ココンマ圏と profunctor

alg-d

http://alg-d.com/math/kan_extension/

2021 年 11 月 8 日

これまで見てきた通り，圏論ではコンマ圏が非常に重要な役割を果たす．そうすると気になるのは，コンマ圏の双対となる「ココンマ圏」は存在するのであろうか，ということである．

定義. 圏 C の図式 $a \leftarrow c \rightarrow b$ を a から b への span という．双対的に，図式 $a \rightarrow c \leftarrow b$ を a から b への cospan という．

定義. C を圏，$a, b \in C$ を対象とする．a から b への span がなす圏 $\mathrm{Span}_C(a, b)$ を以下のように定める．

- $\mathrm{Ob}(\mathrm{Span}_C(a, b)) := \{\langle f, g\rangle \in \mathrm{Mor}(C)^2 \mid c \in C,\ a \xleftarrow{f} c \xrightarrow{g} b\}$
- $\langle f, g\rangle, \langle k, l\rangle \in \mathrm{Span}_C(a, b)$ とする．$c := \mathrm{dom}(f)$，$d := \mathrm{dom}(k)$ とする．$\langle f, g\rangle$ から $\langle k, l\rangle$ への射は，次の図式を可換とする射 $h \colon c \to d$ で定める．

$$\begin{tikzcd}
a & & b \\
& d \arrow[ul, "k"'] \arrow[ur, "l"] & \\
& c \arrow[u, "h"] \arrow[uul, bend left, "f"] \arrow[uur, bend right, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

圏 C が文脈から明らかな場合は添え字を省略して単に $\mathrm{Span}(a, b)$ と書く．また同様にして cospan がなす圏 $\mathrm{Cospan}_C(a, b)$ が以下のように定まる．

- $\mathrm{Ob}(\mathrm{Cospan}_C(a, b)) := \{\langle f, g\rangle \in \mathrm{Mor}(C)^2 \mid c \in C,\ a \xrightarrow{f} c \xleftarrow{g} b\}$
- $\langle f, g\rangle, \langle k, l\rangle \in \mathrm{Cospan}_C(a, b)$ とする．$c := \mathrm{cod}(f)$，$d := \mathrm{cod}(k)$ とする．$\langle f, g\rangle$ か

ら $\langle k,l\rangle$ への射は，次の図式を可換とする射 $h\colon c \to d$ で定める．

$$\begin{tikzcd}
& d & \\
& c \arrow[u, "h"] & \\
a \arrow[ur, "f"'] \arrow[uur, bend left, "k"] & & b \arrow[ul, "g"] \arrow[uul, bend right, "l"']
\end{tikzcd}$$

ここでは小圏の圏 **Cat** における span，cospan を考える．

$A \xrightarrow{F} C \xleftarrow{G} B$ を **Cat** の cospan としたとき，コンマ圏 $G{\downarrow}F$ は span $A \leftarrow G{\downarrow}F \to B$ を与えるのであった．[*1]

命題 1. コンマ圏を取る操作は関手 $\downarrow\colon$ $\mathrm{Cospan}(A,B) \to \mathrm{Span}(A,B)$ を与える．

証明． $A \xrightarrow{F} C \xleftarrow{G} B$，$A \xrightarrow{K} D \xleftarrow{L} B$ を cospan，$H\colon \langle F,G\rangle \to \langle K,L\rangle$ を $\mathrm{Cospan}(A,B)$ の射とする．このとき関手 ${\downarrow}H\colon G\downarrow F \to L\downarrow K$ をコンマ圏の普遍性により定める．

$$\begin{tikzcd}
& C' & & & & C' & \\
& & & & & C \arrow[u, "H"] \arrow[ul, phantom, "="] \arrow[ur, phantom, "="] & \\
A \arrow[uur, bend left, "K"] \arrow[rr, phantom, "\Leftarrow"] & & B \arrow[uul, bend right, "L"'] & = & A \arrow[uur, bend left, "K"] \arrow[ur, "F"'] & & B \arrow[uul, bend right, "L"'] \arrow[ul, "G"] \\
& L\downarrow K \arrow[ul] \arrow[ur] & & & & & \\
& G\downarrow F \arrow[uul, bend left, "P_1"] \arrow[uur, bend right, "P_0"'] \arrow[u, dashed, "\downarrow H"] \arrow[ul, phantom, "="] \arrow[ur, phantom, "="] & & & & G\downarrow F \arrow[uul, bend left, "P_1"] \arrow[uur, bend right, "P_0"'] \arrow[uu, phantom, "\Leftarrow"] &
\end{tikzcd}$$

普遍性により，これは明らかに関手 $\downarrow\colon$ $\mathrm{Cospan}(A,B) \to \mathrm{Span}(A,B)$ を与える．　□

そこで，もしこの関手が左随伴を持つとすると，それが「ココンマ圏を与える関手」であるとみなすことができる．というのも「コンマ圏の普遍性」の双対バージョン (定理 2) が成り立つからである．

それを説明するため，関手 $\downarrow$ が左随伴 $\uparrow\colon$ $\mathrm{Span}(A,B) \to \mathrm{Cospan}(A,B)$ を持つとして，その unit を η とする．$A \xleftarrow{F} C \xrightarrow{G} B$ を span とすると $\uparrow\langle F,G\rangle$ は cospan であるから，それを $A \xrightarrow{Q_0} F{\uparrow}G \xleftarrow{Q_1} B$ と書くと，これのコンマ圏を考えることができる．このとき

[*1] 後の構成の都合上，$F\downarrow G$ ではなく $G\downarrow F$ を考える．ここを $F\downarrow G$ に変えた場合は，後で出てくる $\mathbf{Prof}(A,B)$ が $\mathbf{Prof}(B,A)$ になる．

$S := \eta_{\langle F,G\rangle}$ は $\mathrm{Span}(A,B)$ の射 $C \to Q_1 {\downarrow} Q_0$ (次の図式の点線の射) のことである (ここで P_0, P_1, θ はコンマ圏 $Q_1 {\downarrow} Q_0$ から得られる関手と自然変換である).

$$
\begin{tikzcd}
 & A \arrow[r, "Q_0"] & F \uparrow G \\
 & Q_1 \downarrow Q_0 \arrow[u, "P_1"'] \arrow[r, "P_0"] \arrow[ur, phantom, "\Nwarrow \theta"] & B \arrow[u, "Q_1"'] \\
C \arrow[uur, bend left, "F"] \arrow[urr, bend right, "G"'] \arrow[ur, dashed, "S"'] \arrow[uu, phantom, "="] & &
\end{tikzcd}
$$

これらを合成して得られる自然変換を $\rho\colon Q_1G \Rightarrow Q_0F$ とする.

定理 2. 関手 ${\downarrow}$ が左随伴 ${\uparrow}\colon \mathrm{Span}(A,B) \to \mathrm{Cospan}(A,B)$ を持つとする. このとき上のように定義した図式

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "Q_0"] & F \uparrow G \\
C \arrow[u, "F"] \arrow[r, "G"'] \arrow[ur, phantom, "\Nwarrow \rho"] & B \arrow[u, "Q_1"']
\end{tikzcd}
$$

は次の普遍性を満たす: X を圏, $R_0\colon A \to X$, $R_1\colon B \to X$ を関手, $\alpha\colon R_1G \Rightarrow R_0F$ を自然変換とする.

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "R_0"] & X \\
C \arrow[u, "F"] \arrow[r, "G"'] \arrow[ur, phantom, "\Nwarrow \alpha"] & B \arrow[u, "R_1"']
\end{tikzcd}
$$

このとき関手 $H\colon F \uparrow G \to X$ が一意に存在して以下を満たす.

(1) $HQ_0 = R_0$, $HQ_1 = R_1$ である.
(2) 次の自然変換の等式が成り立つ.

$$
\begin{tikzcd}
 & & X \\
A \arrow[r, "Q_0"] \arrow[urr, bend left, "R_0"] & F \uparrow G \arrow[ur, dashed, "H"'] & \\
C \arrow[u, "F"] \arrow[r, "G"'] \arrow[ur, phantom, "\Nwarrow \rho"] & B \arrow[u, "Q_1"'] \arrow[uur, bend right, "R_1"'] &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
 & & X \\
A \arrow[urr, bend left, "R_0"] & & \\
C \arrow[u, "F"] \arrow[r, "G"'] \arrow[uurr, phantom, "\Nwarrow \alpha"] & B \arrow[uur, bend right, "R_1"'] &
\end{tikzcd}
$$

証明．まず H の存在を示す．そのためにコンマ圏 $R_1 \downarrow R_0$ を取り，そこから得られる関手と自然変換を P_0', P_1', θ' とする．普遍性により次の図式の点線の関手 $M\colon C \to R_1 \downarrow R_0$ が得られる．

$$
\begin{tikzcd}
 & & X \\
 & A \arrow[ur, bend left, "R_0"] & \\
 & R_1\downarrow R_0 \arrow[u, "P_1'"'] \arrow[r, "P_0'"] & B \arrow[u, bend right, "R_1"'] \arrow[ul, phantom, "\Uparrow\theta'"] \\
C \arrow[uur, bend left, "F"] \arrow[ur, dashed, "M"'] \arrow[urr, bend right, "G"'] & &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
 & & X \\
 & A \arrow[ur, bend left, "R_0"] & \\
 & & B \arrow[uu, bend right, "R_1"'] \arrow[ul, phantom, "\Uparrow\alpha"] \\
C \arrow[uur, bend left, "F"] \arrow[urr, bend right, "G"'] & &
\end{tikzcd}
$$

このとき随伴 $\mathrm{Hom}(\uparrow\langle F, G\rangle, \langle R_0, R_1\rangle) \cong \mathrm{Hom}(\langle F, G\rangle, \downarrow\langle R_0, R_1\rangle)$ により，M の随伴射となる関手 $H\colon F \uparrow G \to X$ が取れる．これが条件 (1)(2) を満たすことを示す．

　まず条件 (1) は，定義より H が $\mathrm{Cospan}(A, B)$ の射であるからよい．条件 (2) を示そう．随伴の unit の性質から $\downarrow H \circ S = M$ が成り立つ．従って

$$
\begin{tikzcd}
 & & X \\
 & A \arrow[ur, bend left, "R_0"] & \\
 & & B \arrow[uu, bend right, "R_1"'] \arrow[ul, phantom, "\Uparrow\alpha"] \\
C \arrow[uur, bend left, "F"] \arrow[urr, bend right, "G"'] & &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
 & & X \\
 & A \arrow[ur, bend left, "R_0"] & \\
 & R_1\downarrow R_0 \arrow[u, "P_1'"'] \arrow[r, "P_0'"] & B \arrow[u, bend right, "R_1"'] \arrow[ul, phantom, "\Uparrow\theta'"] \\
C \arrow[uur, bend left, "F"] \arrow[ur, "M"'] \arrow[urr, bend right, "G"'] & &
\end{tikzcd}
$$

$$
=
\begin{tikzcd}
 & & & X \\
 & & A \arrow[ur, bend left, "R_0"] & \\
 & & R_1\downarrow R_0 \arrow[u, "P_1'"'] \arrow[r, "P_0'"] & B \arrow[uu, bend right, "R_1"'] \arrow[ul, phantom, "\Uparrow\theta'"] \\
 & Q_1\downarrow Q_0 \arrow[uur, bend left, "P_1"] \arrow[ur, "\downarrow H"'] \arrow[urr, bend right, "P_0"'] & & \\
C \arrow[uuurr, bend left, "F"] \arrow[ur, "S"'] \arrow[uurrr, bend right, "G"'] & & &
\end{tikzcd}
$$

$$
= \quad
\begin{tikzcd}
 & & & & X \\
 & & A \arrow[urr, bend left, "R_0"] \arrow[r, "Q_0"'] \arrow[ur, phantom, "="] & F\uparrow G \arrow[ur, "H"'] \arrow[dr, phantom, "="] & \\
 & & \arrow[u, phantom, "\Uparrow\theta"] & B \arrow[u, "Q_1"] \arrow[uur, bend right, "R_1"'] & \\
 & Q_1\downarrow Q_0 \arrow[uur, bend left, "P_1"] \arrow[urr, bend right, "P_0"'] & & & \\
C \arrow[uuurr, bend left, "F"] \arrow[ur, "S"'] \arrow[uurrr, bend right, "G"'] \arrow[u, phantom, "="] \arrow[r, phantom, "="] & & & &
\end{tikzcd}
$$

$$
= \quad
\begin{tikzcd}
 & & & & X \\
 & & A \arrow[urr, bend left, "R_0"] \arrow[r, "Q_0"'] \arrow[ur, phantom, "="] & F\uparrow G \arrow[ur, "H"'] \arrow[dr, phantom, "="] & \\
 & & & B \arrow[u, "Q_1"] \arrow[uur, bend right, "R_1"'] & \\
 & \arrow[ur, phantom, "\Uparrow\rho"] & & & \\
C \arrow[uuurr, bend left, "F"] \arrow[uurrr, bend right, "G"'] & & & &
\end{tikzcd}
$$

となり条件 (2) が成り立つ．

後は H の一意性を示せばよい．H が条件 (1)(2) を満たすとすると H は $\mathrm{Cospan}(A,B)$ の射 $F\uparrow G \to X$ だから，随伴射 $M\colon C \to R_1\downarrow R_0$ が取れる．従ってこの M が一意であることを示せばよい．再び unit の性質から，これは $\downarrow H \circ S = M$ を満たす．故に

$$
\begin{tikzcd}
 & & & X \\
 & A \arrow[urr, bend left, "R_0"] & \arrow[u, phantom, "\Uparrow\theta'"] & \\
 & R_1\downarrow R_0 \arrow[u, "P_1'"'] \arrow[r, "P_0'"] & B \arrow[uur, bend right, "R_1"'] & \\
C \arrow[uur, bend left, "F"] \arrow[ur, "M"'] \arrow[urr, bend right, "G"'] \arrow[u, phantom, "="] \arrow[r, phantom, "="] & & &
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
 & & & & X \\
 & & A \arrow[urr, bend left, "R_0"] & \arrow[u, phantom, "\Uparrow\theta'"] & \\
 & & R_1\downarrow R_0 \arrow[u, "P_1'"'] \arrow[r, "P_0'"] \arrow[dr, phantom, "="] & B \arrow[uur, bend right, "R_1"'] & \\
 & Q_1\downarrow Q_0 \arrow[uur, bend left, "P_1"] \arrow[ur, "\downarrow H"'] \arrow[urr, bend right, "P_0"'] \arrow[u, phantom, "="] & & & \\
C \arrow[uuurr, bend left, "F"] \arrow[ur, "S"'] \arrow[uurrr, bend right, "G"'] \arrow[u, phantom, "="] \arrow[r, phantom, "="] & & & &
\end{tikzcd}
$$

$$
= \begin{tikzcd}
 & & & & X \\
 & & A \arrow[r, "Q_0"'] \arrow[urr, bend left, "R_0"] \arrow[ur, phantom, "="] & F \uparrow G \arrow[ur, "H"'] & \\
 & & & B \arrow[u, "Q_1"] \arrow[uur, bend right, "R_1"'] \arrow[ur, phantom, "="] \arrow[ul, phantom, "\Uparrow\theta"] & \\
 & Q_1 \downarrow Q_0 \arrow[uur, bend left, "P_1"] \arrow[urr, bend right, "P_0"'] \arrow[dr, phantom, "="] \arrow[ul, phantom, "="] & & & \\
C \arrow[uuurr, bend left, "F"] \arrow[ur, "S"'] \arrow[uurrr, bend right, "G"'] & & & &
\end{tikzcd}
$$

$$
= \begin{tikzcd}
 & & & & X \\
 & & A \arrow[r, "Q_0"'] \arrow[urr, bend left, "R_0"] \arrow[ur, phantom, "="] & F \uparrow G \arrow[ur, "H"'] & \\
 & & & B \arrow[u, "Q_1"] \arrow[uur, bend right, "R_1"'] \arrow[ur, phantom, "="] & \\
 & & & & \\
C \arrow[uuurr, bend left, "F"] \arrow[uurrr, bend right, "G"'] \arrow[uurr, phantom, "\Uparrow\rho"] & & & &
\end{tikzcd}
$$

$$
= \begin{tikzcd}
 & & & & X \\
 & & A \arrow[urr, bend left, "R_0"] & & \\
 & & & B \arrow[uur, bend right, "R_1"'] \arrow[ul, phantom, "\Uparrow\alpha"] & \\
 & & & & \\
C \arrow[uuurr, bend left, "F"] \arrow[uurrr, bend right, "G"'] & & & &
\end{tikzcd}
$$

となるから，$R_1 \downarrow R_0$ の普遍性により M は一意である． □

そこで問題は $\downarrow$: $\mathrm{Cospan}(A, B) \to \mathrm{Span}(A, B)$ が左随伴を持つか，ということになる．答えは存在する，であるが，これを構成するために profunctor というものを導入する．

定義. C, D を圏とする．C から D への profunctor (もしくは distributor もしくは correspondence もしくは bimodule) とは関手 $P\colon C \to \widehat{D}$ のことである．profunctor を記号 $P\colon C \nrightarrow D$ などで表す.

自然同型 $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Cat}}(A \times B, C) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Cat}}(A, C^B)$ により, profunctor $P\colon C \nrightarrow D$ 即ち関手 $P\colon C \to \widehat{D}$ と関手 $P\colon D^{\mathrm{op}} \times C \to \mathbf{Set}$ を同一視することができる．以下, 特に断らずこの同一視を行う．また C から D への profunctor がなす圏を $\mathbf{Prof}(C, D) := \mathbf{Set}^{D^{\mathrm{op}} \times C}$ で定める.

定義. $P\colon A \nrightarrow B$, $Q\colon B \nrightarrow C$ に対して profunctor の合成 $Q \otimes P\colon A \nrightarrow C$ を関手 $(y^\dagger Q) \circ P\colon A \to \widehat{C}$ で定める.

$$
\begin{tikzcd}
 & \widehat{B} \arrow[r, "y^\dagger Q"] & \widehat{C} \\
A \arrow[ur, "P"] & B \arrow[u, "y"] \arrow[ur, "Q"'] &
\end{tikzcd}
$$

圏 C に対して米田埋込 $y\colon C \to \widehat{C}$ が定める profunctor を $\mathrm{id}_C\colon C \nrightarrow C$ で表す．米田埋込と左 Kan 拡張の性質から容易に分かるように $P\colon C \nrightarrow D$ に対して $P \otimes \mathrm{id}_C \cong P$, $\mathrm{id}_D \otimes P \cong P$ である.

命題 3. $P\colon A \nrightarrow B$, $Q\colon B \nrightarrow C$ を profunctor とするとき, $a \in A$ に対して

$$Q \otimes P(a) \cong \int^{b \in B} P(b, a) \times Q(-, b).$$

証明. $X \in \widehat{B}$ に対して $y^\dagger Q(X) \cong \displaystyle\int^{b \in B} \mathrm{Hom}_{\widehat{B}}(y(b), X) \times Qb \cong \int^{b \in B} Xb \times Qb$ であるから $Q \otimes P(a) = y^\dagger Q(Pa) \cong \displaystyle\int^{b \in B} Pa(b) \times Qb = \int^{b \in B} P(b, a) \times Q(-, b)$. $\square$

$F\colon C \to D$ を関手とする．このとき profunctor $F_*\colon C \nrightarrow D$, $F^*\colon D \nrightarrow C$ が

$$F_*(d, c) := \mathrm{Hom}_D(d, Fc), \quad F^*(c, d) := \mathrm{Hom}_D(Fc, d)$$

により定まる．つまり $F_*(c) = y \circ F(c) = F^{-1} y(c)$, $F^*(d) \cong F^\dagger y(d)$ である.

そこで cospan $A \xrightarrow{F} C \xleftarrow{G} B$ に対して profunctor $A \nrightarrow B$ が $G^* \otimes F_*$ により得られる．これは

$$G^* \otimes F_* \cong (G^\dagger y) \otimes (y \circ F) \cong y^\dagger (G^\dagger y) \circ y \circ F$$

$$
\begin{tikzcd}
& & \widehat{C} \arrow[dr, "y^\dagger(G^\dagger y)"] & \\
& C \arrow[ur, "y"] \arrow[rr, "G^\dagger y"] & & \widehat{B} \\
A \arrow[ur, "F"] & & B \arrow[ul, "G"] \arrow[ur, "y"'] &
\end{tikzcd}
$$

となる．ここで y が忠実充満より $y^\dagger(G^\dagger y)\circ y \cong G^\dagger y$ となるから結局 $G^*\otimes F_* \cong (G^\dagger y)\circ F$ が分かる．そこで $\Phi\langle F, G\rangle := (G^\dagger y)\circ F$ と定める．各点 Kan 拡張の性質から，$a \in A$ に対して

$$\Phi\langle F, G\rangle(a) = G^\dagger y(Fa) \cong \mathrm{Hom}_C(G-, Fa)$$

となる．

命題 4. $\Phi\colon \mathrm{Cospan}(A, B) \to \mathbf{Prof}(A, B)$ は関手となる．

証明. $\mathrm{Cospan}(A, B)$ の射 $H\colon \langle F, G\rangle \to \langle K, L\rangle$ (次の図式を参照) を取る．

$$
\begin{tikzcd}
& D & \\
& C \arrow[u, "H"] & \\
A \arrow[uur, bend left, "K"] \arrow[ur, "F"'] & & B \arrow[uul, bend right, "L"'] \arrow[ul, "G"]
\end{tikzcd}
$$

ここで自然変換 τ^H を，左 Kan 拡張 $G^\dagger y$ の普遍性により，次の等号が成り立つように取る．

$$
\begin{tikzcd}
D \arrow[rr, "L^\dagger y"] & & \widehat{B} \\
C \arrow[u, "H"] \arrow[urr, "G^\dagger y"'] \arrow[u, phantom, shift left=5ex, "\Uparrow\tau^H"] & & \\
& B \arrow[ul, "G"] \arrow[uur, "y"'] \arrow[u, phantom, shift right=2ex, "\Lleftarrow"] &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
D \arrow[rr, "L^\dagger y"] & & \widehat{B} \\
C \arrow[u, "H"] \arrow[r, phantom, "="] & \arrow[ur, phantom, "\Uparrow"] & \\
& B \arrow[ul, "G"] \arrow[uur, "y"'] \arrow[uul, bend right, "L"'] &
\end{tikzcd}
$$

この τ^H を使って自然変換 $\Phi(H)\colon \Phi\langle F, G\rangle \Rightarrow \Phi\langle K, L\rangle$ が得られる．

$$
\Phi(H) \quad := \quad
\begin{tikzcd}
& D \arrow[rr, "L^\dagger y"] & & \widehat{B} \\
& C \arrow[u, "H"] \arrow[urr, "G^\dagger y"'] \arrow[u, phantom, shift left=5ex, "\Uparrow\tau^H"] \arrow[u, phantom, shift right=5ex, "="] & & \\
A \arrow[uur, bend left, "K"] \arrow[ur, "F"'] & & &
\end{tikzcd}
$$

これにより Φ が関手になることを示せばよい．

まず $H = \mathrm{id}$ の場合は $G = L$ となるから $G^\dagger y = L^\dagger y$ であり，故に $\tau^{\mathrm{id}} = \mathrm{id}$ となるから $\Phi(\mathrm{id}) = \mathrm{id}$ である．故に Φ が合成と交換することを示せばよい．そこで H, H' を次の図式のような $\mathrm{Cospan}(A, B)$ の射とする．

$$
\begin{tikzcd}
 & C_2 & \\
 & C_1 \arrow[u, "H'"] & \\
 & C_0 \arrow[u, "H"] & \\
A \arrow[ur, "F"'] \arrow[uur, "K"] \arrow[uuur, bend left, "S"] & & B \arrow[ul, "G"] \arrow[uul, "L"'] \arrow[uuul, bend right, "T"']
\end{tikzcd}
$$

このとき τ の定義より

$$
\begin{tikzcd}
C_2 \arrow[rrd, "T^\dagger y"] & & \\
C_1 \arrow[u, "H'"] \arrow[r, phantom, "\Uparrow\tau^{H'H}"] & & \widehat{B} \\
C_0 \arrow[u, "H"] \arrow[rru, "G^\dagger y"] & & \\
 & B \arrow[lu, "G"] \arrow[ruu, "y"'] \arrow[u, phantom, "\Leftarrow"] &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
C_2 \arrow[rrd, "T^\dagger y"] & & \\
C_1 \arrow[u, "H'"] \arrow[r, phantom, "="] & & \widehat{B} \\
C_0 \arrow[u, "H"] \arrow[r, phantom, "="] & \arrow[r, phantom, "\Uparrow"] & \\
 & B \arrow[lu, "G"] \arrow[luu, bend right, "L"'] \arrow[luuu, bend right, "T"'] \arrow[ruu, "y"'] &
\end{tikzcd}
$$

$$
=
\begin{tikzcd}
C_2 \arrow[rrd, "T^\dagger y"] \arrow[d, phantom, "\Uparrow\tau^{H'}"] & & \\
C_1 \arrow[u, "H'"] \arrow[rr, "L^\dagger y"] & & \widehat{B} \\
C_0 \arrow[u, "H"] \arrow[r, phantom, "="] & \arrow[r, phantom, "\Uparrow"] & \\
 & B \arrow[lu, "G"] \arrow[luu, bend right, "L"'] \arrow[ruu, "y"'] &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
C_2 \arrow[rrd, "T^\dagger y"] \arrow[d, phantom, "\Uparrow\tau^{H'}"] & & \\
C_1 \arrow[u, "H'"] \arrow[rr, "L^\dagger y"] \arrow[d, phantom, "\Uparrow\tau^{H}"] & & \widehat{B} \\
C_0 \arrow[u, "H"] \arrow[rru, "G^\dagger y"] & & \\
 & B \arrow[lu, "G"] \arrow[ruu, "y"'] \arrow[u, phantom, "\Leftarrow"] &
\end{tikzcd}
$$

となるから，左 Kan 拡張 $G^\dagger y$ の普遍性により

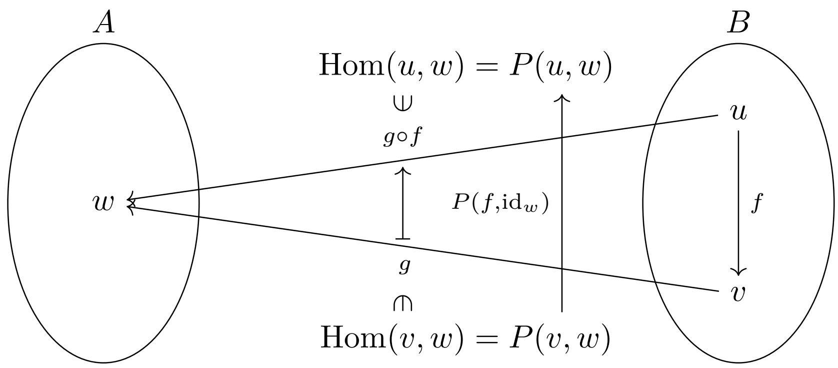
$$
\begin{tikzcd}
C_2 \arrow[rrd, "T^\dagger y"] \arrow[d, phantom, "\Uparrow\tau^{H'}"] & & \\
C_1 \arrow[u, "H'"] \arrow[rr, "L^\dagger y"] \arrow[d, phantom, "\Uparrow\tau^{H}"] & & \widehat{B} \\
C_0 \arrow[u, "H"] \arrow[rru, "G^\dagger y"] & &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
C_2 \arrow[rrd, "T^\dagger y"] & & \\
C_1 \arrow[u, "H'"] \arrow[r, phantom, "\Uparrow\tau^{H'H}"] & & \widehat{B} \\
C_0 \arrow[u, "H"] \arrow[rru, "G^\dagger y"] & &
\end{tikzcd}
$$

となるので $\Phi(H'H) = \Phi(H')\Phi(H)$ が分かる． $\square$

逆に profunctor $P\colon A \nrightarrow B$ に対して cospan $\Sigma(P) = (A \xrightarrow{F_P} C_P \xleftarrow{G_P} B)$ を以下のように定義することができる．まず圏 C_P を次により定める．

- $\mathrm{Ob}(C_P) := \mathrm{Ob}(A) \sqcup \mathrm{Ob}(B)$
- $\mathrm{Hom}_{C_P}(u, v) := \begin{cases} \mathrm{Hom}_A(u, v) & (u, v \in A \text{ のとき}) \\ \mathrm{Hom}_B(u, v) & (u, v \in B \text{ のとき}) \\ \emptyset & (u \in A,\ v \in B \text{ のとき}) \\ P(u, v) & (u \in B,\ v \in A \text{ のとき}) \end{cases}$
- 射 $f\colon u \to v$，$g\colon v \to w$ の合成 $g \circ f$ を次で定める．

$$g \circ f := \begin{cases} g \circ f & (u, v, w \in A \text{ のとき}) \\ g \circ f & (u, v, w \in B \text{ のとき}) \\ P(f, \mathrm{id}_w)(g) & (u, v \in B,\ w \in A \text{ のとき．下図参照}) \\ P(\mathrm{id}_u, g)(f) & (u \in B,\ v, w \in A \text{ のとき}) \end{cases}$$



関手 $F_P\colon A \to C_P$，$G_P\colon B \to C_P$ を標準的な埋込とすれば $\Sigma(P) \in \mathrm{Cospan}(A, B)$ である．

命題 5. $\Sigma\colon \mathbf{Prof}(A, B) \to \mathrm{Cospan}(A, B)$ は関手となる．

証明. $\mathbf{Prof}(A, B)$ の射 $\theta\colon P \Rightarrow Q$ に対して $\mathrm{Cospan}(A, B)$ の射 $\Sigma(\theta)\colon \Sigma(P) \to \Sigma(Q)$，即ち次の図式が可換となるような関手 $\Sigma(\theta)$ を定めたい．

$$\begin{tikzcd} & C_Q & \\ & C_P \arrow[u, "\Sigma(\theta)"] & \\ A \arrow[ur, "F_P"'] \arrow[uur, bend left, "F_Q"] & & B \arrow[ul, "G_P"] \arrow[uul, bend right, "G_Q"'] \end{tikzcd}$$

そのためには対象 $a \in A$，$b \in B$ に対して写像 $\Sigma(\theta)\colon \mathrm{Hom}_{C_P}(b,a) \to \mathrm{Hom}_{C_Q}(b,a)$ をうまく定めればよい．Hom_{C_P} の定義から $\Sigma(\theta) := \theta_{ba}\colon P(b,a) \to Q(b,a)$ と定義することができる．これにより $\Sigma(\theta)$ は関手になる．

$\because$) 定義から $\Sigma(\theta)(\mathrm{id}) = \mathrm{id}$ は明らかである．従って $f\colon u \to v$，$g\colon v \to w$ としたときに $\Sigma(\theta)(g \circ f) = \Sigma(\theta)(g) \circ \Sigma(\theta)(f)$ となることを示せばよい．

(i) $u, v, w \in A$ または $u, v, w \in B$ の場合，明らか

(ii) $u, v \in B$，$w \in A$ の場合，定義から

$$\Sigma(\theta)(g \circ f) = \theta_{uw}(g \circ f), \quad \Sigma(\theta)(g) = \theta_{vw}(g), \quad \Sigma(\theta)(f) = f$$

であり，一方 θ が自然変換だから $\theta_{uw}(g \circ f) = \theta_{vw}(g) \circ f$ が分かる．

$$\begin{tikzcd}
P(u,w) \arrow[r, "\theta_{uw}"] & Q(u,w) \\
P(v,w) \arrow[u, "P(f,\mathrm{id}_w)"] \arrow[r, "\theta_{vw}"'] & Q(v,w) \arrow[u, "Q(f,\mathrm{id}_w)"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
g \circ f \arrow[r, mapsto, "\theta_{uw}"] & \theta_{uw}(g \circ f) \\
 & \theta_{vw}(g) \circ f \\
g \arrow[uu, mapsto, "P(f,\mathrm{id}_w)"] \arrow[r, mapsto, "\theta_{vw}"'] & \varphi_{vw}(g) \arrow[u, mapsto, "Q(f,\mathrm{id}_w)"']
\end{tikzcd}$$

(iii) $u \in B$，$v, w \in A$ の場合，定義から

$$\Sigma(\theta)(g \circ f) = \theta_{uw}(g \circ f), \quad \Sigma(\theta)(g) = g, \quad \Sigma(\theta)(f) = \theta_{uv}(f)$$

であり，一方 θ が自然変換だから $\theta_{uw}(g \circ f) = g \circ \theta_{uv}(f)$ が分かる．

$$\begin{tikzcd}
P(u,v) \arrow[r, "\theta_{uv}"] \arrow[d, "P(\mathrm{id}_u,g)"'] & Q(u,v) \arrow[d, "Q(\mathrm{id}_u,g)"] \\
P(u,w) \arrow[r, "\theta_{uw}"'] & Q(u,w)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
f \arrow[r, mapsto, "\theta_{uv}"] \arrow[dd, mapsto, "P(\mathrm{id}_u,g)"'] & \theta_{uv}(f) \arrow[d, mapsto, "Q(\mathrm{id}_u,g)"] \\
 & g \circ \theta_{uv}(f) \\
g \circ f \arrow[r, mapsto, "\theta_{uw}"'] & \theta_{uw}(g \circ f)
\end{tikzcd}$$

以上により $\Sigma(\theta)$ は関手であることが分かった．

これにより Σ が関手になることを示す．Σ の定義より $\Sigma(\mathrm{id}) = \mathrm{id}$ は明らかである．そこで $\theta\colon P \Rightarrow Q$, $\sigma\colon Q \Rightarrow R$ に対して $\Sigma(\sigma \circ \theta) = \Sigma(\sigma) \circ \Sigma(\theta)$ を示す．そのためには $a \in A$, $b \in B$ に対して $(\sigma \circ \theta)_{ba} = \sigma_{ba} \circ \theta_{ba}$ を示せばよいが，それは自然変換の合成の定義である． $\square$

命題 6. 随伴 $\Sigma \dashv \Phi\colon \mathbf{Prof}(A,B) \to \mathrm{Cospan}(A,B)$ が成り立つ．更にこれの unit は同

型である．

証明. 随伴であることを示すため，$P \in \mathbf{Prof}(A, B)$，$(A \xrightarrow{F} C \xleftarrow{G} B) \in \mathrm{Cospan}(A, B)$ について自然な全単射

$$\varphi\colon \mathrm{Hom}_{\mathrm{Cospan}(A,B)}(\Sigma(P), \langle F, G\rangle) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{Prof}(A,B)}(P, \Phi\langle F, G\rangle)$$

を定義する．

まず profunctor $P\colon A \nrightarrow B$ に対して自然同型

$$\Phi(\Sigma(P))(-, \Box) = \Phi(F_P, G_P)(-, \Box) \cong \mathrm{Hom}_{C_P}(G_P-, F_P\Box) = P(-, \Box)$$

が成り立つ．この自然同型を $\eta\colon \mathrm{id} \Rightarrow \Phi \circ \Sigma$ とする．また，θ を $\mathrm{cod}(\theta) = \Phi\langle F, G\rangle$ なる自然変換としたとき，それと $\Phi\langle F, G\rangle \cong \mathrm{Hom}_C(G-, F\Box)$ を合成して得られる自然変換を $\widetilde{\theta}\colon P \Rightarrow \mathrm{Hom}_C(G-, F\Box)$ と書くことにする．

$H\colon \Sigma(P) \to \langle F, G\rangle$ を cospan の射としたとき $\varphi(H) := \Phi(H) \circ \eta_P\colon P \Rightarrow \Phi\langle F, G\rangle$ と定める．即ち

$$\varphi(H) \quad := \quad \begin{tikzcd} & C \arrow[rr, "G^\dagger y"] & & \widehat{B} \\ & C_P \arrow[u, "H"] \arrow[urr, "G_P^\dagger y"'] \arrow[u, phantom, shift left=6ex, "\Uparrow\tau^H"] \arrow[urr, phantom, shift right=4ex, "\Uparrow\eta_P"] & & \\ A \arrow[uur, bend left, "F"] \arrow[ur, "F_P"'] \arrow[uurrr, bend right, "P"'] \arrow[uur, phantom, shift right=3ex, "="] & & & \end{tikzcd}$$

である．φ は全単射 $\mathrm{Hom}(\Sigma(P), \langle F, G\rangle) \to \mathrm{Hom}(P, \Phi\langle F, G\rangle)$ を与える．

$\because$) $a \in A$，$b \in B$ として $f \in P(b, a)$ を取る．即ち $f\colon b \to a$ は C_P の射である．このとき $\tau^H\colon G_P^\dagger y \Rightarrow (G^\dagger y) \circ H$ が自然変換であるから次の図式が可換である．

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_{C_P}(-, b) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "f\circ-"'] & G_P^\dagger y(b) \arrow[r, "\tau_b^H"] \arrow[d, "G_P^\dagger y(f)"] & G^\dagger y(Hb) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "G^\dagger y(Hf)"] & \mathrm{Hom}_C(G-, Gb) \arrow[d, "Gf\circ-"] \\ \mathrm{Hom}_{C_P}(-, a) \arrow[r, "\cong"] & G_P^\dagger y(a) \arrow[r, "\tau_a^H"'] & G^\dagger y(Ha) \arrow[r, "\cong"] & \mathrm{Hom}_C(G-, Fa) \end{tikzcd}$$

よってこの図式の b 成分を考えると次の可換図式を得る．

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_{C_P}(b,b) \arrow[r, "G"] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_C(Gb,Gb) \arrow[d] \\ \mathrm{Hom}_{C_P}(b,a) \arrow[r, "\widetilde{\varphi(H)}_{ba}"'] & \mathrm{Hom}_C(Gb,Fa) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathrm{id}_b \arrow[r, mapsto, "G"] \arrow[d, mapsto] & \mathrm{id}_{Gb} \arrow[d, mapsto] \\ f \arrow[r, mapsto, "\widetilde{\varphi(H)}_{ba}"'] & Hf \end{tikzcd}$$

従って写像 $\widetilde{\varphi(H)}_{ba}$ は $H\colon P(b,a) \to \mathrm{Hom}_C(Gb,Fa)$ と一致しているから φ は単射である．

全射であることを示す．そのために $\theta\colon P \Rightarrow \Phi\langle F,G\rangle$ を自然変換とする．H を

- 対象 $x \in C_P$ に対して $Hx := \begin{cases} Fx & (x \in A) \\ Gx & (x \in B). \end{cases}$
- 射 $f\colon u \to v$ に対して $Hf := \begin{cases} Ff & (u,v \in A) \\ Gf & (u,v \in B) \\ \widetilde{\theta}_{ba}(f) & (u \in B, v \in A). \end{cases}$

と定義する．この $H\colon C_P \to C$ は関手である．

$\because$) $H(\mathrm{id}) = \mathrm{id}$ は明らかなので $f\colon u \to v$, $g\colon v \to w$ として $H(g \circ f) = Hg \circ Hf$ を示す．

(i) $u,v,w \in A$ または $u,v,w \in B$ の場合，明らか

(ii) $u,v \in B$，$w \in A$ の場合，定義から

$$\begin{cases} H(g \circ f) & = & \widetilde{\theta}_{uw}(g \circ f) \\ Hg & = & \widetilde{\theta}_{vw}(g) \\ Hf & = & Gf \end{cases}$$

であり，一方 $\widetilde{\theta}$ が自然変換だから $\widetilde{\theta}_{uw}(g \circ f) = \widetilde{\theta}_{vw}(g) \circ Gf$ である．

$$\begin{tikzcd} P(u,w) \arrow[r, "\widetilde{\theta}_{uw}"] & \mathrm{Hom}_C(Gu,Fw) \\ P(v,w) \arrow[r, "\widetilde{\theta}_{vw}"'] \arrow[u, "P(f,\mathrm{id}_w)"] & \mathrm{Hom}_C(Gv,Fw) \arrow[u, "-\circ Gf"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} g \circ f \arrow[r, mapsto, "\widetilde{\theta}_{uw}"] & \widetilde{\theta}_{uw}(g \circ f) \\ & \widetilde{\theta}_{vw}(g) \circ Gf \\ g \arrow[r, mapsto, "\widetilde{\theta}_{vw}"'] \arrow[uu, mapsto, "P(f,\mathrm{id}_w)"] & \widetilde{\theta}_{vw}(g) \arrow[u, mapsto, "-\circ Gf"'] \end{tikzcd}$$

(iii) $u \in B$, $v, w \in A$ の場合，定義から

$$\begin{cases} H(g \circ f) &= \widetilde{\theta}_{uw}(g \circ f) \\ Hg &= Fg \\ Hf &= \widetilde{\theta}_{uv}(f) \end{cases}$$

であり，一方 $\widetilde{\theta}$ が自然変換だから $\widetilde{\theta}_{uw}(g \circ f) = Fg \circ \widetilde{\theta}_{uv}(f)$ である．

$$\begin{tikzcd} P(u,v) \arrow[r, "\widetilde{\theta}_{uv}"] \arrow[d, "P(\mathrm{id}_u, g)"'] & \mathrm{Hom}_C(Gu, Fv) \arrow[d, "Fg\circ -"] \\ P(u,w) \arrow[r, "\widetilde{\theta}_{uw}"'] & \mathrm{Hom}_C(Gu, Fw) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} f \arrow[r, mapsto, "\widetilde{\theta}_{uv}"] \arrow[dd, mapsto, "P(\mathrm{id}_u, g)"'] & \widetilde{\theta}_{uv}(f) \arrow[d, mapsto, "Fg\circ -"] \\ & Fg \circ \widetilde{\theta}_{uv}(f) \\ g \circ f \arrow[r, mapsto, "\widetilde{\theta}_{uw}"'] & \widetilde{\theta}_{uw}(g \circ f) \end{tikzcd}$$

以上により H は関手であることが分かった．

このとき明らかに $HF_P = F$，$G_P H = G$ だから H は射 $\Sigma(P) \to \langle F, G \rangle$ である．

$$\begin{tikzcd} & C & \\ & C_P \arrow[u, "H"] & \\ A \arrow[ur, "F_P"'] \arrow[uur, bend left, "F"] & & B \arrow[ul, "G_P"] \arrow[uul, bend right, "G"'] \end{tikzcd}$$

上で示したように $\widetilde{\varphi(H)}_{ba}$ は $H\colon P(b,a) \to \mathrm{Hom}_C(Gb, Fa)$ と一致しているから，H の定義より $\widetilde{\varphi(H)}_{ba} = \widetilde{\theta}_{ba}$ である．故に $\varphi(H) = \theta$ となり φ は全射である．

定義から明らかに φ は自然である．従って随伴 $\Sigma \dashv \Phi$ が成り立つ．φ の定義よりこの随伴の unit は η であり，これは同型である． $\square$

unit が同型だから $\Sigma\colon \mathbf{Prof}(A,B) \to \mathrm{Cospan}(A,B)$ は忠実充満である (「随伴」の PDF を参照)．

次に span $A \xleftarrow{F} C \xrightarrow{G} B$ に対して profunctor $A \mathrel{-\!\!\!\circ\!\!\!\rightarrow} B$ が $G_* \otimes F^*$ により得られる．これは各点左 Kan 拡張の一般論により

$$G_* \otimes F^* \cong (yG) \otimes (F^\dagger y) \cong y^\dagger (yG) \circ F^\dagger y \cong F^\dagger (yG)$$

$$
\begin{tikzcd}
& \widehat{C} \arrow[rr, "y^\dagger(yG)"] & & \widehat{B} \\
A \arrow[ur, "F^\dagger y"] \arrow[r, phantom, "\Leftarrow"] & & B \arrow[ur, "y"'] \arrow[ul, phantom, "\Leftarrow"] & \\
& C \arrow[ul, "F"] \arrow[uu, "y"'] \arrow[ur, "G"'] & &
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
& & & \widehat{B} \\
A \arrow[urrr, "F^\dagger(yG)"] & \Leftarrow & B \arrow[ur, "y"'] & \\
& C \arrow[ul, "F"] \arrow[ur, "G"'] & &
\end{tikzcd}
$$

となる．そこで $\Psi\langle F, G\rangle = F^\dagger(yG)$ と定める．

命題 7. $\Psi\colon \mathrm{Span}(A, B) \to \mathbf{Prof}(A, B)$ は関手となる．

証明. そのために $\mathrm{Span}(A, B)$ の射 H (次の図式を参照) を取る．

$$
\begin{tikzcd}
A & & B \\
& D \arrow[ul, "K"'] \arrow[ur, "L"] & \\
& C \arrow[u, "H"] \arrow[uul, bend left, "F"] \arrow[uur, bend right, "G"'] &
\end{tikzcd}
$$

左 Kan 拡張の普遍性により自然変換 $\Psi(H)\colon \Psi\langle F, G\rangle \Rightarrow \Psi\langle K, L\rangle$ が得られる．

$$
\begin{tikzcd}
& & \widehat{B} \\
A \arrow[urr, bend left, "K^\dagger(yL)"] \arrow[urr, bend right=15, "F^\dagger(yG)"'] \arrow[urr, phantom, "\Uparrow \Psi(H)"] & & B \arrow[u, "y"'] \\
& \Leftarrow & \\
& C \arrow[uul, bend left, "F"] \arrow[uur, bend right, "G"'] &
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
& & \widehat{B} \\
A \arrow[urr, bend left, "K^\dagger(yL)"] & \Leftarrow & B \arrow[u, "y"'] \\
& D \arrow[ul, "K"] \arrow[ur, "L"'] & \\
& C \arrow[u, "H"] \arrow[uul, bend left, "F"] \arrow[uur, bend right, "G"'] &
\end{tikzcd}
$$

これにより Ψ が関手となることを示そう．

まず明らかに $\Psi(\mathrm{id}) = \mathrm{id}$ である．よって Ψ が合成と交換することを示せばよい．そこで $\mathrm{Span}(A, B)$ の射 H, H' を次の図式のように取る．

$$
\begin{tikzcd}
A & & B \\
& C_2 \arrow[ul, "S"'] \arrow[ur, "T"] & \\
& C_1 \arrow[u, "H'"] \arrow[uul, bend left, "K"] \arrow[uur, bend right, "L"'] & \\
& C_0 \arrow[u, "H"] \arrow[uuul, bend left, "F"] \arrow[uuur, bend right, "G"'] &
\end{tikzcd}
$$

このとき

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & \widehat{B} \\
A \arrow[urr, bend left=40, "S^\dagger(yT)"] \arrow[urr, "K^\dagger(yL)" description] \arrow[urr, bend right=40, "F^\dagger(yG)"'] \arrow[urr, phantom, bend left=20, "\Uparrow\Psi(H')"] \arrow[urr, phantom, bend right=20, "\Uparrow\Psi(H)"] & & B \arrow[u, "y"'] \\
 & C_0 \arrow[ul, bend left, "F"] \arrow[ur, bend right, "G"'] \arrow[u, phantom, "\Leftarrow"] &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & \widehat{B} \\
A \arrow[urr, bend left=40, "S^\dagger(yT)"] \arrow[urr, "K^\dagger(yL)" description] \arrow[urr, phantom, bend left=20, "\Uparrow\Psi(H')"] \arrow[rr, phantom, "\Leftarrow"] & & B \arrow[u, "y"'] \\
 & C_1 \arrow[ul, "K"] \arrow[ur, "L"'] & \\
 & C_0 \arrow[u, "H"] \arrow[uul, bend left, "F"] \arrow[uur, bend right, "G"'] &
\end{tikzcd}
$$

$$
=
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & \widehat{B} \\
A \arrow[urr, bend left=40, "S^\dagger(yT)"] \arrow[rr, phantom, bend left=30, "\Leftarrow"] & & B \arrow[u, "y"'] \\
 & C_2 \arrow[ul, "S"] \arrow[ur, "T"'] & \\
 & C_1 \arrow[u, "H'"] \arrow[uul, "K"] \arrow[uur, "L"'] & \\
 & C_0 \arrow[u, "H"] \arrow[uuul, bend left, "F"] \arrow[uuur, bend right, "G"'] &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & \widehat{B} \\
A \arrow[urr, bend left=40, "S^\dagger(yT)"] \arrow[urr, bend right=40, "F^\dagger(yG)"'] \arrow[urr, phantom, "\Uparrow\Psi(H'H)"] & & B \arrow[u, "y"'] \\
 & C_0 \arrow[ul, bend left, "F"] \arrow[ur, bend right, "G"'] \arrow[u, phantom, "\Leftarrow"] &
\end{tikzcd}
$$

より普遍性から $\Psi(H'H) = \Psi(H')\Psi(H)$ が分かる． $\square$

逆に関手 $\Lambda\colon \mathbf{Prof}(A,B) \to \mathrm{Span}(A,B)$ が $\Lambda := {\downarrow} \circ \Sigma$ により定まる．(後に $\Psi \dashv \Lambda$ が分かる (命題 11)．)

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{Span}(A,B) \arrow[r, shift left, "\Psi"] & \mathbf{Prof}(A,B) \arrow[l, shift left, dashed, "\Lambda"] \arrow[r, shift left, "\Sigma"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathrm{Cospan}(A,B) \arrow[l, shift left, "\Phi"] \arrow[ll, rounded corners, to path={ -- ([yshift=-4ex]\tikztostart.south) -| (\tikztotarget.south)}, "\downarrow"]
\end{tikzcd}
$$

profunctor $P\colon A \nrightarrow B$ に対して $\Lambda(P) = (A \xleftarrow{F^P} C^P \xrightarrow{G^P} B)$ と書く．

$$
\begin{tikzcd}
 & C_P & \\
A \arrow[ur, "F_P"] \arrow[rr, phantom, "\Longleftarrow"] & & B \arrow[ul, "G_P"'] \\
 & G_P \downarrow F_P \arrow[ul, "F^P"] \arrow[ur, "G^P"'] \arrow[d, equal] & \\
 & C^P &
\end{tikzcd}
$$

コンマ圏の定義より，圏 C^P は以下のような圏である．

- $\mathrm{Ob}(C^P) = \{\langle a, b, f\rangle \mid a \in A,\ b \in B,\ f \in P(b, a)\}$.
- $\langle a, b, f\rangle, \langle a', b', f'\rangle \in \mathrm{Ob}(C^P)$ に対して

$$
\mathrm{Hom}_{C^P}(\langle a, b, f\rangle, \langle a', b', f'\rangle) = \left\{ \langle g, h\rangle \;\middle|\; \begin{array}{l} g\colon a \to a', h\colon b' \to b, \\ P(h, g)(f) = f' \end{array} \right\}.
$$

$\theta\colon P \Rightarrow Q$ を $\mathbf{Prof}(A, B)$ の射とする．Λ はコンマ圏を使って定義しているから，$\Lambda(\theta)$ は次の等式を満たすような関手 $C^P \to C^Q$ である．

$$
\begin{tikzcd}
 & C_Q & \\
A \arrow[ur, bend left, "F_Q"] \arrow[rr, phantom, "\Longleftarrow"] & & B \arrow[ul, bend right, "G_Q"'] \\
 & C^Q \arrow[ul] \arrow[ur] & \\
 & C^P \arrow[uul, bend left, "F^P"] \arrow[uur, bend right, "G^P"'] \arrow[u, dashed, "\Lambda(\theta)"] &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
 & C_Q & \\
 & C_P \arrow[u, "\Sigma(\theta)"] & \\
A \arrow[uur, bend left, "F_Q"] \arrow[ur, "F_P"] \arrow[rr, phantom, "\Longleftarrow"'] & & B \arrow[uul, bend right, "G_Q"'] \arrow[ul, "G_P"'] \\
 & C^P \arrow[ul, bend left, "F^P"] \arrow[ur, bend right, "G^P"'] &
\end{tikzcd}
$$

命題 8. $\Lambda\colon \mathbf{Prof}(A, B) \to \mathrm{Span}(A, B)$ は忠実充満である．

証明. $P, Q \in \mathbf{Prof}(A, B)$ とする．

　まず忠実であることを示す．$\theta, \sigma\colon P \Rightarrow Q$ が $\Lambda(\theta) = \Lambda(\sigma)$ を満たすとする．このとき $a \in A,\ b \in B$ に対して $\theta_{ba} = \sigma_{ba}$ であることを示せばよい．(ここで θ_{ba} と σ_{ba} は写像

$P(b,a) \to Q(B,a)$ である．）Λ の定義より

$$
\begin{tikzcd}
& C_Q & \\
& C_P \arrow[u, "\Sigma(\theta)"'] & \\
A \arrow[uur, bend left, "F_Q"] \arrow[ur, "F_P"'] & \Longleftarrow & B \arrow[uul, bend right, "G_Q"'] \arrow[ul, "G_P"] \\
& C^P \arrow[ul, bend left, "F^P"] \arrow[ur, bend right, "G^P"'] &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
& C_Q & \\
& \Longleftarrow & \\
A \arrow[uur, bend left, "F_Q"] & & B \arrow[uul, bend right, "G_Q"'] \\
& C^Q \arrow[ul, "F^Q"'] \arrow[ur, "G^Q"] & \\
& C^P \arrow[u, "\Lambda(\theta)"] \arrow[uul, bend left, "F^P"] \arrow[uur, bend right, "G^P"'] &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
& C_Q & \\
& C_P \arrow[u, "\Sigma(\sigma)"'] & \\
A \arrow[uur, bend left, "F_Q"] \arrow[ur, "F_P"'] & \Longleftarrow & B \arrow[uul, bend right, "G_Q"'] \arrow[ul, "G_P"] \\
& C^P \arrow[ul, bend left, "F^P"] \arrow[ur, bend right, "G^P"'] &
\end{tikzcd}
$$

である．ここで $f \in P(b,a)$ とすると $\langle a,b,f \rangle$ は C^P の対象だから $\Sigma(\theta)(f) = \Sigma(\sigma)(f)$ となる．故に Σ の定義から $\theta_{ba}(f) = \Sigma(\theta)(f) = \Sigma(\sigma)(f) = \sigma_{ba}(f)$ となって $\theta_{ba} = \sigma_{ba}$ である．

次に充満であることを示すため $H\colon \Lambda(P) \to \Lambda(Q)$ とする．$\theta\colon P \Rightarrow Q$ を定義しよう．そのために $b \in B$，$a \in A$ を取り $f \in P(b,a)$ とする．このとき $\langle a,b,f \rangle \in C^P$ だから $H\langle a,b,f \rangle \in C^Q$ である．圏 C^P の定義より $H\langle a,b,f \rangle = \langle a,b,\theta_{ba}(f) \rangle$ と書ける．これにより写像 $\theta_{ba}\colon P(b,a) \to Q(b,a)$ が定まる．θ_{ba} は $b \in B$，$a \in A$ について自然である．

$\because$）$g\colon a \to a'$，$h\colon b' \to b$ とする．次の図式が可換であることを示せばよい．

$$
\begin{tikzcd}
P(b,a) \arrow[r, "\theta_{ba}"] \arrow[d, "P(h,g)"'] & Q(b,a) \arrow[d, "Q(h,g)"] \\
P(b',a') \arrow[r, "\theta_{b'a'}"'] & Q(b',a')
\end{tikzcd}
$$

$f \in P(b,a)$ を取り $f' := P(h,g)(f)$ とする．このとき $\langle g,h \rangle\colon \langle a,b,f \rangle \to \langle a',b',f' \rangle$ は C^P の射である．故に $H\langle g,h \rangle\colon H\langle a,b,f \rangle \to H\langle a',b',f' \rangle$ は C^Q の射である．一方で H は span の射だから次の図式が可換である．

$$
\begin{tikzcd}
A & & B \\
& C^Q \arrow[ul, "F^Q"'] \arrow[ur, "G^Q"] & \\
& C^P \arrow[u, "H"] \arrow[uul, bend left, "F^P"] \arrow[uur, bend right, "G^P"'] &
\end{tikzcd}
$$

従って $H\langle g,h \rangle = \langle g,h \rangle$ となる．故に $\langle g,h \rangle\colon \langle a,b,\theta_{ba}(f) \rangle \to \langle a',b',\theta_{b'a'}(f') \rangle$ が C^Q

の射だから $Q(h,g)(\theta_{ba}(f)) = \theta_{b'a'}(f') = \theta_{b'a'}(P(h,g)(f))$ となる．

よって $\theta\colon P \Rightarrow Q$ となる．このとき定義から明らかに等式

$$
\begin{tikzcd}
& & C_Q & & \\
& = & C_P \arrow[u, "\Sigma(\theta)"] & = & \\
A \arrow[uurr, bend left, "F_Q"] \arrow[urr, "F_P"'] & & \Longleftarrow & & B \arrow[uull, bend right, "G_Q"'] \arrow[ull, "G_P"] \\
& & C^P \arrow[ull, bend left, "F^P"] \arrow[urr, bend right, "G^P"'] & &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
& & C_Q & & \\
& & \Longleftarrow & & \\
A \arrow[uurr, bend left, "F_Q"] & & & & B \arrow[uull, bend right, "G_Q"'] \\
& = & C^Q \arrow[ull] \arrow[urr] & = & \\
& & C^P \arrow[u, "H"] \arrow[uull, bend left, "F^P"] \arrow[uurr, bend right, "G^P"'] & &
\end{tikzcd}
$$

が成り立つ．故に Λ の定義より $\Lambda(\theta) = H$ である． □

命題 9. $\Lambda \circ \Phi \cong {\downarrow}$ である．

証明. $H\colon (A \xrightarrow{F} C \xleftarrow{G} B) \to (A \xrightarrow{K} D \xleftarrow{L} B)$ を $\mathrm{Cospan}(A,B)$ の射とする．定義より $\Lambda(\Phi(H))$ は

$$
\begin{tikzcd}
& & C_Q & & \\
& & \Longleftarrow & & \\
A \arrow[uurr, bend left, "F_Q"] & & & & B \arrow[uull, bend right, "G_Q"'] \\
& = & C^Q \arrow[ull] \arrow[urr] & = & \\
& & C^P \arrow[u, dashed, "\Lambda(\Phi(H))"] \arrow[uull, bend left, "F^P"] \arrow[uurr, bend right, "G^P"'] & &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
& & C_Q & & \\
& = & C_P \arrow[u, "\Sigma(\Phi(H))"] & = & \\
A \arrow[uurr, bend left, "F_Q"] \arrow[urr, "F_P"'] & & \Longleftarrow & & B \arrow[uull, bend right, "G_Q"'] \arrow[ull, "G_P"] \\
& & C^P \arrow[ull, bend left, "F^P"] \arrow[urr, bend right, "G^P"'] & &
\end{tikzcd}
$$

で与えられる関手である．ここで

$$\Phi\langle F, G\rangle \cong \mathrm{Hom}_C(G-, F-), \quad \Phi\langle K, L\rangle \cong \mathrm{Hom}_D(L-, K-)$$

であり $\Sigma(\Phi(H))$ は $H\colon \mathrm{Hom}_C(Gb, Fa) \to \mathrm{Hom}_D(Lb, Ka)$ により定まる関手である．よって $\Lambda \circ \Phi \cong {\downarrow}$ である． □

命題 10. $\langle L, \eta \rangle$ が $F\colon C \to D$ に沿った $E\colon C \to U$ の各点左 Kan 拡張であるとする．任意の圏 X と関手 $G\colon X \to D$ に対して合成

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "G"] & D \arrow[dr, "L"] & \\
F\downarrow G \arrow[u, "P_1"] \arrow[r, "P_0"'] \arrow[ur, phantom, "\Nwarrow"] & C \arrow[u, "F"'] \arrow[r, "E"'] \arrow[ur, phantom, "\eta\Uparrow"] & U
\end{tikzcd}$$

は左 Kan 拡張である．

証明. 任意の関手 $S\colon X \to U$ に対して

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{U^X}(LG, S) &\cong \int_{x\in X} \mathrm{Hom}_U(LGx, Sx) \\
&\cong \int_{x\in X} \mathrm{Hom}_{\widehat{C}}(\mathrm{Hom}_D(F-, Gx), \mathrm{Hom}_U(E-, Sx)) \\
&\cong \int_{x\in X} \int_{c\in C^{\mathrm{op}}} \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(\mathrm{Hom}_D(Fc, Gx), \mathrm{Hom}_U(Ec, Sx)) \\
&\cong \int_{\langle c,x\rangle\in C^{\mathrm{op}}\times X} \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(\mathrm{Hom}_D(Fc, Gx), \mathrm{Hom}_U(Ec, Sx)) \\
&\cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Prof}(X,C)}(\mathrm{Hom}_D(F-, G\square), \mathrm{Hom}_U(E-, S\square)) \\
&\cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Prof}(X,C)}(\Phi(G, F), \Phi(S, E)) \\
&\cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{Span}(X,C)}(\Lambda(\Phi(G, F)), \Lambda(\Phi(S, E))) \qquad (\text{命題 } 8) \\
&\cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{Span}(X,C)}(F\downarrow G, E\downarrow S) \qquad (\text{命題 } 9) \\
&\cong \mathrm{Hom}_{U^{F\downarrow G}}(EP_0, SP_1) \qquad (\text{コンマ圏の普遍性})
\end{aligned}$$

だから $P_1^\dagger(EP_0) \cong LG$ である． □

命題 11. 随伴 $\Psi \dashv \Lambda\colon \mathrm{Span}(A, B) \to \mathbf{Prof}(A, B)$ が成り立つ．更にこれの counit は同型である．

証明. 随伴であることを示すため，$(A \xleftarrow{F} C \xrightarrow{G} B) \in \mathrm{Span}(A, B)$，$P \in \mathbf{Prof}(A, B)$ についてて自然な全単射

$$\varphi\colon \mathrm{Hom}_{\mathrm{Span}(A,B)}(\langle F, G\rangle, \Lambda(P)) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{Prof}(A,B)}(\Psi\langle F, G\rangle, P)$$

を定義する．そのためにまず自然同型 $\varepsilon\colon \Psi(\Lambda(P)) \Rightarrow P$ が存在することを示す．

$\because$) 次の 2 つの図式を考える．

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[drr, "\Psi(\Lambda(P))"] & & \\
C^P \arrow[u, "F^P"] \arrow[r, "G^P"'] \arrow[ur, phantom, "\Uparrow"] & B \arrow[r, "y"'] & \widehat{B}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "F_P"] \arrow[drr, bend left, "P"] & C_P \arrow[dr, "G_P^\dagger y"] \arrow[r, phantom, "\cong"] & \\
C^P \arrow[u, "F^P"] \arrow[r, "G^P"'] \arrow[ur, phantom, "\Nwarrow"] & B \arrow[u, "G_P"'] \arrow[r, "y"'] \arrow[ur, phantom, "\Uparrow"] & \widehat{B}
\end{tikzcd}
$$

定義より $\Psi(\Lambda(P)) = (F^P)^\dagger(y \circ G^P)$ である．一方 $A \xleftarrow{F^P} C^P \xrightarrow{G^P} B$ はコンマ圏 $G_P \downarrow F_P$ として与えられていたから，命題 10 により $(F^P)^\dagger(y \circ G^P) \cong G_P^\dagger y \circ F_P$ である．また命題 6 より $G_P^\dagger y \circ F_P = \Phi(\Sigma(P)) \cong P$ となる．故に左 Kan 拡張の普遍性から自然同型 $\varepsilon\colon \Psi(\Lambda(P)) \Rightarrow P$ が存在して次の等式が成り立つ．

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[drr, "\Psi(\Lambda(P))"] \arrow[drr, bend left=60, "P"] \arrow[rr, phantom, "\Uparrow\varepsilon"] & & \\
C^P \arrow[u, "F^P"] \arrow[r, "G^P"'] \arrow[ur, phantom, "\Uparrow"] & B \arrow[r, "y"'] & \widehat{B}
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "F_P"] \arrow[drr, bend left=60, "P"] & C_P \arrow[dr, "G_P^\dagger y"] \arrow[r, phantom, "\cong"] & \\
C^P \arrow[u, "F^P"] \arrow[r, "G^P"'] \arrow[ur, phantom, "\Nwarrow"] & B \arrow[u, "G_P"'] \arrow[r, "y"'] \arrow[ur, phantom, "\Uparrow"] & \widehat{B}
\end{tikzcd}
$$

$H\colon \langle F, G\rangle \to \Lambda(P)$ を射とする．即ち H は次を可換とする関手である．

$$
\begin{tikzcd}
A & & B \\
& C^P \arrow[ul, "F^P"'] \arrow[ur, "G^P"] & \\
& C \arrow[u, "H"] \arrow[uul, bend left, "F"] \arrow[uur, bend right, "G"'] &
\end{tikzcd}
$$

このとき自然変換 $\psi(H)\colon \Psi\langle F,G\rangle \Rightarrow P$ を $\psi(H) := \varepsilon \circ (\Psi(H))$ で定める．

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & & \widehat{B} \\
A \arrow[urrr, bend left=40, "P"] \arrow[urrr, "\Psi(\Lambda(P))"] \arrow[urrr, bend right=30, "F^{\dagger}(yG)"'] \arrow[urrr, phantom, bend left=20, "\Uparrow\varepsilon"] \arrow[urrr, phantom, bend right=10, "\Uparrow\Psi(H)"] & & & B \arrow[u, "y"'] \\
 & & & \\
 & C \arrow[uul, "F"] \arrow[uurr, "G"'] \arrow[uu, phantom, "\Leftarrow"] & &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & & \widehat{B} \\
A \arrow[urrr, bend left=40, "P"] \arrow[urrr, "\Psi(\Lambda(P))"] \arrow[urrr, phantom, bend left=20, "\Uparrow\varepsilon"] \arrow[rrr, phantom, "\Leftarrow"] & & & B \arrow[u, "y"'] \\
 & C^P \arrow[ul, "F^P"] \arrow[urr, "G^P"'] & & \\
 & C \arrow[u, "H"] \arrow[uul, bend left=20, "F"] \arrow[uurr, bend right=20, "G"'] & &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & & \widehat{B} \\
 & C_P \arrow[urr, "G_P^{\dagger}y"] \arrow[urr, phantom, bend right=60, "\Leftarrow"] \arrow[u, phantom, "\cong"] & & \\
A \arrow[uurrr, bend left=40, "P"] \arrow[ur, "F_P"'] \arrow[rrr, phantom, "\Leftarrow"] & & & B \arrow[ull, "G_P"] \arrow[uu, "y"'] \\
 & C^P \arrow[ul, "F^P"] \arrow[urr, "G^P"'] & & \\
 & C \arrow[u, "H"] \arrow[uul, bend left=20, "F"] \arrow[uurr, bend right=20, "G"'] & &
\end{tikzcd}
$$

この $\psi(H)$ は全単射 $\psi\colon \mathrm{Hom}(\langle F,G\rangle, \Lambda(P)) \to \mathrm{Hom}(\Psi\langle F,G\rangle, P)$ を与える．

$\because$) 単射性は明らかだから全射性を示す．そのために $\sigma\colon \Psi\langle F,G\rangle \Rightarrow P$ を自然変換とする．このとき $\theta := \sigma_F \circ \eta$ と定義し (次の図式を参照)，

$$
\begin{tikzcd}
 & & \widehat{B} \\
A \arrow[urr, bend left=40, "P"] \arrow[urr, "F^{\dagger}(yG)"'] \arrow[urr, phantom, bend left=20, "\Uparrow\sigma"] & & B \arrow[u, "y"'] \\
 & C \arrow[ul, "F"] \arrow[ur, "G"'] \arrow[u, phantom, "\Uparrow\eta"] &
\end{tikzcd}
$$

H を

- 対象 $c \in C$ に対して $Hc := \langle Fc, Gc, \theta_c\rangle$
- 射 $f\colon c \to c'$ に対して $Hf := \langle Ff, Gf\rangle$

で定義する．これは明らかに関手 $H\colon C \to C^P$ を定める．また明らかに H は射 $\langle F,G\rangle \to \Lambda(P)$ であり $\psi(H) = \sigma$ である．故に ψ は全射である．

定義から明らかに ψ は自然である．従って随伴 $\Psi \dashv \Lambda$ が成り立つ．ψ の定義よりこの随伴の counit は ε であり，これは同型である． $\square$

以上により$\uparrow := \Sigma \circ \Psi$と定義すれば

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Span}(A,B) \arrow[r, shift left, "\Psi"] \arrow[r, phantom, "\perp"] \arrow[rr, bend left, "\uparrow"] & \mathbf{Prof}(A,B) \arrow[l, shift left, "\Lambda"] \arrow[r, shift left, "\Sigma"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathrm{Cospan}(A,B) \arrow[l, shift left, "\Phi"] \arrow[ll, bend left, "\downarrow"]
\end{tikzcd}$$

より$\uparrow \dashv \downarrow$となる．従って次の定理を得る．

定理 12. 関手$\downarrow\colon \mathrm{Cospan}(A,B) \to \mathrm{Span}(A,B)$は左随伴$\uparrow$を持つ． $\square$

Λ, Σが忠実充満だから$\uparrow \dashv \downarrow$は冪等随伴である (「随伴関手」の PDF を参照)．そこで充満部分圏$\mathrm{Comma}(A,B) \subset \mathrm{Span}(A,B)$，$\mathrm{Cocomma}(A,B) \subset \mathrm{Cospan}(A,B)$を

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Ob}(\mathrm{Comma}(A,B)) \\
&\qquad := \{x \in \mathrm{Span}(A,B) \mid \text{ある } z \in \mathrm{Cospan}(A,B) \text{ が存在して} {\downarrow}(z) \cong x\}, \\
&\mathrm{Ob}(\mathrm{Cocomma}(A,B)) \\
&\qquad := \{x \in \mathrm{Cospan}(A,B) \mid \text{ある } z \in \mathrm{Span}(A,B) \text{ が存在して} {\uparrow}(z) \cong x\}
\end{aligned}$$

で定義すれば圏同値$\mathrm{Comma}(A,B) \simeq \mathbf{Prof}(A,B) \simeq \mathrm{Cocomma}(A,B)$が得られる．

参考文献

[1] Jean Bénabou, Distributors at Work, `http://www.mathematik.tu-darmstadt.de/~streicher/`