圏の「対数」

alg-d
http://alg-d.com/math/kan_extension/

2021 年 4 月 29 日

圏 C に対して，$C \simeq \mathbf{Set}^D$ となるような圏 D を C の「対数」と思うことにすれば，このような「対数」がいつ存在するかは既に分かっている (「Kan 拡張」の PDF を参照). ここではそれとは違った観点から「対数」を考える[*1].

まず実数の場合について復習しておく．実数の和と積は可換であり，分配法則

$$(a+b)\times c = a\times c + b\times c$$

を満たすのであった．同様に積と冪も分配法則

$$(a\times b)^c = a^c \times b^c$$

を満たす．しかし積とは違って冪 a^b は非可換である．ところが実は,「冪」の定義を少し変えると，分配法則と可換性両方が成り立つようにすることができる．それには演算 $a * b$ を $a * b := a^{\log b}$ と定義すればよい．これは容易に分かるように

$$(a\times b) * c = (a * c)\times(b * c), \quad a * b = b * a$$

を満たす.

さて，圏の直和を和，直積を積と思えば，圏の場合もこれらは可換であり，分配法則

$$(A \amalg B)\times C = (A\times C)\amalg(B\times C)$$

が成り立つが，上記の演算 $*$ についても，圏バージョンを考えることができる．そのために準備をする.

定義. C, D, U を圏，$F\colon D\to C$，$E\colon U\to C$ を関手とする．F に沿った E の左 Kan リフトとは組 $\langle F_\dagger E, \eta\rangle$ であって，以下の条件を満たすものである.

---

*1 これは，以前 S さんに教えてもらった内容 [1] を文書化したものです．S さん，ありがとうございます.

(1) $F_\dagger E$ は関手 $U \to D$ で，η は自然変換 $E \Rightarrow F \circ F_\dagger E$ である．

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[d, "F"'] & \\
C \arrow[ur, phantom, "\eta\Uparrow"] & U \arrow[l, "E"] \arrow[ul, "F_\dagger E"']
\end{tikzcd}$$

(2) 組 $\langle S, \theta \rangle$ が同じ条件を満たす (即ち $S \colon U \to D$ は関手で $\theta \colon E \Rightarrow F \circ S$ は自然変換) ならば，自然変換 $\tau \colon F_\dagger E \Rightarrow S$ が一意に存在して $\theta = F\tau \circ \eta$ となる．即ち次の等式が成り立つ．

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[d, "F"'] & \\
C \arrow[ur, phantom, "\eta\Uparrow"] & U \arrow[l, "E"] \arrow[ul, "F_\dagger E"] \arrow[ul, bend right=50, "S"'] \arrow[ul, phantom, shift right=3, "\tau"]
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
D \arrow[d, "F"'] & \\
C \arrow[ur, phantom, "\theta\Uparrow"] & U \arrow[l, "E"] \arrow[ul, bend right=50, "S"']
\end{tikzcd}$$

即ち左 Kan リフトとは，左 Kan 拡張の定義において関手の向きを逆にしたものである．絶対左 Kan リフトについても絶対左 Kan 拡張と同様に定義できる．

定義． $F \colon D \to C$，$E \colon U \to C$，$K \colon V \to U$ を関手として左 Kan リフト $\langle F_\dagger E, \eta \rangle$ が存在するとする．

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[d, "F"'] & & \\
C \arrow[ur, phantom, "\eta\Uparrow"] & U \arrow[l, "E"] \arrow[ul, "F_\dagger E"'] & V \arrow[l, "K"]
\end{tikzcd}$$

このとき K が左 Kan リフト $\langle F_\dagger E, \eta \rangle$ と交換するとは，K を合成して得られる次の図式も左 Kan リフトとなることを言う．

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[d, "F"'] & & \\
C \arrow[ur, phantom, "\eta_K\Uparrow"] & U \arrow[l, "E"] & V \arrow[l, "K"] \arrow[ull, "(F_\dagger E)\circ K"']
\end{tikzcd}$$

定義． $F \colon D \to C$，$E \colon U \to C$ を関手として左 Kan リフト $F_\dagger E$ が存在するとする．$F_\dagger E$ が任意の関手 $K \colon V \to U$ と交換するとき，$F_\dagger E$ は絶対左 Kan 拡張であるという．

Kan 拡張のときと全く同様にして次の定理が得られる．

定理 1. $G\colon D \to C$ を関手とするとき，以下の条件は同値である．

(1) G が左随伴を持つ．
(2) 絶対左 Kan リフト $\langle G_\dagger \mathrm{id}_C, \eta \rangle$ が存在する．
(3) 左 Kan リフト $\langle G_\dagger \mathrm{id}_C, \eta \rangle$ が存在し，G が $G_\dagger \mathrm{id}_C$ と交換する．

$$
\begin{tikzcd}
D \arrow[d, "G"'] & & \\
C \arrow[r, phantom, "\eta\Uparrow" near start, shift left=3] & C \arrow[l, "\mathrm{id}_C"] \arrow[ul, "G_\dagger \mathrm{id}_C"'] & D \arrow[l, "G"]
\end{tikzcd}
$$

またこのとき $G_\dagger \mathrm{id}_C \dashv G$ であり η がその unit である． $\square$

これを使うことで次の命題を得る．

命題 2. C, D を圏，$F \dashv G\colon C \to D$，$F' \dashv G'\colon C \to D$ を随伴関手とする．このとき自然変換 $F \Rightarrow F'$ と $G' \Rightarrow G$ は一対一に対応する．

証明. 随伴 $F \dashv G$，$F' \dashv G'$ の unit をそれぞれ η, η' とする．このとき $G_\dagger \mathrm{id}_C \cong F$，$F'^\dagger \mathrm{id}_C \cong G'$ である．よって左 Kan 拡張，左 Kan リフトの普遍性から，等式

$$
\begin{tikzcd}
& D \arrow[dr, bend left, "G"] & \\
C \arrow[ur, bend left=50, "F'"] \arrow[ur, bend right, "F"'] \arrow[rr, "\mathrm{id}_C"'] \arrow[ur, phantom, "\Leftarrow\varphi"] \arrow[rr, phantom, "\Uparrow\eta", shift left=4] & & C
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
& D \arrow[dr, bend left=50, "G"] \arrow[dr, bend right, "G'"'] \arrow[dr, phantom, "\Rightarrow\psi"] & \\
C \arrow[ur, bend left, "F'"] \arrow[rr, "\mathrm{id}_C"'] \arrow[rr, phantom, "\eta'\Uparrow", shift left=4] & & C
\end{tikzcd}
$$

により $\varphi\colon F \Rightarrow F'$ と $\psi\colon G' \Rightarrow G$ が一対一に対応する．(即ち，任意の φ に対して，一意に ψ が存在して等式が成立し，また任意の ψ に対して一意に φ が存在して等式が成り立つ．) $\square$

そこで，随伴の圏 $\mathrm{Adj}(C, D)$ を次のように定義することができる．

定義. 圏 C, D に対して，圏 $\mathrm{Adj}(C, D)$ を

- $\mathrm{Ob}(\mathrm{Adj}(C, D)) := \{F \dashv G\colon C \to D\}$.
- $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Adj}(C,D)}(F \dashv G, F' \dashv G') := \mathrm{Hom}_{D^C}(F, F') \cong \mathrm{Hom}_{C^D}(G', G)$.

により定める．

これを使うことでいよいよ $*$ を定義することができる．

定義． 圏 C, D に対して $C * D := \mathrm{Adj}(C, D^{\mathrm{op}})^{\mathrm{op}}$.

命題 3. $C * D = D * C$ である．

証明. $\mathrm{Adj}(C, D) = \mathrm{Adj}(D^{\mathrm{op}}, C^{\mathrm{op}})$ だから

$$C * D = \mathrm{Adj}(C, D^{\mathrm{op}})^{\mathrm{op}} = \mathrm{Adj}(D, C^{\mathrm{op}})^{\mathrm{op}} = D * C$$

である． $\square$

命題 4. A, B, C を圏として，A, B は始対象 0 を持ち，C は二項余直積を持つとする．このとき $(A \times B) * C \simeq (A * C) \times (B * C)$ である．

証明. 示すべき圏同値は $\mathrm{Adj}(A \times B, C^{\mathrm{op}})^{\mathrm{op}} \simeq \mathrm{Adj}(A, C^{\mathrm{op}})^{\mathrm{op}} \times \mathrm{Adj}(B, C^{\mathrm{op}})^{\mathrm{op}}$ だから $\mathrm{Adj}(A \times B, C) \simeq \mathrm{Adj}(A, C) \times \mathrm{Adj}(B, C)$ を示せばよい．

$P_0 \colon A \times B \to A$, $P_1 \colon A \times B \to B$ を射影とする．P_0, P_1 は左随伴 L_0, L_1 を持つ．

∵) $0 \dashv ! \colon \mathbb{1} \to B$ だから $A = A \times \mathbb{1} \xrightarrow{\mathrm{id}_A \times 0} A \times B$ を L_0 とすれば $L_0 \dashv P_0$ である．
L_1 についても同様.

よって関数

$$\begin{array}{rccc} X\colon & \mathrm{Ob}(\mathrm{Adj}(A \times B, C)) & \longrightarrow & \mathrm{Ob}(\mathrm{Adj}(A, C) \times \mathrm{Adj}(B, C)) \\ & \Psi & & \Psi \\ & (L \dashv R) & \longmapsto & \langle LL_0 \dashv P_0 R, LL_1 \dashv P_1 R \rangle \end{array}$$

$$\begin{tikzcd}
 & C \arrow[d, shift left, "R"] & \\
 & A \times B \arrow[u, shift left, "L"] \arrow[dl, shift left, "P_0"] \arrow[dr, shift left, "P_1"] & \\
A \arrow[ur, shift left, "L_0"] & & B \arrow[ul, shift left, "L_1"]
\end{tikzcd}$$

が得られる．これは関手になる．逆向きの関数

$$\begin{array}{rccc} Y\colon & \mathrm{Ob}(\mathrm{Adj}(A, C) \times \mathrm{Adj}(B, C)) & \longrightarrow & \mathrm{Ob}(\mathrm{Adj}(A \times B, C)) \\ & \Psi & & \Psi \\ & \langle L_0 \dashv R_0, L_1 \dashv R_1 \rangle & \longmapsto & \big(\amalg \circ (L_0 \times L_1) \dashv (R_0 \times R_1) \circ \Delta\big) \end{array}$$

$$
\begin{tikzcd}
A \times B \arrow[r, shift left, "L_0 \times L_1"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & C \times C \arrow[l, shift left, "R_0 \times R_1"] \arrow[r, shift left, "\amalg"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & C \arrow[l, shift left, "\Delta"]
\end{tikzcd}
$$

も得られる．これも関手になる．これらは互いに逆の関手を与える．

∵) $L \dashv R\colon A \times B \to C$ とすると

$$
\begin{aligned}
YX(L \dashv R) &= Y(LL_0 \dashv P_0R, LL_1 \dashv P_1R) \\
&= \bigl(\amalg \circ (LL_0 \times LL_1) \dashv (P_0R \times P_1R) \circ \Delta\bigr)
\end{aligned}
$$

である．$a \in A$，$b \in B$ に対して

$$
\begin{aligned}
\amalg \circ (LL_0 \times LL_1)(a,b) &= LL_0(a) \amalg LL_1(b) \\
&= L(a,0) \amalg L(0,b) \\
&\cong L(a,b)
\end{aligned}
$$

であり，$c \in C$ に対して

$$
(P_0R \times P_1R) \circ \Delta(c) = \langle P_0R(c), P_1R(c)\rangle = R(c)
$$

だから $YX(L \dashv R) \cong (L \dashv R)$ である．一方

$$
\begin{aligned}
XY(L_0 \dashv R_0, L_1 \dashv R_1) &= X\bigl(\amalg \circ (L_0 \times L_1) \dashv (R_0 \times R_1) \circ \Delta\bigr) \\
&= \langle \amalg \circ (L_0 \times L_1) \circ L_0 \dashv P_0 \circ (R_0 \times R_1) \circ \Delta, \\
&\qquad \amalg \circ (L_0 \times L_1) \circ L_1 \dashv P_1 \circ (R_0 \times R_1) \circ \Delta\rangle
\end{aligned}
$$

であり，$a \in A$，$b \in B$，$c \in C$ に対して

$$
\begin{aligned}
\amalg \circ (L_0 \times L_1) \circ L_0(a) &= L_0(a) \amalg L_1(0) \\
&\cong L_0(a) \amalg 0 \\
&\cong L_0(a) \\
P_0 \circ (R_0 \times R_1) \circ \Delta(c) &= P_0(R_0(c), R_1(c)) \\
&= R_0(c) \\
\amalg \circ (L_0 \times L_1) \circ L_1(b) &= L_0(0) \amalg L_1(b) \\
&\cong 0 \amalg L_1(b) \\
&\cong L_1(b) \\
P_1 \circ (R_0 \times R_1) \circ \Delta(c) &= P_1(R_0(c), R_1(c)) \\
&= R_1(c)
\end{aligned}
$$

より $XY(L_0 \dashv R_0, L_1 \dashv R_1) \cong \langle L_0 \dashv R_0, L_1 \dashv R_1 \rangle$ である．

従って $\mathrm{Adj}(A \times B, C) \simeq \mathrm{Adj}(A, C) \times \mathrm{Adj}(B, C)$ が分かる． $\square$

つまり今定義した $C * D$ という演算は可換でかつ (ある程度の条件の下で) 積に対して分配法則が成り立つ．よってこれは実数の場合の $*$ の圏バージョンであると考えることができる．そこで，実数の場合に倣って $C^{\log(D)} := C * D = \mathrm{Adj}(C, D^{\mathrm{op}})^{\mathrm{op}}$ と書くことにする．[*2]

命題 5. A, B, C を圏として，A は二項余直積を持ち B, C は始対象 0 を持つとする．このとき $A^{\log(B \times C)} \simeq A^{\log(B)} \times A^{\log(C)}$ である．（この意味で $\log(B \times C) = \log(B) + \log(C)$ と思うことができる．）

証明. 命題 4 から明らか． $\square$

命題 6. 圏 A が終対象を持つとき $A^{\log(\mathbb{1})} \simeq \mathbb{1}$ である．（この意味で $\log(\mathbb{1}) = \mathbb{0}$ と思うことができる．）

証明. A が終対象 1 を持つから $\mathrm{Adj}(A, \mathbb{1}) \simeq \{ ! \dashv 1 \colon A \to \mathbb{1} \} = \mathbb{1}$ となる．従ってこの場合 $A^{\log(\mathbb{1})} = \mathrm{Adj}(A, \mathbb{1}^{\mathrm{op}})^{\mathrm{op}} \simeq \mathbb{1}$ である． $\square$

命題 7. $A \neq \mathbb{0}$ のとき $A^{\log(\mathbb{0})} = \mathbb{0}$ である．

証明. $A(\neq \mathbb{0})$ から $\mathbb{0}$ への関手は存在しないから $A^{\log(\mathbb{0})} = \mathrm{Adj}(A, \mathbb{0}^{\mathrm{op}})^{\mathrm{op}} = \mathbb{0}$. $\square$

命題 8. U が余完備のとき，$U^{\log(\mathbf{Set}^C)} \simeq U^C$ である．（この意味で $\log(\mathbf{Set}^C) = C$ と思うことができる．）

証明. 示すべき圏同値は $\mathrm{Adj}(\mathbf{Set}^C, U^{\mathrm{op}})^{\mathrm{op}} \simeq U^C$ だから $\mathrm{Adj}(\mathbf{Set}^{C^{\mathrm{op}}}, U^{\mathrm{op}}) \simeq (U^{\mathrm{op}})^{C^{\mathrm{op}}}$ を示せばよい．即ち $\mathrm{Adj}(\widehat{C}, U) \simeq U^C$ を示せばよい．

米田埋込 $y \colon C \to \widehat{C}$ により関手 $y^\dagger \colon U^C \to U^{\widehat{C}}$ が得られる．

$$\begin{tikzcd}
\widehat{C} \arrow[dr, shift left, "y^\dagger F"] \arrow[dr, phantom, "\perp"] & \\
C \arrow[u, "y"] \arrow[r, "F"'] & U \arrow[ul, shift left, "F^\dagger y"]
\end{tikzcd}$$

[*2] $C^{\log(D)}$ で一つの記号であり，$\log(D)$ が定義されるわけではない．

普遍随伴により $y^\dagger \colon U^C \to \mathrm{Adj}(\widehat{C}, U)$ であり，これは本質的全射である．y が忠実充満だから $y^\dagger$ も忠実充満で，故に $y^\dagger$ は圏同値である． $\square$

命題 9. 圏 U が余完備のとき $\mathbf{Set}^{\log(U)} \simeq U$ である．(これは $e^{\log x} = x$ に対応する．)

証明. 命題 8 により $\mathbf{Set}^{\log(U)} = U^{\log(\mathbf{Set})} \simeq U$ である． $\square$

参考文献

[1] ft_math さんによる圏論祭, 2012 年 12 月 8 日, `http://alg-d.com/math/ft_math/`