圏の「対数」

alg-d
http://alg-d.com/math/kan_extension/

2018 年 4 月 7 日

圏 C に対して，$C = \mathbf{Set}^D$ となるような圏 D を C の「対数」と思うことにすれば，このような「対数」がいつ存在するかは既に分かっている (Kan 拡張の PDF を参照)．ここではそれとは違った観点から「対数」を考える[*1]．

まず実数の場合について復習しておく．実数の和と積は可換であり，分配法則

$$(a + b) \times c = a \times c + b \times c$$

を満たすのであった．同様に積と冪も分配法則

$$(a \times b)^c = a^c \times b^c$$

を満たす．しかし積とは違って冪 a^b は非可換である．ところが実は，「冪」の定義を少し変えると，分配法則と可換性両方が成り立つようにすることができる．それには演算 $a * b$ を $a * b := a^{\log b}$ と定義すればよい．これは容易に分かるように

$$(a \times b) * c = (a * c) \times (b * c), \quad a * b = b * a$$

を満たす．

さて，圏の直和を和，直積を積と思えば，圏の場合もこれらは可換であり，分配法則

$$(A \amalg B) \times C = (A \times C) \amalg (B \times C)$$

が成り立つが，上記の演算 $*$ についても，圏バージョンを考えることができる．

命題 1. C, D を圏，$F \dashv G \colon C \to D$，$F' \dashv G' \colon C \to D$ を随伴関手とする．このとき自然変換 $F \Rightarrow F'$ と $G' \Rightarrow G$ は一対一に対応する．

[*1] これは，以前 S さんに教えてもらった内容を文書化したものです．S さん，ありがとうございます．

証明．$F \dashv G$，$F' \dashv G'$ の unit をそれぞれ η, η' とする．このとき $G_\dagger \mathrm{id}_C = \langle F, \eta \rangle$，$F'^\dagger \mathrm{id}_C = \langle G', \eta' \rangle$ である．よって左 Kan 拡張，左 Kan リフトの普遍性から，等式

$$
\begin{tikzcd}
 & D \arrow[dr, bend left, "G"] \arrow[d, phantom, "\Uparrow \eta"] & \\
C \arrow[ur, bend left=60, "F'"] \arrow[ur, "F"'] \arrow[ur, phantom, bend left=30, "\Leftarrow\!\!\!\Leftarrow \varphi"] \arrow[rr, "\mathrm{id}_C"'] & {} & C
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
 & D \arrow[dr, bend left=60, "G"] \arrow[dr, "G'"'] \arrow[dr, phantom, bend left=30, "\psi"] \arrow[d, phantom, "\eta' \Uparrow"] & \\
C \arrow[ur, bend left, "F'"] \arrow[rr, "\mathrm{id}_C"'] & {} & C
\end{tikzcd}
$$

により $\varphi\colon F \Rightarrow F'$ と $\psi\colon G' \Rightarrow G$ が一対一に対応する．(即ち，任意の φ に対して，一意に ψ が存在して等式が成立し，また任意の ψ に対して一意に φ が存在して等式が成り立つ．) □

定義． 圏 C, D に対して，圏 $\mathrm{Adj}(C, D)$ を

- $\mathrm{Ob}(\mathrm{Adj}(C, D)) := \{F \dashv G\colon C \to D\}$.
- $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Adj}(C,D)}(F \dashv G, F' \dashv G') := \mathrm{Hom}_{D^C}(F, F') = \mathrm{Hom}_{C^D}(G', G)$.

により定める．

定義． 圏 C, D に対して $C * D := \mathrm{Adj}(C, D^{\mathrm{op}})^{\mathrm{op}}$ と定義する．

命題 2． $C * D = D * C$ である．

証明．$\mathrm{Adj}(C, D) = \mathrm{Adj}(D^{\mathrm{op}}, C^{\mathrm{op}})$ だから

$$C * D = \mathrm{Adj}(C, D^{\mathrm{op}})^{\mathrm{op}} = \mathrm{Adj}(D, C^{\mathrm{op}})^{\mathrm{op}} = D * C$$

である． □

命題 3． A, B, C を圏として，A, B は始対象 0 を持ち，C は二項余直積を持つとする．このとき $(A \times B) * C = (A * C) \times (B * C)$ である．

証明．示すべき等式は $\mathrm{Adj}(A \times B, C^{\mathrm{op}})^{\mathrm{op}} = \mathrm{Adj}(A, C^{\mathrm{op}})^{\mathrm{op}} \times \mathrm{Adj}(B, C^{\mathrm{op}})^{\mathrm{op}}$ だから $\mathrm{Adj}(A \times B, C) = \mathrm{Adj}(A, C) \times \mathrm{Adj}(B, C)$ を示せばよい．

$P_0\colon A \times B \to A$，$P_1\colon A \times B \to B$ を射影とする．P_0, P_1 は左随伴 L_0, L_1 を持つ．

∵) $0 \dashv !\colon \mathbf{1} \to B$ だから $A = A \times \mathbf{1} \xrightarrow{\mathrm{id}_A \times 0} A \times B$ を L_0 とすれば $L_0 \dashv P_0$ である．
L_1 についても同様.

よって関数

$$
\begin{array}{rccc}
X\colon & \mathrm{Ob}(\mathrm{Adj}(A\times B, C)) & \longrightarrow & \mathrm{Ob}(\mathrm{Adj}(A,C)\times\mathrm{Adj}(B,C)) \\
 & \Cup & & \Cup \\
 & (L\dashv R) & \longmapsto & \langle LL_0 \dashv P_0R, LL_1\dashv P_1R\rangle
\end{array}
$$

$$
\begin{tikzcd}
 & C \arrow[d, shift left=2, "R"] \arrow[d, phantom, "\dashv"] & \\
 & A\times B \arrow[u, shift left=2, "L"] \arrow[dl, shift left, "P_0"] \arrow[dr, shift left, "P_1"] & \\
A \arrow[ur, shift left, "L_0"] \arrow[ur, phantom, "\perp"] & & B \arrow[ul, shift left, "L_1"] \arrow[ul, phantom, "\top"]
\end{tikzcd}
$$

が得られる．これは関手になる．逆に関数

$$
\begin{array}{rccc}
Y\colon & \mathrm{Ob}(\mathrm{Adj}(A,C)\times\mathrm{Adj}(B,C)) & \longrightarrow & \mathrm{Ob}(\mathrm{Adj}(A\times B, C)) \\
 & \Cup & & \Cup \\
 & \langle L_0 \dashv R_0, L_1\dashv R_1\rangle & \longmapsto & \big(\amalg\circ(L_0\times L_1)\dashv(R_0\times R_1)\circ\Delta\big)
\end{array}
$$

$$
\begin{tikzcd}
A\times B \arrow[r, shift left, "L_0\times L_1"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & C\times C \arrow[l, shift left, "R_0\times R_1"] \arrow[r, shift left, "\amalg"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & C \arrow[l, shift left, "\Delta"]
\end{tikzcd}
$$

が得られる．これも関手になる．これらは互いに逆の関手を与える．

∵) $L\dashv R\colon A\times B\to C$ とすると

$$
\begin{aligned}
YX(L\dashv R) &= Y(LL_0\dashv P_0R, LL_1\dashv P_1R) \\
&= \big(\amalg\circ(LL_0\times LL_1)\dashv(P_0R\times P_1R)\circ\Delta\big)
\end{aligned}
$$

である．$a\in A$, $b\in B$ に対して

$$
\begin{aligned}
\amalg\circ(LL_0\times LL_1)(a,b) &= LL_0(a)\amalg LL_1(b) \\
&= L(a,0)\amalg L(0,b) \\
&= L(a,b)
\end{aligned}
$$

であり，$c\in C$ に対して

$$
(P_0R\times P_1R)\circ\Delta(c) = \langle P_0R(c), P_1R(c)\rangle = R(c)
$$

だから $YX(L \dashv R) = L \dashv R$ である．一方

$$
\begin{aligned}
XY(L_0 \dashv R_0, L_1 \dashv R_1) &= X\bigl(\amalg \circ (L_0 \times L_1) \dashv (R_0 \times R_1) \circ \Delta\bigr) \\
&= \langle \amalg \circ (L_0 \times L_1) \circ L_0 \dashv P_0 \circ (R_0 \times R_1) \circ \Delta, \\
&\qquad \amalg \circ (L_0 \times L_1) \circ L_1 \dashv P_1 \circ (R_0 \times R_1) \circ \Delta \rangle
\end{aligned}
$$

であり，$a \in A$, $b \in B$, $c \in C$ に対して

$$
\begin{aligned}
\amalg \circ (L_0 \times L_1) \circ L_0(a) &= L_0(a) \amalg L_1(0) \\
&= L_0(a) \amalg 0 \\
&= L_0(a) \\
P_0 \circ (R_0 \times R_1) \circ \Delta(c) &= P_0(R_0(c), R_1(c)) \\
&= R_0(c) \\
\amalg \circ (L_0 \times L_1) \circ L_1(b) &= L_0(0) \amalg L_1(b) \\
&= 0 \amalg L_1(b) \\
&= L_1(b) \\
P_1 \circ (R_0 \times R_1) \circ \Delta(c) &= P_1(R_0(c), R_1(c)) \\
&= R_1(c)
\end{aligned}
$$

より $XY(L_0 \dashv R_0, L_1 \dashv R_1) = (L_0 \dashv R_0, L_1 \dashv R_1)$ である．

故に $\mathrm{Adj}(A \times B, C) = \mathrm{Adj}(A, C) \times \mathrm{Adj}(B, C)$ が分かる． □

つまり，今定義した $C * D$ という演算は可換でかつ積に対して分配法則が成り立つ．よってこれは実数の場合の $*$ の圏バージョンであると考えることができる．そこで，実数の場合に倣って $C^{\log(D)} := C * D = \mathrm{Adj}(C, D^{\mathrm{op}})^{\mathrm{op}}$ と書くことにする．[*2]

命題 4. A, B, C を圏として，A は二項余直積を持ち B, C は始対象 0 を持つとする．このとき $A^{\log(B \times C)} = A^{\log(B)} \times A^{\log(C)}$ である．（この意味で $\log(B \times C) = \log(B) + \log(C)$ と思うことができる．）

証明. 命題 3 から明らか． □

命題 5. 圏 A が終対象を持つとき $A^{\log(\mathbf{1})} = \mathbf{1}$ である．（この意味で $\log(\mathbf{1}) = \mathbf{0}$ と思うことができる．）

証明. A が終対象 1 を持つから $\mathrm{Adj}(A, \mathbf{1}) = \{ ! \dashv 1 \colon A \to \mathbf{1} \} = \mathbf{1}$ となる．従ってこの場

[*2] $C^{\log(D)}$ で一つの記号であり，$\log(D)$ が定義されるわけではない．

合 $A^{\log(\mathbf{1})} = \mathrm{Adj}(A, \mathbf{1}^{\mathrm{op}})^{\mathrm{op}} = \mathbf{1}$ である． $\square$

命題 6. $A \neq \mathbf{0}$ のとき $A^{\log(\mathbf{0})} = \mathbf{0}$ である．

証明. $A(\neq \mathbf{0})$ から $\mathbf{0}$ への関手は存在しないから $A^{\log(\mathbf{0})} = \mathrm{Adj}(A, \mathbf{0}^{\mathrm{op}})^{\mathrm{op}} = \mathbf{0}$. $\square$

命題 7. U が余完備のとき，$U^{\log(\mathbf{Set}^C)} \cong U^C$ である．（この意味で $\log(\mathbf{Set}^C) = C$ と思うことができる．）

証明. 示すべき等式は $\mathrm{Adj}(\mathbf{Set}^C, U^{\mathrm{op}})^{\mathrm{op}} = U^C$ だから $\mathrm{Adj}(\mathbf{Set}^C, U^{\mathrm{op}}) \cong (U^{\mathrm{op}})^{C^{\mathrm{op}}}$ を示せばよい．即ち $\mathrm{Adj}(\widehat{C}, U) \cong U^C$ を示せばよい．

米田埋込 $y\colon C \to \widehat{C}$ により関手 $y^\dagger\colon U^C \to U^{\widehat{C}}$ が得られる．

$$\begin{tikzcd}
\widehat{C} \arrow[dr, shift left=1.5ex, "y^\dagger F"] \arrow[dr, phantom, "\perp"] & \\
C \arrow[u, "y"] \arrow[r, "F"'] & U \arrow[ul, shift left=1.5ex, "F^\dagger y"]
\end{tikzcd}$$

普遍随伴により $y^\dagger\colon U^C \to \mathrm{Adj}(\widehat{C}, U)$ であり，これは本質的全射である．y が忠実充満だから $y^\dagger$ も忠実充満で，故に $y^\dagger$ は圏同値である． $\square$

命題 8. 圏 U が余完備のとき $\mathbf{Set}^{\log(U)} \cong U$ である．（これは $e^{\log x} = x$ に対応する．）

証明. 前命題により $\mathbf{Set}^{\log(U)} = U^{\log(\mathbf{Set})} \cong U$ である． $\square$