ココンマ圏と profunctor

alg-d
http://alg-d.com/math/kan_extension/

2019 年 6 月 16 日

これまで見てきた通り，圏論ではコンマ圏が非常に重要な役割を果たす．そうすると気になるのは，コンマ圏の双対となる「ココンマ圏」は存在するのであろうか，ということである．

定義. 圏 C の図式 $a \leftarrow c \rightarrow b$ を a から b への span という．双対的に，図式 $a \rightarrow c \leftarrow b$ を a から b への cospan という．

定義. C を圏，$a, b \in C$ を対象とする．a から b への span がなす圏 $\mathrm{Span}(a, b)$ を以下のように定める．

- $\mathrm{Ob}(\mathrm{Span}(a, b)) := \{\langle f, g\rangle \in \mathrm{Mor}(C)^2 \mid c \in C,\ a \xleftarrow{f} c \xrightarrow{g} b\}$
- $\langle f, g\rangle, \langle k, l\rangle \in \mathrm{Span}(a, b)$ とする．$c := \mathrm{dom}(f)$，$d := \mathrm{dom}(k)$ とする．$\langle f, g\rangle$ から $\langle k, l\rangle$ への射は，次の図式を可換とする射 $h\colon c \to d$ で定める．

$$\begin{tikzcd}
a & & b \\
& d \arrow[ul, "k"'] \arrow[ur, "l"] & \\
& c \arrow[u, "h"] \arrow[uul, bend left, "f"] \arrow[uur, bend right, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

同様にして cospan がなす圏 $\mathrm{Cospan}(a, b)$ が以下のように定まる．

- $\mathrm{Ob}(\mathrm{Cospan}(a, b)) := \{\langle f, g\rangle \in \mathrm{Mor}(C)^2 \mid c \in C,\ a \xrightarrow{f} c \xleftarrow{g} b\}$
- $\langle f, g\rangle, \langle k, l\rangle \in \mathrm{Cospan}(a, b)$ とする．$c := \mathrm{cod}(f)$，$d := \mathrm{cod}(k)$ とする．$\langle f, g\rangle$ か

ら $\langle k, l\rangle$ への射は，次の図式を可換とする射 $h\colon c \to d$ で定める．

$$
\begin{tikzcd}
 & d & \\
 & c \arrow[u, "h"] & \\
a \arrow[ur, "f"'] \arrow[uur, bend left, "k"] & & b \arrow[ul, "g"] \arrow[uul, bend right, "l"']
\end{tikzcd}
$$

ここでは圏の圏 **Cat** における span，cospan を考える．

$A \xrightarrow{F} C \xleftarrow{G} B$ を **Cat** の cospan としたとき，コンマ圏 $G{\downarrow}F$ は span $A \leftarrow G{\downarrow}F \to B$ を与えるのであった．[*1]

命題 1. コンマ圏を取る操作は関手 $\downarrow\colon \mathrm{Cospan}(A, B) \to \mathrm{Span}(A, B)$ を与える．

証明． $H\colon (A \xrightarrow{F} C \xleftarrow{G} B) \to (A \xrightarrow{K} D \xleftarrow{L} B)$ を $\mathrm{Cospan}(A, B)$ の射とする．このとき関手 ${\downarrow}H\colon G\downarrow F \to L\downarrow K$ をコンマ圏の普遍性により定める．

$$
\begin{tikzcd}
 & C' & \\
A \arrow[ur, bend left, "K"] \arrow[rr, phantom, "\Leftarrow"] & & B \arrow[ul, bend right, "L"'] \\
 & L\downarrow K \arrow[ul] \arrow[ur] & \\
 & G\downarrow F \arrow[u, dashed, "\downarrow H"] \arrow[uul, bend left, "P_1"] \arrow[uur, bend right, "P_0"'] &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
 & C' & \\
 & C \arrow[u, "H"] & \\
A \arrow[ur, "F"'] \arrow[uur, bend left, "K"] & & B \arrow[ul, "G"] \arrow[uul, bend right, "L"'] \\
 & \Leftarrow & \\
 & G\downarrow F \arrow[uul, bend left, "P_1"] \arrow[uur, bend right, "P_0"'] &
\end{tikzcd}
$$

普遍性により，これは明らかに関手 $\downarrow\colon \mathrm{Cospan}(A, B) \to \mathrm{Span}(A, B)$ を与える． $\square$

そこで，もしこの関手が左随伴を持つとすると，それが「ココンマ圏を与える関手」であるとみなすことができる．というのも「コンマ圏の普遍性」の双対バージョン (定理 2) が成り立つからである．

それを説明するため，関手 $\downarrow$ が左随伴 $\uparrow\colon \mathrm{Span}(A, B) \to \mathrm{Cospan}(A, B)$ を持つとして，その unit を η とする． $A \xleftarrow{F} C \xrightarrow{G} B$ を span とすると $\uparrow(A \xleftarrow{F} C \xrightarrow{G} B)$ は cospan であるから，それを $A \xrightarrow{Q_0} F\uparrow G \xleftarrow{Q_1} B$ と書くと，これのコンマ圏を考えることができる．

[*1] 後の構成の都合上，$F\downarrow G$ ではなく $G\downarrow F$ を考える．ここを $F\downarrow G$ にしたい場合，後で出てくる $\mathbf{Prof}(A, B)$ を $\mathbf{Prof}(B, A)$ にする必要がある．

このとき $S := \eta_{A \xleftarrow{F} C \xrightarrow{G} B}$ は $\mathrm{Span}(A, B)$ の射 $C \to Q_1{\downarrow}Q_0$ (次の図式の点線の射) のことである (ここで P_0, P_1, θ はコンマ圏 $Q_1{\downarrow}Q_0$ から得られる関手と自然変換である).

$$\begin{tikzcd}
 & A \arrow[r, "Q_0"] & F{\uparrow}G \\
 & Q_1{\downarrow}Q_0 \arrow[u, "P_1"'] \arrow[r, "P_0"] \arrow[ur, phantom, "\Leftarrow\theta"] & B \arrow[u, "Q_1"'] \\
C \arrow[uur, bend left, "F"] \arrow[ur, dashed, "S"'] \arrow[urr, bend right, "G"'] & &
\end{tikzcd}$$

そこでこの合成により得られる自然変換を $\rho\colon Q_1G \Rightarrow Q_0F$ とする.

定理 2. 関手 $\downarrow$ が左随伴 $\uparrow\colon \mathrm{Span}(A, B) \to \mathrm{Cospan}(A, B)$ を持つとする．このとき上のように定義した図式

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "Q_0"] & F{\uparrow}G \\
C \arrow[u, "F"] \arrow[r, "G"'] \arrow[ur, phantom, "\Leftarrow\rho"] & B \arrow[u, "Q_1"']
\end{tikzcd}$$

は次の普遍性を満たす: X を圏, $R_0\colon A \to X$, $R_1\colon B \to X$ を関手, $\alpha\colon R_1G \Rightarrow R_0F$ を自然変換とする.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "R_0"] & X \\
C \arrow[u, "F"] \arrow[r, "G"'] \arrow[ur, phantom, "\Leftarrow\alpha"] & B \arrow[u, "R_1"']
\end{tikzcd}$$

このとき関手 $H\colon F{\uparrow}G \to X$ が一意に存在して以下を満たす.

(1) $HQ_0 = R_0$, $HQ_1 = R_1$ である.
(2) 次の自然変換の等式が成り立つ.

$$\begin{tikzcd}
 & & X \\
A \arrow[urr, bend left, "R_0"] \arrow[r, "Q_0"] & F{\uparrow}G \arrow[ur, dashed, "H"'] & \\
C \arrow[u, "F"] \arrow[r, "G"'] \arrow[ur, phantom, "\Leftarrow\rho"] & B \arrow[u, "Q_1"'] \arrow[uur, bend right, "R_1"'] &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
 & X \\
A \arrow[ur, bend left, "R_0"] & \\
C \arrow[u, "F"] \arrow[r, "G"'] \arrow[ur, phantom, "\Leftarrow\alpha"] & B \arrow[uu, bend right, "R_1"']
\end{tikzcd}$$

証明．まず H の存在を示す．そのためにコンマ圏 $R_1\downarrow R_0$ を取り，そこから得られる関手と自然変換を P'_0, P'_1, θ' とする．普遍性により次の図式の点線の関手 $M\colon C\to R_1\downarrow R_0$ が得られる．

$$
\begin{tikzcd}
 & & X \\
 & A \arrow[ur, bend left, "R_0"] \arrow[r, phantom, "\Uparrow\theta'"] & {} \\
 & R_1\downarrow R_0 \arrow[u, "P'_1"'] \arrow[r, "P'_0"] & B \arrow[uu, bend right, "R_1"'] \\
 C \arrow[uur, bend left, "F"] \arrow[urr, bend right, "G"'] \arrow[ur, dashed, "M"'] & &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
 & & X \\
 & A \arrow[ur, bend left, "R_0"] \arrow[dr, phantom, "\Uparrow\alpha"] & \\
 & & B \arrow[uu, bend right, "R_1"'] \\
 C \arrow[uur, bend left, "F"] \arrow[urr, bend right, "G"'] & &
\end{tikzcd}
$$

このとき随伴 $\mathrm{Hom}(F\uparrow G, \langle R_0, R_1\rangle)\cong\mathrm{Hom}(\langle F, G\rangle, R_1\downarrow R_0)$ により，M の随伴射となる関手 $H\colon F\uparrow G\to X$ が取れる．これが条件 (1)(2) を満たすことを示す．

まず条件 (1) は，定義より H が $\mathrm{Cospan}(A, B)$ の射であるからよい．条件 (2) を示そう．随伴の unit の性質から $\downarrow H\circ S = M$ が成り立つ．従って

$$
\begin{tikzcd}
 & & X \\
 & A \arrow[ur, bend left, "R_0"] \arrow[dr, phantom, "\Uparrow\alpha"] & \\
 & & B \arrow[uu, bend right, "R_1"'] \\
 C \arrow[uur, bend left, "F"] \arrow[urr, bend right, "G"'] & &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
 & & X \\
 & A \arrow[ur, bend left, "R_0"] \arrow[r, phantom, "\Uparrow\theta'"] & {} \\
 & R_1\downarrow R_0 \arrow[u, "P'_1"'] \arrow[r, "P'_0"] & B \arrow[uu, bend right, "R_1"'] \\
 C \arrow[uur, bend left, "F"] \arrow[urr, bend right, "G"'] \arrow[ur, "M"'] & &
\end{tikzcd}
$$

$$
=
\begin{tikzcd}
 & & & X \\
 & & A \arrow[ur, bend left, "R_0"] \arrow[r, phantom, "\Uparrow\theta'"] & {} \\
 & & R_1\downarrow R_0 \arrow[u, "P'_1"'] \arrow[r, "P'_0"] & B \arrow[uu, bend right, "R_1"'] \\
 & Q_1\downarrow Q_0 \arrow[uur, bend left, "P_1"] \arrow[ur, "\downarrow H"'] \arrow[urr, bend right, "P_0"'] & & \\
 C \arrow[uuurr, bend left, "F"] \arrow[ur, "S"'] \arrow[uurrr, bend right, "G"'] & & &
\end{tikzcd}
$$

$$
=
\begin{tikzcd}
 & & & & X \\
 & & A \arrow[r, "Q_0"'] \arrow[urr, bend left, "R_0"] \arrow[r, phantom, shift left=4, "="] & F\uparrow G \arrow[ur, "H"'] & \\
 & & \arrow[u, phantom, "\Uparrow\theta"] & B \arrow[u, "Q_1"] \arrow[uur, bend right, "R_1"'] \arrow[ur, phantom, "="] & \\
 & Q_1\downarrow Q_0 \arrow[uur, bend left, "P_1"] \arrow[urr, bend right, "P_0"'] \arrow[ul, phantom, "="] & & & \\
C \arrow[ur, "S"'] \arrow[uuurr, bend left=40, "F"] \arrow[uurrr, bend right=40, "G"'] \arrow[urr, phantom, "="] & & & &
\end{tikzcd}
$$

$$
=
\begin{tikzcd}
 & & & & X \\
 & & A \arrow[r, "Q_0"'] \arrow[urr, bend left, "R_0"] \arrow[r, phantom, shift left=4, "="] & F\uparrow G \arrow[ur, "H"'] & \\
 & & & B \arrow[u, "Q_1"] \arrow[uur, bend right, "R_1"'] \arrow[ur, phantom, "="] & \\
 & \arrow[r, phantom, "\Uparrow\rho"] & & & \\
C \arrow[uuurr, bend left=40, "F"] \arrow[uurrr, bend right=40, "G"'] & & & &
\end{tikzcd}
$$

となり条件 (2) が成り立つ．

後は H の一意性を示せばよい．H が条件 (1)(2) を満たすとすると H は $\mathrm{Cospan}(A, B)$ の射 $F\uparrow G \to X$ だから，随伴射 $M\colon C \to R_1\downarrow R_0$ が取れる．従ってこの M が一意であることを示せばよい．再び unit の性質から，これは $\downarrow H \circ S = M$ を満たす．故に

$$
\begin{tikzcd}
 & & & X \\
 & A \arrow[urr, bend left, "R_0"] \arrow[r, phantom, "\Uparrow\theta'"] & & \\
 & R_1\downarrow R_0 \arrow[u, "P_1'"'] \arrow[r, "P_0'"] & B \arrow[uur, bend right, "R_1"'] & \\
C \arrow[ur, "M"'] \arrow[uur, bend left=40, "F"] \arrow[urr, bend right=40, "G"'] \arrow[u, phantom, "="] \arrow[r, phantom, "="] & & &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
 & & & X \\
 & A \arrow[urr, bend left, "R_0"] \arrow[r, phantom, "\Uparrow\theta'"] & & \\
 & R_1\downarrow R_0 \arrow[u, "P_1'"'] \arrow[r, "P_0'"] & B \arrow[uur, bend right, "R_1"'] & \\
 & Q_1\downarrow Q_0 \arrow[u, "\downarrow H"'] \arrow[uu, bend left, "P_1"] \arrow[ur, bend right, "P_0"'] \arrow[u, phantom, shift left=6, "="] & & \\
C \arrow[ur, "S"'] \arrow[uuur, bend left=40, "F"] \arrow[uurr, bend right=40, "G"'] \arrow[uu, phantom, "="] \arrow[r, phantom, "="] & & &
\end{tikzcd}
$$

$$
= \begin{tikzcd}
 & & & & X \\
 & & A \arrow[r, "Q_0"'] \arrow[urr, bend left, "R_0"] \arrow[ur, phantom, "="] & F\uparrow G \arrow[ur, "H"'] & \\
 & & & B \arrow[u, "Q_1"] \arrow[uur, bend right, "R_1"'] \arrow[ur, phantom, "="] & \\
 & Q_1\downarrow Q_0 \arrow[uur, "P_1"] \arrow[urr, "P_0"'] \arrow[urr, phantom, "\Uparrow\theta"] \arrow[ur, phantom, "="] & & & \\
 C \arrow[ur, "S"'] \arrow[uuurr, bend left, "F"] \arrow[uurrr, bend right, "G"'] \arrow[urr, phantom, "="] & & & &
\end{tikzcd}
$$

$$
= \begin{tikzcd}
 & & & & X \\
 & & A \arrow[r, "Q_0"'] \arrow[urr, bend left, "R_0"] \arrow[ur, phantom, "="] & F\uparrow G \arrow[ur, "H"'] & \\
 & & & B \arrow[u, "Q_1"] \arrow[uur, bend right, "R_1"'] \arrow[ur, phantom, "="] & \\
 & & \arrow[u, phantom, "\Uparrow\rho"] & & \\
 C \arrow[uuurr, bend left, "F"] \arrow[uurrr, bend right, "G"'] & & & &
\end{tikzcd}
$$

$$
= \begin{tikzcd}
 & & & & X \\
 & & A \arrow[urr, bend left, "R_0"] \arrow[r, phantom, "\Uparrow\alpha"] & & \\
 & & & B \arrow[uur, bend right, "R_1"'] & \\
 & & & & \\
 C \arrow[uuurr, bend left, "F"] \arrow[uurrr, bend right, "G"'] & & & &
\end{tikzcd}
$$

となるから，$R_1 \downarrow R_0$ の普遍性により M は一意である． $\square$

そこで問題は$\downarrow$: $\mathrm{Cospan}(A,B) \to \mathrm{Span}(A,B)$ が左随伴を持つか，ということになる．答えは存在する，であるが，これを構成するために profunctor というものを導入する．

定義. C, D を圏とする．C から D への profunctor (もしくは distributor もしくは correspondence もしくは bimodule) とは関手 $F\colon C \to \widehat{D}$ のことである．profunctor を記号 $F\colon C \mathrel{-\!\!\!\circ\!\!\!\rightarrow} D$ などで表す.

自然同型 $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Cat}}(A \times B, C) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Cat}}(A, C^B)$ により, profunctor $F\colon C \mathrel{-\!\!\!\circ\!\!\!\rightarrow} D$ 即ち関手 $F\colon C \to \widehat{D}$ と関手 $F\colon D^{\mathrm{op}} \times C \to \mathbf{Set}$ を同一視することができる．以下, 特に断らずこの同一視を行う．また C から D への profunctor がなす圏を $\mathbf{Prof}(C, D) := \mathbf{Set}^{D^{\mathrm{op}} \times C}$ で定める.

定義. profunctor $F\colon A \mathrel{-\!\!\!\circ\!\!\!\rightarrow} B$, $G\colon B \mathrel{-\!\!\!\circ\!\!\!\rightarrow} C$ に対して profunctor の合成 $GF\colon A \mathrel{-\!\!\!\circ\!\!\!\rightarrow} C$ を関手 $(y^\dagger G) \circ F\colon A \to \widehat{C}$ で定める.

$$
\begin{tikzcd}
 & \widehat{B} \arrow[r, "y^\dagger G"] & \widehat{C} \\
A \arrow[ur, "F"] & B \arrow[u, "y"] \arrow[ur, "G"'] &
\end{tikzcd}
$$

圏 C に対して米田埋込 $y\colon C \to \widehat{C}$ が定める profunctor を $\mathrm{id}_C\colon C \mathrel{-\!\!\!\circ\!\!\!\rightarrow} C$ で表す．左 Kan 拡張の性質から容易に分かるように $F\colon C \mathrel{-\!\!\!\circ\!\!\!\rightarrow} D$ に対して $F \circ \mathrm{id}_C \cong F$, $\mathrm{id}_D \circ F \cong F$ である.

命題 3. $F\colon A \mathrel{-\!\!\!\circ\!\!\!\rightarrow} B$, $G\colon B \mathrel{-\!\!\!\circ\!\!\!\rightarrow} C$ を profunctor とするとき

$$
GF(a) = \int^{b \in B} F(b, a) \times G(-, b).
$$

証明. $P \in \widehat{B}$ に対して $y^\dagger G(P) = \int^{b \in B} \mathrm{Hom}_{\widehat{B}}(y(b), P) \times Gb = \int^{b \in B} Pb \times Gb$ であるから $GF(a) = y^\dagger G(Fa) = \int^{b \in B} Fa(b) \times Gb = \int^{b \in B} F(b, a) \times G(-, b)$. $\square$

$F\colon C \to D$ を関手とする．このとき profunctor $F_*\colon C \mathrel{-\!\!\!\circ\!\!\!\rightarrow} D$, $F^*\colon D \mathrel{-\!\!\!\circ\!\!\!\rightarrow} C$ が

$$
F_*(d, c) := \mathrm{Hom}_D(d, Fc), \quad F^*(c, d) := \mathrm{Hom}_D(Fc, d)
$$

により定まる．つまり $F_*(c) = y \circ F(c) = F^{-1} y(c)$, $F^*(d) \cong F^\dagger y(d)$ である.

A, B を小圏とする．cospan $A \xrightarrow{F} C \xleftarrow{G} B$ に対して profunctor $\Phi(F, G)\colon A \mathrel{-\!\!\!\circ\!\!\!\rightarrow} B$ が

$$
\Phi(F, G) := G^* F_* \cong (G^\dagger y)(y \circ F) \cong y^\dagger (G^\dagger y) \circ y \circ F
$$

により定まる．

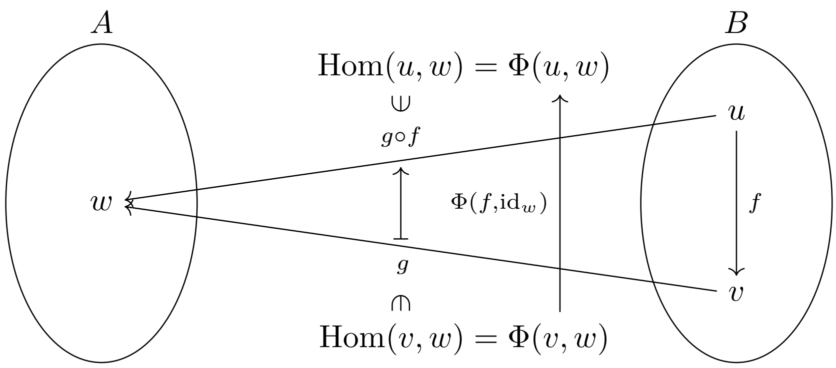
$$
\begin{tikzcd}
 & & \widehat{C} \arrow[dr, "y^\dagger(G^\dagger y)"] & \\
 & C \arrow[ur, "y"] \arrow[rr, "G^\dagger y"] & & \widehat{B} \\
A \arrow[ur, "F"] & & B \arrow[ul, "G"] \arrow[ur, "y"'] &
\end{tikzcd}
$$

ここで y が忠実充満であることより $y^\dagger(G^\dagger y)\circ y \cong G^\dagger y$ となるから結局 $\Phi(F,G) \cong (G^\dagger y)\circ F$ が分かる．よって $\Phi(F,G)(a) \cong G^\dagger y(Fa) \cong \mathrm{Hom}_C(G-, Fa)$ となる．

逆に profunctor $\Phi\colon A \nrightarrow B$ に対して cospan $T(\Phi) = (A \xrightarrow{F_\Phi} C_\Phi \xleftarrow{G_\Phi} B)$ を以下のように定義することができる．まず圏 C_Φ を次により定める．

- $\mathrm{Ob}(C_\Phi) := \mathrm{Ob}(A) \sqcup \mathrm{Ob}(B)$
- $\mathrm{Hom}_{C_\Phi}(u,v) := \begin{cases} \mathrm{Hom}_A(u,v) & (u,v \in A \text{ のとき}) \\ \mathrm{Hom}_B(u,v) & (u,v \in B \text{ のとき}) \\ \emptyset & (u \in A,\ v \in B \text{ のとき}) \\ \Phi(u,v) & (u \in B,\ v \in A \text{ のとき}) \end{cases}$
- 射 $f\colon u \to v$，$g\colon v \to w$ の合成 $g \circ f$ を次で定める．

$$
g \circ f := \begin{cases} g \circ f & (u,v,w \in A \text{ のとき}) \\ g \circ f & (u,v,w \in B \text{ のとき}) \\ \Phi(f, \mathrm{id}_w)(g) & (u,v \in B,\ w \in A \text{ のとき．下図参照}) \\ \Phi(\mathrm{id}_u, g)(f) & (u \in B,\ v,w \in A \text{ のとき}) \end{cases}
$$



関手 $F_\Phi\colon A \to C_\Phi$，$G_\Phi\colon B \to C_\Phi$ を自然な埋込で定めれば $T(\Phi) \in \mathrm{Cospan}(A,B)$ である．

命題 4. $\Phi\colon \mathrm{Cospan}(A,B) \to \mathbf{Prof}(A,B)$ と $T\colon \mathbf{Prof}(A,B) \to \mathrm{Cospan}(A,B)$ は関手となる．

証明. (Φ が関手となること) まず $\mathrm{Cospan}(A, B)$ の射 H (次の図式を参照) を取る.

$$
\begin{tikzcd}
 & D & \\
 & C \arrow[u, "H"] & \\
A \arrow[ur, "F"'] \arrow[uur, bend left, "K"] & & B \arrow[ul, "G"] \arrow[uul, bend right, "L"']
\end{tikzcd}
$$

既に見た通り $\Phi(F, G), \Phi(K, L) \colon A \mathrel{-\!\!\circ\!\!\!\rightarrow} B$ は $\Phi(F, G) = (G^{\dagger}y) \circ F$, $\Phi(K, L) = (L^{\dagger}y) \circ K$ により得られる. Kan 拡張の性質 (「随伴関手定理」の PDF を参照) より, 次の図式の η^H を $\langle L^{\dagger}y, \eta \rangle$ が H に沿った $G^{\dagger}y$ の左 Kan 拡張となるように一意に取ることができる.

$$
\begin{tikzcd}
 & D \arrow[rrd, "L^{\dagger}y\,(\cong H^{\dagger}(G^{\dagger}y))"] & & \\
 & C \arrow[u, "H"] \arrow[rr, "G^{\dagger}y"] \arrow[u, phantom, shift left=4, "\Uparrow\eta^H"] \arrow[ul, phantom, "="] & & \widehat{B} \\
A \arrow[ur, "F"'] \arrow[uur, bend left, "K"] & & B \arrow[ul, "G"] \arrow[ur, "y"'] \arrow[u, phantom, "\Leftarrow"] &
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
 & D \arrow[rrd, "L^{\dagger}y"] & & \\
 & C \arrow[u, "H"] \arrow[ul, phantom, "="] \arrow[ur, phantom, "="] & & \widehat{B} \\
A \arrow[ur, "F"'] \arrow[uur, bend left, "K"] & & B \arrow[ul, "G"] \arrow[uul, bend right, "L"'] \arrow[ur, "y"'] \arrow[u, phantom, "\Uparrow"] &
\end{tikzcd}
$$

そこでこの η^H を使えば自然変換 $\Phi(H) \colon \Phi(F, G) = (G^{\dagger}y) \circ F \Rightarrow (L^{\dagger}y) \circ K = \Phi(K, L)$ が得られる. この Φ は関手になる.

$\because$) まず $H = \mathrm{id}$ の場合は $G = L$ となるから $G^{\dagger}y = L^{\dagger}y$ であり, 故に $\eta^{\mathrm{id}} = \mathrm{id}$ となるから $\Phi(\mathrm{id}) = \mathrm{id}$ である. 故に Φ が合成と交換することを示せばよい. そこで $(A \xleftarrow{F} C_0 \xrightarrow{G} B) \xrightarrow{H} (A \xleftarrow{K} C_1 \xrightarrow{L} B) \xrightarrow{H'} (A \xleftarrow{P} C_2 \xrightarrow{Q} B)$ を cospan の射とすると

$$
\begin{tikzcd}
 & C_2 \arrow[rrdd, "Q^{\dagger}y"] & & \\
 & C_1 \arrow[u, "H'"] \arrow[ul, phantom, "="] \arrow[r, phantom, "\Uparrow\eta^{H'H}"] & & \\
 & C_0 \arrow[u, "H"] \arrow[rr, "G^{\dagger}y"] \arrow[ul, phantom, "="] & & \widehat{B} \\
A \arrow[ur, "F"'] \arrow[uur, bend left, "K"] \arrow[uuur, bend left, "P"] & & B \arrow[ul, "G"] \arrow[ur, "y"'] \arrow[u, phantom, "\Leftarrow"] &
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
 & C_2 \arrow[rrdd, "Q^{\dagger}y"] & & \\
 & C_1 \arrow[u, "H'"] \arrow[ul, phantom, "="] \arrow[ur, phantom, "="] & & \\
 & C_0 \arrow[u, "H"] \arrow[ul, phantom, "="] \arrow[ur, phantom, "="] & & \widehat{B} \\
A \arrow[ur, "F"'] \arrow[uur, bend left, "K"] \arrow[uuur, bend left, "P"] & & B \arrow[ul, "G"] \arrow[uul, bend right, "L"'] \arrow[uuul, bend right, "Q"'] \arrow[ur, "y"'] \arrow[u, phantom, "\Uparrow"] &
\end{tikzcd}
$$

$$
= \quad
\begin{tikzcd}
 & C_2 \arrow[rrd, "Q^\dagger y"] & & \\
 & C_1 \arrow[u, "H'"] \arrow[u, phantom, shift left=5, "\Uparrow\eta^{H'}"] \arrow[rr, "L^\dagger y"] & & \widehat{B} \\
 & C_0 \arrow[u, "H"] & & \\
A \arrow[ruuu, bend left, "P"] \arrow[ruu, bend left, "K"] \arrow[ru, "F"'] \arrow[ruu, phantom, shift left=2, "="] \arrow[ru, phantom, shift left=3, "="] & & B \arrow[lu, "G"] \arrow[luu, bend right, "L"'] \arrow[ruu, "y"'] \arrow[ruu, phantom, shift left=4, "\Uparrow"] \arrow[lu, phantom, shift left=4, "="] &
\end{tikzcd}
$$

$$
= \quad
\begin{tikzcd}
 & C_2 \arrow[rrd, "Q^\dagger y"] & & \\
 & C_1 \arrow[u, "H'"] \arrow[u, phantom, shift left=5, "\Uparrow\eta^{H'}"] \arrow[rr, "L^\dagger y"] & & \widehat{B} \\
 & C_0 \arrow[u, "H"] \arrow[u, phantom, shift left=5, "\Uparrow\eta^{H}"] \arrow[rru, "G^\dagger y"] & & \\
A \arrow[ruuu, bend left, "P"] \arrow[ruu, bend left, "K"] \arrow[ru, "F"'] \arrow[ruu, phantom, shift left=2, "="] \arrow[ru, phantom, shift left=3, "="] & & B \arrow[lu, "G"] \arrow[ruu, "y"'] \arrow[lu, phantom, shift right=4, "\Leftarrow"] &
\end{tikzcd}
$$

だから普遍性により

$$
\begin{tikzcd}
C_2 \arrow[rrd, "Q^\dagger y"] & & \\
C_1 \arrow[u, "H'"] \arrow[u, phantom, shift left=5, "\Uparrow\eta^{H'}"] \arrow[rr, "L^\dagger y"] & & \widehat{B} \\
C_0 \arrow[u, "H"] \arrow[u, phantom, shift left=5, "\Uparrow\eta^{H}"] \arrow[rru, "G^\dagger y"'] & &
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
C_2 \arrow[rrd, "Q^\dagger y"] & & \\
C_1 \arrow[u, "H'"] \arrow[rr, phantom, "\Uparrow\eta^{H'H}"] & & \widehat{B} \\
C_0 \arrow[u, "H"] \arrow[rru, "G^\dagger y"] & &
\end{tikzcd}
$$

となり $\Phi(H'H) = \Phi(H')\Phi(H)$ である．

(T が関手になること) $\mathbf{Prof}(A, B)$ の射 $\varphi\colon \Phi \Rightarrow \Psi$ に対して $T(\varphi)\colon T(\Phi) \to T(\Psi)$ を定めるには，対象 $a \in A$，$b \in B$ に対して写像 $T(\varphi)\colon \mathrm{Hom}_{C_\Phi}(b, a) \to \mathrm{Hom}_{C_\Psi}(b, a)$ をうまく定めればよい．それには Hom_{C_Φ} の定義から $T(\varphi) := \varphi_{ba}\colon \Phi(b, a) \to \Psi(b, a)$ と定義することができる．これにより $T(\varphi)$ が関手になることを示せばよい．$T(\varphi)(\mathrm{id}) = \mathrm{id}$ は明らかなので $f\colon u \to v$，$g\colon v \to w$ として $T(\varphi)(g \circ f) = T(\varphi)(g) \circ T(\varphi)(f)$ を示す．

(i) $u, v, w \in A$ または $u, v, w \in B$ の場合，明らか

(ii) $u, v \in B$，$w \in A$ の場合，定義から

$$
\begin{cases}
T(\varphi)(g \circ f) & = & \varphi_{uw}(g \circ f) \\
T(\varphi)(g) & = & \varphi_{vw}(g) \\
T(\varphi)(f) & = & f
\end{cases}
$$

であり，一方 φ が自然変換だから $\varphi_{uw}(g\circ f)=\varphi_{vw}(g)\circ f$ である．

$$
\begin{tikzcd}
\Phi(u,w) \arrow[r, "\varphi_{uw}"] & \Psi(u,w) \\
\Phi(v,w) \arrow[u, "\Phi(f,\mathrm{id}_w)"] \arrow[r, "\varphi_{vw}"'] & \Psi(v,w) \arrow[u, "\Psi(f,\mathrm{id}_w)"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
g\circ f \arrow[r, mapsto, "\varphi_{uw}"] & \varphi_{uw}(g\circ f) \\
 & \varphi_{vw}(g)\circ f \\
g \arrow[uu, mapsto, "\Phi(f,\mathrm{id}_w)"] \arrow[r, mapsto, "\varphi_{vw}"'] & \varphi_{vw}(g) \arrow[u, mapsto, "\Psi(f,\mathrm{id}_w)"']
\end{tikzcd}
$$

(iii) $u\in B$，$v,w\in A$ の場合，定義から

$$
\begin{cases}
T(\varphi)(g\circ f) & = \quad \varphi_{uw}(g\circ f) \\
T(\varphi)(g) & = \quad g \\
T(\varphi)(f) & = \quad \varphi_{uv}(f)
\end{cases}
$$

であり，一方 φ が自然変換だから $\varphi_{uw}(g\circ f)=g\circ\varphi_{uv}(f)$ である．

$$
\begin{tikzcd}
\Phi(u,v) \arrow[r, "\varphi_{uv}"] \arrow[d, "\Phi(\mathrm{id}_u,g)"'] & \Psi(u,v) \arrow[d, "\Psi(\mathrm{id}_u,g)"] \\
\Phi(u,w) \arrow[r, "\varphi_{uw}"'] & \Psi(u,w)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
f \arrow[r, mapsto, "\varphi_{uv}"] \arrow[dd, mapsto, "\Phi(\mathrm{id}_u,g)"'] & \varphi_{uv}(f) \arrow[d, mapsto, "\Psi(\mathrm{id}_u,g)"] \\
 & g\circ\varphi_{uv}(f) \\
g\circ f \arrow[r, mapsto, "\varphi_{uw}"'] & \varphi_{uw}(g\circ f)
\end{tikzcd}
$$

以上により $T(\varphi)$ は関手であることが分かった．

これにより T が関手になることを示す．T の定義より $T(\mathrm{id})=\mathrm{id}$ は明らかである．そこで $\varphi\colon\Phi\Rightarrow\Psi$，$\psi\colon\Psi\Rightarrow\Xi$ に対して $T(\psi\circ\varphi)=T(\psi)\circ T(\varphi)$ を示す．そのためには $a\in A$，$b\in B$ に対して $(\psi\circ\varphi)_{ba}=\psi_{ba}\circ\varphi_{ba}$ を示せばよいが，それは明らか． $\square$

命題 5. $T\dashv\Phi\colon\mathbf{Prof}(A,B)\to\mathrm{Cospan}(A,B)$

証明. 随伴であることを示すため，自然な全単射

$$\varphi\colon\ \mathrm{Hom}_{\mathrm{Cospan}(A,B)}(T(\Psi),\langle F,G\rangle)\to\mathrm{Hom}_{\mathbf{Prof}(A,B)}(\Psi,\Phi(F,G))$$

を定義する．

$\Psi\in\mathbf{Prof}(A,B)$，$(A\xrightarrow{F}C\xleftarrow{G}B)\in\mathrm{Cospan}(A,B)$ を取る．$H\colon T(\Psi)\to\langle F,G\rangle$ を射とする．即ち H は次を可換とする関手である．

$$
\begin{tikzcd}
 & C & \\
 & C_\Psi \arrow[u, "H"] & \\
A \arrow[uur, bend left, "F"] \arrow[ur, "F_\Psi"'] & & B \arrow[uul, bend right, "G"'] \arrow[ul, "G_\Psi"]
\end{tikzcd}
$$

可換性から $Ha = Fa$，$Hb = Gb$ である．よって関手 H から写像

$$\varphi(H)_{ba}\colon \mathrm{Hom}_{C_\Psi}(b,a) = \Psi(b,a) \xrightarrow{H} \mathrm{Hom}_C(Gb, Fa)$$

が得られる．これは $b \in B$，$a \in A$ について自然である．

$\because$) $g\colon b' \to b$，$f\colon a \to a'$ に対して次の左の図式

$$\begin{tikzcd}
\Psi(b,a) \arrow[r, "H"] \arrow[d, "\Psi(g,f)"'] & \mathrm{Hom}_C(Gb, Fa) \arrow[d, "Gg\circ - \circ Ff"] \\
\Psi(b',a') \arrow[r, "H"'] & \mathrm{Hom}_C(Gb', Fa')
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
k \arrow[r, mapsto, "H"] \arrow[d, mapsto, "\Psi(g,f)"'] & Hk \arrow[d, mapsto, "Gg\circ - \circ Ff"] \\
g \circ k \circ f \arrow[r, mapsto, "H"'] & H(g\circ k \circ f)
\end{tikzcd}$$

$$Gg \circ Hk \circ Ff$$

が可換であることを示せばよい．これは，$\Psi(g,f)$ が圏 C_Ψ における合成 $g \circ - \circ f$ と一致しているから，H の関手性により分かる．

よって自然変換 $\varphi(H)\colon \Psi \Rightarrow \mathrm{Hom}_C(G-, F\square) = \Phi(F,G)$ が得られる．この φ は全単射 $\varphi\colon \mathrm{Hom}(T(\Psi), \langle F, G\rangle) \to \mathrm{Hom}(\Psi, \Phi(F,G))$ を与える．

$\because$) 単射であることは $\varphi(H)_{ba}$ の定義から明らかである．よって全射性を示せばよい．そこで $\theta\colon \Psi \Rightarrow \mathrm{Hom}_C(G-, F\square)$ を自然変換とする．このとき H を

- 対象 $x \in C_\Psi$ に対して $Hx := \begin{cases} Fx & (x \in A) \\ Gx & (x \in B). \end{cases}$
- 射 $f\colon u \to v$ に対して $Hf := \begin{cases} Ff & (u,v \in A) \\ Gf & (u,v \in B) \\ \theta_{ba}(f) & (u \in B, v \in A). \end{cases}$

と定義する．この $H\colon C_\Psi \to C$ は関手である．

$\because$) $H(\mathrm{id}) = \mathrm{id}$ は明らかなので $f\colon u \to v$, $g\colon v \to w$ として $H(g\circ f) = Hg \circ Hf$ を示す．

(i) $u,v,w \in A$ または $u,v,w \in B$ の場合，明らか

(ii) $u,v \in B$，$w \in A$ の場合，定義から

$$\begin{cases} H(g\circ f) & = & \theta_{uw}(g \circ f) \\ Hg & = & \theta_{vw}(g) \\ Hf & = & Gf \end{cases}$$

であり，一方 θ が自然変換だから $\theta_{uw}(g\circ f)=\theta_{vw}(g)\circ Gf$ である．

$$\begin{tikzcd}
\Psi(u,w) \arrow[r, "\theta_{uw}"] & \mathrm{Hom}_C(Gu,Fw) \\
\Psi(v,w) \arrow[u, "\Phi(f,\mathrm{id}_w)"] \arrow[r, "\theta_{vw}"'] & \mathrm{Hom}_C(Gv,Fw) \arrow[u, "-\circ Gf"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
g\circ f \arrow[r, mapsto, "\theta_{uw}"] & \theta_{uw}(g\circ f) \\
 & \varphi_{vw}(g)\circ Gf \\
g \arrow[uu, mapsto, "\Phi(f,\mathrm{id}_w)"] \arrow[r, mapsto, "\theta_{vw}"'] & \theta_{vw}(g) \arrow[u, mapsto, "-\circ Gf"']
\end{tikzcd}$$

(iii) $u\in B$，$v,w\in A$ の場合，定義から

$$\begin{cases}
H(g\circ f) &=& \theta_{uw}(g\circ f)\\
Hg &=& Fg\\
HfH &=& \theta_{uv}(f)
\end{cases}$$

であり，一方 θ が自然変換だから $\theta_{uw}(g\circ f)=Fg\circ\theta_{uv}(f)$ である．

$$\begin{tikzcd}
\Psi(u,v) \arrow[r, "\theta_{uv}"] \arrow[d, "\Psi(\mathrm{id}_u,g)"'] & \mathrm{Hom}_C(Gu,Fv) \arrow[d, "Fg\circ-"] \\
\Psi(u,w) \arrow[r, "\theta_{uw}"'] & \mathrm{Hom}_C(Gu,Fw)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
f \arrow[r, mapsto, "\theta_{uv}"] \arrow[dd, mapsto, "\Psi(\mathrm{id}_u,g)"'] & \theta_{uv}(f) \arrow[d, mapsto, "Fg\circ-"] \\
 & Fg\circ\theta_{uv}(f) \\
g\circ f \arrow[r, mapsto, "\theta_{uw}"'] & \theta_{uw}(g\circ f)
\end{tikzcd}$$

以上により H は関手であることが分かった．

このとき明らかに $HF_\Psi=F$，$G_\Psi H=G$ だから H は射 $T(\Psi)\to\langle F,G\rangle$ であり，$\varphi(H)=\theta$ である．

故に後は φ が $\Psi,\langle F,G\rangle$ について自然であることを示せばよい．その為に $\theta\colon\Psi\Rightarrow\Xi$，$M\colon\langle F,G\rangle\to\langle K,L\rangle$ とする．

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}(T(\Xi),\langle F,G\rangle) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "M\circ-\circ T\theta"'] & \mathrm{Hom}(\Xi,\Phi(F,G)) \arrow[d, "\Phi(M)\circ-\circ\theta"] \\
\mathrm{Hom}(T(\Psi),\langle K,L\rangle) \arrow[r, "\varphi"'] & \mathrm{Hom}(\Psi,\Phi(K,L))
\end{tikzcd}$$

が可換であることを示す．$H\colon T(\Xi)\to\langle F,G\rangle$ として，まず右回りで送った先を考えると，その ba 成分は $(\Phi(M)\circ\varphi(H)\circ\theta)_{ba}=\Phi(M)_{ba}\circ\varphi(H)_{ba}\circ\theta_{ba}=\Phi(M)_{ba}\circ H\circ\theta_{ba}$ である．

一方左回りの ba 成分は $(\varphi(M\circ H\circ T\theta))_{ba}=M\circ H\circ T\theta=M\circ H\circ\theta_{ba}$ である．故

に $\Phi(M)_{ba} = M$ であることを示せばよい. □

次に span $A \xleftarrow{F} C \xrightarrow{G} B$ に対して profunctor $\Psi(F,G)\colon A \nrightarrow B$ が

$$\Psi(F,G) := G_* F^* \cong (yG)(F^\dagger y) \cong y^\dagger(yG) \circ F^\dagger y = F^\dagger(yG)$$

により定まる.

$$\begin{tikzcd}
 & \widehat{C} \arrow[rr, "y^\dagger(yG)"] & & \widehat{B} \\
A \arrow[ur, "F^\dagger y"] \arrow[r, phantom, "\Leftarrow" rotate=-45] & & B \arrow[ur, "y"'] \arrow[ul, phantom, "\Leftarrow" rotate=-45] & \\
 & C \arrow[ul, "F"] \arrow[ur, "G"'] \arrow[uu, "y"'] & &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
 & & & \widehat{B} \\
A \arrow[urrr, "F^\dagger(yG)"] & \Leftarrow & B \arrow[ur, "y"'] & \\
 & C \arrow[ul, "F"] \arrow[ur, "G"'] & &
\end{tikzcd}$$

逆に, $S := {\downarrow}{\circ}T$ と定義すれば, profunctor $\Phi\colon A \nrightarrow B$ に対して span $S(\Phi) \in \mathrm{Span}(A,B)$ を定義することができる.

$$\begin{tikzcd}
 & C_\Phi & \\
A \arrow[ur, "F_\Phi"] \arrow[rr, phantom, "\Longleftarrow"] & & B \arrow[ul, "G_\Phi"'] \\
 & G_\Phi \downarrow F_\Phi \arrow[ul, "F^\Phi"] \arrow[ur, "G^\Phi"'] \arrow[d, equal] & \\
 & C^\Phi &
\end{tikzcd}$$

命題 6. 圏 C^Φ は以下のようになる.

- $\mathrm{Ob}(C^\Phi) = \{\langle a,b,f\rangle \mid a \in A,\ b \in B,\ f \in \Phi(b,a)\}$
- $\langle a_0,b_0,f_0\rangle, \langle a_1,b_1,f_1\rangle \in \mathrm{Ob}(C^\Phi)$ に対して

$$\mathrm{Hom}_{C^\Phi}(\langle a_0,b_0,f_0\rangle,\langle a_1,b_1,f_1\rangle) = \left\{ \langle g,h\rangle \;\middle|\; \begin{array}{l} g\colon a_0 \to a_1, h\colon b_1 \to b_0, \\ \Phi(h,g)(f_0) = f_1 \end{array} \right\}$$

□

命題 7. $\Psi\colon \mathrm{Span}(A,B) \to \mathbf{Prof}(A,B)$ と $S\colon \mathbf{Prof}(A,B) \to \mathrm{Span}(A,B)$ は関手となる.

証明. まず S については定義より関手である. 従って Ψ が関手であることを示せばよい.

そのために $\mathrm{Span}(A, B)$ の射 H (次の図式を参照) を取る．

$$
\begin{tikzcd}
A & & B \\
& D \arrow[ul, "K"'] \arrow[ur, "L"] & \\
& C \arrow[u, "H"] \arrow[uul, bend left, "F"] \arrow[uur, bend right, "G"'] &
\end{tikzcd}
$$

$\Psi(F, G), \Psi(K, L) \colon A \nrightarrow B$ が $\Psi(F, G) = F^\dagger(yG)$，$\Psi(K, L) = K^\dagger(yL)$ により得られる．よって左 Kan 拡張の普遍性により自然変換 $\Psi(H) \colon \Psi(F, G) \Rightarrow \Psi(K, L)$ が得られる．

$$
\begin{tikzcd}
& & \widehat{B} \\
A \arrow[urr, bend left, "K^\dagger(yL)"] \arrow[urr, bend right, "F^\dagger(yG)"'] \arrow[urr, phantom, "\Uparrow \Psi(H)"] & & B \arrow[u, "y"'] \\
& C \arrow[ul, bend left, "F"] \arrow[ur, bend right, "G"'] \arrow[u, phantom, "\Leftarrow"] &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
& & \widehat{B} \\
A \arrow[urr, bend left, "K^\dagger(yL)"] \arrow[urr, phantom, "\Leftarrow"] & & B \arrow[u, "y"'] \\
& D \arrow[ul, "K"'] \arrow[ur, "L"] & \\
& C \arrow[u, "H"] \arrow[uul, bend left, "F"] \arrow[uur, bend right, "G"'] &
\end{tikzcd}
$$

これにより Ψ が関手となることを示そう．

まず明らかに $\Psi(\mathrm{id}) = \mathrm{id}$ である．よって Ψ が合成と交換することを示せばよい．そこで $(A \xleftarrow{F} C_0 \xrightarrow{G} B) \xrightarrow{H} (A \xleftarrow{K} C_1 \xrightarrow{L} B) \xrightarrow{H'} (A \xleftarrow{P} C_2 \xrightarrow{Q} B)$ を span の射とすると

$$
\begin{tikzcd}
& & \widehat{B} \\
A \arrow[urr, bend left=50, "P^\dagger(yQ)"] \arrow[urr, "K^\dagger(yL)" description] \arrow[urr, bend right, "F^\dagger(yG)"'] \arrow[urr, phantom, bend left=25, "\Uparrow \Psi(H')"] \arrow[urr, phantom, bend right=10, "\Uparrow \Psi(H)"] & & B \arrow[u, "y"'] \\
& & \\
& C_0 \arrow[uul, bend left, "F"] \arrow[uur, bend right, "G"'] \arrow[uu, phantom, "\Leftarrow"] &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
& & \widehat{B} \\
A \arrow[urr, bend left=50, "P^\dagger(yQ)"] \arrow[urr, "K^\dagger(yL)" description] \arrow[urr, phantom, bend left=25, "\Uparrow \Psi(H')"] \arrow[urr, phantom, bend right, "\Leftarrow"] & & B \arrow[u, "y"'] \\
& C_1 \arrow[ul, bend left, "K"] \arrow[ur, bend right, "L"'] & \\
& C_0 \arrow[u, "H"] \arrow[uul, bend left, "F"] \arrow[uur, bend right, "G"'] &
\end{tikzcd}
$$

$$
= \begin{tikzcd}
 & & \widehat{B} \\
A \arrow[urr, bend left, "P^\dagger(yQ)"] \arrow[urr, phantom, "\Leftarrow"'] & & B \arrow[u, "y"'] \\
 & C_2 \arrow[ul, "P"] \arrow[ur, "Q"'] & \\
 & C_1 \arrow[u, "H'"] \arrow[uul, "K"] \arrow[uur, "L"'] & \\
 & C_0 \arrow[u, "H"] \arrow[uuuul, bend left, "F"] \arrow[uuuur, bend right, "G"'] &
\end{tikzcd}
= \begin{tikzcd}
 & & \widehat{B} \\
A \arrow[urr, bend left, "P^\dagger(yQ)"] \arrow[urr, bend right, "F^\dagger(yG)"'] \arrow[urr, phantom, "\Uparrow \Psi(H' \circ H)"] & & B \arrow[u, "y"'] \\
 & \Leftarrow & \\
 & C_0 \arrow[uul, bend left, "F"] \arrow[uur, bend right, "G"'] &
\end{tikzcd}
$$

より普遍性から $\Psi(H' \circ H) = \Psi(H') \circ \Psi(H)$ が分かる． □

命題 8. $\Psi \dashv S\colon \mathrm{Span}(A, B) \to \mathbf{Prof}(A, B)$

証明. 随伴であることを示すため，自然な全単射

$$\varphi\colon \mathrm{Hom}_{\mathrm{Span}(A,B)}(\langle F, G\rangle, S(\Phi)) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{Prof}(A,B)}(\Psi(F, G), \Phi)$$

を定義する．

$(A \xleftarrow{F} C \xrightarrow{G} B) \in \mathrm{Span}(A, B)$，$\Phi \in \mathbf{Prof}(A, B)$ を取る．$H\colon \langle F, G\rangle \to S(\Phi)$ を射とする．即ち H は次を可換とする関手である．

$$
\begin{tikzcd}
A & & B \\
 & C^\Phi \arrow[ul, "F^\Psi"'] \arrow[ur, "G^\Psi"] & \\
 & C \arrow[u, "H"] \arrow[uul, bend left, "F"] \arrow[uur, bend right, "G"'] &
\end{tikzcd}
$$

$c \in C$ に対して $Hc = \langle Fc, Gc, \theta_c\rangle$ $(\theta_c \in \Phi(Gc, Fc))$ と書ける．ここで米田の補題により $\Phi(Gc, Fc) \cong \mathrm{Hom}(y(Gc), \Phi(-, Fc))$ である．故に H は自然変換 $\theta\colon y \circ G \Rightarrow \Phi \circ F$ を定める．

$$
\begin{tikzcd}
 & & \widehat{B} \\
A \arrow[urr, bend left, "\Phi"] \arrow[urr, "F^\dagger(yG)"'] \arrow[urr, phantom, bend left=15, "\theta \Uparrow"] & & B \arrow[u, "y"'] \\
 & C \arrow[ul, "F"] \arrow[ur, "G"'] \arrow[ul, phantom, "\Uparrow \eta"'] &
\end{tikzcd}
$$

故に Kan 拡張の普遍性により自然変換 $\varphi(H)\colon \Psi(F, G) \cong F^\dagger(yG) \Rightarrow \Phi$ が得られる．これは全単射 $\varphi\colon \mathrm{Hom}(\langle F, G\rangle, S(\Phi)) \to \mathrm{Hom}(\Psi(F, G), \Phi)$ を与える．

∵) 単射性は明らかだから全射性を示す．そのために $\tau\colon \Psi(F,G) \Rightarrow \Phi$ を自然変換とする．このとき $\theta := \tau_F \circ \eta$ と定義し (次の図式を参照),

$$\begin{tikzcd}
 & & & \widehat{B} \\
A \arrow[urrr, bend left, "\Phi"] \arrow[urrr, "F^\dagger(yG)"'] \arrow[urrr, phantom, bend left=15, "\Uparrow\tau"] & & B \arrow[ur, "y"'] & \\
 & C \arrow[ul, "F"] \arrow[ur, "G"'] \arrow[u, phantom, "\Uparrow\eta"] & &
\end{tikzcd}$$

H を

- 対象 $c \in C$ に対して $Hc := \langle Fc, Gc, \theta_c \rangle$
- 射 $f\colon c \to c'$ に対して $Hf := \langle Ff, Gf \rangle$

で定義する．もしこの H が関手 $C \to C^\Phi$ ならば，明らかに H は射 $\langle F,G\rangle \to S(\Phi)$ であり $\varphi(H) = \tau$ である．H が関手であることは容易に示すことができる．

これは $\langle F,G\rangle, \Phi$ について自然だから $\Psi \dashv S$ である． □

定義より cospan $A \xrightarrow{F} C \xleftarrow{G} B$ に対して $S \circ \Phi(F,G) = G{\downarrow}F$ である．また cospan の射 $H\colon (A \xrightarrow{F} C \xleftarrow{G} B) \to (A \xrightarrow{K} D \xleftarrow{L} B)$ に対して $S \circ \Phi(H)\colon G{\downarrow}F \to L{\downarrow}K$ は ${\downarrow}H$ に一致する．故に $S \circ \Phi = {\downarrow}$ である．そこで ${\uparrow} := T \circ \Psi$ と定義すれば

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Span}(A,B) \arrow[r, shift left, "\Psi"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathbf{Prof}(A,B) \arrow[l, shift left, "S"] \arrow[r, shift left, "T"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathrm{Cospan}(A,B) \arrow[l, shift left, "\Phi"]
\end{tikzcd}$$

より ${\uparrow} \dashv {\downarrow}$ となる．以上により

定理 9. 関手 ${\downarrow}\colon \mathrm{Cospan}(A,B) \to \mathrm{Span}(A,B)$ は左随伴を持つ． □

参考文献

[1] Jean Bénabou, Distributors at Work, `http://www.mathematik.tu-darmstadt.de/~streicher/`