

# モデル圏

alg-d

<http://alg-d.com/math/>

2014年11月3日

## 目次

1	定義と導入	1
2	基本的性質	4
3	ホモトピー圏の構成	17
4	導来関手	22

## 1 定義と導入

通常の圏では同型な対象は同じものとみなすが、数学では同型でないものでも同じとみなすことがある。例えば位相空間の圏 **Top** においてはホモトピー同値や弱ホモトピー同値という概念がある。更にこの **Top** は cofibration, fibration と呼ばれる種類の射も持っている。このような、「weak equivalence」「cofibration」「fibration」と呼ばれる射を持つ圏のことをモデル圏という。

定義. 可換図式

$$\begin{array}{ccc} a & \xrightarrow{f} & x \\ i \downarrow & & \downarrow p \\ b & \xrightarrow{g} & y \end{array}$$

のリフトとは, 射  $h: b \rightarrow x$  であって  $f = h \circ i, g = p \circ h$  を満たすものをいう. 即ち次の図式が可換となるような  $h$  である.

$$\begin{array}{ccc} a & \xrightarrow{f} & x \\ i \downarrow & \nearrow h & \downarrow p \\ b & \xrightarrow{g} & y \end{array}$$

定義. 圏  $C$  がモデル圏である

$\iff C$  は完備かつ余完備であり,  $W, \text{Cof}, \text{Fib} \subset \text{Mor}(C)$  が与えられ, 以下の条件を満たす.

- (1) (2-out-of-3)  $C$  の射  $f, g$  が  $\text{cod}(f) = \text{dom}(g)$  を満たすとする.  $f, g, f \circ g$  のうち少なくとも2つが  $W$  に属するならば, 残りの1つも  $W$  に属する.
- (2) (Retracts)  $g$  が  $f$  の retract で,  $f \in W$  ( $f \in \text{Cof}, f \in \text{Fib}$ ) ならば  $g \in W$  ( $g \in \text{Cof}, g \in \text{Fib}$ ) である.
- (3) (Lifting) 可換図式

$$\begin{array}{ccc} a & \xrightarrow{f} & x \\ i \downarrow & & \downarrow p \\ b & \xrightarrow{g} & y \end{array}$$

は

- (a)  $i \in \text{Cof}, p \in \text{Fib} \cap W$  ならばリフトを持つ.
  - (b)  $i \in \text{Cof} \cap W, p \in \text{Fib}$  ならばリフトを持つ.
- (4) (Factorization) 任意の射  $f: x \rightarrow y$  は
- (a)  $f = p \circ i, i \in \text{Cof}, p \in \text{Fib} \cap W$  と分解できる.
  - (b)  $f = p \circ i, i \in \text{Cof} \cap W, p \in \text{Fib}$  と分解できる.

$W, \text{Cof}, \text{Fib}$  に属する射をそれぞれ weak equivalence, cofibration, fibration と呼び, 記号で  $a \xrightarrow{\sim} b, a \hookrightarrow b, a \twoheadrightarrow b$  と書く. また  $\text{Cof} \cap W, \text{Fib} \cap W$  に属する射をそれぞれ trivial cofibration, trivial fibration と呼ぶ.

定義.  $f: a \rightarrow b$  が  $g: x \rightarrow y$  に対して LLP (Left Lifting Property) を持つ (もしくは  $g$  が  $f$  に対して RLP (Right Lifting Property) を持つ)

$\iff$  任意の可換図式

$$\begin{array}{ccc} a & \longrightarrow & x \\ f \downarrow & & \downarrow g \\ b & \longrightarrow & y \end{array}$$

がリフトを持つ.

例. 位相空間の圏  $\mathbf{Top}$  を考える. 任意の CW 複体  $A$  に対する包含写像  $A \times \{0\} \rightarrow A \times [0, 1]$  に対して RLP を持つ射を Serre fibration という.

- $f \in \mathbf{Top}$  が weak equivalence  $\iff f$  が weak homotopy equivalence
- $f \in \mathbf{Top}$  が fibration  $\iff f$  が Serre fibration
- $f \in \mathbf{Top}$  が cofibration  $\iff f$  が trivial fibration に対して LLP を持つ

と定めると,  $\mathbf{Top}$  はモデル圏となる. □

例.  $R$  を単位的環とする. 左  $R$  加群の鎖複体の圏  $\mathbf{Ch}_{\geq 0}(R)$  において

- $f$  が weak equivalence  $\iff f$  がホモロジー群の同型を誘導する
- $f: M \rightarrow N$  が cofibration  $\iff$  任意の  $n \geq 0$  に対して  $f_n: M_n \rightarrow N_n$  が単射であり,  $\text{coker } f_n$  が射影的
- $f: M \rightarrow N$  が fibration  $\iff$  任意の  $n > 0$  に対して  $f_n: M_n \rightarrow N_n$  が全射

と定めると,  $\mathbf{Ch}_{\geq 0}(R)$  はモデル圏となる. □

モデル圏では weak equivalence を同型射と扱いたいのであるが, 実はモデル圏  $C$  の「weak equivalence を同型射とした」圏  $\text{Ho}(C)$  を構成することができる (これをホモトピー圏という). 先の  $\mathbf{Ch}_{\geq 0}(R)$  の例では, このホモトピー圏が導来圏になっている. また  $C, D$  をモデル圏,  $F: C \rightarrow D$  を関手とするとホモトピー圏に対して自然に関手  $P: C \rightarrow \text{Ho}(C)$ ,  $Q: D \rightarrow \text{Ho}(D)$  が得られるから, 次の図式を得る.

$$\begin{array}{ccccc} & & \text{Ho}(C) & & \\ & & \uparrow P & & \\ C & \xrightarrow{F} & D & \xrightarrow{Q} & \text{Ho}(D) \end{array}$$

よってもし Kan 拡張が存在すれば, 自然に関手  $\text{Ho}(C) \rightarrow \text{Ho}(D)$  を得ることができるのである. この関手を  $F$  の導来関手という.

この PDF の目的はホモトピー圏  $\text{Ho}(C)$  を構成し、(ある程度の条件の下で) 導来関手が存在することを示すことである。

## 2 基本的性質

命題 1. モデル圏  $C$  において

- (1)  $f$  が cofibraton  $\iff f$  は trivial fibration に対して LLP を持つ.
- (2)  $f$  が trivial cofibraton  $\iff f$  は fibration に対して LLP を持つ.
- (3)  $f$  が fibraton  $\iff f$  は trivial cofibration に対して RLP を持つ.
- (4)  $f$  が trivial fibraton  $\iff f$  は cofibration に対して RLP を持つ.

証明. 同様なため、1 のみ示す.

$\implies$  はモデル圏の定義である.  $\impliedby$  を示すため、 $f: a \rightarrow b$  が trivial fibration に対して LLP を持つとする.  $f = a \xrightarrow{i} x \xrightarrow{p} b$  と分解すれば、次の実線の可換図式を得る.

$$\begin{array}{ccc}
 a & \xrightarrow{i} & x \\
 f \downarrow & \nearrow g & \downarrow p \\
 b & \xrightarrow{\text{id}} & b
 \end{array}$$

故に点線の射  $g: b \rightarrow x$  が存在する. これにより次の可換図式を得る.

$$\begin{array}{ccccc}
 a & \xrightarrow{\text{id}_a} & a & \xrightarrow{\text{id}_a} & a \\
 f \downarrow & & \downarrow i & & \downarrow f \\
 b & \xrightarrow{g} & x & \xrightarrow{p} & b \\
 & \searrow & & \nearrow & \\
 & & & & \text{id}_b
 \end{array}$$

即ち  $f$  は cofibration  $i$  のレトラクトであり、従って cofibration である. □

命題 2.  $\text{Cof}(\text{Cof} \cap W)$  は射の合成について閉じている. 即ち、 $f: x \rightarrow y$ 、 $g: y \rightarrow z$  が cofibration (trivial cofibration) ならば  $g \circ f$  も cofibration (trivial cofibration) である.

証明. 命題 1 を使う.  $f: x \hookrightarrow y$ 、 $g: y \hookrightarrow z$  を cofibration とする.  $p: a \xrightarrow{\sim} b$  を任意の



よって pushout の普遍性から射  $h: a \coprod_x y \rightarrow b$  が存在する. 従って命題 1 から  $\tilde{f}$  は cofibration である. trivial cofibration についても同様である.  $\square$

**命題 4.** 同型射は weak equivalence かつ cofibration かつ fibration である.

**証明.** これも命題 1 から容易に分かる.  $\square$

**定義.** (1)  $x \in C$  が cofibrant object  $\iff$  一意な射  $0 \rightarrow x$  が cofibration

(2)  $x \in C$  が fibrant object  $\iff$  一意な射  $x \rightarrow 1$  が fibration

**定義.**  $x \in C$  とする. 射  $(\text{id}, \text{id}): x \coprod x \rightarrow x$  が得られる. この射が  $(\text{id}, \text{id}) = (x \coprod x \xrightarrow{i} a \xrightarrow{\sim} x)$  と分解するとき, この  $a$  を  $x$  の cylinder object と呼ぶ. 更に

(1)  $i$  が cofibration のとき good cylinder object と呼ぶ.

(2)  $i$  が cofibration で  $p$  が fibration のとき very good cylinder object と呼ぶ.

モデル圏の定義から, 各  $x \in C$  の very good cylinder object が少なくとも一つ存在する. (一意とは限らない.)  $x$  の cylinder object を  $x \wedge I$  で表す.

**定義.**  $f, g: x \rightarrow y$  が left homotopic (記号  $f \stackrel{l}{\sim} g$  で表す)

$\iff$  ある cylinder object  $x \coprod x \xrightarrow{i} x \wedge I \xrightarrow{\sim} x$  と射  $h: x \wedge I \rightarrow y$  が存在して, 次が可換となる.

$$\begin{array}{ccc} & x \wedge I & \\ & \uparrow i & \searrow h \\ x \coprod x & \xrightarrow{(f,g)} & y \end{array}$$

このときの射  $h$  を  $f$  から  $g$  への left homotopy という. 更に  $x \wedge I$  が (very) good cylinder object のとき,  $h$  を (very) good left homotopy という.

$x \coprod x \xrightarrow{i} x \wedge I \xrightarrow{\sim} x$  を  $x$  の cylinder object とする.  $x \xrightarrow{\nu_0} x \coprod x \xleftarrow{\nu_1} x$  を coproduct の標準射として  $i_0 := i \circ \nu_0, i_1 := i \circ \nu_1: x \rightarrow x \wedge I$  とおく.

$$\begin{array}{ccc} x & \xrightarrow{\nu_0} & x \coprod x & \xleftarrow{\nu_1} & x \\ & \searrow i_0 & \downarrow i & \swarrow i_1 & \\ & & x \wedge I & & \end{array}$$

**命題 5.**  $x \in C$  が cofibrant で  $x \coprod x \xrightarrow{i} x \wedge I \xrightarrow{\sim} x$  を  $x$  の good cylinder object とする

とき,  $i_0, i_1: x \rightarrow x \wedge I$  は trivial cofibration である.

証明. 定義から次の図式が可換である.

$$\begin{array}{ccc}
 x & & \\
 \nu_0 \downarrow & \searrow^{i_0} & \text{id} \nearrow \\
 x \amalg x & \xrightarrow{i} & x \wedge I \xrightarrow{\sim} x
 \end{array}$$

(id, id)

$\text{id}: x \rightarrow x$  は weak equivalence だから,  $i_0$  も weak equivalence である. (この証明から分かるように,  $i_0 \in W$  は  $x$  が cofibrant でなくても成り立つ.)

次に,  $x$  が cofibrant だから,  $0 \rightarrow x$  が cofibration である. 次の図式を考える.

$$\begin{array}{ccc}
 0 & \hookrightarrow & x \\
 \downarrow & & \nu_0 \downarrow \\
 x & \xrightarrow{\nu_1} & x \amalg x \\
 & \searrow^{i_1} & \downarrow i \\
 & & x \wedge I
 \end{array}$$

左上の四角は pushout である. よって  $\nu_0$  は cofibration であり, 合成  $i_0 = i \circ \nu_0$  も cofibration である. よって  $i_0$  が trivial cofibration であることが分かった.  $i_1$  についても同様である. □

**命題 6.**  $f \stackrel{l}{\sim} g: x \rightarrow y$  のとき,  $f \in W \iff g \in W$  である.

証明.  $h: x \wedge I \rightarrow y$  を  $f$  から  $g$  への left homotopy とする. 定義から次の図式が可換である. (命題 5 で示したように  $i_0 \in W$  となる.)

$$\begin{array}{ccc}
 0 & \longrightarrow & x \\
 \downarrow & & \nu_0 \downarrow \\
 x & \xrightarrow{\nu_1} & x \amalg x \\
 & \searrow^{i_1} & \downarrow i \\
 & & x \wedge I
 \end{array}$$

(f, g)

2-out-of-3 より  $f \in W \iff h \in W$  が分かる. 同様にして  $g \in W \iff h \in W$  である. よって  $f \in W \iff g \in W$  となる. □

命題 7.  $f \stackrel{l}{\sim} g: x \rightarrow y$  のとき,  $f$  から  $g$  への good left homotopy が存在する. もし  $y$  が fibrant ならば, very good left homotopy が存在する.

証明.  $f \stackrel{l}{\sim} g$  だから, cylinder object  $x \amalg x \xrightarrow{i} x \wedge I \xrightarrow[p]{\sim} x$  と  $h: x \wedge I \rightarrow y$  が存在して, 次が可換となる.

$$\begin{array}{ccc} x \wedge I & & \\ \uparrow i & \searrow h & \\ x \amalg x & \xrightarrow{(f,g)} & y \end{array}$$

$(x \amalg x \xrightarrow{i} x \wedge I) = (x \amalg x \xrightarrow{i'} a \xrightarrow[p']{\sim} x \wedge I)$  と分解する.

$$\begin{array}{ccc} & x & \\ & \wr \uparrow p & \\ & x \wedge I & \\ \uparrow i & \wr \uparrow p' & \searrow h \\ & a & \\ & \downarrow i' & \\ & x \amalg x & \xrightarrow{(f,g)} y \end{array}$$

$x \amalg x \xrightarrow{i'} a \xrightarrow[p \circ p']{\sim} x$  は  $x$  の good cylinder object である. 故に  $h \circ p': a \rightarrow y$  が  $f$  から  $g$  への good left homotopy となる.

そこで,  $h: x \wedge I \rightarrow y$  を改めて good left homotopy とする. 今度は  $(x \wedge I \xrightarrow[p]{\sim} x) = (x \wedge I \xrightarrow{i} a \xrightarrow[p']{\sim} x)$  と分解する. 2-out-of-3 により  $i'$  は trivial cofibration である. これに 終対象 1 を加えて, 次の実線の図式を得る.

$$\begin{array}{ccc} & x & \\ & \wr \uparrow p' & \\ & a & \\ \uparrow p & \wr \uparrow i' & \searrow h' \\ & x \wedge I & \\ & \downarrow i & \\ & x \amalg x & \xrightarrow{(f,g)} y \end{array}$$

$x \amalg x \xrightarrow{i' \circ i} a \xrightarrow[p']{\sim} x$  は very good cylinder object である. 今  $y$  が fibrant だから, 一意な射



!:  $y \rightarrow 1$  は fibration である.  $i'$  が trivial cofibration だから, モデル圏の条件より点線のリフト  $h': a \rightarrow y$  が存在する. この  $h'$  が very good left homotopy である.  $\square$

命題 8.  $x$  が cofibrant なら, left homotopic は  $\text{Hom}(x, y)$  の同値関係となる.

証明.  $f: x \rightarrow y$  とする.  $x \amalg x \xrightarrow[\text{id}]{(\text{id}, \text{id})} x \xrightarrow{\sim} x$  は cylinder object で, 図式

$$\begin{array}{ccc} & x & \\ & \swarrow f & \\ (\text{id}, \text{id}) \uparrow & & x \\ x \amalg x & \xrightarrow{(f, f)} & x \end{array}$$

は可換である. 故に  $f \stackrel{l}{\sim} f$  である.

次に  $f \stackrel{l}{\sim} g: x \rightarrow y$  とする. cylinder object  $x \amalg x \xrightarrow{i} x \wedge I \xrightarrow[p]{\sim} x$  と  $h: x \wedge I \rightarrow y$  が存在して, 次が可換となる.

$$\begin{array}{ccc} & x \wedge I & \\ & \swarrow h & \\ i \uparrow & & y \\ x \amalg x & \xrightarrow{(f, g)} & y \end{array}$$

$x \xrightarrow{\nu_0} x \amalg x \xleftarrow{\nu_1} x$  を標準射とすれば, 普遍性から次の射  $s$  を得る.

$$\begin{array}{ccc} x & & \\ \nu_1 \downarrow & \searrow \nu_0 & \\ x \amalg x & \overset{s}{\dashrightarrow} & x \amalg x \\ \nu_0 \uparrow & \nearrow \nu_1 & \\ x & & \end{array}$$

以上を組み合わせて次の図式を得る.

$$\begin{array}{ccccc} & & x \wedge I & & \\ & & \uparrow i & & \searrow h \\ x \amalg x & \xrightarrow{s} & x \amalg x & \xrightarrow{(f, g)} & y \\ \nu_0 \uparrow & \nearrow \nu_1 & & & \uparrow \\ x & & & & \end{array}$$

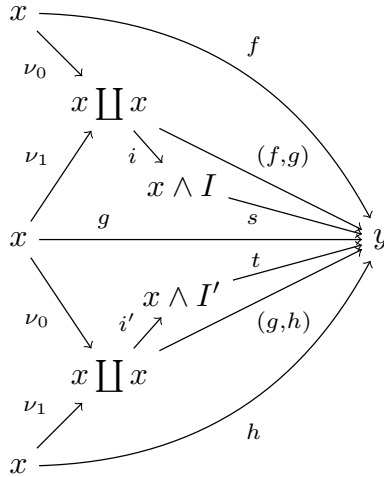
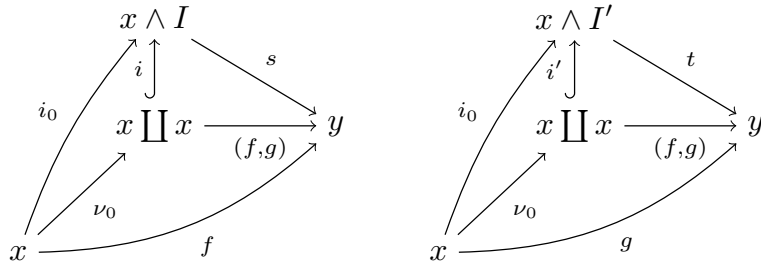
$\xrightarrow{g}$

普遍性により  $(f, g) \circ s = (g, f)$  である. また  $x \amalg x \xrightarrow{i \circ s} x \wedge I \xrightarrow[p]{\sim} x$  は cylinder object で

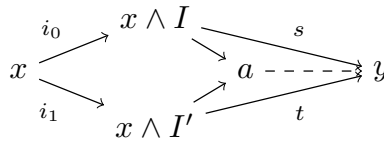
ある．よって次の図式が得られて  $g \stackrel{l}{\sim} f$  が分かる．

$$\begin{array}{ccc} x \wedge I & & \\ i_0 s \uparrow & \searrow h & \\ x \amalg x & \xrightarrow{(g,f)} & y \end{array}$$

最後に  $f \stackrel{l}{\sim} g$  かつ  $g \stackrel{l}{\sim} h$  とする．命題 7 により  $f$  から  $g$  への good left homotopy  $s: x \wedge I \rightarrow y$ ,  $g$  から  $h$  への good left homotopy  $t: x \wedge I' \rightarrow y$  が取れる．



$x \wedge I \leftarrow x \rightarrow x \wedge I'$  の pushout を  $a$  とする．



この  $a$  は  $x$  の cylinder object である．

∴) 定義から，次の図式が可換である．

$$\begin{array}{ccccc}
 & & x \amalg x & \xrightarrow{i} & x \wedge I \\
 \nu_0 \nearrow & & & \searrow & \searrow \sim \\
 x & \xrightarrow{\text{id}} & & & x \\
 \nu_1 \searrow & & & \nearrow & \nearrow \sim \\
 & & x \amalg x & \xrightarrow{i'} & x \wedge I'
 \end{array}$$

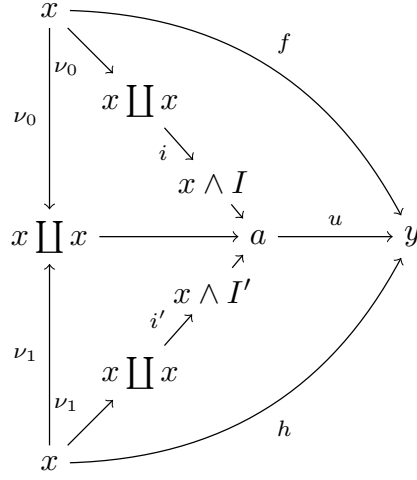
(id,id) is written above the horizontal arrow from the left  $x$  to the right  $x$ .

よって pushout の普遍性により射  $a \rightarrow x$  が得られる．

$$\begin{array}{ccccc}
 & & x \amalg x & \xrightarrow{i} & x \wedge I \\
 \nu_0 \nearrow & \searrow \sim & & \searrow & \searrow \sim \\
 x & \xrightarrow{i_0} & & & a \dashrightarrow x \\
 \nu_1 \searrow & \searrow \sim & & \nearrow & \nearrow \sim \\
 & & x \amalg x & \xrightarrow{i'} & x \wedge I'
 \end{array}$$

trivial cofibration の pushout は trivial cofibration であることと，2-out-of-3 により  $a \rightarrow x$  が weak equivalence だと分かる．よって  $a$  は  $x$  の cylinder object である．

この  $a$  と先の図式を組み合わせて次の図式が得られる．



この図式から  $u: a \rightarrow y$  が  $f$  から  $h$  への left homotopy であることが分かる。  $\square$

**定義.**  $C$  をモデル圏,  $x, y \in C$  を対象とする.  $\text{Hom}_C(x, y)$  上の同値関係  $R$  を,  $\sim$  で生成されるものとして,  $\pi^l(x, y) := \text{Hom}_C(x, y)/R$  と定める.

今示した様に,  $x$  が cofibrant ならば  $\pi^l(x, y) = \text{Hom}_C(x, y)/\sim$  である.

**命題 9.**  $s: y \rightarrow z$  とする. このとき  $f \sim^l g: x \rightarrow y$  ならば  $s \circ f \sim^l s \circ g: x \rightarrow z$  である. (よって写像  $s_*: \pi^l(x, y) \ni [f] \mapsto [s \circ f] \in \pi^l(x, z)$  は well-defined である.) 更に  $x$  が cofibrant で  $s: y \xrightarrow{\sim} z$  が trivial fibration であるとする. このとき  $s_*$  は全単射である.

**証明.**  $f \sim^l g: x \rightarrow y$  とする.  $f$  から  $g$  への left homotopy  $h: x \wedge I \rightarrow y$  を取る.

$$\begin{array}{ccccc}
 & x \wedge I & & & \\
 & \uparrow & \searrow h & & \\
 & x \amalg x & \xrightarrow{(f,g)} & y & \xrightarrow{s} z
 \end{array}$$

このとき  $s \circ h$  は  $s \circ f$  から  $s \circ g$  への left homotopy である. よって  $s \circ f \sim^l s \circ g: x \rightarrow z$  である. 従って  $[f] = [g]$  とすると  $f \sim^l f_1 \sim^l \dots \sim^l f_n \sim^l g$  とできるが, このとき  $s \circ f \sim^l s \circ f_1 \sim^l \dots \sim^l s \circ f_n \sim^l s \circ g$  となり  $[s \circ f] = [s \circ g]$  である. よって  $s_*$  は well-defined である.

次に  $x$  が cofibrant で  $s: y \xrightarrow{\sim} z$  が trivial fibration であるとする.  $s_*$  の全射性を示すため,  $f: x \rightarrow z$  を任意に取る. 次の可換図式を考えれば, リフト  $g: x \rightarrow y$  が得ら

れる.

$$\begin{array}{ccc}
 0 & \longrightarrow & y \\
 \downarrow & \nearrow g & \downarrow \wr s \\
 x & \xrightarrow{f} & z
 \end{array}$$

このとき  $s_*([g]) = [s \circ g] = [f]$  である.

$s_*$  の単射性を示すため,  $f, g: x \rightarrow y$  が  $s \circ f \stackrel{l}{\sim} s \circ g$  を満たすとする. 命題 7 により good cylinder object  $x \amalg_i x \hookrightarrow x \wedge I \xrightarrow{\sim} x$  と  $h: x \wedge I \rightarrow z$  が存在して次が可換となる.

$$\begin{array}{ccc}
 x \wedge I & & \\
 \uparrow i & \searrow h & \\
 x \amalg x & \xrightarrow{(sf, sg)} & z
 \end{array}$$

次の可換図式を考えれば, リフト  $g: x \wedge I \rightarrow y$  が得られる.

$$\begin{array}{ccc}
 x \amalg x & \xrightarrow{(f, g)} & y \\
 \downarrow i & \nearrow g & \downarrow \wr s \\
 x \wedge I & \xrightarrow{h} & z
 \end{array}$$

この  $g$  が  $f$  から  $g$  への left homotopy である. □

**命題 10.**  $z$  が fibrant で  $f: x \rightarrow y$  とする. このとき  $s \stackrel{l}{\sim} t: y \rightarrow z$  ならば  $s \circ f \stackrel{l}{\sim} t \circ f: x \rightarrow z$  である. (よって写像  $f^*: \pi^l(y, z) \ni [s] \mapsto [s \circ f] \in \pi^l(x, z)$  は well-defined である.)

**証明.**  $f^*$  の well-defined 性を示す.  $s \stackrel{l}{\sim} t: y \rightarrow z$  とする. 命題 7 により, very good cylinder object  $y \amalg_i y \hookrightarrow y \wedge I \xrightarrow{\sim}_p y$  と  $h: y \wedge I \rightarrow z$  が存在して次が可換となる.

$$\begin{array}{ccc}
 y \wedge I & & \\
 \uparrow i & \searrow h & \\
 y \amalg y & \xrightarrow{(s, t)} & z
 \end{array}$$

$x$  の good cylinder object  $x \amalg_j x \hookrightarrow x \wedge I \xrightarrow{\sim}_q x$  を取る. 次の図式の実線部分は可換で

ある.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & & & z \\
 & & & & \uparrow h \\
 & & & & (s,t) \nearrow \\
 x \amalg x & \xrightarrow{(f,f)} & y \amalg y & \xrightarrow{i} & y \wedge I \\
 \downarrow j & & \searrow k & & \downarrow p \\
 x \wedge I & \xrightarrow{\sim} & x & \xrightarrow{f} & y \\
 & \downarrow q & & & \downarrow \wr
 \end{array}$$

よってリフト  $k: x \wedge I \rightarrow y \wedge I$  が存在する. このとき  $h \circ k$  が  $s \circ f$  から  $t \circ f$  への left homotopy である.  $\square$

**命題 11.** fibrant な  $z \in C$  に対して  $\pi^l(y, z) \times \pi^l(x, y) \ni ([s], [f]) \mapsto [s \circ f] \in \pi^l(x, z)$  は well-defined である.

**証明.**  $f \stackrel{l}{\sim} g: x \rightarrow y, s \stackrel{l}{\sim} t: y \rightarrow z$  に対して  $[s \circ f] = [t \circ g]$  を示せばよい.  $z$  が fibrant だから命題 10 により  $s \circ f \stackrel{l}{\sim} t \circ f$  である. また命題 9 により  $t \circ f \stackrel{l}{\sim} t \circ g$  である. よって  $[s \circ f] = [t \circ g]$  である.  $\square$

双対的に path object, right homotopic を定義する.

**定義.**  $x \in C$  とする. 射  $(\text{id}, \text{id}): x \rightarrow x \times x$  が得られる. この射が  $(\text{id}, \text{id}) = (x \xrightarrow{i} a \xrightarrow{p} x \times x)$  と分解するとき, この  $a$  を  $x$  の path object と呼ぶ. 更に

- (1)  $p$  が fibration のとき good path object と呼ぶ.
- (2)  $i$  が cofibration で  $p$  が fibration のとき very good path object と呼ぶ.

$x$  の path object を  $x^I$  で表す.

**定義.**  $f, g: x \rightarrow y$  が right homotopic (記号  $f \stackrel{r}{\sim} g$  で表す)

$\iff$  ある path object  $y \xrightarrow{\sim} y^I \xrightarrow[p]{y} \times y$  と射  $h: x \rightarrow y^I$  が存在して, 次が可換となる.

$$\begin{array}{ccc}
 & & y^I \\
 & & \downarrow p \\
 x & \xrightarrow{(f,g)} & y \times y \\
 & \nearrow h &
 \end{array}$$

勿論, path object に対しても cylinder object と同様な命題が成り立つ (省略).



$y$  が fibrant だから、次の図式を考えれば  $g: a \rightarrow x$  で  $g \circ i = \text{id}_x$  となるものを得る。

$$\begin{array}{ccc} x & \xrightarrow{\text{id}} & x \\ i \downarrow \wr & \nearrow g & \downarrow \\ a & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

次に命題 9 の双対により  $i^*: \pi(a, a) \rightarrow \pi(x, a)$  は全単射である。  $i^*([i \circ g]) = [i \circ g \circ i] = [i]$ ,  $i^*([\text{id}_x]) = [i]$  だから  $[i \circ g] = [\text{id}_x]$  となり、即ち  $i \circ g \sim \text{id}_x$  である。故に  $g$  が  $i$  の homotopy inverse であることが分かった。同様にして  $p$  の homotopy inverse  $h$  が存在することも分かる。このとき  $g \circ h$  が  $f = p \circ i$  の homotopy inverse である。

( $\Leftarrow$ )  $g \circ f \sim \text{id}_x$ ,  $f \circ g \sim \text{id}_y$  とする。  $f = (x \xrightarrow[\tilde{i}]{\sim} a \xrightarrow[p]{\rightarrow} y)$  と分解する。  $p$  が weak equivalence であることを示せばよい。  $h: y \wedge I \rightarrow y$  を  $f \circ g$  から  $\text{id}_y$  への good left homotopy とすると次の可換図式を得る。

$$\begin{array}{ccccc} y & \xrightarrow{g} & x & \xrightarrow[\sim]{i} & a \\ \nu_0 \downarrow & & \searrow & & \downarrow p \\ y \amalg y & & & & y \\ \downarrow & \searrow f & & & \downarrow \\ (f \circ g, \text{id}_y) & & & & \\ y \wedge I & \xrightarrow{h} & & & y \end{array}$$

左の縦の射の合成  $i_0$  は命題 5 により trivial cofibration である。故にリフト  $k: y \wedge I \rightarrow a$  が存在する。

$$\begin{array}{ccccc} y & \xrightarrow{g} & x & \xrightarrow[\sim]{i} & a \\ i_0 \downarrow \wr & & \searrow & & \downarrow p \\ y \wedge I & \xrightarrow{h} & & & y \\ & & \nearrow k & & \end{array}$$



$s := k \circ i_1$  とおけば  $p \circ s = h \circ i_1 = \text{id}_y$  である.

$$\begin{array}{ccc}
 y & \overset{s}{\dashrightarrow} & a \\
 \downarrow i_1 & \searrow \text{id} & \downarrow p \\
 & & y \\
 & \nearrow k & \\
 y \wedge I & \xrightarrow{h} & y
 \end{array}$$

ここで,  $i: x \xrightarrow{\sim} a$  は weak equivalence だから, homotopy inverse  $r: a \rightarrow x$  を持つ.  $f = p \circ i$  だから  $f \circ r = p \circ i \circ r \sim p \circ \text{id}_a = p$  となる. また  $k, s$  の取り方から  $k$  は  $i \circ g$  から  $s$  への left homotopy であり,

$$s \circ p \sim i \circ g \circ p \sim i \circ g \circ f \circ r \sim i \circ \text{id}_x \circ r = i \circ r \sim \text{id}_a$$

となる.  $\text{id}$  は weak equivalence だから, 命題 6 より  $s \circ p$  も weak equivalence である. また次の図式が可換となる.

$$\begin{array}{ccccc}
 a & \xrightarrow{\text{id}_a} & a & \xrightarrow{\text{id}_a} & a \\
 p \downarrow & & s \circ p \downarrow \wr & & p \downarrow \\
 y & \xrightarrow{s} & a & \xrightarrow{p} & y
 \end{array}$$

即ち  $p$  は weak equivalence  $s \circ p$  の retract である. 故にモデル圏の定義から  $p$  も weak equivalence である. □

### 3 ホモトピー圏の構成

定義. モデル圏  $C$  に対して, 充満部分圏  $C_c, C_f, C_{cf} \subset C$  を以下により定める.

- (1)  $\text{Ob}(C_c) := \{x \in C \mid x \text{ は cofibrant object}\}.$
- (2)  $\text{Ob}(C_f) := \{x \in C \mid x \text{ は fibrant object}\}.$
- (3)  $\text{Ob}(C_{cf}) := \{x \in C \mid x \text{ は cofibrant object かつ fibrant object}\}.$

更に, 圏  $\pi C_c, \pi C_f, \pi C_{cf}$  を以下により定める. (命題 11 に注意する.)

- (1)  $\text{Ob}(\pi C_c) := \text{Ob}(C_c)$  で,  $\text{Hom}_{\pi C_c}(x, y) := \pi^r(x, y)$
- (2)  $\text{Ob}(\pi C_f) := \text{Ob}(C_f)$  で,  $\text{Hom}_{\pi C_f}(x, y) := \pi^l(x, y)$

(3)  $\text{Ob}(\pi C_{cf}) := \text{Ob}(C_{cf})$  で,  $\text{Hom}_{\pi C_{cf}}(x, y) := \pi(x, y)$

各  $x \in C$  に対して分解  $(0 \rightarrow x) = (0 \hookrightarrow Q(x) \xrightarrow[p_x]{\sim} x)$  を考える. 但し, cofibrant な  $x$  に対しては  $Q(x) := x$ ,  $p_x := \text{id}_x$  と取っておく.

命題 14. この  $Q$  は関手  $Q: C \rightarrow \pi C_c$  を定める.

証明.  $f: x \rightarrow y$  を取る.  $f, p_x, p_y$  と 0 から次の実線の可換図式を得る.

$$\begin{array}{ccc} 0 & \hookrightarrow & Q(y) \\ \downarrow & \nearrow \tilde{f} & \downarrow p_y \\ Q(x) & \xrightarrow[p_x]{\sim} & x \xrightarrow{f} y \end{array}$$

$Q(x)$  が cofibrant, 即ち  $0 \rightarrow Q(x)$  が cofibration で,  $p_y$  が trivial fibration だから, リフト  $\tilde{f}: Q(x) \rightarrow Q(y)$  が存在する. このような  $\tilde{f}: Q(x) \rightarrow Q(y)$  は right homotopic を除いて一意である.

∴) 今  $Q(x)$  が cofibrant だから, 命題 12 より left homotopic を除いて一意であることを示せばよい. それは命題 9 から従う.

よって  $Q(f) := [\tilde{f}] \in \pi^r(x, y) = \text{Hom}_{\pi C_c}(x, y)$  と定義することができる. 後はこの  $Q$  が関手  $C \rightarrow \pi C_c$  となることを示せばよい.

$Q(\text{id}_x) = [\text{id}_{Q(x)}]$  は明らかである.

$C$  の射  $f: x \rightarrow y$ ,  $g: y \rightarrow z$  を取る. 次の可換図式を考える.

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \hookrightarrow & 0 & \hookrightarrow & Q(y) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow p_z \\ 0 & \hookrightarrow & Q(y) & \xrightarrow[p_y]{\sim} & y \xrightarrow{g} z \\ \downarrow & \nearrow \tilde{f} & \downarrow p_y & & \downarrow \text{id}_z \\ Q(x) & \xrightarrow[p_x]{\sim} & x \xrightarrow{f} y & \xrightarrow{g} & z \end{array}$$

図式から明らかに,  $Q(g \circ f) = Q(g) \circ Q(f)$  である. □

この  $Q$  を cofibrant replacement functor と呼ぶ. また  $p_x: Q(x) \rightarrow x$  を  $x$  の cofibrant resolution という.

例.  $\mathbf{Ch}_{\geq 0}(R)$  の場合,  $X = \{X_n\} \in \mathbf{Ch}(R)$  が cofibrant であるとは各  $X_n$  が射影的であることである. よって  $R$ -加群  $M$  を鎖複体

$$\cdots \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow M$$

と同一視して cofibrant resolution  $0 \hookrightarrow Q(M) \xrightarrow{\sim} M$  を取れば,  $Q(M)$  は  $M$  の射影分解である.

命題 15.  $Q: C \rightarrow \pi C_c$  を  $C_f$  に制限することで, 関手  $Q: \pi C_f \rightarrow \pi C_{cf}$  が得られる.

証明.  $x \in C$  を fibrant object とする.  $0 \hookrightarrow Q(x) \xrightarrow{\sim} x \rightarrow 1$  だから,  $Q(x)$  は fibrant かつ cofibrant である. よって関手  $Q|_{C_f}: C_f \rightarrow \pi C_{cf}$  が得られる.

後は,  $x, y \in C$  が fibrant で,  $f \stackrel{l}{\sim} g: x \rightarrow y$  のとき  $Q(f) = Q(g)$  を示せばよい.

$$\begin{array}{ccc} 0 & \hookrightarrow & Q(y) \\ \downarrow & \nearrow \tilde{f}, \tilde{g} & \downarrow p_y \\ Q(x) & \xrightarrow[p_x]{\sim} & x \xrightarrow[f, g]{} y \end{array}$$

今  $y$  が fibrant だから, 命題 10 により  $f \circ p_x \stackrel{l}{\sim} g \circ p_x$  である. 即ち  $[f \circ p_x] = [g \circ p_x]$  である. よって命題 9 により  $Q(f) = Q(g)$  が分かる.  $\square$

双対的に, fibrant replacement functor  $R: C \rightarrow \pi C_f$  が  $x \xrightarrow{i_x} R(x) \rightarrow 1$  により定まる. これにより関手  $R: \pi C_c \rightarrow \pi C_{cf}$  が定義される. よって関手  $RQ: C \rightarrow \pi C_{cf}$  が得られる.

定義. モデル圏  $C$  のホモトピー圏  $\mathbf{Ho}(C)$  を以下のように定める.

- $\mathbf{Ob}(\mathbf{Ho}(C)) := \mathbf{Ob}(C)$ .
- $\mathbf{Hom}_{\mathbf{Ho}(C)}(x, y) := \mathbf{Hom}_{\pi C_{cf}}(RQx, RQy)$ .

また関手  $P: C \rightarrow \mathbf{Ho}(C)$  を以下のように定める.

- 対象  $x \in C$  に対して  $P(x) := x$ .
- $f \in \mathbf{Hom}_C(x, y)$  に対して  $P(f) := RQ(f)$ .

定義.  $C$  を圏,  $W \subset \mathbf{Mor}(C)$  とする.  $C$  の  $W$  による局所化とは組  $\langle W^{-1}C, P \rangle$  であって以下を満たすものである.

- (1)  $W^{-1}C$  は圏,  $P: C \rightarrow W^{-1}C$  は関手であり,  $f \in W$  に対して  $P(f)$  は同型射である.
- (2) 関手  $S: C \rightarrow D$  が「 $f \in W$  に対して  $S(f)$  は同型射」を満たすならば, 関手  $F: W^{-1}C \rightarrow D$  が一意に存在して  $F \circ P = S$  となる.

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{P} & W^{-1}C \\ & \searrow S & \downarrow F \\ & & D \end{array}$$

**定理 16.** モデル圏  $C$  のホモトピー圏  $\text{Ho}(C)$  は, 圏  $C$  の  $W$  による局所化  $W^{-1}C$  と一致する.

**証明.** まず  $f: x \xrightarrow{\sim} y$  を  $C$  の weak equivalence とするとき  $P(f)$  が同型であることを示す. 次の可換図式のリフト  $f'$  を取る.

$$\begin{array}{ccc} 0 & \xrightarrow{\quad} & Qy \\ \downarrow & \nearrow f' & \downarrow p_y \\ Qx & \xrightarrow[p_x]{\sim} x \xrightarrow{f} y & \downarrow \wr \end{array}$$

このとき  $Q(f) = [f]$  である. また 2-out-of-3 により  $f'$  は weak equivalence である. さらに次の可換図式のリフト  $f''$  を取る.

$$\begin{array}{ccc} Qx & \xrightarrow[f']{\sim} Qy & \xrightarrow{i_{Qy}} RQy \\ \downarrow i_{Qx} \wr & \nearrow f'' & \downarrow \\ RQx & \xrightarrow{\quad} & 1 \end{array}$$

このとき  $RQ(f) = [f'']$  である. また 2-out-of-3 により  $f''$  は weak equivalence である.  $RQx, RQy$  は cofibrant かつ fibrant だから, 命題 13 により  $f''$  は homotopy inverse を持つ. 即ち  $P(f) = RQ(f) = [f'']$  は逆射を持つから同型射である.

次に  $D$  を圏,  $S: C \rightarrow D$  を関手で「 $f \in W$  に対して  $S(f)$  は同型射」を満たすとする.

※ 証明に入る前に次のことを確認しておく.  $f: x \rightarrow y$  を  $C$  の射とする. 上のよう

に  $f'': RQx \rightarrow RQy$  を取る.

$$\begin{array}{ccc}
 RQx & \xrightarrow{f''} & RQy \\
 i_{Qx} \uparrow \wr & & i_{Qy} \uparrow \wr \\
 Qx & \xrightarrow{f'} & Qy \\
 p_x \downarrow \wr & & p_y \downarrow \wr \\
 x & \xrightarrow{f} & y
 \end{array}$$

「 $f \in W$  に対して  $Sf$  は同型射」だから  $Sf = Sp_y \circ Si_{Qy}^{-1} \circ Sf'' \circ Si_{Qx} \circ Sp_x^{-1}$  が成り立つ.

$k \in \text{Hom}_{\text{Ho}(C)}(x, y) = \text{Hom}_{\pi C_{cf}}(RQx, RQy)$  とする. ある  $C$  の射  $h: RQx \rightarrow RQy$  を使って  $k = [h]$  と書ける. この  $h$  を使って  $Fk := Sp_y \circ Si_{Qy}^{-1} \circ Sh \circ Si_{Qx} \circ Sp_x^{-1}$  と定める. これは well-defined である.

$\therefore$ )  $f \stackrel{l}{\sim} g: a \rightarrow b$  に対して  $Sf = Sg$  であることを示せばよい. good cylinder object  $x \amalg_i x \hookrightarrow x \wedge I \xrightarrow[p]{\sim} y$  と  $h: x \wedge I \rightarrow y$  が存在して次が可換となる.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & a & & \\
 & & \uparrow p \wr & & \\
 & & a \wedge I & & \\
 & & \uparrow i \wr & & \\
 a & \xrightarrow{i_0} & a \amalg a & \xrightarrow{(f,g)} & b \\
 \uparrow \text{id}_a & & \uparrow \nu_0 & & \\
 a & \xrightarrow{\nu_0} & a \amalg a & \xrightarrow{(f,g)} & b \\
 & & \downarrow f & & \\
 & & a & & 
 \end{array}$$

$p \circ i_0 = \text{id}_a = p \circ i_1$  だから  $Sp \circ Si_0 = Sp \circ Si_1$  となる. 今  $p$  が weak equivalence だから  $Sp$  は同型射となり  $Si_0 = Si_1$  が分かる. 故に  $Sf = Sh \circ Si_0 = Sh \circ Si_1 = Sg$  である.

対象  $x \in \text{Ho}(C)$  に対して  $F(x) := S(x)$  とすれば関手  $F: \text{Ho}(C) \rightarrow D$  が定まる. このとき  $f \in \text{Hom}_C(x, y)$  に対して上のように  $f'': RQx \rightarrow RQy$  を取れば

$$FP(f) = F[f''] = Sp_y \circ Si_{Qy}^{-1} \circ Sf'' \circ Si_{Qx} \circ Sp_x^{-1} = S(f)$$

となるから  $FP = S$  である.

後はこのような  $F$  の一意性を示せばよい.  $k = P(f)$  と書ける射  $k \in \text{Hom}_{\text{Ho}(C)}(x, y)$  に対しては, 上から分かるように  $F(P(f)) = S(f)$  でなければならない. 従って, 任意の射  $k \in \text{Hom}_{\text{Ho}(C)}(x, y)$  が  $P(f)$  ( $f \in \text{Mor}(C)$ ) の合成で書けることを示せばよい.

$x, y \in C$  に対して  $RQx, RQy$  は cofibrant かつ fibrant だから,  $f: RQx \rightarrow RQy$  に対して上のように  $f''$  を取れば  $f'' = f$  となる.

$$\begin{array}{ccc}
 RQRQx & \xrightarrow{f} & RQRQy \\
 \text{id}=i_{RQRQx} \uparrow & & \uparrow i_{RQRQy}=\text{id} \\
 QRQx & \xrightarrow{f} & QRQy \\
 \text{id}=p_{RQx} \downarrow & & \downarrow p_{RQy}=\text{id} \\
 RQx & \xrightarrow{f} & RQy
 \end{array}$$

故に  $P: \text{Hom}_C(RQx, RQy) \rightarrow \text{Hom}_{\text{Ho}(C)}(RQx, RQy)$  は全射であることが分かる. 一方  $x \xleftarrow[p_x]{\sim} Qx \xrightarrow[i_{Qx}]{\sim} RQx$ ,  $y \xleftarrow[p_y]{\sim} Qy \xrightarrow[i_{Qy}]{\sim} RQy$  から  $\text{Ho}(C)$  の同型  $P(i_{Qx}) \circ P(p_x)^{-1}$ ,  $P(p_y) \circ P(i_{Qy})^{-1}$  が得られる. これにより全単射  $\text{Hom}_{\text{Ho}(C)}(RQx, RQy) \rightarrow \text{Hom}_{\text{Ho}(C)}(x, y)$  が  $f \mapsto P(p_y) \circ P(i_{Qy})^{-1} \circ f \circ P(i_{Qx}) \circ P(p_x)^{-1}$  により得られる. 以上により全射  $\text{Hom}_C(RQx, RQy) \rightarrow \text{Hom}_{\text{Ho}(C)}(x, y)$  が得られる. 即ち, 任意の  $k \in \text{Hom}_{\text{Ho}(C)}(x, y)$  はある  $f \in \text{Hom}_C(RQx, RQy)$  により  $k = P(p_y) \circ P(i_{Qy})^{-1} \circ P(f) \circ P(i_{Qx}) \circ P(p_x)^{-1}$  と表される.  $\square$

## 4 導来関手

定義.  $C$  をモデル圏,  $D$  を圏,  $F: C \rightarrow D$  を関手とする. 局所化  $P: C \rightarrow \text{Ho}(C)$  に沿った  $F$  の右 Kan 拡張  $\mathbf{L}F := P^\dagger F$  を  $F$  の左導来関手という. 局所化  $P: C \rightarrow \text{Ho}(C)$  に沿った  $F$  の左 Kan 拡張  $\mathbf{R}F := P^\dagger F$  を  $F$  の右導来関手という.

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Ho}(C) & & \text{Ho}(C) \\
 P \uparrow & \searrow \mathbf{L}F & P \uparrow & \searrow \mathbf{R}F \\
 C & \xrightarrow{F} & D & C & \xrightarrow{F} & D \\
 & \Downarrow & & & \Uparrow &
 \end{array}$$

補題 17.  $F: C_c \rightarrow D$  を関手とし,  $f \in C_c$  が trivial cofibration ならば  $Ff$  は同型射

であるとする. このとき  $C_c$  の射  $f, g: x \rightarrow y$  が right homotopic ならば  $Ff = Fg$  である.

証明.  $y$  の very good path object  $y \xrightarrow[\tilde{i}]{i} y^I \xrightarrow[p]{p} y \times y$  と right homotopy  $h: x \rightarrow y^I$  が取れる.  $\nu_0, \nu_1: y \times y \rightarrow y$  を標準射影とすれば次の可換図式を得る.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & y^I & \xleftarrow{\tilde{i}} & y & \longleftarrow & 0 \\
 & \nearrow h & \downarrow p & & \swarrow (\text{id}, \text{id}) & & \\
 x & \xrightarrow{(f, g)} & y \times y & & & & \\
 & \searrow f & \downarrow \nu_0 & & & & \\
 & & y & & & & 
 \end{array}$$

$y$  が cofibrant だから  $y^I$  も cofibrant となる. よって仮定から  $F\tilde{i}$  は同型射である.  $(\text{id}, \text{id}) = p \circ \tilde{i}$  だから  $F(\text{id}, \text{id}) = Fp \circ F\tilde{i}$  となり, よって  $Fp = F(\text{id}, \text{id}) \circ F\tilde{i}^{-1}$  である.  $f = \nu_0 \circ p \circ h$ ,  $g = \nu_1 \circ p \circ h$  だから

$$\begin{aligned}
 Ff &= F\nu_0 \circ Fp \circ Fh \\
 &= F\nu_0 \circ F(\text{id}, \text{id}) \circ F\tilde{i}^{-1} \circ Fh \\
 &= F\text{id} \circ F\tilde{i}^{-1} \circ Fh \\
 &= F\nu_1 \circ F(\text{id}, \text{id}) \circ F\tilde{i}^{-1} \circ Fh \\
 &= F\nu_1 \circ Fp \circ Fh \\
 &= Fg
 \end{aligned}$$

である. □

**定理 18.**  $C$  をモデル圏,  $D$  を圏,  $F: C \rightarrow D$  を関手とする.  $x, y \in C$  が cofibrant で  $f: x \rightarrow y$  が weak equivalence ならば,  $Ff$  は同型射であるとする. このとき右 Kan 拡張  $P^{\dagger}F$ , 即ち  $F$  の左導来関手が存在する.

証明.  $F$  の  $C_c$  への制限  $F|_{C_c}$  に補題 17 を適用して, 関手  $F: \pi C_c \rightarrow D$  を得る.

$f \in C$  を weak equivalence とすれば  $FQ(f) \in D$  は同型射である. よって局所化  $P: C \rightarrow \text{Ho}(C)$  の普遍性により, 関手  $L: \text{Ho}(C) \rightarrow D$  が一意に存在して  $LP = FQ$  となる.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \text{Ho}(C) & & \\
 & & \uparrow P & \searrow L & \\
 C & \xrightarrow{Q} & \pi C_c & \xrightarrow{F} & D
 \end{array}$$

$x \in C$  に対して  $\eta_x := F(p_x): FQx \rightarrow Fx$  と定める. これにより自然変換  $\eta: LP = FQ \Rightarrow F$  が定まる.

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Ho}(C) & & \\
 P \uparrow & \searrow L & \\
 C & \xrightarrow{Q} \pi C_c \xrightarrow{F} & D \\
 & \Downarrow \eta & \\
 & F & 
 \end{array}$$

$\therefore$ )  $C$  の射  $f: x \rightarrow y$  に対して, 次を可換とするような  $C$  の射  $\tilde{f}$  を取る.

$$\begin{array}{ccc}
 0 & \hookrightarrow & Q(y) \\
 \downarrow & \nearrow \tilde{f} & \downarrow p_y \\
 Q(x) & \xrightarrow{p_x} x \xrightarrow{f} & y
 \end{array}$$

$Q$  の定義から  $Q(f) = [\tilde{f}]$  である. また  $F$  が関手だから次が可換となる.

$$\begin{array}{ccc}
 Qx & \xrightarrow{\eta_x = Fp_x} & x \\
 F\tilde{f} \downarrow & & \downarrow Ff \\
 Qy & \xrightarrow{\eta_y = Fp_y} & y
 \end{array}$$

よって  $FQf = F\tilde{f}$  である. 故に  $\eta: LP = FQ \Rightarrow F$  は自然変換である.

$\langle L, \eta \rangle$  が  $P$  に沿った  $F$  の右 Kan 拡張であることを示す. その為に  $S: \text{Ho}(C) \rightarrow D$  を関手,  $\theta: SP \Rightarrow F$  を自然変換とする.

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Ho}(C) & & \\
 P \uparrow & \searrow L & \\
 C & \xrightarrow{F} & D \\
 & \Downarrow \eta & \\
 & F & 
 \end{array}$$

$\begin{array}{c} \curvearrowright S \\ \downarrow \tau \\ \theta \end{array}$



$\tau: S \Longrightarrow L$  が  $\eta \circ \tau_P = \theta$  を満たすとする. 次の図式が可換となる.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \theta_{Qx} & & \\
 & & \curvearrowright & & \\
 SPQx & \xrightarrow{\tau_{PQx}} & LPQx & \xrightarrow{\eta_{Qx}} & FQx \\
 \downarrow SPp_x & & \downarrow LPp_x & & \downarrow Fp_x \\
 SPx & \xrightarrow{\tau_{Px}} & LPx & \xrightarrow{\eta_x} & Fx \\
 & & \curvearrowleft & & \\
 & & \theta_x & & 
 \end{array}$$

$x \in C$  に対して  $p_x: Qx \rightarrow x$  は weak equivalence だから,  $SPp_x: SPQx \rightarrow SPx$  は同型射である. また  $Qx$  は cofibrant だから  $p_{Qx} = \text{id}_{Qx}$  であり, よって  $\eta_{Qx} = Fp_{Qx} = \text{id}$  である.  $LP = FQ$  もあわせて次の図式を得る.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \theta_{Qx} & & \\
 & & \curvearrowright & & \\
 SPQx & \xrightarrow{\tau_{PQx}} & FQQx & \xrightarrow{\text{id}} & FQx \\
 \downarrow SPp_x & & \downarrow F'Qp_x & & \downarrow Fp_x \\
 SPx & \xrightarrow{\tau_{Px}} & FQx & \xrightarrow{\eta_x} & Fx \\
 & & \curvearrowleft & & \\
 & & \theta_x & & 
 \end{array}$$

ここで  $Q$  の定義から,  $Qp_x = [\text{id}]$  である.

$$\begin{array}{ccc}
 0 & \hookrightarrow & Qx \\
 \downarrow & \nearrow \text{id} & \downarrow p_x \\
 Qx & \xrightarrow{\text{id}} & Qx \xrightarrow{p_x} x
 \end{array}$$

よって  $FQp_x = \text{id}$  が分かる. 故に  $\tau$  は  $\tau_{Px} = (SPx \xrightarrow{SPp_x^{-1}} SPQx \xrightarrow{\theta_{Qx}} FQx = LPx)$  を満たさなければならない. 従って  $\tau$  はもし存在すれば一意である.

逆に  $\tau$  をこの合成で定義すれば,  $\tau: S \Longrightarrow L$  は自然変換である.

∴) 先ほどと同様にして次が可換である.

$$\begin{array}{ccc} SPQx & \xrightarrow{SPp_x} & SPx \\ SP\tilde{f} \downarrow & & \downarrow SPf \\ SPQy & \xrightarrow{SPp_y} & SPy \end{array}$$

また  $\theta$  が自然変換だから次が可換となる.

$$\begin{array}{ccc} SP(Qx) & \xrightarrow{\theta_{Qx}} & F(Qx) \\ SP\tilde{f} \downarrow & & \downarrow F\tilde{f}=FQf \\ SP(Qy) & \xrightarrow{\theta_{Qy}} & F(Qy) \end{array}$$

故に  $\tau$  も自然変換である.

以上により  $\langle L, \eta \rangle$  が  $P$  に沿った  $F$  の右 Kan 拡張であることが分かった.  $\square$

**定理 19.** 前定理の条件の下で存在する右 Kan 拡張は絶対右 Kan 拡張である.

**証明.**  $G: D \rightarrow E$  を関手とする. このとき  $GF: C \rightarrow E$  は前定理の条件 ( $x, y \in C$  が cofibrant で  $f: x \rightarrow y$  が weak equivalence ならば,  $GFf$  は同型射である) を満たす. 故に右 Kan 拡張  $\langle P^\dagger(GF), \eta' \rangle$  が存在するが, 前定理の証明での構成法からこれは  $P^\dagger(GF) = G(P^\dagger F)$ ,  $\eta' = G\eta$  を満たすことが分かる. 即ち任意の関手  $G: D \rightarrow E$  と交換するから  $P^\dagger F$  は絶対右 Kan 拡張である.  $\square$

双対的に

**定理 20.**  $C$  をモデル圏,  $D$  を圏,  $F: C \rightarrow D$  を関手とする.  $x, y \in C$  が fibrant で  $f: x \rightarrow y$  が weak equivalence ならば,  $Ff$  は同型射であるとする. このとき左 Kan 拡張  $P^\dagger F$ , 即ち  $F$  の右導来関手が存在する. この  $P^\dagger F$  は絶対左 Kan 拡張である.  $\square$

**命題 21.** モデル圏  $C, D$  の間の随伴  $F \dashv G: C \rightarrow D$  に対して次が成り立つ.

- (1)  $F$  が cofibration を保つ  $\iff G$  が trivial fibration を保つ.
- (2)  $F$  が trivial cofibration を保つ  $\iff G$  が fibration を保つ.

**証明.** 全て同様なので, 1 の  $\implies$  のみ示す.

$F$  が cofibration を保つとして、 $D$  の射  $f: x \rightarrow y$  を trivial fibration とする。  $Gf$  が cofibration に対して RLP を持つ事を示せばよい。そこで  $g: c_0 \rightarrow c_1$  を cofibration としてして、次の図式が可換であるとする。

$$\begin{array}{ccc} c_0 & \longrightarrow & Gx \\ g \downarrow & & \downarrow Gf \\ c_1 & \longrightarrow & Gy \end{array}$$

随伴  $F \dashv G$  により、次の実線の可換図式が得られる。

$$\begin{array}{ccc} Fc_0 & \longrightarrow & x \\ Fg \downarrow & \nearrow & \downarrow f \\ Fc_1 & \longrightarrow & y \end{array}$$

$Fg$  が cofibration で、 $f$  が trivial fibration だから、点線の射が存在して可換となる。このとき再び随伴により

$$\begin{array}{ccc} c_0 & \longrightarrow & Gx \\ g \downarrow & \nearrow & \downarrow Gf \\ c_1 & \longrightarrow & Gy \end{array}$$

が可換となる。 □

定義. モデル圏  $C, D$  の間の随伴  $F \dashv G: C \rightarrow D$  に対して、以下の条件が同値であることが命題 21 により分かる。

- $F$  が cofibration と trivial cofibration を保つ。
- $G$  が fibration と trivial fibration を保つ。
- $F$  が cofibration を保ち、 $G$  が fibration を保つ。
- $F$  が trivial cofibration を保ち、 $G$  が trivial fibration を保つ。

これらの条件を満たす随伴  $F \dashv G$  を Quillen 随伴と呼ぶ。また  $F$  を左 Quillen 関手、 $G$  を右 Quillen 関手という。

命題 22.  $F \dashv G: C \rightarrow D$  を Quillen 随伴とするとき

- (1)  $F$  は cofibrant object の間の weak equivalence を保つ。
- (2)  $G$  は fibrant object の間の weak equivalence を保つ。

証明. 同様なので 1 のみ示す.

$x, y \in C$  を cofibrant object として  $f: x \rightarrow y$  を weak equivalence とする. pushout

$$\begin{array}{ccc} 0 & \hookrightarrow & x \\ \downarrow & & \downarrow i_x \\ y & \xrightarrow{i_y} & x \amalg y \end{array}$$

を考える. cofibration の pushout は cofibration だから,  $i_x, i_y$  は cofibration である.  $f: x \rightarrow y, \text{id}_y: y \rightarrow y$  から普遍性により得られる射  $h: x \amalg y \rightarrow y$  を取る.

$$\begin{array}{ccc} 0 & \hookrightarrow & x \\ \downarrow & & \downarrow i_x \\ y & \xrightarrow{i_y} & x \amalg y \\ & \searrow \text{id}_y & \downarrow f \\ & & y \end{array}$$

(A dashed arrow  $h$  goes from  $x \amalg y$  to  $y$ , and a curved arrow  $\sim$  goes from  $y$  to  $y$ .)

$h = (x \amalg y \xrightarrow{i} a \xrightarrow{p} y)$  と分解する.

$$\begin{array}{ccc} 0 & \hookrightarrow & x \\ \downarrow & & \downarrow i_x \\ y & \xrightarrow{i_y} & x \amalg y \\ & \searrow \text{id}_y & \downarrow f \\ & & a \\ & & \downarrow p \\ & & y \end{array}$$

(A curved arrow  $\sim$  goes from  $y$  to  $a$ .)

$p, f, \text{id}_y \in W$  だから 2 out of 3 により  $i \circ i_x, i \circ i_y \in W$  である. よって  $i \circ i_x, i \circ i_y$  は trivial cofibration となる.  $F$  は cofibrant object の間の weak equivalence を保つから, 次の図式を得る.

$$\begin{array}{ccc} & Fx & \\ & \downarrow F(i \circ i_x) & \\ Fy & \xrightarrow{\sim} & Fa \\ & \downarrow F(i \circ i_y) & \\ & & Fy \end{array}$$

(A curved arrow  $\sim$  goes from  $Fy$  to  $Fy$ .)

$F(i \circ i_y), \text{id}_{Fy}$  が weak equivalence だから  $F(p)$  も weak equivalence となる. 従って  $F(f) = F(p) \circ F(i \circ i_x)$  も weak equivalence である.  $\square$

定義.  $C, D$  をモデル圏,  $F: C \rightarrow D$  を関手とする.  $P: C \rightarrow \text{Ho}(C)$ ,  $P': D \rightarrow \text{Ho}(D)$  を局所化とする.

$$\begin{array}{ccc} \text{Ho}(C) & \begin{array}{c} \xrightarrow{\underline{\mathbf{L}}F} \\ \xrightarrow{\underline{\mathbf{R}}F} \end{array} & \text{Ho}(D) \\ \uparrow P & & \uparrow P' \\ C & \xrightarrow{F} & D \end{array}$$

このとき  $P'F: C \rightarrow \text{Ho}(D)$  の左導来関手を  $F$  の total left derived functor といい  $\underline{\mathbf{L}}F$  で表す. また  $P'F$  の右導来関手を  $F$  の total right derived functor といい  $\underline{\mathbf{R}}F$  で表す.

補題 23.  $C, \tilde{C}, D, \tilde{D}$  を圏,  $S: C \rightarrow \tilde{C}$ ,  $T: D \rightarrow \tilde{D}$  を関手,  $F \dashv G: C \rightarrow D$  を随伴関手とする.

$$\begin{array}{ccc} \tilde{C} & \begin{array}{c} \xrightarrow{S^\dagger(TF)} \\ \xrightarrow{\perp} \end{array} & \tilde{D} \\ \uparrow S & \begin{array}{c} T^\dagger(SG) \\ \perp \end{array} & \uparrow T \\ C & \begin{array}{c} \xrightarrow{F} \\ \xrightarrow{G} \end{array} & D \end{array}$$

絶対右 Kan 拡張  $S^\dagger(TF)$ , 絶対左 Kan 拡張  $T^\dagger(SG)$  が存在するとする. このとき  $S^\dagger(TF) \dashv T^\dagger(SG): \tilde{C} \rightarrow \tilde{D}$  である.

証明. 随伴  $F \dashv G$  の unit, counit を  $\eta: \text{id} \Rightarrow GF$ ,  $\varepsilon: FG \Rightarrow \text{id}$  とする. また絶対右 Kan 拡張  $X := S^\dagger(TF)$ , 絶対左 Kan 拡張  $Y := T^\dagger(SG)$  が存在するとする.

$$\begin{array}{ccc} \tilde{C} & \xrightarrow{X} & \tilde{D} & & \tilde{C} & \xleftarrow{Y} & \tilde{D} \\ \uparrow S & \Downarrow \alpha & \uparrow T & & \uparrow S & \Uparrow \beta & \uparrow T \\ C & \xrightarrow{F} & D & & C & \xleftarrow{G} & D \end{array}$$



$$\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc}
& & \text{id} & & \\
& & \longrightarrow & & \\
\tilde{C} & & & & \tilde{C} \\
& \searrow^s & & \searrow^s & \\
& & C & \xrightarrow{F} & D \\
& \text{id} \Downarrow & & & \Downarrow \alpha \\
& \text{id}_C \nearrow & & \nearrow & \\
C & \xrightarrow{F} & D & \xrightarrow{T} & \tilde{D} \\
& \eta \Downarrow & & \text{id} \Downarrow & \\
& & G & & \text{id} \Downarrow \\
& & & & \tilde{D} \\
& & & & \text{id} \longrightarrow \\
& & & & \tilde{D}
\end{array} \\
= \\
\begin{array}{ccccc}
& & \text{id} & & \\
& & \longrightarrow & & \\
\tilde{C} & & & & \tilde{C} \\
& \searrow^s & & \searrow^s & \\
& & C & \xrightarrow{F} & D \\
& \text{id} \Downarrow & & & \Downarrow \alpha \\
& \text{id}_C \nearrow & & \nearrow & \\
C & \xrightarrow{F} & D & \xrightarrow{T} & \tilde{D} \\
& \eta \Downarrow & & \text{id} \Downarrow & \\
& & G & & \text{id} \Downarrow \\
& & & & \tilde{D} \\
& & & & \text{id} \longrightarrow \\
& & & & \tilde{D}
\end{array} \\
= \\
\begin{array}{ccc}
& & \tilde{C} \\
& \searrow^s & \\
C & \xrightarrow{F} & D \\
& \eta \Downarrow & \\
& & D \\
& & \Downarrow \alpha \\
& & \tilde{D} \\
& & \text{id} \longrightarrow \\
& & \tilde{D}
\end{array}
\end{array}$$

であるが，右 Kan 拡張  $\langle X, \alpha \rangle$  の普遍性から  $\tilde{\varepsilon}_X \circ X\tilde{\eta} = \text{id}_X$  が分かる．同様にして  $Y\tilde{\varepsilon} \circ \tilde{\eta}_Y = \text{id}_Y$  も分かる．  $\square$

**定理 24.**  $C, D$  をモデル圏，  $F \dashv G: C \rightarrow D$  を随伴関手とする．  $F$  は  $C$  の cofibrant object の間の weak equivalence を  $D$  の weak equivalence に送り，  $G$  は  $D$  の fibrant object の間の weak equivalence を  $C$  の weak equivalence に送るとする．このとき  $\underline{\mathbf{L}}F, \underline{\mathbf{R}}G$  が存在し  $\underline{\mathbf{L}}F \dashv \underline{\mathbf{R}}G: \text{Ho}(C) \rightarrow \text{Ho}(D)$  は随伴である．

**証明.**  $P: D \rightarrow \text{Ho}(D)$  を局所化とすれば  $PF: C \rightarrow \text{Ho}(D)$  は cofibrant object の間の weak equivalence を同型に送る．よって定理 18 により左導来関手  $\underline{\mathbf{L}}F$  が存在する．同様にして右導来関手  $\underline{\mathbf{R}}G$  も存在する．定理 19 により，これらは絶対 Kan 拡張である．故に補題 23 により  $\underline{\mathbf{L}}F \dashv \underline{\mathbf{R}}G$  である．  $\square$

**定理 25.**  $C, D$  をモデル圏，  $F \dashv G: C \rightarrow D$  を Quillen 随伴関手とする．このとき  $\underline{\mathbf{L}}F, \underline{\mathbf{R}}G$  が存在し  $\underline{\mathbf{L}}F \dashv \underline{\mathbf{R}}G: \text{Ho}(C) \rightarrow \text{Ho}(D)$  は随伴である．  $\square$

**定義.** Quillen 随伴  $F \dashv G: C \rightarrow D$  が Quillen 同値  $\iff \underline{\mathbf{L}}F \dashv \underline{\mathbf{R}}G: \text{Ho}(C) \rightarrow \text{Ho}(D)$  が圏同値を与える．

定理 26. Quillen 随伴  $F \dashv G: C \longrightarrow D$  に対して次は同値である.

- (1)  $F \dashv G$  が Quillen 同値
- (2) cofibrant object  $c \in C$  に対して合成  $c \xrightarrow{\eta_c} GFc \xrightarrow{Gi_{Fc}} GRFc$  が weak equivalence であり, fibrant object  $d \in D$  に対して合成  $FQd \xrightarrow{FPd} FGd \xrightarrow{\varepsilon_d} d$  が weak equivalence である.
- (3) cofibrant object  $c \in C$  と fibrant object  $d \in D$  に対して,  $f: Fc \longrightarrow d$  が weak equivalence  $\iff$  随伴で  $f$  に対応する射  $c \longrightarrow Gd$  が weak equivalence

証明. (1  $\implies$  2)  $c \in C$  を cofibrant とする. 圏同値  $\mathbf{L}F \dashv \mathbf{R}G$  により  $\text{Ho}(C)$  の同型射  $k: c \longrightarrow \mathbf{R}G \circ \mathbf{L}F(c)$  を得る. 定理 18 の証明から  $\mathbf{R}G \circ \mathbf{L}F(c) = GRFQ(c)$  である. よって  $C$  の射  $f: c \longrightarrow GRFQ(c)$  を使って  $k = [f]$  と書ける.

(2  $\implies$  1) Quillen 随伴  $F \dashv G$  の unit を  $\eta$ ,  $\mathbf{L}F \dashv \mathbf{R}G$  の unit, counit を  $\tilde{\eta}, \tilde{\varepsilon}$  とする. 各  $c \in C$ ,  $d \in D$  について  $\eta_c, \varepsilon_d$  が同型であることを示せばよい.

定理 18 の証明と補題 23 の証明を見れば  $\tilde{\eta}_c = PG(i_{Fc}) \circ P(\eta_c) \circ (Pp_c)^{-1}$  と書けることが分かる. 仮定 2 により  $PG(i_{Fc}) \circ P(\eta_c) = P(G(i_{Fc}) \circ \eta_c)$  は同型射である. 故に  $\eta_c$  も同型射である.  $\varepsilon_d$  についても同様.

(2  $\implies$  3)  $c \in C$  を cofibrant,  $d \in D$  を fibrant,  $f: Fc \longrightarrow d$  を weak equivalence とする. fibrant resolution により次の可換図式を得る.

$$\begin{array}{ccc} Fc & \xrightarrow[\sim]{f} & d \\ i_{Fc} \downarrow \wr & & i_d \downarrow \wr \\ RFc & \xrightarrow{Rf} & Rd \end{array}$$

2-out-of-3 より  $Gf$  も weak equivalence である. これに  $G$  を作用させて次の可換図式を得る ( $G$  は fibrant object の間の weak equivalence を保つことと仮定 3 に気をつける).

$$\begin{array}{ccccc} c & \xrightarrow{\eta_c} & GFc & \xrightarrow{Gf} & Gd \\ & \searrow \sim & \downarrow Gi_{Fc} & & \downarrow Gi_d \\ & & GRFc & \xrightarrow[\sim]{GRf} & GRd \end{array}$$

よって 2-out-of-3 により  $Gf \circ \eta_c$  も weak equivalence である. 逆も同様にして分かる.

(3  $\implies$  2)  $c \in C$  を cofibrant とする.  $Fc$  の fibrant resolution  $i_{Fc}: Fc \xrightarrow{\sim} RFc$  を考える.  $c$  が cofibrant で  $RFc$  が fibrant だから, 仮定 2 を使えば  $i_{Fc}$  に随伴  $F \dashv G$  で対



応する射  $c \xrightarrow{\eta_c} GFc \xrightarrow{Gi_{Fc}} GRFc$  も weak equivalence であることが分かる. 同様に  
して  $FQGd \xrightarrow{Fp_{Gd}} FGd \xrightarrow{\varepsilon_d} d$  も weak equivalence である.  $\square$

## 参考文献

- [1] W. G. Dwyer and J. Spalinski, Homotopy theories and model categories, **HANDBOOK OF ALGEBRAIC TOPOLOGY**, 1995
- [2] M. Hovey, *Model Categories*, volume 63 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1999.