自然変換の定義について

alg-d
http://alg-d.com/math/kan_extension/

2018 年 8 月 23 日

自然変換の定義に現れる可換図式は一体何なのか? と思ったことはないだろうか．関手の定義は，要は《演算》と交換するということだから，「圏の準同型」だと思えば当然の定義である．では「関手の準同型」であるべき自然変換の定義は何なのだろうか．何らかの《演算》と交換するという事なのか?

それを述べるために，一旦自然変換の定義は忘れて，次の定義をする．

定義. Cartesian 閉圏とは次の条件を満たす圏 C のことである．

(1) C は有限直積を持つ．
(2) 任意の $c \in C$ に対して $- \times c$ は右随伴 $(-)^c$ を持つ．即ち，$a, b \in C$ に関して自然な全単射
$$\mathrm{Hom}_C(a \times c, b) \cong \mathrm{Hom}_C(a, b^c)$$
が成り立つ．

例えば集合の圏 **Set** は Cartesian 閉圏である．

さて，圏の圏 **Cat** は Cartesian 閉圏だろうか? これは勿論 YES であって，圏 B, C に対して B^C を関手圏とすればよい．ところが我々は今自然変換の定義を忘れているので関手圏は定義できず，Cartesian 閉圏かどうかは分からない．そこで **Cat** が Cartesian 閉圏であるという仮定をしよう．すると圏 B, C に対して圏 B^C が (具体的にどんなものかは分からないが) 存在し，圏 A, B に関して自然な全単射
$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Cat}}(A \times C, B) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Cat}}(A, B^C) \tag{1}$$
が存在することになる．今 $\mathbf{1} = \{*\}$ を一点圏とすれば，圏 B^C の対象と関手 $\mathbf{1} \to B^C$ は

一対一に対応する．故に

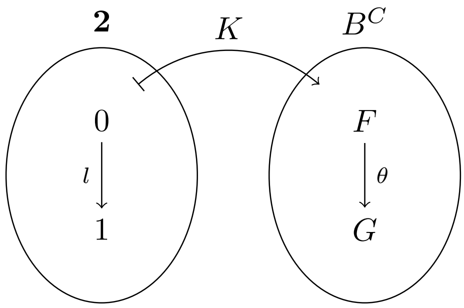
$$\mathrm{Ob}(B^C) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Cat}}(\mathbf{1}, B^C) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Cat}}(\mathbf{1} \times C, B) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Cat}}(C, B)$$

となる．つまり圏 B^C の対象とは関手 $C \to B$ のことだと思ってよい．

次に圏 $\mathbf{2} = \{0 < 1\}$ を考える．射 $0 \to 1$ を l と書くことにする．圏 B^C の射は関手 $\mathbf{2} \to B^C$ と一対一に対応する．従って

$$\mathrm{Mor}(B^C) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Cat}}(\mathbf{2}, B^C) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Cat}}(\mathbf{2} \times C, B)$$

となる．関手 $K\colon \mathbf{2} \to B^C$ に対応する射を $\theta \in \mathrm{Mor}(B^C)$ とするとき $K(l) = \theta$ であり，$K(0) = \mathrm{dom}(\theta)$，$K(1) = \mathrm{cod}(\theta)$ である．$F := K(0)$，$G = K(1)$ と置く．



$F, G\colon C \to B$ は関手であり，θ は F から G への射となる．$K\colon \mathbf{2} \to B^C$ に対応する関手を $T\colon \mathbf{2} \times C \to B$ とする．$0 \in \mathbf{2}$ に対応する関手を $0\colon \mathbf{1} \to \mathbf{2}$ と書けば，(1) が圏 A について自然だから

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{1} \arrow[d, "0"] & \mathrm{Hom}_{\mathbf{Cat}}(\mathbf{1}, B^C) \arrow[r, "\cong"] & \mathrm{Hom}_{\mathbf{Cat}}(\mathbf{1} \times C, B) \arrow[r, phantom, "\cong"] & \mathrm{Hom}_{\mathbf{Cat}}(C, B) \\
\mathbf{2} & \mathrm{Hom}_{\mathbf{Cat}}(\mathbf{2}, B^C) \arrow[r, "\cong"] \arrow[u, "-\circ 0"] & \mathrm{Hom}_{\mathbf{Cat}}(\mathbf{2} \times C, B) \arrow[u, "-\circ(0 \times \mathrm{id}_C)"'] &
\end{tikzcd}$$

は可換である．よって $K\colon \mathbf{2} \to B^C$ の行き先を見れば $K(0) = T(0, -)$ が分かる．同様にして $K(1) = T(1, -)$ も分かる．故に $a \in \mathrm{Ob}(C)$，$f \in \mathrm{Mor}(C)$ に対して

$$\begin{aligned}
Fa &= K(0)a = T(0, a) \\
Ga &= K(1)a = T(1, a) \\
Ff &= K(0)f = T(0, f) = T(\mathrm{id}_0, f) \\
Gf &= K(1)f = T(1, f) = T(\mathrm{id}_1, f)
\end{aligned}$$

となる．$\theta_a := T(l, \mathrm{id}_a)\colon Fa \to Ga$ と定義すれば，この $\{\theta_a\}_{a \in C}$ は自然変換 $F \Rightarrow G$ を定める．実際，$f\colon a \to b$ を C の射としたとき，圏 $\mathbf{2} \times C$ において

$$\langle \mathrm{id}_1, f\rangle \circ \langle l, \mathrm{id}_a\rangle = \langle l, f\rangle = \langle l, \mathrm{id}_b\rangle \circ \langle \mathrm{id}_0, f\rangle$$

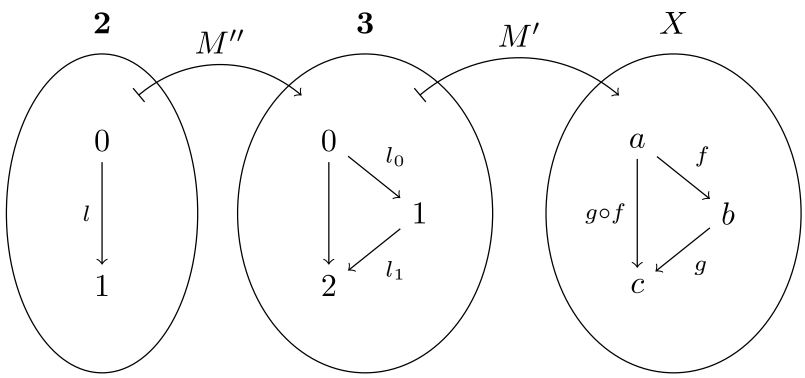
となるから $Gf \circ \theta_a = T(\mathrm{id}_1, f) \circ T(l, \mathrm{id}_a) = T(l, \mathrm{id}_b) \circ T(\mathrm{id}_0, f) = \theta_b \circ Ff$ が分かる．

つまり，自然変換の定義は Cartesian 閉圏という条件から出てくるのである．

ちなみに，自然変換の合成の定義もここから出てくる．一般に，圏 X の射 $f\colon a \to b$, $g\colon b \to c$ に対応する関手 $K, L\colon \mathbf{2} \to X$ を取ったとき，$g \circ f$ に対応する関手 $\mathbf{2} \to X$ は次のように与えられる．まず $\mathbf{3}$ を順序集合 $\{0 < 1 < 2\}$ を圏とみなしたものとして，l_0 を射 $0 \to 1$，l_1 を射 $1 \to 2$ とする．関手 $M'\colon \mathbf{3} \to X$ を

- $M'(0) := a$，$M'(1) := b$，$M'(2) := c$
- $M'(l_0) := f$，$M'(l_1) := g$

で定め，関手 $M''\colon \mathbf{2} \to \mathbf{3}$ を $M''(0) := 0$，$M''(1) := 2$ で定める．これらの合成 $M := M'M''\colon \mathbf{2} \to X$ に対応する X の射が $g \circ f\colon a \to c$ である．



さて $\theta, \sigma \in \mathrm{Mor}(B^C)$ を $\mathrm{cod}(\theta) = \mathrm{dom}(\sigma)$ となるように取る．θ, σ に対応する関手 $K, L\colon \mathbf{2} \to B^C$ を取り，上で述べたように関手 M, M' を定義する．M に対応する射が $\sigma \circ \theta \in \mathrm{Mor}(B^C)$ であるから，M に対応する関手 $T\colon \mathbf{2} \times C \to B$ を取れば $(\sigma \circ \theta)_a = T(l, \mathrm{id}_a)$ となる．次に $M'\colon \mathbf{3} \to B^C$ に対応する関手 $T'\colon \mathbf{3} \times C \to B$ を取ると $T(l, -) = T'(M''(l), -) = T'(l_1 \circ l_0, -)$ である．

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{2} \times C \arrow[d, "M'' \times \mathrm{id}_C"'] \arrow[dr, "T"] & \\
\mathbf{3} \times C \arrow[r, "T'"'] & B
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathbf{2} \arrow[d, "M''"'] \arrow[dr, "M"] & \\
\mathbf{3} \arrow[r, "M'"'] & B^C
\end{tikzcd}$$

従って $T'(l_1 \circ l_0, \mathrm{id}_a) = T(l, \mathrm{id}_a) = (\sigma \circ \theta)_a$ が分かる．一方

$$T'(l_1 \circ l_0, \mathrm{id}_a) = T'(l_1, \mathrm{id}_a) \circ T'(l_0, \mathrm{id}_a) = \sigma_a \circ \theta_a$$

となるから $(\sigma \circ \theta)_a = \sigma_a \circ \theta_a$ であることが分かる．