# 自然変換・関手圏

alg-d
https://alg-d.com/math/kan_extension/

2025 年 1 月 13 日

## 目次



## 1 自然変換の計算

圏論で一番 (かどうかは分からないけど) 重要なのは自然変換である．圏論を学ぶには，自然変換の様々な「計算」を行う必要がある．ここではまず，その「計算」について説明する．

$C, D$ を圏，$F, G\colon C \to D$ を関手，$\theta\colon F \Rightarrow G$ を自然変換とする．このとき，図式では次のように表す．

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, bend left=40, "F"] \arrow[r, bend right=40, "G"'] \arrow[r, phantom, "\theta\Downarrow"] & D \end{tikzcd}$$

さて，更に $H\colon C \to D$ を関手として $\sigma\colon G \Rightarrow H$ も自然変換とする．図式で書くと次のような状況となる．

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, bend left=50, "F"] \arrow[r, "G" description] \arrow[r, bend right=50, "H"'] \arrow[r, phantom, shift left=3, "\theta\Downarrow"] \arrow[r, phantom, shift right=3, "\sigma\Downarrow"] & D \end{tikzcd}$$

このとき，この自然変換 $\theta, \sigma$ を合成して新しい自然変換 $\sigma \circ \theta \colon F \Rightarrow H$ を得ることができる．

$$\begin{tikzcd} C \arrow[rr, bend left, "F"] \arrow[rr, bend right, "H"'] \arrow[rr, phantom, "\sigma\circ\theta \Downarrow"] & & D \end{tikzcd}$$

そのためには $a \in C$ に対して $(\sigma \circ \theta)_a := \sigma_a \circ \theta_a$ と定義すればよい．この定義により $\sigma \circ \theta$ が自然変換となることを示そう．即ち $C$ の射 $f \colon a \to b$ に対して

$$\begin{tikzcd} Fa \arrow[r, "(\sigma\circ\theta)_a"] \arrow[d, "Ff"'] & Ha \arrow[d, "Hf"] \\ Fb \arrow[r, "(\sigma\circ\theta)_b"'] & Hb \end{tikzcd}$$

が可換となることを示す．定義より，この図式は次のように書き換えられる．

$$\begin{tikzcd} Fa \arrow[r, "\theta_a"] \arrow[d, "Ff"'] & Ga \arrow[r, "\sigma_a"] \arrow[d, "Gf"] & Ha \arrow[d, "Hf"] \\ Fb \arrow[r, "\theta_b"'] & Gb \arrow[r, "\sigma_b"'] & Hb \end{tikzcd}$$

$\theta, \sigma$ は自然変換だから，この小さい四角は可換となる．故に全体も可換となり，$\sigma \circ \theta$ が自然変換であることが分かった．

このσ∘θ をθ とσ の垂直合成と呼ぶ．

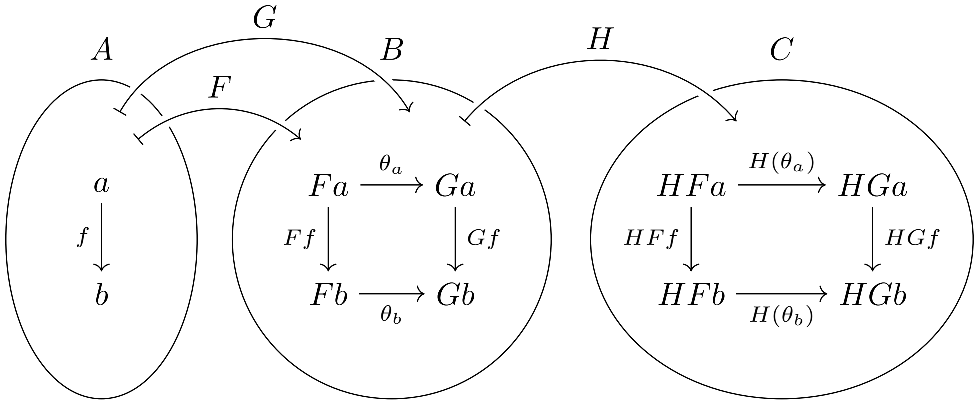
さて次に $A, B, C$ を圏，$F, G \colon A \to B$ と $H \colon B \to C$ を関手，$\theta \colon F \Rightarrow G$ を自然変換とする．即ち次の図式のような状況である．

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "G"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \theta"] & B \arrow[r, "H"] & C \end{tikzcd}$$

このとき $H$ と $\theta$ を使って新しい自然変換 $H\theta \colon HF \Rightarrow HG$ を定義することができる．

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[dr, "H"] \arrow[dd, phantom, "\Downarrow H\theta"] & \\ A \arrow[ur, "F"] \arrow[dr, "G"'] & & C \\ & B \arrow[ur, "H"'] & \end{tikzcd}$$

そのためには $a \in A$ に対して $(H\theta)_a := H(\theta_a)$ と定義すればよい．ここで $\theta_a\colon Fa \to Ga$ だから $(H\theta)_a\colon HFa \to HGa$ である．絵で描けば次のようになる．




この定義により $H\theta$ が自然変換となることを示すためには，$f\colon a \to b$ に対して

$$\begin{tikzcd} HFa \arrow[r, "(H\theta)_a"] \arrow[d, "HFf"'] & HGa \arrow[d, "HGf"] \\ HFb \arrow[r, "(H\theta)_b"'] & HGb \end{tikzcd}$$

が可換であることを示せばよいが，それは上の絵から明らかであろう．

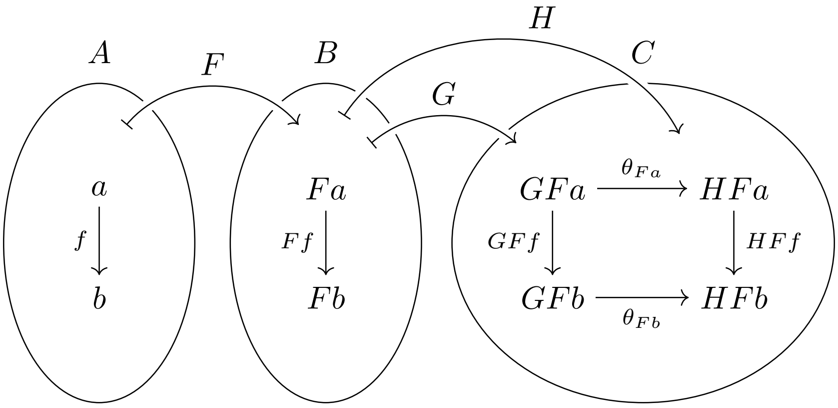
今度は $A, B, C$ を圏，$F\colon A \to B$ と $G, H\colon B \to C$ を関手，$\theta\colon G \Rightarrow H$ を自然変換とする．即ち次の図式の状況である．

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "F"] & B \arrow[r, bend left, "G"] \arrow[r, bend right, "H"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \theta"] & C \end{tikzcd}$$

このとき $F$ と $\theta$ を使って新しい自然変換 $\theta_F\colon GF \Rightarrow HF$ を定義することができる．

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[dr, "G"] \arrow[dd, phantom, "\Downarrow \theta_F"] & \\ A \arrow[ur, "F"] \arrow[dr, "F"'] & & C \\ & B \arrow[ur, "H"'] & \end{tikzcd}$$

これは $a \in A$ に対して $(\theta_F)_a := \theta_{Fa}$ と定義すればよい．絵で描けば次のようになる．




この定義により $\theta_F$ が自然変換になることを示すためには，$f\colon a \to b$ に対して

$$\begin{tikzcd}
GFa \arrow[r, "(\theta_F)_a"] \arrow[d, "GFf"'] & HFa \arrow[d, "HFf"] \\
GFb \arrow[r, "(\theta_F)_b"'] & HFb
\end{tikzcd}$$

が可換であることを示せばよいが，それは上の絵から明らかであろう．

これらを使うと，様々な自然変換を合成することができるようになる．

**例 1.** 次の $\theta\colon F_1F_0 \Rightarrow F_2$ と $\sigma\colon F_3 \Rightarrow F_4F_1$ を合成する．

$$\begin{tikzcd}
& C_1 \arrow[rr, "F_3"] \arrow[dr, "F_1"'] \arrow[d, phantom, "\theta\Downarrow"] & \arrow[d, phantom, "\Downarrow\sigma"] & C_3 \\
C_0 \arrow[ur, "F_0"] \arrow[rr, "F_2"'] & {} & C_2 \arrow[ur, "F_4"'] &
\end{tikzcd}$$

まず $\theta$ と $F_4$ から自然変換 $F_4\theta$ を得る．

$$\begin{tikzcd}
C_0 \arrow[r, bend left, "F_4F_1F_0"] \arrow[r, bend right, "F_4F_2"'] \arrow[r, phantom, "F_4\theta\Downarrow"] & C_3
\end{tikzcd}$$

次に $\sigma$ と $F_0$ から自然変換 $\sigma_{F_0}$ を得る.

$$\begin{tikzcd}
C_0 \arrow[rr, bend left=40, "F_3F_0"] \arrow[rr, bend right=40, "F_4F_1F_0"'] \arrow[rr, phantom, "\Downarrow\sigma_{F_0}"] & & C_3
\end{tikzcd}$$

これらを垂直合成して

$$\begin{tikzcd}
C_0 \arrow[rr, bend left=50, "F_3F_0"] \arrow[rr] \arrow[rr, bend right=50, "F_4F_2"'] \arrow[rr, phantom, shift left=3, "\Downarrow\sigma_{F_0}"] \arrow[rr, phantom, shift right=3, "F_4\theta\Downarrow"] & & C_3
\end{tikzcd}$$

自然変換 $F_4\theta \circ \sigma_{F_0} \colon F_3F_0 \Rightarrow F_4F_2$ が得られた. $\square$

**例 2.** 次の自然変換 $\theta$ と $\sigma$ を合成する.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, bend left, "F_0"] \arrow[r, bend right, "F_1"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\theta"] & B \arrow[r, bend left, "G_0"] \arrow[r, bend right, "G_1"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\sigma"] & C
\end{tikzcd}$$

まず $\theta$ と $G_0$ から自然変換 $G_0\theta$ を得る.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, bend left, "G_0F_0"] \arrow[rr, bend right, "G_0F_1"'] \arrow[rr, phantom, "G_0\theta\Downarrow"] & & C
\end{tikzcd}$$

次に $\sigma$ と $F_1$ から自然変換 $\sigma_{F_1}$ を得る.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, bend left, "G_0F_1"] \arrow[rr, bend right, "G_1F_1"'] \arrow[rr, phantom, "\Downarrow\sigma_{F_1}"] & & C
\end{tikzcd}$$

これにより垂直合成 $\sigma_{F_1} \circ G_0\theta \colon G_0F_0 \Rightarrow G_1F_1$ を考えることができる.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, bend left=50, "G_0F_0"] \arrow[rr] \arrow[rr, bend right=50, "G_1F_1"'] \arrow[rr, phantom, shift left=3, "G_0\theta\Downarrow"] \arrow[rr, phantom, shift right=3, "\Downarrow\sigma_{F_1}"] & & C
\end{tikzcd}$$

この合成を $\theta$ と $\sigma$ の水平合成と呼ぶ.

この水平合成について，今は $\sigma_{F_1} \circ G_0\theta$ を考えたが，$G_1\theta \circ \sigma_{F_0}$ を考えることもできる.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, bend left=40, "G_0F_0"] \arrow[rr, bend left=15] \arrow[rr, bend right=40, "G_1F_1"'] & & C
\end{tikzcd}$$

実はこの 2 つの合成は一致する．即ち $a \in A$ に対して $(\sigma_{F_1} \circ G_0\theta)_a = (G_1\theta \circ \sigma_{F_0})_a$ が成り立つ．これは $\sigma_{F_1a} \circ G_0\theta_a = G_1\theta_a \circ \sigma_{F_0a}$ を示せばよいが，それは射 $\theta_a \colon F_0a \to F_1a$ について $\sigma\colon G_0 \Rightarrow G_1$ の自然性から

$$\begin{tikzcd}
F_0a \arrow[d, "\theta_a"'] & G_0F_0a \arrow[r, "\sigma_{F_0a}"] \arrow[d, "G_0\theta_a"'] & G_1F_0a \arrow[d, "G_1\theta_a"] \\
F_1a & G_0F_1a \arrow[r, "\sigma_{F_1a}"'] & G_1F_1a
\end{tikzcd}$$

が可換となることにより従う. □

※ より一般的な形の自然変換の図式が与えられてそれが合成できるとき，その合成はどのような順番で行っても同じになることが証明できる．それについてはここでは扱わないが，より一般の場合について「2-category」の PDF で証明する.

# 2 関手圏

上で自然変換が合成できることを見た．合成できるという事は，関手を対象，自然変換を射とすれば圏になりそうである．実際，$C, D$ を圏とするとき $D^C$ を

- $\mathrm{Ob}(D^C)$ を「$C$ から $D$ への関手全体」とする.
- $F, G \in \mathrm{Ob}(D^C)$ に対して，自然変換 $F \Rightarrow G$ を $F$ から $G$ への射とする.
- 射の合成は垂直合成とする.
- $F \in \mathrm{Ob}(D^C)$ に対して，自然変換 $\mathrm{id}_F \colon F \Rightarrow F$ を $(\mathrm{id}_F)_a := \mathrm{id}_{Fa}$ で定める．この $\mathrm{id}_F$ を恒等変換と呼ぶ.

で定義すれば，$D^C$ は圏となる[*1].

[*1] $D^C$ を $[C, D]$ と書くこともある.

それを示すため，まずは結合律を示す．$E, F, G, H\colon C \to D$ を関手として，$\theta\colon E \Rightarrow F$, $\sigma\colon F \Rightarrow G$, $\tau\colon G \Rightarrow H$ を自然変換とする．$(\tau\circ\sigma)\circ\theta = \tau\circ(\sigma\circ\theta)$ を示す．即ち，$a \in C$ に対して $((\tau\circ\sigma)\circ\theta)_a = (\tau\circ(\sigma\circ\theta))_a$ を示せばよい．定義から $(\tau_a\circ\sigma_a)\circ\theta_a = \tau_a\circ(\sigma_a\circ\theta_a)$ を示せばよいが，これは $D$ が圏だから成り立つ．

後は $\theta\circ\mathrm{id}_E = \theta$ と $\mathrm{id}_F\circ\theta = \theta$ を示せばよい．それには $\theta_a\circ\mathrm{id}_{Ea} = \theta_a$，$\mathrm{id}_{Fa}\circ\theta_a = \theta_a$ を示せばよいが，これは $D$ が圏だから成り立つ．

以上により $D^C$ は圏となる．これを関手圏 (functor category) と呼ぶ．

※ この証明は厳密にいうと問題点があり，それは $D^C$ が局所小圏であることが証明されていない点である．当サイトの PDF では基本的には圏は局所小圏であるとしているので，$D^C$ が圏であると主張するためには局所小圏であることまで言うべきである．ところが，これは一般には局所小圏にはならないことが知られている (例えば $\mathbf{Set}^{\mathbf{Set}}$ は局所小圏ではないことが知られている)．ただ当サイトの PDF ではこのような集合論的なことはあまり気にしないので，$D^C$ が局所小圏かどうかもあまり気にせず，素朴に $D^C$ は圏になっていると思って扱うことにする．

Mor$(C)$ が集合になるような圏を小圏 (small category) というが，実は $C$ が小圏で $D$ が局所小圏であれば，$D^C$ は局所小圏になることが証明できる．なので $D^C$ が局所小圏でないと実際に困るような場面 (例えば $\mathrm{Hom}_{D^C}(F, G)$ を集合として扱うような場面) では $C$ が小圏 (で $D$ が局所小圏) であると考えてしまえばよい．(つまりこのような場面では，暗黙のうちに $C$ は小圏という仮定があると思えばよい．)

**例 3.** 圏 $C$ に対して $C^{\mathbb{0}} \cong \mathbb{1}$，$C^{\mathbb{1}} \cong C$ である． □

**例 4.** モノイド $M$ を圏とみなしたとき，関手 $F\colon M \to \mathbf{Set}$ は左 $M$-集合と同一視できた．また関手 $F, G\colon M \to \mathbf{Set}$ に対して，自然変換 $\theta\colon F \Rightarrow G$ は準同型写像と同一視できた．故に関手圏 $\mathbf{Set}^M$ は左 $M$-集合と準同型がなす圏となる． □

**例 5.** $C$ を圏，$X$ を離散圏 $\{a, b\}$ とすれば $C^X \cong C \times C$ が成り立つ． □

**例 6.** $C$ を圏とするとき，関手 $C^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ を $C$ 上の前層というのであった (「例: 位相空間上の層」の PDF を参照)．$P, Q\colon C^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ を前層とするとき，自然変換 $\theta\colon P \Rightarrow Q$ を前層 $P$ から前層 $Q$ への射という．よって $\mathbf{Set}^{C^{\mathrm{op}}}$ が $C$ 上の前層がなす圏となる． □

$D^C$ は圏だから，この圏において同型を考えることができる．

**命題 7.** 自然変換 $\theta$ が圏 $D^C$ における同型射 $\Longleftrightarrow$ $\theta$ が自然同型.

**証明**. ($\Longrightarrow$) 自然変換 $\theta\colon F \Rightarrow G$ が同型射であるとすると同型射の定義より，ある自然変換 $\sigma\colon G \Rightarrow F$ が存在して $\sigma \circ \theta = \mathrm{id}_F$，$\theta \circ \sigma = \mathrm{id}_G$ となる．従って，任意の $a \in C$ に対して $\sigma_a \circ \theta_a = \mathrm{id}_{Fa}$，$\theta_a \circ \sigma_a = \mathrm{id}_{Ga}$ が成り立つ．即ち，各 $\theta_a$ が同型射となるから $\theta$ は自然同型である．

($\Longleftarrow$) $\theta\colon F \Rightarrow G$ が自然同型であるとする．自然同型の定義より，各対象 $a \in C$ に対して $\theta_a\colon Fa \to Ga$ は圏 $D$ における同型射である．故に $D$ のある射 $\sigma_a\colon Ga \to Fa$ が存在して $\sigma_a \circ \theta_a = \mathrm{id}_{Fa}$，$\theta_a \circ \sigma_a = \mathrm{id}_{Ga}$ となる．このとき $\sigma = \{\sigma_a\}_{a \in C}$ は自然変換である．

∵) $C$ の任意の射 $f\colon a \to b$ に対して次が可換であることを示せばよい．

$$\begin{tikzcd} Ga \arrow[r, "\sigma_a"] \arrow[d, "Gf"'] & Fa \arrow[d, "Ff"] \\ Gb \arrow[r, "\sigma_b"'] & Fb \end{tikzcd}$$

そのために次の図式を考える．

$$\begin{tikzcd} Ga \arrow[r, "\sigma_a"] \arrow[d, "\mathrm{id}"'] & Fa \arrow[d, "\mathrm{id}"] \\ Ga \arrow[d, "Gf"'] & Fa \arrow[l, "\theta_a"'] \arrow[d, "Ff"] \\ Gb \arrow[d, "\mathrm{id}"'] & Fb \arrow[l, "\theta_b"] \arrow[d, "\mathrm{id}"] \\ Gb \arrow[r, "\sigma_b"'] & Fb \end{tikzcd}$$

上の四角と下の四角は $\sigma_a$，$\sigma_b$ の定義より可換である．真ん中の四角は $\theta$ が自然変換だから可換である．故に一番外側の大きな四角も可換であり $Ff \circ \sigma_a = \sigma_b \circ Gf$ が分かった．

垂直合成の定義から明らかに $\sigma \circ \theta = \mathrm{id}_F$，$\theta \circ \sigma = \mathrm{id}_G$ だから $\theta$ は同型射である． □

さて，関手圏と関連して定義される関手がいくつか存在するのでそれを説明しよう．

まず $F\colon C \to D$ を関手とする．このとき圏 $M$ に対して $F\colon \mathrm{Ob}(C^M) \to \mathrm{Ob}(D^M)$ が

$F(G) := FG$ で定義できる．

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "G"] & C \end{tikzcd} \quad \overset{F}{\longmapsto} \quad \begin{tikzcd} M \arrow[r, "G"] & C \arrow[r, "F"] & D \end{tikzcd}$$

実はこれは関手となる．それには $\theta\colon G \Rightarrow H\colon M \to C$ に対して $F(\theta) := F\theta$ で定義すればよい．

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, bend left, "G"] \arrow[r, bend right, "H"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\theta"] & C \end{tikzcd} \quad \overset{F}{\longmapsto} \quad \begin{tikzcd} & C \arrow[dr, "F"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow F\theta"] & \\ M \arrow[ur, "G"] \arrow[dr, "H"'] & {} & D \\ & C \arrow[ur, "F"'] & \end{tikzcd}$$

この $F$ が関手になることを示そう．

まず $\theta\colon G \Rightarrow H$，$\sigma\colon H \Rightarrow K$ を自然変換として $F(\sigma \circ \theta) = F(\sigma) \circ F(\theta)$ を示す．そのためには $a \in M$ に対して $(F(\sigma \circ \theta))_a = (F(\sigma) \circ F(\theta))_a$ を示せばよい．定義より

$$\begin{aligned} (F(\sigma \circ \theta))_a &= F((\sigma \circ \theta)_a) = F(\sigma_a \circ \theta_a) = F(\sigma_a) \circ F(\theta_a) \\ (F(\sigma) \circ F(\theta))_a &= (F(\sigma))_a \circ (F(\theta))_a = F(\sigma_a) \circ F(\theta_a) \end{aligned}$$

となるから成り立つ．

次に $F(\mathrm{id}_G) = \mathrm{id}_{FG}$ を示す．そのためには $a \in M$ に対して $(F(\mathrm{id}_G))_a = (\mathrm{id}_{FG})_a$ を示せばよい．定義より

$$\begin{aligned} (F(\mathrm{id}_G))_a &= F((\mathrm{id}_G)_a) = F(\mathrm{id}_{Ga}) = \mathrm{id}_{FGa} \\ (\mathrm{id}_{FG})_a &= \mathrm{id}_{FGa} \end{aligned}$$

となるから成り立つ．以上により $F\colon C^M \to D^M$ は関手である．

同じようにして，圏 $M$ に対して $F^{-1}\colon\ \mathrm{Ob}(M^D) \to \mathrm{Ob}(M^C)$ が $F^{-1}(G) := GF$ で定義できる．これも関手となる．それには $\theta\colon G \Rightarrow H\colon D \to M$ に対して $F^{-1}(\theta) := \theta_F$ で定義すればよい．

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, bend left, "G"] \arrow[r, bend right, "H"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\theta"] & M \end{tikzcd} \quad \overset{F^{-1}}{\longmapsto} \quad \begin{tikzcd} & D \arrow[dr, "G"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow \theta_F"] & \\ C \arrow[ur, "F"] \arrow[dr, "F"'] & {} & M \\ & D \arrow[ur, "H"'] & \end{tikzcd}$$

証明は先ほどと同じような感じなので省略する．

**例 8.** $C, D$ を圏とする．一意に定まる関手 $!\colon C \to \mathbb{1}$ によって関手 $!^{-1}\colon D^{\mathbb{1}} \to D^C$ が定まる．この関手と圏同型 $D^{\mathbb{1}} \cong D$ を組み合わせて得られる関手を $\Delta\colon D \to D^C$ と書き対角関手 (diagonal functor) と呼ぶ．定義より

- $a \in D$ に対して $\Delta a$ は以下で与えられる関手 $\Delta a\colon C \to D$ である．
  - ⋆ $c \in C$ に対して $\Delta a(c) = a$.
  - ⋆ $f \in \mathrm{Mor}(C)$ に対して $\Delta a(f) = \mathrm{id}_a$.
- $f\colon a \to b$ に対して $\Delta f$ は「$c \in C$ に対して $(\Delta f)_c = f$」で与えられる自然変換 $\Delta f\colon \Delta a \Rightarrow \Delta b$ である．

である． □

**例 9.** $C, D$ を圏として $a \in C$ を対象とする．関手 $F\colon \mathbb{1} \to C$ を $F(*) := a$ で定めれば関手 $F^{-1}\colon D^C \to D^{\mathbb{1}}$ が得られる．この関手と圏同型 $D^{\mathbb{1}} \cong D$ を組み合わせて得られる関手を $\mathrm{ev}_a\colon D^C \to D$ と書く．定義より

- $G \in D^C$ に対して $\mathrm{ev}_a(G) = Ga$ である．
- $\theta \in \mathrm{Mor}(D^C)$ に対して $\mathrm{ev}_a(\theta) = \theta_a$ である．

となる．

更に，$\mathrm{ev}_a$ の $a$ の部分も変数にすることができる．即ち，ev を

- $F \in D^C$，$a \in C$ に対して $\mathrm{ev}(F, a) := Fa$ とする．
- $\theta\colon F \Rightarrow G$ を自然変換，$f\colon a \to b$ を $C$ の射とするとき $\mathrm{ev}(\theta, f) := \theta_b \circ Ff$ とする．

により定めれば，関手 $\mathrm{ev}\colon D^C \times C \to D$ となる． □

**例 10.** $\mathbb{2} = \{0 \to 1\}$ を考える．圏 $C$ に対して関手 $\mathbb{2} \to C$ は，$C$ の射と 1 対 1 に対応する．つまり $\mathrm{Ob}(C^{\mathbb{2}}) = \mathrm{Mor}(C)$ とみなすことが出来る．$C^{\mathbb{2}}$ を圏 $C$ の arrow category と呼ぶ．$f\colon a \to b$，$g\colon c \to d$ を $C$ の射とするとき，$C^{\mathbb{2}}$ における $f$ から $g$ への射とは，射の組 $\langle h\colon a \to c,\ k\colon b \to d\rangle$ であって

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "h"] \arrow[d, "f"'] & c \arrow[d, "g"] \\ b \arrow[r, "k"'] & d \end{tikzcd}$$

を可換にするものである．

関手 $\mathbb{1} = \{*\} \to \mathbb{2}$ は 2 つあり，$F(*) := 0$ で定まる $F$ と $G(*) := 1$ で定まる $G$ の 2 つである．これらから 2 つの関手 $F^{-1}, G^{-1} \colon C^{\mathbb{2}} \to C$ が定まる．定義より，$F^{-1}$ は $f \in \mathrm{Ob}(C^{\mathbb{2}}) = \mathrm{Mor}(C)$ に対して $\mathrm{dom}(f)$ を対応させる関手であり，$G^{-1}$ は $f$ に対して $\mathrm{cod}(f)$ を対応させる関手である．また例 8 で定義した対角関手 $\Delta \colon C \to C^{\mathbb{2}}$ は $c \in C$ に対して $\mathrm{id}_c \in \mathrm{Mor}(C) = \mathrm{Ob}(C^{\mathbb{2}})$ を対応させる関手である． □

**例 11.** 集合 $X$ を離散圏とみなして関手圏 $\mathbb{2}^X$ を考える．この場合, 関手 $X \to \mathbb{2}$ とは写像 $X \to \{0, 1\}$ のことだから $\mathrm{Ob}(\mathbb{2}^X) = \mathcal{P}(X)$ ($X$ の冪集合) と見なすことができる．即ち写像 $F \colon \mathcal{P}(X) \ni A \mapsto \chi_A \in \mathrm{Ob}(\mathbb{2}^X)$ は全単射である (但し $\chi_A$ は $A \subset X$ の特性関数). $\mathcal{P}(X)$ は包含関係で順序集合，即ち圏となるが，このとき $F$ は圏同型 $F \colon \mathcal{P}(X) \to \mathbb{2}^X$ を与えることが容易に分かる．つまり圏として $\mathbb{2}^X = \mathcal{P}(X)$ と思ってよい．

$X, Y$ を集合として $f \colon X \to Y$ を写像とする．$X, Y$ を離散圏とみなしたとき $f \colon X \to Y$ は関手である．よって関手 $f^{-1} \colon \mathbb{2}^Y \to \mathbb{2}^X$ が得られる．上記の圏同型により $f^{-1}$ は関手 $\mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(X)$ と見なせるが，この関手は $A \subset Y$ の逆像 $f^{-1}(A) \subset X$ を対応させる関手である． □

$T \colon A \times B \to C$ を関手とする．このとき $a \in A$ に対して $F$ を

- 対象 $b \in B$ に対して $F(b) := T(a, b)$ とする．
- 射 $f \in B$ に対して $F(f) := T(\mathrm{id}_a, f)$ とする．

と定義すれば，明らかにこれは関手 $F \colon B \to C$ となる．この関手を $T(a, -)$ で表す．

※ この記法はハイフンの部分が「変数」になっていることを表す記法であり，このような記法はより一般の状況においても用いることにする．例えば

- $b \in B$ に対して関手 $T(-, b) \colon A \to C$ も同様に定義する．
- $G \colon D \to B$ を関手としたとき対応 $d \mapsto T(a, Gd)$ によって得られる関手を $T(a, G-)$ と表す．これは正確に書けば，合成 $D \xrightarrow{G} B \xrightarrow{T(a,-)} C$ で定義される関手のことである．

「変数」の部分への代入は対象だけではなく射についても行う．例えば射 $g \colon b \to b'$ に $T(a, -)$ を適用して得られる射を $T(a, g)$ と書く．即ち $T(a, g) = T(\mathrm{id}_a, g)$ である．

すると対応 $a \mapsto T(a, -)$ は関数 $\widetilde{T} \colon \mathrm{Ob}(A) \to \mathrm{Ob}(C^B)$ を定める．実はこれも関手になる．それを示すため，$A$ の射 $f \colon a \to a'$ に対して自然変換 $\widetilde{T}(f) \colon \widetilde{T}(a) \Rightarrow \widetilde{T}(a')$ を定義しよう．そのために $b \in B$ に対して $\widetilde{T}(f)_b := T(f, \mathrm{id}_b)$ と定義する．この $\widetilde{T}(f)_b$ は $b \in B$

について自然である.

$\because$) $B$ の射 $g\colon b \to b'$ に対して

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{T}(a)(b) \arrow[r, "\widetilde{T}(f)_b"] \arrow[d, "\widetilde{T}(a)(g)"'] & \widetilde{T}(a')(b) \arrow[d, "\widetilde{T}(a')(g)"] \\
\widetilde{T}(a)(b') \arrow[r, "\widetilde{T}(f)_{b'}"'] & \widetilde{T}(a')(b')
\end{tikzcd}$$

が可換であることを示せばよい. 定義により, この図式は

$$\begin{tikzcd}
T(a,b) \arrow[r, "T(f,\mathrm{id}_b)"] \arrow[d, "T(\mathrm{id}_a,g)"'] & T(a',b) \arrow[d, "T(\mathrm{id}_{a'},g)"] \\
T(a,b') \arrow[r, "T(f,\mathrm{id}_{b'})"'] & T(a',b')
\end{tikzcd}$$

となるが, これは $T(\mathrm{id}_{a'},g) \circ T(f,\mathrm{id}_b) = T(f,g) = T(f,\mathrm{id}_{b'}) \circ T(\mathrm{id}_a,g)$ となり可換である.

この $\widetilde{T}(f)$ は明らかに $\widetilde{T}(g \circ f) = \widetilde{T}(g) \circ \widetilde{T}(f)$, $\widetilde{T}(\mathrm{id}) = \mathrm{id}$ を満たすから $\widetilde{T}\colon A \to C^B$ は関手である.

逆に, 関手 $\widetilde{T}\colon A \to C^B$ が与えられたとき $T\colon A \times B \to C$ を $T(a,b) := \widetilde{T}(a)(b)$ で定義することができる. こうして $T\colon A \times B \to C$ と $\widetilde{T}\colon A \to C^B$ は 1 対 1 に対応することが分かる.