自然変換の定義について

alg-d
http://alg-d.com/math/kan_extension/

2016 年 8 月 28 日

自然変換の定義に現れる可換図式は一体何なのか? と思ったことはないだろうか．関手の定義は，要は《演算》と交換するということだから，「圏の準同型」だと思えば当然の定義である．では「関手の準同型」であるべき自然変換の定義は何なのだろうか．何らかの《演算》と交換するという事なのか?

それを述べるために，一旦自然変換の定義は忘れて，次の定義をする．

定義. Cartesian 閉圏とは次の条件を満たす圏 C のことである．

(1) C は有限直積を持つ．
(2) 任意の $c \in C$ に対して $- \times c$ は右随伴 $(-)^c$ を持つ．即ち，$a, b \in C$ に関して自然な全単射

$$\mathrm{Hom}_C(a \times c, b) \cong \mathrm{Hom}_C(a, b^c)$$

が成り立つ．

例えば集合の圏 **Set** は Cartesian 閉圏である．

さて，圏の圏 **Cat** は Cartesian 閉圏だろうか? これは勿論 YES であって，圏 B, C に対して B^C を関手圏とすればよい．ところが我々は今自然変換の定義を忘れているので，関手圏は定義できない．そこで **Cat** が Cartesian 閉圏であるという仮定をしよう．すると圏 B, C に対して圏 B^C が (具体的にどんなものかは分からないが) 存在し，圏 A, B に関して自然な全単射

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Cat}}(A \times C, B) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Cat}}(A, B^C) \tag{1}$$

が存在することになる．今 $\mathbf{1} = \{*\}$ を一点圏とすれば，圏 B^C の対象と関手 $\mathbf{1} \longrightarrow B^C$

は一対一に対応する．故に

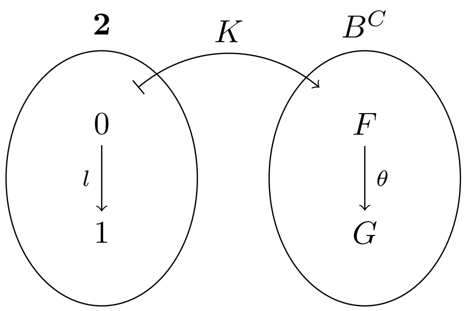
$$\mathrm{Ob}(B^C) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Cat}}(\mathbf{1}, B^C) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Cat}}(\mathbf{1} \times C, B) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Cat}}(C, B)$$

となる．つまり圏 B^C の対象とは関手 $C \longrightarrow B$ のことだと思ってよい．

次に圏 $\mathbf{2} = \{0 < 1\}$ を考える．射 $0 \longrightarrow 1$ を l と書くことにする．圏 B^C の射は関手 $\mathbf{2} \longrightarrow B^C$ と一対一に対応する．従って

$$\mathrm{Mor}(B^C) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Cat}}(\mathbf{2}, B^C) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Cat}}(\mathbf{2} \times C, B)$$

となる．関手 $K\colon \mathbf{2} \longrightarrow B^C$ に対応する射を $\theta \in \mathrm{Mor}(B^C)$ とするとき $K(l) = \theta$ であり，$K(0) = \mathrm{dom}(\theta)$，$K(1) = \mathrm{cod}(\theta)$ である．$F := K(0)$，$G = K(1)$ と置く．



$F, G\colon C \longrightarrow B$ は関手であり，θ は F から G への射となる．K に対応する関手を $T\colon \mathbf{2} \times C \longrightarrow B$ とする．$0 \in \mathbf{2}$ に対応する関手を $0\colon \mathbf{1} \longrightarrow \mathbf{2}$ と書けば，(1) が圏 A について自然だから

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{1} \arrow[d, "0"] & \mathrm{Hom}_{\mathbf{Cat}}(\mathbf{1}, B^C) \arrow[r, "\cong"] & \mathrm{Hom}_{\mathbf{Cat}}(\mathbf{1} \times C, B) \arrow[r, phantom, "\cong"] & \mathrm{Hom}_{\mathbf{Cat}}(C, B) \\
\mathbf{2} & \mathrm{Hom}_{\mathbf{Cat}}(\mathbf{2}, B^C) \arrow[r, "\cong"] \arrow[u, "-\circ 0"] & \mathrm{Hom}_{\mathbf{Cat}}(\mathbf{2} \times C, B) \arrow[u, "-\circ(0\times \mathrm{id}_C)"'] &
\end{tikzcd}$$

は可換である．よって $K\colon \mathbf{2} \longrightarrow B^C$ の行き先を見れば $K(0) = T(0, -)$ が分かる．同様にして $K(1) = T(1, -)$ も分かる．故に $a \in B$ に対して $Fa = T(0, a)$，$Ga = T(1, a)$ である．また $f\colon a \longrightarrow b$ に対して $Ff = T(0, f) = T(\mathrm{id}_0, f)$，$Gf = T(1, f) = T(\mathrm{id}_1, f)$ となる．$\theta_a := T(l, \mathrm{id}_a)\colon Fa \longrightarrow Ga$ と定義すれば，この $\{\theta_a\}_{a \in C}$ は自然変換 $F \Longrightarrow G$ を定める．実際，$f\colon a \longrightarrow b$ を C の射としたとき，圏 $\mathbf{2} \times C$ において

$$\langle \mathrm{id}_1, f\rangle \circ \langle l, \mathrm{id}_a\rangle = \langle l, f\rangle = \langle l, \mathrm{id}_b\rangle \circ \langle \mathrm{id}_0, f\rangle$$

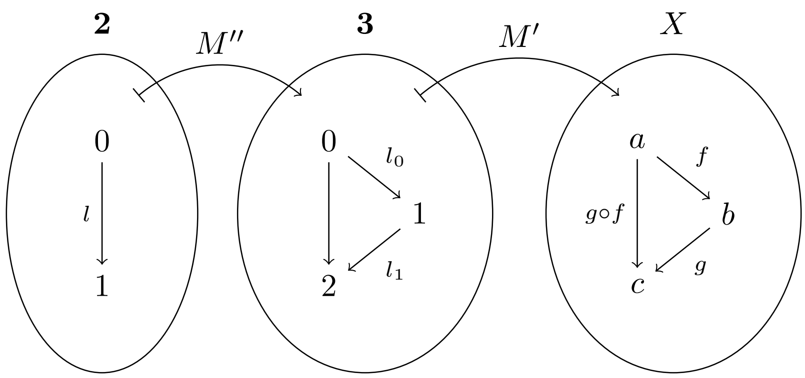
となるから $Gf \circ \theta_a = T(\mathrm{id}_1, f) \circ T(l, \mathrm{id}_a) = T(l, \mathrm{id}_b) \circ T(\mathrm{id}_0, f) = \theta_b \circ Ff$ が分かる．

つまり，自然変換の定義は Cartesian 閉圏という条件から出てくるのである．

ちなみに，自然変換の合成の定義もここから出てくる．一般に，圏 X の射 $f\colon a \longrightarrow b$, $g\colon b \longrightarrow c$ に対応する関手 $K, L\colon \mathbf{2} \longrightarrow X$ を取ったとき，$g \circ f$ に対応する関手 $\mathbf{2} \longrightarrow X$ は次のように与えられる．まず $\mathbf{3}$ を順序集合 $\{0 < 1 < 2\}$ を圏とみなしたものとして，l_0 を射 $0 \longrightarrow 1$，l_1 を射 $1 \longrightarrow 2$ とする．関手 $M'\colon \mathbf{3} \longrightarrow X$ を

- $M'(0) := a$，$M'(1) := b$，$M'(2) := c$
- $M'(l_0) := f$，$M'(l_1) := g$

で定め，関手 $M''\colon \mathbf{2} \longrightarrow \mathbf{3}$ を $M''(0) := 0$，$M''(1) := 2$ で定める．これらの合成 $M := M'M''\colon \mathbf{2} \longrightarrow X$ に対応する X の射が $g \circ f\colon a \longrightarrow c$ である．



さて $\theta, \sigma \in \mathrm{Mor}(B^C)$ を $\mathrm{cod}(\theta) = \mathrm{dom}(\sigma)$ となるように取る．θ, σ に対応する関手 $K, L\colon \mathbf{2} \longrightarrow B^C$ を取り，上で述べたように関手 M, M' を定義する．M に対応する射が $\sigma \circ \theta \in \mathrm{Mor}(B^C)$ であるから，M に対応する関手 $T\colon \mathbf{2} \times C \longrightarrow B$ を取れば $(\sigma \circ \theta)_a = T(l, \mathrm{id}_a)$ となる．次に $M'\colon \mathbf{3} \longrightarrow B^C$ に対応する関手 $T'\colon \mathbf{3} \times C \longrightarrow B$ を取ると $T(l, -) = T'(M''(l), -) = T'(l_1 \circ l_0, -)$ である．

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{2} \times C \arrow[dr, "T"] \arrow[d, "M'' \times \mathrm{id}_C"'] & \\
\mathbf{3} \times C \arrow[r, "T'"'] & B
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathbf{2} \arrow[dr, "M"] \arrow[d, "M''"'] & \\
\mathbf{3} \arrow[r, "M'"'] & B^C
\end{tikzcd}
$$

従って $T'(l_1 \circ l_0, \mathrm{id}_a) = T(l, \mathrm{id}_a) = (\sigma \circ \theta)_a$ が分かる．一方

$$T'(l_1 \circ l_0, \mathrm{id}_a) = T'(l_1, \mathrm{id}_a) \circ T'(l_0, \mathrm{id}_a) = \sigma_a \circ \theta_a$$

となるから $(\sigma \circ \theta)_a = \sigma_a \circ \theta_a$ であることが分かる．