profunctor とココンマ圏

alg-d
http://alg-d.com/math/category/

2016 年 2 月 3 日

定義． C, D を圏とする．C から D への profunctor (もしくは distributor もしくは correspondence もしくは bimodule) とは関手 $F\colon C \longrightarrow \widehat{D}$ のことである．profunctor を記号 $F\colon C \mathrel{-\!\!\circ\!\!\rightarrow} D$ などで表す.

自然同型 $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Cat}}(A \times B, C) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Cat}}(A, C^B)$ により，profunctor $F\colon C \mathrel{-\!\!\circ\!\!\rightarrow} D$ と関手 $F\colon C \longrightarrow \widehat{D}$ と関手 $F\colon D^{\mathrm{op}} \times C \longrightarrow \mathbf{Set}$ を同一視することができる．以下，特に断らずこの同一視を行う.

定義． $F\colon A \mathrel{-\!\!\circ\!\!\rightarrow} B$，$G\colon B \mathrel{-\!\!\circ\!\!\rightarrow} C$ を profunctor とするとき合成 $G \circ F\colon A \mathrel{-\!\!\circ\!\!\rightarrow} C$ を関手 $(y^\dagger G) \circ F\colon A \longrightarrow \widehat{C}$ で定める.

$$\begin{tikzcd}
 & \widehat{B} \arrow[r, "y^\dagger G"] & \widehat{C} \\
A \arrow[ur, "F"] & B \arrow[u, "y"] \arrow[ur, "G"'] &
\end{tikzcd}$$

圏 C に対して米田埋込 $y\colon C \longrightarrow \widehat{C}$ が定める profunctor を $\mathrm{id}_C\colon C \mathrel{-\!\!\circ\!\!\rightarrow} C$ で表す．Kan 拡張の性質から容易に分かるように, $F\colon C \mathrel{-\!\!\circ\!\!\rightarrow} D$ に対して $F \circ \mathrm{id}_C \cong F$, $\mathrm{id}_D \circ F \cong F$ である.

命題 1. $F\colon A \mathrel{-\!\!\circ\!\!\rightarrow} B$，$G\colon B \mathrel{-\!\!\circ\!\!\rightarrow} C$ を profunctor とするとき

$$GF(a) = \int^{b \in B} F(b, a) \times G(-, b).$$

証明． $P \in \widehat{B}$ に対して $y^\dagger G(P) = \displaystyle\int^{b \in B} \mathrm{Hom}_{\widehat{B}}(y(b), P) \times Gb = \int^{b \in B} Pb \times Gb$ である

から $GF(a) = y^\dagger G(Fa) = \displaystyle\int^{b \in B} Fa(b) \times Gb = \int^{b \in B} F(b,a) \times G(-,b).$ $\square$

$F\colon C \longrightarrow D$ を関手とする．このとき profunctor $\Phi_F\colon C \relbar\!\!\circ\!\!\rightarrow D$，$\Phi^F\colon D \relbar\!\!\circ\!\!\rightarrow C$ が $\Phi_F(d,c) := \mathrm{Hom}_D(d, Fc)$，$\Phi^F(c,d) := \mathrm{Hom}_D(Fc, d)$ により定まる．このとき $\Phi_F(c) \cong y \circ F(c)$，$\Phi^F(d) \cong F^\dagger y(d)$ である．

定義． 圏 C の図式 $a \leftarrow c \rightarrow b$ を a から b への span という．双対的に，図式 $a \rightarrow c \leftarrow b$ を a から b への cospan という．

定義． C を圏，$a, b \in C$ を対象とする．a から b への span がなす圏 $\mathrm{Span}(a,b)$ を以下のように定める．

- $\mathrm{Ob}(\mathrm{Span}(a,b)) := \{\langle f, g\rangle \in \mathrm{Mor}(C)^2 \mid c \in C,\ a \xleftarrow{f} c \xrightarrow{g} b\}$
- $\langle f, g\rangle, \langle f', g'\rangle \in \mathrm{Span}(a,b)$ とする．$c := \mathrm{dom}(f)$，$c' := \mathrm{dom}(f')$ とする．$\langle f, g\rangle$ から $\langle f', g'\rangle$ への射は，次の図式を可換とする射 $h\colon c \longrightarrow c'$ で定める．

$$\begin{tikzcd}
a & & b \\
& c' \arrow[ul, "f'"'] \arrow[ur, "g'"] & \\
& c \arrow[u, "h"] \arrow[uul, bend left, "f"] \arrow[uur, bend right, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

同様にして cospan がなす圏 $\mathrm{Cospan}(a,b)$ が以下のように定まる．

- $\mathrm{Ob}(\mathrm{Cospan}(a,b)) := \{\langle f, g\rangle \in \mathrm{Mor}(C)^2 \mid c \in C,\ a \xrightarrow{f} c \xleftarrow{g} b\}$
- $\langle f, g\rangle, \langle f', g'\rangle \in \mathrm{Cospan}(a,b)$ とする．$c := \mathrm{cod}(f)$，$c' := \mathrm{cod}(f')$ とする．$\langle f, g\rangle$ から $\langle f', g'\rangle$ への射は，次の図式を可換とする射 $h\colon c \longrightarrow c'$ で定める．

$$\begin{tikzcd}
& c' & \\
& c \arrow[u, "h"] & \\
a \arrow[ur, "f"'] \arrow[uur, bend left, "f'"] & & b \arrow[ul, "g"] \arrow[uul, bend right, "g'"']
\end{tikzcd}$$

この PDF では，圏の圏 **Cat** における span，cospan を考える．

A, B を小圏とする．$(A \xrightarrow{F} C \xleftarrow{G} B) \in \mathrm{Cospan}(A,B)$ に対して profunctor $\Phi(F,G)\colon A \relbar\!\!\circ\!\!\rightarrow B$ が $\Phi(F,G) := \Phi^G \Phi_F$ により定まる．$\Phi(F,G) \cong y^\dagger(G^\dagger y) \circ y \circ F$ で

ある．

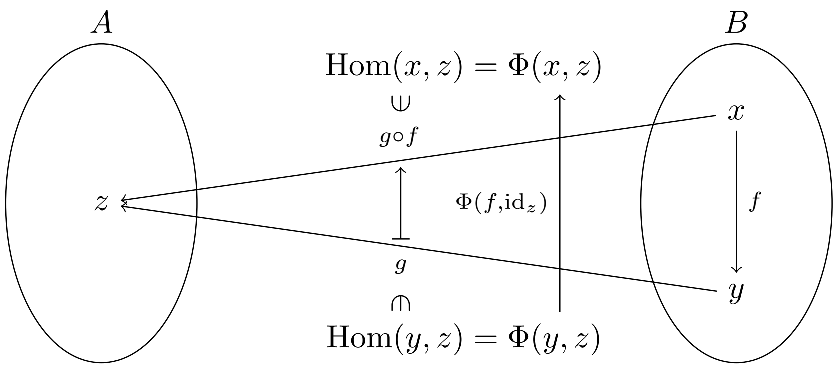
$$
\begin{tikzcd}
& & \widehat{C} \arrow[dr, "y^\dagger(G^\dagger y)"] & \\
& C \arrow[ur, "y"] \arrow[rr, "G^\dagger y"] & & \widehat{B} \\
A \arrow[ur, "F"] & & B \arrow[ul, "G"'] \arrow[ur, "y"'] &
\end{tikzcd}
$$

ここで y が忠実充満であることより $y^\dagger(G^\dagger y) \circ y \cong G^\dagger y$ となるから結局 $\Phi(F, G) \cong (G^\dagger y) \circ F$ が分かる．よって $\Phi(F, G)(a) \cong G^\dagger y(Fa) \cong \mathrm{Hom}_C(G-, Fa)$ となる．

逆に profunctor $\Phi\colon A \mathrel{-\!\!\circ\!\!\!\rightarrow} B$ に対して $T(\Phi) = (A \xrightarrow{F_\Phi} C_\Phi \xleftarrow{G_\Phi} B) \in \mathrm{Cospan}(A, B)$ を以下のように定義することができる．まず圏 C_Φ を次により定める．

- $\mathrm{Ob}(C_\Phi) := \mathrm{Ob}(A) \sqcup \mathrm{Ob}(B)$
- $\mathrm{Hom}_{C_\Phi}(x, y) := \begin{cases} \mathrm{Hom}_A(x, y) & (x, y \in A \text{ のとき．}) \\ \mathrm{Hom}_B(x, y) & (x, y \in B \text{ のとき．}) \\ \emptyset & (x \in A,\ y \in B \text{ のとき．}) \\ \Phi(x, y) & (x \in B,\ y \in A \text{ のとき．}) \end{cases}$
- 射 $f\colon x \longrightarrow y$，$g\colon y \longrightarrow z$ の合成 $g \circ f$ を次で定める．

$$
g \circ f := \begin{cases} g \circ f & (x, y, z \in A \text{ のとき．}) \\ g \circ f & (x, y, z \in B \text{ のとき．}) \\ \Phi(f, \mathrm{id}_z)(g) & (x, y \in B,\ z \in A \text{ のとき．下図参照}) \\ \Phi(\mathrm{id}_x, g)(f) & (x \in B,\ y, z \in A \text{ のとき．}) \end{cases}
$$



関手 $F_\Phi\colon A \longrightarrow C_\Phi$，$G_\Phi\colon B \longrightarrow C_\Phi$ を自然な埋込で定めれば $T(\Phi) \in \mathrm{Cospan}(A, B)$ である．

命題 2. $\Phi\colon \mathrm{Cospan}(A, B) \longrightarrow \mathbf{Prof}(A, B)$ と $T\colon \mathbf{Prof}(A, B) \longrightarrow \mathrm{Cospan}(A, B)$ は関手となる．

証明. まず $\mathrm{Cospan}(A,B)$ の射 $H\colon (A \xrightarrow{F} C \xleftarrow{G} B) \longrightarrow (A \xrightarrow{K} D \xleftarrow{L} B)$ を取る．H は関手 $C \longrightarrow D$ で次が可換となるものである．

$$
\begin{tikzcd}
 & D & \\
 & C \arrow[u, "H"] & \\
A \arrow[ur, "F"'] \arrow[uur, bend left, "K"] & & B \arrow[ul, "G"] \arrow[uul, bend right, "L"']
\end{tikzcd}
$$

既に見たように $\Phi(F,G),\Phi(K,L)\colon A \relbar\joinrel\mapstochar\joinrel\rightarrow B$ が $\Phi(F,G)=(G^\dagger y)\circ F$，$\Phi(K,L)=(L^\dagger y)\circ K$ により得られる．

$$
\begin{tikzcd}
 & D \arrow[rr, "H^\dagger(G^\dagger y)"] \arrow[d, phantom, "\Uparrow\eta"] & & \widehat{B} \\
 & C \arrow[u, "H"] \arrow[urr, "G^\dagger y"] \arrow[l, phantom, "="] & & \\
A \arrow[ur, "F"'] \arrow[uur, bend left, "K"] & & B \arrow[ul, "G"] \arrow[uur, "y"'] \arrow[ul, phantom, "\Lleftarrow"] &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
 & D \arrow[rr, "L^\dagger y"] & & \widehat{B} \\
 & C \arrow[u, "H"] \arrow[l, phantom, "="] \arrow[r, phantom, "="] & \arrow[ur, phantom, "\Uparrow"] & \\
A \arrow[ur, "F"'] \arrow[uur, bend left, "K"] & & B \arrow[ul, "G"] \arrow[uul, bend right, "L"'] \arrow[uur, "y"'] &
\end{tikzcd}
$$

よって図式の自然変換 η により自然変換 $\Phi(H)\colon \Phi(F,G)=(G^\dagger y)\circ F \Longrightarrow (L^\dagger y)\circ K = \Phi(K,L)$ が得られた．Φ が関手となることは容易にわかる．

次に $\mathbf{Prof}(A,B)$ の射 $\varphi\colon \Phi \Longrightarrow \Psi$ を取る．射 $T(\varphi)\colon T(\Phi) \longrightarrow T(\Psi)$ を定めるには，$\mathrm{Cospan}(A,B)$ の射の定義から，$a\in A$，$b\in B$ に対して $T(\varphi)\colon \mathrm{Hom}_{C_\Phi}(b,a) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{C_\Psi}(b,a)$ をうまく定めればよい．Hom_{C_Φ} の定義からそれは $\varphi_{ba}\colon \Phi(b,a) \longrightarrow \Psi(b,a)$ により定めることができる．これにより，$T(\varphi)$ が関手になることを示せばよい．

$x,y\in B$，$z\in A$，$f\colon x\longrightarrow y$，$g\colon y\longrightarrow z$ とする．$T(\varphi)(g\circ f)=T(\varphi)(g)\circ T(\varphi)(f)$ を示す．定義から

$$
\begin{cases}
T(\varphi)(g\circ f) & = & \varphi_{xz}(g\circ f) \\
T(\varphi)(g) & = & \varphi_{yz}(g) \\
T(\varphi)(f) & = & f
\end{cases}
$$

であり，一方 φ が自然変換だから $\varphi_{xz}(g\circ f)=\varphi_{yz}(g)\circ f$ である．

$$
\begin{tikzcd}
\Phi(x,z) \arrow[r, "\varphi_{xz}"] & \Psi(x,z) \\
\Phi(y,z) \arrow[u, "\Phi(f,\mathrm{id}_z)"] \arrow[r, "\varphi_{yz}"'] & \Psi(y,z) \arrow[u, "\Psi(f,\mathrm{id}_z)"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
g\circ f \arrow[r, mapsto, "\varphi_{xz}"] & \varphi_{xz}(g\circ f) \\
 & \varphi_{yz}(g)\circ f \\
g \arrow[uu, mapsto, "\Phi(f,\mathrm{id}_z)"] \arrow[r, mapsto, "\varphi_{yz}"'] & \varphi_{yz}(g) \arrow[u, mapsto, "\Psi(f,\mathrm{id}_z)"']
\end{tikzcd}
$$

他の条件も同様にして示すことが出来て，よって $T(\varphi)$ は関手である． $\square$

命題 3. $T \dashv \Phi\colon \mathbf{Prof}(A,B) \longrightarrow \mathrm{Cospan}(A,B)$

証明. $\Psi \in \mathbf{Prof}(A,B)$, $(A \xrightarrow{F} C \xleftarrow{G} B) \in \mathrm{Cospan}(A,B)$ を取る．$H\colon T(\Psi) \longrightarrow \langle F, G\rangle$ を射とする．即ち H は次を可換とする関手である．

$$
\begin{tikzcd}
 & C & \\
 & C_\Psi \arrow[u, "H"] & \\
A \arrow[ruu, bend left, "F"] \arrow[ru, "F_\Psi"'] & & B \arrow[luu, bend right, "G"'] \arrow[lu, "G_\Psi"]
\end{tikzcd}
$$

可換性から $Ha = Fa$，$Hb = Gb$ である．よって写像 $H\colon \mathrm{Hom}_{C_\Psi}(b,a) = \Psi(b,a) \longrightarrow \mathrm{Hom}_C(Gb, Fa)$ が得られる．これにより自然変換 $\varphi(H)\colon \Psi \Longrightarrow \mathrm{Hom}_C(G-, F\Box) = \Phi(F,G)$ が得られる．これは全単射 $\varphi\colon \mathrm{Hom}(T(\Psi), \langle F, G\rangle) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\Psi, \Phi(F,G))$ を与える．これは $\Psi, \langle F, G\rangle$ について自然だから $T \dashv \Phi$ である． $\Box$

$(A \xleftarrow{F} C \xrightarrow{G} B) \in \mathrm{Span}(A,B)$ に対して profunctor $\Psi(F,G)\colon A \mathrel{\circ\!\!\!\!\longrightarrow} B$ が $\Psi(F,G) := \Phi_G \Phi^F$ により定まる．$\Psi(F,G) = y^\dagger(yG) \circ F^\dagger y = F^\dagger(yG)$ である．

$$
\begin{tikzcd}
 & \widehat{C} \arrow[rr, "y^\dagger(yG)"] & & \widehat{B} \\
A \arrow[ru, "F^\dagger y"] \arrow[r, phantom, "\Leftarrow"] & & B \arrow[ru, "y"'] \arrow[lu, phantom, "\Leftarrow"] & \\
 & C \arrow[lu, "F"] \arrow[ru, "G"'] \arrow[uu, "y"'] & &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
 & & & \widehat{B} \\
A \arrow[rrru, "F^\dagger(yG)"] & & B \arrow[ru, "y"'] & \\
 & C \arrow[lu, "F"] \arrow[ru, "G"'] \arrow[u, phantom, "\Leftarrow"] & &
\end{tikzcd}
$$

逆に profunctor $\Phi\colon A \mathrel{\circ\!\!\!\!\longrightarrow} B$ に対して $S(\Phi) := (A \xleftarrow{F^\Phi} C^\Phi \xrightarrow{G^\Phi} B) \in \mathrm{Span}(A,B)$ をコンマ圏 $G_\Phi \downarrow F_\Phi$ により定義することができる．

$$
\begin{tikzcd}
 & C_\Phi & \\
A \arrow[ru, "F_\Phi"] \arrow[rr, phantom, "\Longleftarrow"] & & B \arrow[lu, "G_\Phi"'] \\
 & G_\Phi \downarrow F_\Phi \arrow[lu, "F^\Phi"] \arrow[ru, "G^\Phi"'] &
\end{tikzcd}
$$

命題 4. 圏 C^Φ は以下のようになる．

- $\mathrm{Ob}(C^\Phi) = \{\langle a, b, f\rangle \colon a \in A,\ b \in B,\ f \in \Phi(b,a)\}$

- $\langle a_0, b_0, f_0\rangle, \langle a_1, b_1, f_1\rangle \in \mathrm{Ob}(C^\Phi)$ に対して

$$\mathrm{Hom}_{C^\Phi}(\langle a_0, b_0, f_0\rangle, \langle a_1, b_1, f_1\rangle) = \left\{ \langle g, h\rangle \;\middle|\; \begin{array}{l} g\colon a_0 \longrightarrow a_1, h\colon b_1 \longrightarrow b_0, \\ \Phi(h, g)(f_0) = f_1 \end{array} \right\}$$

$\square$

命題 5. $\Psi\colon \mathrm{Span}(A, B) \longrightarrow \mathbf{Prof}(A, B)$ と $S\colon \mathbf{Prof}(A, B) \longrightarrow \mathrm{Span}(A, B)$ は関手となる．

証明. まず $\mathrm{Span}(A, B)$ の射 $H\colon (A \xleftarrow{F} C \xrightarrow{G} B) \longrightarrow (A \xleftarrow{K} D \xrightarrow{L} B)$ を取る．H は関手 $C \longrightarrow D$ で次が可換となるものである．

$$\begin{tikzcd}
A & & B \\
& D \arrow[ul, "K"'] \arrow[ur, "L"] & \\
& C \arrow[u, "H"] \arrow[uul, bend left, "F"] \arrow[uur, bend right, "G"'] &
\end{tikzcd}$$

$\Psi(F, G), \Psi(K, L)\colon A \mathrel{\longrightarrow\!\!\!\!\!\circ} B$ が $\Psi(F, G) = F^\dagger(yG)$，$\Psi(K, L) = K^\dagger(yL)$ により得られる．

$$\begin{tikzcd}
& & \widehat{B} \\
A \arrow[urr, "F^\dagger(yG)"] & \arrow[l, phantom, "\Leftarrow"] & B \arrow[u, "y"'] \\
& C \arrow[ul, bend left, "F"] \arrow[ur, bend right, "G"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& & \widehat{B} \\
A \arrow[urr, "K^\dagger(LG)"] & \arrow[ur, phantom, "\Leftarrow"] & B \arrow[u, "y"'] \\
& D \arrow[ul, "K"] \arrow[ur, "L"'] & \\
& C \arrow[u, "H"] \arrow[uul, bend left, "F"] \arrow[uur, bend right, "G"'] &
\end{tikzcd}$$

よって Kan 拡張の普遍性により自然変換 $\Psi(H)\colon \Psi(F, G) \Longrightarrow \Psi(K, L)$ が得られる．こうして Ψ は関手となる．

次に $\mathbf{Prof}(A, B)$ の射 $\varphi\colon \Phi \Longrightarrow \Psi$ を取ると，関手 $S(\varphi)\colon C^\Phi \longrightarrow C^\Phi$ が $\varphi_{b,a}\colon \Phi(b, a) \longrightarrow \Psi(b, a)$ により定まる．

以上により Ψ と S は関手である． $\square$

命題 6. $\Psi \dashv S\colon \mathrm{Span}(A, B) \longrightarrow \mathbf{Prof}(A, B)$

証明. $(A \xleftarrow{F} C \xrightarrow{G} B) \in \mathrm{Span}(A,B)$，$\Phi \in \mathbf{Prof}(A,B)$ を取る．$H \colon \langle F, G\rangle \longrightarrow S(\Phi)$ を射とする．即ち H は次を可換とする関手である．

$$\begin{tikzcd}
A & & B \\
& C^{\Phi} \arrow[ul, "F^{\Psi}"'] \arrow[ur, "G^{\Psi}"] & \\
& C \arrow[u, "H"] \arrow[uul, bend left, "F"] \arrow[uur, bend right, "G"'] &
\end{tikzcd}$$

$Hc = \langle Fc, Gc, f_c\rangle$ $(f_c \in \Phi(Gc, Fc) \cong \mathrm{Hom}(y(Gc), \Phi(-, Fc)))$ と書ける．よって H は自然変換 $y \circ G \Longrightarrow \Phi \circ F$ を定める．

$$\begin{tikzcd}
& & \widehat{B} \\
A \arrow[urr, bend left, "\Phi"] \arrow[urr, "F^{\dagger}(yG)"'] \arrow[urr, phantom, shift right=3, "\Uparrow"] & B \arrow[ur, "y"'] & \\
C \arrow[u, "F"] \arrow[ur, "G"'] \arrow[u, phantom, shift right=3, "\Uparrow"] & &
\end{tikzcd}$$

故に Kan 拡張の普遍性により自然変換 $\varphi(H) \colon \Psi(F,G) \cong F^{\dagger}(yG) \Longrightarrow \Phi$ が得られる．これは全単射 $\varphi\colon \mathrm{Hom}(\langle F,G\rangle, S(\Phi)) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\Psi(F,G), \Phi)$ を与える．これは $\langle F, G\rangle, \Phi$ について自然だから $\Psi \dashv S$ である． □

$(A \xrightarrow{F} C \xleftarrow{G} B) \in \mathrm{Cospan}(A,B)$ に対して $S \circ \Phi(F,G)$ を計算するとコンマ圏となる．即ち $F{\downarrow}G = S \circ \Phi(F,G)$ である．そこで，逆に $\langle F,G\rangle \in \mathrm{Span}(A,B)$ に対して $F{\uparrow}G := T \circ \Psi(F,G)$ をココンマ圏という．

定理 7. 随伴 $\uparrow \dashv \downarrow \colon \mathrm{Span}(A,B) \longrightarrow \mathrm{Cospan}(A,B)$ が成り立つ．

証明. $T \circ \Psi = \uparrow$，$S \circ \Phi = \downarrow$ より明らか．

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Span}(A,B) \arrow[r, shift left=1.5, "\Psi"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathbf{Prof}(A,B) \arrow[l, shift left=1.5, "S"] \arrow[r, shift left=1.5, "T"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathrm{Cospan}(A,B) \arrow[l, shift left=1.5, "\Phi"]
\end{tikzcd}$$

□

定理 8. ココンマ圏は「lax pushout」である．

証明. $(A \xleftarrow{F} C \xrightarrow{G} B) \in \mathrm{Span}(A,B)$ として $\Psi := \Psi(F,G) = F^\dagger(yG)$ とする．

$$\begin{tikzcd}
 & & & \widehat{B} \\
A \arrow[urrr, "\Psi"] & \arrow[r, phantom, "\Leftarrow\eta"] & B \arrow[ur, "y"'] & \\
 & C \arrow[ul, "F"] \arrow[ur, "G"'] & &
\end{tikzcd}$$

$a \in A$ に対して各点 Kan 拡張により

$$\begin{aligned}
\Psi(a) &= \operatorname{colim}(F{\downarrow}a \to C \xrightarrow{G} B \xrightarrow{y} \widehat{B}) \\
&= \operatorname*{colim}_{Fx \to a} y \circ G(x) \\
&= \operatorname*{colim}_{Fx \to a} \mathrm{Hom}_B(-, Gx)
\end{aligned}$$

である．$\widehat{B}$ の余極限は各点ごとに計算すればよいから $\Psi(b,a) = \operatorname*{colim}_{Fx\to a} \mathrm{Hom}_B(b, Gx) = \Big(\coprod_{Fx\to a} \mathrm{Hom}_B(b,Gx)\Big)/{\sim}$ となる．ここで $\sim$ は，次で定める二項関係 R を含む最小の同地関係である: $\langle f,g\rangle$ $(f\colon Fc \to a,\ g\colon b \to Gc)$ と $\langle f',g'\rangle$ $(f'\colon Fc' \to a,\ g'\colon b \to Gc')$ に対して

$$\langle f,g\rangle R \langle f',g'\rangle \iff \text{ある } h\colon c \longrightarrow c' \text{が存在して } f = f' \circ Fh,\ Gh \circ g = g' \text{となる}.$$

$$\begin{tikzcd}
c \arrow[dd, "h"'] & Fc \arrow[dd, "Fh"'] \arrow[dr, "f"] & & & & Gc \arrow[dd, "Gh"] \\
 & & a & & b \arrow[ur, "g"] \arrow[dr, "g'"'] & \\
c' & Fc' \arrow[ur, "f'"'] & & & & Gc'
\end{tikzcd}$$

$\langle f,g\rangle$ の属する $\sim$ の同値類を $[f,g]$ で表すことにする．

$s\colon a \longrightarrow a'$ に対して $\Psi(\mathrm{id}_b, s)\colon \Psi(b,a) \longrightarrow \Psi(b,a')$ は余極限の普遍性により得られる射 $\Psi(b,a) = \operatorname*{colim}_{Fx\to a} \mathrm{Hom}_B(b,Gx) \longrightarrow \operatorname*{colim}_{Fx\to a'} \mathrm{Hom}_B(b,Gx) = \Psi(b,a')$ である．よって $[f,g] \in \Psi(b,a)$ に対して $\Psi(\mathrm{id}_b, s)([f,g]) = [s\circ f, g]$ である．また $t\colon b \longrightarrow b'$ に対して $\Psi(t, \mathrm{id}_a)$ は $\Psi(t,\mathrm{id}_a)([f,g]) = [f, g\circ t]$ で与えられる．従って，$F{\uparrow}G$ の射の合成の定義から $s \circ [f,g] = [s\circ f, g]$，$[f,g]\circ t = [f, g\circ t]$ である．

$c \in C$ に対して $\theta_c := [\mathrm{id}_{Fc}, \mathrm{id}_{Gc}] \in \Psi(Gc, Fc)$ と定める．このとき $k \in \Psi(b,a)$ を $k = [f,g]$ $(f\colon Fc \to a,\ g\colon b \to Gc)$ と書けば $[f,g] = f \circ [\mathrm{id}_{Fc}, \mathrm{id}_{Gc}] \circ g = f \circ \theta_c \circ g$ で

ある．この θ_c は自然変換 $\theta\colon G^\Psi \circ G \Longrightarrow F^\Psi \circ F$ を与える．

$$
\begin{tikzcd}
& F\uparrow G & \\
A \arrow[ur, "F^\Psi"] \arrow[rr, phantom, "\overset{\theta}{\Longleftarrow}"] & & B \arrow[ul, "G^\Psi"'] \\
& C \arrow[ul, "F"] \arrow[ur, "G"'] &
\end{tikzcd}
$$

∵) $r\colon c \longrightarrow c'$ を C の射とする．次の図式が可換であることを示せばよい．

$$
\begin{tikzcd}
Fc \arrow[d, "Ff"'] & Gc \arrow[l, "\theta_c"'] \arrow[d, "Gf"] \\
Fc' & Gc' \arrow[l, "\theta_{c'}"]
\end{tikzcd}
$$

θ の定義から $Ff \circ \theta_c = [Ff, \mathrm{id}_{Gc}]$，$\theta_{c'} \circ Gf = [\mathrm{id}_{Fc}, Gf]$ である．明らかに $\langle Ff, \mathrm{id}_{Gc}\rangle R \langle \mathrm{id}_{Fc'}, Gf\rangle$ だから $[Ff, \mathrm{id}_{Gc}] = [\mathrm{id}_{Fc'}, Gf]$ である．

$$
\begin{tikzcd}
c \arrow[d, "f"'] \\
c'
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
Fc \arrow[d, "Ff"'] \arrow[dr, "Ff"] & \\
& Fc' \\
Fc' \arrow[ur, "\mathrm{id}_{Fc'}"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& Gc \arrow[dd, "Gf"] \\
Gc \arrow[ur, "\mathrm{id}_{Gc}"] \arrow[dr, "Gf"'] & \\
& Gc'
\end{tikzcd}
$$

さて，D を圏，$K\colon A \longrightarrow D$，$L\colon B \longrightarrow D$ を関手，$\varphi\colon LG \Longrightarrow KF$ を自然変換とする．関手 $H\colon F\uparrow G \longrightarrow D$ が一意に存在して，$H\theta = \varphi$ となることを示せばよい．

$$
\begin{tikzcd}
& D & \\
& F\uparrow G \arrow[u, dashed, "H"] & \\
A \arrow[uur, bend left, "K"] \arrow[ur, "F^\Psi"] \arrow[rr, phantom, "\overset{\theta}{\Longleftarrow}"] & & B \arrow[uul, bend right, "L"'] \arrow[ul, "G^\Psi"'] \\
& C \arrow[ul, "F"] \arrow[ur, "G"'] &
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
& D & \\
A \arrow[ur, bend left, "K"] \arrow[rr, phantom, "\overset{\varphi}{\Longleftarrow}"] & & B \arrow[ul, bend right, "L"'] \\
& C \arrow[ul, "F"] \arrow[ur, "G"'] &
\end{tikzcd}
$$

もしこのような H があったとすれば明らかに

- $x \in \mathrm{Ob}(A)$ に対して $Hx = Kx$.

- $f \in \mathrm{Mor}(A)$ に対して $Hf = Kf$.
- $x \in \mathrm{Ob}(B)$ に対して $Hx = Lx$.
- $f \in \mathrm{Mor}(B)$ に対して $Hf = Lf$.
- $c \in \mathrm{Ob}(C)$ に対して $H\theta_c = \varphi_c$.

であり，また $k \in \mathrm{Hom}(b,a) = \Psi(b,a)$ とすると，$k = [f,g]$ と書くとき $k = f \circ \theta_c \circ g$ だから $Hk = H(f \circ \theta_c \circ g) = Hf \circ H\theta_c \circ Hg = Kf \circ \varphi_c \circ Lg$ となる．故にこのような H は高々一つしかない．よってこの条件で定まる H が関手となることを示せばよい．

まずこの H が well-defined であることを示す．$k \in \Psi(b,a)$ が $f\colon Fc \to a,\ g\colon b \to Gc$ と $f'\colon Fc' \to a,\ g'\colon b \to Gc'$ を使って $k = [f,g] = [f',g']$ と二通りに書けたとする．簡単のため $\langle f,g\rangle R\langle f',g'\rangle$ としておく．即ち，ある $h\colon c \longrightarrow c'$ によって $f = f' \circ Fh$, $Gh \circ g = g'$ と書ける．

$$
\begin{tikzcd}
c \arrow[d, "h"'] \\
c'
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
Fc \arrow[d, "Fh"'] \arrow[dr, "f"] & \\
Fc' \arrow[r, "f'"'] & a
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& Gc \arrow[d, "Gh"] \\
b \arrow[ur, "g"] \arrow[r, "g'"'] & Gc'
\end{tikzcd}
$$

$\varphi\colon LG \Longrightarrow KF$ は自然変換だから $KFf \circ \varphi_c = \varphi_{c'} \circ LGf$ である．

$$
\begin{tikzcd}
LGc \arrow[r, "\varphi_c"] \arrow[d, "LGf"'] & KFc \arrow[d, "KFf"] \\
LGc' \arrow[r, "\varphi_{c'}"'] & KFc'
\end{tikzcd}
$$

よって

$$
\begin{aligned}
H([f,g]) &= Kf \circ \varphi_c \circ Lg \\
&= Kf' \circ KFh \circ \varphi_c \circ Lg \\
&= Kf' \circ \varphi_{c'} \circ LGf \circ Lg \\
&= Kf' \circ \varphi_{c'} \circ Lg' = H([f',g'])
\end{aligned}
$$

となり，H は well-defined である．

$x,y \in B$，$z \in A$，$s\colon x \longrightarrow y$，$k\colon y \longrightarrow z$ とする．$H(k \circ s) = H(k) \circ H(s)$ を示す．$k = [f,g]$ と書けば $k \circ s = [f,g] \circ s = [f, g \circ s]$ だから $H(k \circ s) = Kf \circ \varphi_c \circ L(g \circ s) = Hk \circ Ls = Hk \circ Hs$ である．

他の条件も同様にして分かり，H は関手である． $\square$

参考文献

[1] Jean Bénabou, Distributors at Work, http://www.mathematik.tu-darmstadt.de/~streicher/