

圏の「対数」

alg-d

http://alg-d.com/math/kan_extension/

2017年7月17日

圏 C に対して、 $C = \text{Set}^D$ となるような圏 D を C の「対数」ということにすれば、このような「対数」がいつ存在するかは既に分かっている (Kan 拡張の PDF を参照)。ここではそれとは違った観点から「対数」を考える^{*1}。

まず実数の場合について復習しておく。実数の和と積は可換であり、分配法則

$$(a + b) \times c = a \times c + b \times c$$

を満たすのであった。同様に積と冪も分配法則

$$(a \times b)^c = a^c \times b^c$$

を満たす。しかし積とは違って冪 a^b は非可換である。ところが実は、「冪」の定義を少し変えると、分配法則と可換性両方が成り立つようにすることができる。それには演算 $a * b$ を $a * b := a^{\log b}$ と定義すればよい。これは容易に分かるように

$$(a \times b) * c = (a * c) \times (b * c), \quad a * b = b * a$$

を満たす。

さて、圏の直和を和、直積を積と思えば、圏の場合もこれらは可換であり、分配法則

$$(A \amalg B) \times C = (A \times C) \amalg (B \times C)$$

が成り立つが、上記の演算 $*$ についても、圏バージョンを考えることができる。

命題 1. $F \dashv G: C \rightarrow D$, $F' \dashv G': C \rightarrow D$ を随伴関手とする。このとき自然変換 $F \Rightarrow F'$ と $G' \Rightarrow G$ は一対一に対応する。

^{*1} これは、以前 S さんに教えてもらった内容を文書化したものです。S さん、ありがとうございます。

証明. $F \dashv G, F' \dashv G'$ の unit をそれぞれ η, η' とする . このとき $G \dashv \text{id}_C = \langle F, \eta \rangle, F' \dashv \text{id}_C = \langle G', \eta' \rangle$ である . よって左 Kan 拡張 , 左 Kan リフトの普遍性から , 等式

$$\begin{array}{ccc}
 & D & \\
 F' \nearrow & & \searrow G \\
 C & \xrightarrow{\text{id}_C} & C \\
 \uparrow \epsilon & \nearrow F & \uparrow \eta \\
 & &
 \end{array}
 =
 \begin{array}{ccc}
 & D & \\
 F' \nearrow & & \searrow G \\
 C & \xrightarrow{\text{id}_C} & C \\
 \uparrow \eta' & \nearrow G' & \uparrow \psi \\
 & &
 \end{array}$$

により $\varphi: F \Rightarrow F'$ と $\psi: G' \Rightarrow G$ が一対一に対応する . (即ち , 任意の φ に対して , 一意に ψ が存在して等式が成立し , また任意の ψ に対して一意に φ が存在して等式が成り立つ .) □

定義 . 圏 C, D に対して , 圏 $\text{Adj}(C, D)$ を

- $\text{Ob}(\text{Adj}(C, D)) := \{F \dashv G: C \rightarrow D\}$.
- $\text{Hom}_{\text{Adj}(C, D)}(F \dashv G, F' \dashv G') := \text{Hom}_{DC}(F, F') = \text{Hom}_{CD}(G', G)$.

により定める .

定義 . 圏 C, D に対して $C * D := \text{Adj}(C, D^{\text{op}})^{\text{op}}$ と定義する .

命題 2. $C * D = D * C$ である .

証明 . $\text{Adj}(C, D) = \text{Adj}(D^{\text{op}}, C^{\text{op}})$ だから

$$C * D = \text{Adj}(C, D^{\text{op}})^{\text{op}} = \text{Adj}(D, C^{\text{op}})^{\text{op}} = D * C$$

である . □

命題 3. 圏 A, B は始対象 0 を持ち , 圏 C は二項余直積を持つとする . このとき $(A \times B) * C = (A * C) \times (B * C)$ である .

証明 . 示すべき等式は $\text{Adj}(A \times B, C^{\text{op}})^{\text{op}} = \text{Adj}(A, C^{\text{op}})^{\text{op}} \times \text{Adj}(B, C^{\text{op}})^{\text{op}}$ だから $\text{Adj}(A \times B, C) = \text{Adj}(A, C) \times \text{Adj}(B, C)$ を示せばよい .

$P_0: A \times B \rightarrow A, P_1: A \times B \rightarrow B$ を射影とする . P_0, P_1 は左随伴 L_0, L_1 を持つ .

$\therefore 0 \dashv !: \mathbf{1} \rightarrow B$ だから $A = A \times \mathbf{1} \xrightarrow{\text{id}_A \times 0} A \times B$ を L_0 とすれば $L_0 \dashv P_0$ である . L_1 についても同様 .

よって関数

$$\begin{array}{ccc}
 X: \text{Ob}(\text{Adj}(A \times B, C)) & \longrightarrow & \text{Ob}(\text{Adj}(A, C) \times \text{Adj}(B, C)) \\
 \Downarrow & & \Downarrow \\
 (L \dashv R) & \longmapsto & \langle LL_0 \dashv P_0R, LL_1 \dashv P_1R \rangle
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
 & & C & & \\
 & & \uparrow & \dashv & \downarrow \\
 & & L & & R \\
 & & | & & | \\
 L_0 & \nearrow & A \times B & \searrow & P_1 \\
 & \downarrow & & \uparrow & \\
 A & \xleftarrow{P_0} & & & B \\
 & & & & \swarrow \\
 & & & & L_1
 \end{array}$$

が得られる．これは関手になる．逆に関数

$$\begin{array}{ccc}
 Y: \text{Ob}(\text{Adj}(A, C) \times \text{Adj}(B, C)) & \longrightarrow & \text{Ob}(\text{Adj}(A \times B, C)) \\
 \Downarrow & & \Downarrow \\
 \langle L_0 \dashv R_0, L_1 \dashv R_1 \rangle & \longmapsto & (\amalg \circ (L_0 \times L_1) \dashv (R_0 \times R_1) \circ \Delta) \\
 \\
 A \times B & \xrightleftharpoons[\begin{smallmatrix} \perp \\ R_0 \times R_1 \end{smallmatrix}]{\begin{smallmatrix} L_0 \times L_1 \\ \perp \end{smallmatrix}} & C \times C \xrightleftharpoons[\begin{smallmatrix} \perp \\ \Delta \end{smallmatrix}]{\amalg} C
 \end{array}$$

が得られる．これも関手になる．これらは互いに逆の関手を与える．

∴ $L \dashv R: A \times B \longrightarrow C$ とすると

$$\begin{aligned}
 YX(L \dashv R) &= Y(LL_0 \dashv P_0R, LL_1 \dashv P_1R) \\
 &= (\amalg \circ (LL_0 \times LL_1) \dashv (P_0R \times P_1R) \circ \Delta)
 \end{aligned}$$

である． $a \in A, b \in B$ に対して

$$\begin{aligned}
 \amalg \circ (LL_0 \times LL_1)(a, b) &= LL_0(a) \amalg LL_1(b) \\
 &= L(a, 0) \amalg L(0, b) \\
 &= L(a, b)
 \end{aligned}$$

であり， $c \in C$ に対して

$$(P_0R \times P_1R) \circ \Delta(c) = \langle P_0R(c), P_1R(c) \rangle = R(c)$$

だから $YX(L \dashv R) = L \dashv R$ である . 一方

$$\begin{aligned} XY(L_0 \dashv R_0, L_1 \dashv R_1) &= X(\amalg \circ (L_0 \times L_1) \dashv (R_0 \times R_1) \circ \Delta) \\ &= \langle \amalg \circ (L_0 \times L_1) \circ L_0 \dashv P_0 \circ (R_0 \times R_1) \circ \Delta, \\ &\quad \amalg \circ (L_0 \times L_1) \circ L_1 \dashv P_1 \circ (R_0 \times R_1) \circ \Delta \rangle \end{aligned}$$

であり , $a \in A, b \in B, c \in C$ に対して

$$\begin{aligned} \amalg \circ (L_0 \times L_1) \circ L_0(a) &= L_0(a) \amalg L_1(0) \\ &= L_0(a) \amalg 0 \\ &= L_0(a) \\ P_0 \circ (R_0 \times R_1) \circ \Delta(c) &= P_0(R_0(c), R_1(c)) \\ &= R_0(c) \\ \amalg \circ (L_0 \times L_1) \circ L_1(b) &= L_0(0) \amalg L_1(b) \\ &= 0 \amalg L_1(b) \\ &= L_1(b) \\ P_1 \circ (R_0 \times R_1) \circ \Delta(c) &= P_1(R_0(c), R_1(c)) \\ &= R_1(c) \end{aligned}$$

より $XY(L_0 \dashv R_0, L_1 \dashv R_1) = (L_0 \dashv R_0, L_1 \dashv R_1)$ である .

故に $\text{Adj}(A \times B, C) = \text{Adj}(A, C) \times \text{Adj}(B, C)$ が分かる . □

つまり , 今定義した $C * D$ という演算は可換でかつ積に対して分配法則が成り立つ . よってこれは実数の場合の $*$ の圏バージョンであると考えられる . そこで , 実数の場合に倣って $C^{\log(D)} := C * D = \text{Adj}(C, D^{\text{op}})^{\text{op}}$ と書くことにする .^{*2}

命題 4. 圏 A が二項余直積を持ち圏 B, C が始対象を持つとき $A^{\log(B \times C)} = A^{\log(B)} \times A^{\log(C)}$ である . (この意味で $\log(B \times C) = \log(B) + \log(C)$ と思うことができる .)

証明. 命題 3 から明らか . □

命題 5. 圏 A が終対象を持つとき $A^{\log(1)} = 1$ である . (この意味で $\log(1) = 0$ と思うことができる .)

証明. A が終対象 1 を持つから $\text{Adj}(A, 1) = \{! \dashv 1: A \longrightarrow 1\} = 1$ となる . 従ってこの場合 $A^{\log(1)} = \text{Adj}(A, 1^{\text{op}})^{\text{op}} = 1$ である . □

^{*2} $C^{\log(D)}$ で一つの記号であり , $\log(D)$ が定義されるわけではない .

命題 6. $A \neq 0$ のとき $A^{\log(0)} = 0$ である .

証明. $A(\neq 0)$ から 0 への関手は存在しないから $A^{\log(0)} = \text{Adj}(A, \mathbf{0}^{\text{op}})^{\text{op}} = 0$. □

命題 7. U が余完備のとき , $U^{\log(\text{Set}^C)} \cong U^C$ である . (この意味で $\log(\text{Set}^C) = C$ と思
うことができる .)

証明. 示すべき等式は $\text{Adj}(\text{Set}^C, U^{\text{op}})^{\text{op}} = U^C$ だから $\text{Adj}(\text{Set}^C, U^{\text{op}}) \cong (U^{\text{op}})^{C^{\text{op}}}$ を
示せばよい . 即ち $\text{Adj}(\widehat{C}, U) \cong U^C$ を示せばよい .

米田埋込 $y: C \rightarrow \widehat{C}$ により関手 $y^\dagger: U^C \rightarrow U^{\widehat{C}}$ が得られる .

$$\begin{array}{ccc}
 & \widehat{C} & \\
 & \swarrow & \searrow \\
 & & y^\dagger F \\
 & & \perp \\
 & & F^\dagger y \\
 y \uparrow & & \\
 C & \xrightarrow{F} & U
 \end{array}$$

普遍随伴により $y^\dagger: U^C \rightarrow \text{Adj}(\widehat{C}, U)$ であり , これは本質的全射である . y が忠実充満
だから y^\dagger も忠実充満で , 故に y^\dagger は圏同値である . □

命題 8. 圏 U が余完備のとき $\text{Set}^{\log(U)} \cong U$ である . (これは $e^{\log x} = x$ に対応する .)

証明. 前命題により $\text{Set}^{\log(U)} = U^{\log(\text{Set})} \cong U$ である . □