon \prod_{i\in I} P(V_i) \to \prod_{i,j\in I} P(V_i\cap V_j)$ が得られる．

$$\begin{tikzcd}
 & \prod_{i\in I} P(V_i) \arrow[dl, "p_j"'] \arrow[dr, "p_{j'}"] \arrow[d, dashed, "q"] & \\
P(V_j) \arrow[d, "\rho_{V_i\cap V_j,V_j}"'] & \prod_{i,j\in I} P(V_i\cap V_j) \arrow[dl] \arrow[dr] & P(V_{j'}) \arrow[d, "\rho_{V_{i'}\cap V_{j'},V_{j'}}"] \\
P(V_i\cap V_j) & & P(V_{i'}\cap V_{j'})
\end{tikzcd}$$

以上により次の図式を得る．

$$\begin{tikzcd}
P(U) \arrow[r, "e"] & \prod_{i\in I} P(V_i) \arrow[r, shift left, "p"] \arrow[r, shift right, "q"'] & \prod_{i,j\in I} P(V_i\cap V_j)
\end{tikzcd}$$

このとき次の命題が成り立つ．

命題 7. X を位相空間，P を X 上の前層，$U=\bigcup_{i\in I} V_i$ を $U\in\mathcal{O}_X$ の開被覆とする．このとき条件 1 2 $\Longleftrightarrow$ 次の図式が equalizer となる．

$$\begin{tikzcd}
P(U) \arrow[r, "e"] & \prod_{i\in I} P(V_i) \arrow[r, shift left, "p"] \arrow[r, shift right, "q"'] & \prod_{i,j\in I} P(V_i\cap V_j)
\end{tikzcd}$$

証明. ($\Longrightarrow$) 条件 1 2 が成り立つとする．A を集合，$k\colon A \to \displaystyle\prod_{i\in I} P(V_i)$ を写像として $p\circ k = q\circ k$ を満たすとする．

$$\begin{tikzcd}
P(U) \arrow[r, "e"] & \displaystyle\prod_{i\in I} P(V_i) \arrow[r, shift left, "p"] \arrow[r, shift right, "q"'] & \displaystyle\prod_{i,j\in I} P(V_i\cap V_j) \\
A \arrow[u, dashed, "h"] \arrow[ur, "k"'] & &
\end{tikzcd}$$

$a\in A$ に対して $k(a) = \langle f_i\rangle_{i\in I}$ と書けば

$$\langle f_i|_{V_i\cap V_j}\rangle_{i,j\in I} = p(k(a)) = q(k(a)) = \langle f_j|_{V_i\cap V_j}\rangle_{i,j\in I}$$

となるから $f_i|_{V_i\cap V_j} = f_j|_{V_i\cap V_j}$ である．よって条件 2 から $f_a \in P(U)$ が存在して $f_a|_{V_i} = f_i$ とできる．故にこの f_a を使って $h(a) := f_a$ と定義すれば写像 $h\colon A\to P(U)$ が得られて，これは $e\circ h = k$ を満たす．条件 1 から f_a は一意だから，h も一意であることが分かる．以上により equalizer であることが分かった．

($\Longleftarrow$) equalizer だとする．$f, g\in P(U)$ が「任意の $i\in I$ に対して $f|_{V_i} = g|_{V_i}$」を満たすとする．$1 = \{*\}$ を一元集合として写像 $k\colon 1\to \displaystyle\prod_{i\in I} P(V_i)$ を $k(*) := \langle f|_{V_i}\rangle_{i\in I}$ で定義すると明らかに $p\circ k = q\circ k$ である．

$$\begin{tikzcd}
P(U) \arrow[r, "e"] & \displaystyle\prod_{i\in I} P(V_i) \arrow[r, shift left, "p"] \arrow[r, shift right, "q"'] & \displaystyle\prod_{i,j\in I} P(V_i\cap V_j) \\
1 \arrow[u, dashed, "h"] \arrow[ur, "k"'] & &
\end{tikzcd}$$

故に equalizer の普遍性から，$h\colon 1\to P(U)$ が一意に存在して $e\circ h = k$ となる．ところで $h_1, h_2\colon 1\to P(U)$ を $h_1(*) := f$，$h_2(*) := g$ で定義すれば明らかに $e\circ h_1 = k$，$e\circ h_2 = k$ である．故に一意性から $h_1 = h_2$ となり，従って $f = g$ である．

次に 2 を示すため，$\langle f_i\rangle_{i\in I} \in \displaystyle\prod_{i\in I} P(V_i)$ が「$i, j\in I$ に対して $f_i|_{V_i\cap V_j} = f_j|_{V_i\cap V_j}$」を満たすとする．つまり $p(\langle f_i\rangle_{i\in I}) = q(\langle f_i\rangle_{i\in I})$ である．よって写像 $k\colon 1\to \displaystyle\prod_{i\in I} P(V_i)$ を

$k(*) := \langle f_i \rangle_{i \in I}$ で定義すると $p \circ k = q \circ k$ である．

$$
\begin{tikzcd}
P(U) \arrow[r, "e"] & \prod_{i \in I} P(V_i) \arrow[r, shift left, "p"] \arrow[r, shift right, "q"'] & \prod_{i,j \in I} P(V_i \cap V_j) \\
1 \arrow[u, dashed, "h"] \arrow[ur, "k"'] & &
\end{tikzcd}
$$

故に equalizer の普遍性から，$h \colon 1 \to P(U)$ が一意に存在して $e \circ h = k$ となる．このとき $f := h(*) \in P(U)$ と置けば $e(f) = \langle f_i \rangle_{i \in I}$ だから $f|_{V_i} = f_i$ である． $\square$