極限

alg-d
http://alg-d.com/math/kan_extension/

2018 年 4 月 11 日

定義. C, D を圏，$c \in C$ を対象，$G\colon D \to C$ を関手とする．コンマ圏 $c{\downarrow}G$ の始対象を c から G への普遍射 (universal arrow) という．即ち，以下を満たす組 $\langle d, f \rangle$ のことである．

(1) d は D の対象である．
(2) f は C の射 $c \to Gd$ である．
(3) 組 $\langle d', f' \rangle$ が同じ条件 (即ち $d' \in D$ で $f'\colon c \to Gd'$ となる) を満たすならば，D の射 $g\colon d \to d'$ が一意に存在して $Gg \circ f = f'$ となる．

$$\begin{tikzcd} c \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f'"'] & Gd \arrow[d, dashed, "Gg"] & d \arrow[d, dashed, "g"] \\ & Gd' & d' \end{tikzcd}$$

双対的に，コンマ圏 $G{\downarrow}c$ の終対象 $\langle d, f \rangle$ を G から c への普遍射という．

$$\begin{tikzcd} d & Gd \arrow[r, "f"] & c \\ d' \arrow[u, dashed, "g"] & Gd' \arrow[u, dashed, "Gg"] \arrow[ur, "f'"'] & \end{tikzcd}$$

例 1. $U\colon \mathbf{Ab} \to \mathbf{Set}$ を忘却関手とする．集合 X で生成される自由アーベル群を FX として自然な包含写像を $i\colon X \to UFX$ とする．このとき FX は以下の性質を満たす: 任意のアーベル群 A と写像 $f\colon X \to A$ に対して，準同型写像 $g\colon FX \to A$ が一意に存在し

て $Ug \circ i = f$ を満たす．

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "f"'] & UFX \arrow[d, dashed, "Ug"] & FX \arrow[d, dashed, "g"] \\ & UA & A \end{tikzcd}$$

即ち，$\langle FX, i\rangle$ は $X \in \mathbf{Set}$ から U への普遍射である．

　この意味で「自由アーベル群」は集合からアーベル群を構成する方法としては一番《自然》と言える．　□

例 2. C を圏，$\Delta\colon C \to C \times C$ を対角関手とする．$\langle a, b\rangle \in C \times C$ から Δ への普遍射 $\langle f, g\rangle\colon \langle a, b\rangle \to \Delta c$ が存在したとする．このとき，別の射 $\langle f', g'\rangle\colon \langle a, b\rangle \to \Delta c'$ に対して射 $h\colon c \to c'$ が一意に存在して次が可換となる．

$$\begin{tikzcd} \langle a, b\rangle \arrow[r, "\langle f,g\rangle"] \arrow[dr, "\langle f',g'\rangle"'] & \Delta c \arrow[d, dashed, "\Delta h"] & c \arrow[d, dashed, "h"] \\ & \Delta c' & c' \end{tikzcd}$$

これを圏の直積の定義を思い出して書き直すと，次の可換図式になる．

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f'"'] & c \arrow[d, dashed, "h"] & b \arrow[l, "g"'] \arrow[dl, "g'"] \\ & c' & \end{tikzcd}$$

即ち，$\langle a, b\rangle$ から Δ への普遍射とは余直積 $a \amalg b$ のことである．

　同様にして以下の事が分かる．

- $\Delta\colon C \to C \times C$ から $\langle a, b\rangle$ への普遍射が直積 $a \times b$ である．
- $!\colon C \to \mathbf{1} = \{0\}$ を一意に定まる関手として，0 から $!$ への普遍射 $\langle c, f\rangle$ が存在とする．このとき c が始対象である．同様にして $!$ から 0 への普遍射を $\langle c, f\rangle$ とすれば c が終対象である．
- $J := \{* \leftarrow * \rightarrow *\}$ として $\Delta\colon C \to C^J$ を対角関手とすれば，$(x \leftarrow z \rightarrow y) \in C^J$ から Δ への普遍射が pushout である．pullback も同様．
- 同様に，$J = \{* \rightrightarrows *\}$ の場合が equalizer, coequalizer である．　□

定義. C を圏とする．圏 J と対角関手 $\Delta\colon C \to C^J$ を取る．Δ から $T \in C^J$ への普遍射 $\langle \lim T, \pi \rangle$ を T の極限 (limit)，$T \in C^J$ から Δ への普遍射 $\langle \operatorname{colim} T, \mu \rangle$ を T の余極限 (colimit) という．[*1]

定義. (1) 圏 J が有限 $\iff |\mathrm{Mor}(J)| < \infty$.

(2) 圏 J が小圏 $\iff \mathrm{Mor}(J)$ が集合.

(3) J が有限の場合の極限を有限極限，余極限を有限余極限という.

(4) J が小圏の場合の極限を小極限，余極限を小余極限という.

(5) J が集合 (小離散圏) の場合の極限を小直積，余極限を小余直積という.

(6) J が有限集合 (有限離散圏) の場合の極限を有限直積，余極限を有限余直積という.

(7) C が完備 $\iff$ 任意の小極限が存在する.

(8) C が余完備 $\iff$ 任意の小余極限が存在する.

(9) C が有限完備 $\iff$ 任意の有限極限が存在する.

(10) C が有限余完備 $\iff$ 任意の有限余極限が存在する.

命題 3. $\mathbf{Set}$ は完備である．実際, 小圏 J と $T \in \mathbf{Set}^J$ に対して $\lim T \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}^J}(\Delta 1, T)$ である.

証明. $j \in J$ とする．$\alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}^J}(\Delta 1, T)$ を取る．$\alpha_j\colon 1 = \{*\} \to Tj$ が定まる．そこで $\pi_j(\alpha) := \alpha_j(*) \in Tj$ と置く．これにより自然変換 $\pi\colon \Delta(\mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}^J}(\Delta 1, T)) \Rightarrow T$ が定まる．これが普遍射であることを示せばよい．その為に集合 x と自然変換 $\sigma\colon \Delta x \Rightarrow T$ を取る.

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}(\Delta 1, T) & & \Delta(\mathrm{Hom}(\Delta 1, T)) \arrow[r, "\pi"] & T \\
x \arrow[u, dashed, "f"] & & \Delta x \arrow[u, dashed, "\Delta f"] \arrow[ur, "\sigma"'] &
\end{tikzcd}
$$

このとき写像 $f\colon x \to \mathrm{Hom}(\Delta 1, T)$ を次のように定める．$a \in x$ に対して $f(a)\colon \Delta 1 \Rightarrow T$ を $f(a)_j\colon 1 \ni * \mapsto \sigma_j(a) \in Tj$ で定める．このとき $\pi \circ \Delta f = \sigma$ である.

$\because$) $j \in J$，$a \in x$ に対して

$$(\pi \circ \Delta f)_j(a) = \pi_j \circ f(a) = \pi_j(f(a)) = f(a)_j(*) = \sigma_j(a).$$

[*1] 数学でよく出てくる射影極限 (projective limit)・逆極限 (inverse limit) は極限で, 帰納極限 (inductive limit)・直極限 (direct limit)・順極限は余極限である.

逆に $\pi \circ \Delta f = \sigma$ となるような f が一意であることもわかる．故に π が普遍射であり，$\lim T \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}^J}(\Delta 1, T)$ となる． $\square$

命題 4. **Set** は余完備である．

証明. J を小圏，$T \in \mathbf{Set}^J$ を関手とする．$x := \displaystyle\coprod_{j \in J} Tj$ とする．$a \in Tj$，$b \in Tk$ に対して

$$aRb \iff \text{ある } f \in \mathrm{Hom}_J(j,k) \text{ が存在して } (Tf)(a) = b \text{ となる}$$

と定めれば，この R は x 上の二項関係を定める．R を含む最小の同値関係を $\sim$ として $y := x/{\sim}$ とおく．$y = \operatorname{colim} T$ であることを示す．

その為に任意の集合 z と自然変換 $\theta \colon T \Rightarrow \Delta z$ を取る．$x = \coprod Tj$ の普遍性により射 $h \colon x \to z$ が一意に延びる．

$$\begin{tikzcd}
Tj \arrow[d, "Tf"'] \arrow[dr] \arrow[drr, bend left, "\theta_j"] & & \\
Tk \arrow[r] \arrow[rr, bend right, "\theta_k"'] & x \arrow[r, dashed, "h"] & z
\end{tikzcd}$$

このとき定義から明らかに，$a, b \in x$ に対して「$a \sim b$ ならば $h(a) = h(b)$」である．故に射 $y \to z$ が自然に定まる． $\square$

この証明は次のように一般化される．

定理 5. 小余直積と coequalizer を持つ圏 C は余完備である．

証明. J を小圏, $T \colon J \to C$ を関手とする．仮定より $\displaystyle\coprod_{j \in \mathrm{Ob}(J)} Tj$ と $\displaystyle\coprod_{f \in \mathrm{Mor}(J)} T(\operatorname{dom} f)$ が存在する．各 $f \in \mathrm{Mor}(J)$ に対して $\operatorname{dom} f = j$ となる $j \in \mathrm{Ob}(J)$ が一意に定まるから，$\mathrm{id} \colon T(\operatorname{dom} f) \to Tj$ により射 $p \colon \displaystyle\coprod_{f \in \mathrm{Mor}(J)} T(\operatorname{cod} f) \to \coprod_{j \in \mathrm{Ob}(J)} Tj$ が余直積の普遍性により定まる．

$$\begin{tikzcd}
\displaystyle\coprod_{f \in \mathrm{Mor}(J)} T(\operatorname{dom} f) \arrow[r, dashed, "p"'] & \displaystyle\coprod_{j \in \mathrm{Ob}(J)} Tj \\
T(\operatorname{dom} f) \arrow[u, "i_f"] \arrow[r, "\mathrm{id}"'] & Tj \arrow[u, "i_j"']
\end{tikzcd}$$

一方，各 $f \in \mathrm{Mor}(J)$ に対して $\mathrm{cod}\, f = k$ となる $k \in \mathrm{Ob}(J)$ が一意に定まるから，射 $Tf\colon T(\mathrm{dom}\, f) \to Tk$ により射 $q\colon \displaystyle\coprod_{f\in\mathrm{Mor}(J)} T(\mathrm{dom}\, f) \to \coprod_{j\in\mathrm{Ob}(J)} Tj$ が余直積の普遍性により定まる．

$$
\begin{tikzcd}
T(\mathrm{dom}\, f) \arrow[r, "Tf"] \arrow[d, "i_f"'] & Tk \arrow[d, "i_k"] \\
\displaystyle\coprod_{f\in\mathrm{Mor}(J)} T(\mathrm{dom}\, f) \arrow[r, dashed, "q"] & \displaystyle\coprod_{j\in\mathrm{Ob}(J)} Tj
\end{tikzcd}
$$

仮定より p, q の coequalizer $e\colon \displaystyle\coprod_{j\in\mathrm{Ob}(J)} Tj \to x$ が存在する．$\eta_j := (Tj \to \coprod Tj \xrightarrow{e} x)$ と定める．

$$
\begin{tikzcd}
T(\mathrm{dom}\, f) \arrow[r, "Tf"] \arrow[d, "i_f"'] & Tk \arrow[d, "i_k"'] \arrow[dr, dashed, bend left, "\eta_k"] & \\
\displaystyle\coprod_{f\in\mathrm{Mor}(J)} T(\mathrm{dom}\, f) \arrow[r, shift left, "q"] \arrow[r, shift right, "p"'] & \displaystyle\coprod_{j\in\mathrm{Ob}(J)} Tj \arrow[r, dashed, "e"] & x \\
T(\mathrm{dom}\, f) \arrow[u, "i_f"] \arrow[r, "\mathrm{id}"'] & Tj \arrow[u, "i_j"'] \arrow[ur, dashed, bend right, "\eta_j"'] &
\end{tikzcd}
$$

このとき η は自然変換 $\eta\colon T \Rightarrow \Delta x$ である．

∵) $f\colon j \to k$ を T の射とする．$\eta_k \circ Tf = \eta_j$ を示せばよい．まず上の図式の上半分，下半分の可換性から $\eta_k \circ Tf = e \circ q \circ i_f$，$\eta_j = \eta_j \circ \mathrm{id}_{Tj} = e \circ p \circ i_f$ が分かる．e が p, q の equalizer だったから $e \circ p = e \circ q$ である．従って $\eta_j = \eta_k \circ Tf$ となる．

η が T から Δ への普遍射であることを示せばよい．その為に $\sigma\colon T \Rightarrow \Delta c$ を取る．このとき $\sigma_j\colon Tj \to c$ と coproduct の普遍性から $g\colon \coprod Tj \to c$ が得られる．

$$
\begin{tikzcd}
T(\mathrm{dom}\, f) \arrow[r, "Tf"] \arrow[d] & Tk \arrow[d] \arrow[dr, "\eta_k"] \arrow[drr, bend left, "\sigma_k"] & & \\
\displaystyle\coprod_{f\in\mathrm{Mor}(J)} T(\mathrm{dom}\, f) \arrow[r, shift left, "q"] \arrow[r, shift right, "p"'] & \displaystyle\coprod_{j\in\mathrm{Ob}(J)} Tj \arrow[r, "e"] \arrow[rr, dashed, bend right, "g"'] & x & c \\
T(\mathrm{dom}\, f) \arrow[u] \arrow[r, "\mathrm{id}"'] & Tj \arrow[u] \arrow[ur, "\eta_j"] \arrow[urr, bend right, "\sigma_j"'] & &
\end{tikzcd}
$$

$g \circ p = g \circ q$ である．

∵) $f\colon j \to k$ を取る．g の取り方から $\sigma_j = g \circ p \circ i_f$，$\sigma_k \circ Tf = g \circ q \circ i_f$ となる．今 σ が自然変換だから $\sigma_j = \sigma_k \circ Tf$ である。故に $g \circ p \circ i_f = g \circ q \circ i_f$ が成り立つ．よって $\coprod T(\operatorname{dom} f)$ の普遍性から $g \circ p = g \circ q$ である．

よって coequalizer の普遍性から $h\colon x \to c$ が一意に存在して $h \circ e = g$ となる．このとき

$$(\Delta h \circ \eta)_j = h \circ \eta_j = h \circ e \circ i_j = g \circ i_j = \sigma_j$$

である．よって $\Delta h \circ \eta = \sigma$ である． □

双対を考えれば次も分かる．

定理 6. 小直積と equalizer を持つ圏は完備である． □

同様にして

定理 7. 有限直積と equalizer を持つ圏は有限完備であり，有限余直積と coequalizer を持つ圏は有限余完備である． □

$T\colon I \times J \to C$ を関手とする．$i \in I$ とすれば $T(i,-)\colon J \to C$ は関手である．よってこの関手の余極限 $\langle \operatorname{colim} T(i,-), \mu_i \rangle$ を考えることができる．（ここで μ_i は自然変換 $T(i,-) \Rightarrow \Delta(\operatorname{colim} T(i,-))$ で，各 $k \in J$ に対して $(\mu_i)_k\colon T(i,k) \to \operatorname{colim} T(i,-)$ は C の射となる．）

定理 8. 各 $i \in I$ に対して余極限 $\langle \operatorname{colim} T(i,-), \mu_i \rangle$ が存在するとき，関手 $F\colon I \to C$ が一意に存在して，以下の条件を満たす．

(1) $i \in I$ に対して $F(i) = \operatorname{colim} T(i,-)$ となる．
(2) $(\mu_i)_k\colon T(i,k) \to F(i)$ が自然変換 $(\mu_-)_k\colon T(-,k) \Rightarrow F$ を定める

証明. $i_0, i_1 \in I$，$j_0, j_1 \in J$，$f\colon i_0 \to i_1$，$g\colon j_0 \to j_1$ とする．次は可換である．

$$\begin{tikzcd}
T(i_0, j_0) \arrow[r, "T(\mathrm{id}, g)"] \arrow[d, "T(f, \mathrm{id})"'] & T(i_0, j_1) \arrow[d, "T(f, \mathrm{id})"] \\
T(i_1, j_0) \arrow[r, "T(\mathrm{id}, g)"'] & T(i_1, j_1)
\end{tikzcd}$$

一方次が可換である．

$$
\begin{tikzcd}
T(i_0,j_0) \arrow[rr, "T(\mathrm{id},g)"] \arrow[dr, "(\mu_{i_0})_{j_0}"'] & & T(i_0,j_1) \arrow[dl, "(\mu_{i_0})_{j_1}"] \\
& \operatorname{colim} T(i_0,-) &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
T(i_1,j_0) \arrow[rr, "T(\mathrm{id},g)"] \arrow[dr, "(\mu_{i_1})_{j_0}"'] & & T(i_1,j_1) \arrow[dl, "(\mu_{i_1})_{j_1}"] \\
& \operatorname{colim} T(i_1,-) &
\end{tikzcd}
$$

これらを組み合わせて次の図式の実線部を得る．

$$
\begin{tikzcd}
F(i_0) = \operatorname{colim}_j T(i_0,j) \arrow[rr, dashed, "F(f)"] & & \operatorname{colim}_j T(i_1,j) = F(i_1) & \\
& T(i_0,j_1) \arrow[ul, "(\mu_{i_0})_{j_1}"'] \arrow[rr, "T(f,\mathrm{id})"] & & T(i_1,j_1) \arrow[ul, "(\mu_{i_1})_{j_1}"'] \\
T(i_0,j_0) \arrow[uu, "(\mu_{i_0})_{j_0}"] \arrow[ur, "T(\mathrm{id},g)"'] \arrow[rr, "T(f,\mathrm{id})"'] & & T(i_1,j_0) \arrow[uu, "(\mu_{i_1})_{j_0}"] \arrow[ur, "T(\mathrm{id},g)"'] &
\end{tikzcd}
$$

実線部は全て可換だから，余極限の普遍性により点線の射が得られる．これを $F(f)$ と定める．すると $F\colon I \to C$ は関手である．

$\because$) $F(f_1 \circ f_0) = Ff_1 \circ Ff_0$ と $F(\mathrm{id}) = \mathrm{id}$ を示せばよい．

　$f_0\colon i_0 \to i_1$，$f_1\colon i_1 \to i_2$ を I の射とする．$F(f_0)$，$F(f_1)$，$F(f_1 \circ f_0)$ は次の図式により定義されるのであった．

$$
\begin{tikzcd}
F(i_0) \arrow[rr, dashed, "F(f_0)"'] \arrow[rrrr, dashed, bend left, "F(f_1 \circ f_0)"] & & F(i_1) \arrow[rr, dashed, "F(f_1)"'] & & F(i_2) & \\
& T(i_0,j_1) \arrow[ul] \arrow[rr, "T(f_0,\mathrm{id})"] & & T(i_1,j_1) \arrow[ul] \arrow[rr, "T(f_1,\mathrm{id})"] & & T(i_2,j_0) \arrow[ul] \\
T(i_0,j_0) \arrow[uu] \arrow[ur] \arrow[rr, "T(f_0,\mathrm{id})"'] & & T(i_1,j_0) \arrow[uu] \arrow[ur] \arrow[rr, "T(f_1,\mathrm{id})"'] & & T(i_2,j_0) \arrow[uu] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
$$

この図式は可換だから，余極限の普遍性により $F(f_1) \circ F(f_0) = F(f_1 \circ f_0)$ である．同様に余極限の普遍性により $F(\mathrm{id}) = \mathrm{id}$ も分かる．

　F の定義の仕方から，$(\mu_-)_k\colon T(-,k) \Rightarrow F$ は自然変換である．また余極限の普遍性から，このような F は一意であることも分かる．　□

定理 8 によって得られる関手 F は $\operatorname{colim} T(\Box, -)\colon I \to C$ とでも書くべき関手となるが，このように書いてしまうと何が何なのか分からなくなってしまう．そこで，関手 $G\colon I \to C$ に対して $\operatorname{colim}_i Gi := \operatorname{colim} G$ のように「動かす変数」を colim の添え字で表すことにすると，定理 8 で得られた関手 F は $\operatorname{colim}_j T(-, j)$ で表すことができる．

さて，更にこの関手の余極限 $\operatorname{colim}(\operatorname{colim}_j T(-, j)) = \operatorname{colim}_i(\operatorname{colim}_j T(i, j))$ を考えることができるが，一方「i と j を同時に動かした」ときの余極限 $\operatorname{colim}_{\langle i,j\rangle} T(i, j)(= \operatorname{colim} T)$ を考えることもできる．

定理 9. $T\colon I \times J \to C$ を関手として各 $i \in I$ に対して余極限 $\operatorname{colim}_j T(i, j)$ が存在するとする．このとき，$\operatorname{colim}_i(\operatorname{colim}_j T(i, j))$ と $\operatorname{colim}_{\langle i,j\rangle} T(i, j)$ のうちどちらか一方が存在すればもう一方も存在し，$\operatorname{colim}_i(\operatorname{colim}_j T(i, j)) \cong \operatorname{colim}_{\langle i,j\rangle} T(i, j)$ が成り立つ．

証明．$\operatorname{colim}_i(\operatorname{colim}_j T(i, j))$ が存在したとする．これが T の余極限となっていることを示そう．その為に任意の自然変換 $\varphi\colon T \Rightarrow \Delta x$ を取る．

$$
\begin{tikzcd}
 & & & x & & & \\
 & & & \operatorname{colim}_i(\operatorname{colim}_j T(i,j)) \arrow[u, dashed, "h"] & & & \\
 & \operatorname{colim}_j T(i_0,j) \arrow[urr] \arrow[rrrr] \arrow[uurr, dashed, bend left, "\psi_{i_0}"] & & & & \operatorname{colim}_j T(i_1,j) \arrow[ull] \arrow[uull, dashed, bend right, "\psi_{i_1}"'] & \\
 & & T(i_0,j_1) \arrow[ul] \arrow[rrrr, "{T(f,\mathrm{id})}"] & & & & T(i_1,j_1) \arrow[ul] \arrow[uuulll, bend right, "\varphi_{i_1 j_1}"'] \\
T(i_0,j_0) \arrow[uur] \arrow[urr, "{T(\mathrm{id},g)}"] \arrow[rrrr, "{T(f,\mathrm{id})}"'] \arrow[uuuurrr, bend left, "\varphi_{i_0 j_0}"] & & & & T(i_1,j_0) \arrow[uur] \arrow[urr, "{T(\mathrm{id},g)}"'] & &
\end{tikzcd}
$$

$\operatorname{colim}_j T(i, j)$ の普遍性から，$\psi_i\colon \operatorname{colim}_j T(i, j) \to x$ が存在して図式が可換となる．故に $\operatorname{colim}_i(\operatorname{colim}_j T(i, j))$ の普遍性から $h\colon \operatorname{colim}_i(\operatorname{colim}_j T(i, j)) \to x$ が存在して図式が可換となる．普遍性から，このような h は明らかに一意である．従って $\operatorname{colim}_i(\operatorname{colim}_j T(i, j))$ が T の余極限であることが分かった．

逆に $\operatorname{colim}_{\langle i,j\rangle} T(i,j)$ が存在したとする．

$$
\begin{tikzcd}
 & & & \operatorname{colim}_{\langle i,j\rangle} T(i,j) & & & \\
 & \operatorname{colim}_j T(i_0,j) \arrow[urr, dashed, "\nu_{i_0}"] \arrow[rrrr] & & & & \operatorname{colim}_j T(i_1,j) \arrow[ull, dashed, "\nu_{i_1}"'] & \\
 & & T(i_0,j_1) \arrow[ul] \arrow[uur] \arrow[rrrr, "{T(f,\mathrm{id})}"] & & & & T(i_1,j_1) \arrow[ul] \arrow[uulll] \\
T(i_0,j_0) \arrow[uur, "(\mu_{i_0})_{j_0}"] \arrow[uuurrr] \arrow[urr, "{T(\mathrm{id},g)}"'] \arrow[rrrr, "{T(f,\mathrm{id})}"'] & & & & T(i_1,j_0) \arrow[uuul] \arrow[uur] \arrow[urr, "{T(\mathrm{id},g)}"'] & &
\end{tikzcd}
$$

$\operatorname{colim}_j T(i,j)$ の普遍性から，$\nu_i\colon \operatorname{colim}_j T(i,j) \to \operatorname{colim}_{\langle i,j\rangle} T(i,j)$ が存在し可換となる．$\langle \operatorname{colim}_{\langle i,j\rangle} T(i,j), \nu\rangle$ が $\operatorname{colim}_j T(-,j)$ の余極限になることを示そう．その為に任意の自然変換 $\varphi\colon \operatorname{colim}_j T(-,j) \Rightarrow \Delta x$ を取る．

$$
\begin{tikzcd}
 & & & x & & & \\
 & & & \operatorname{colim}_{\langle i,j\rangle} T(i,j) \arrow[u, dashed, "h"] & & & \\
 & \operatorname{colim}_j T(i_0,j) \arrow[uurr, bend left, "\varphi_{i_0}"] \arrow[urr, "\nu_{i_0}"] \arrow[rrrr] & & & & \operatorname{colim}_j T(i_1,j) \arrow[uull, bend right, "\varphi_{i_1}"'] \arrow[ull, "\nu_{i_1}"'] & \\
 & & T(i_0,j_1) \arrow[ul] \arrow[uur] \arrow[rrrr, "{T(f,\mathrm{id})}"] & & & & T(i_1,j_1) \arrow[ul] \arrow[uulll] \\
T(i_0,j_0) \arrow[uur, "(\mu_{i_0})_{j_0}"] \arrow[uuurrr] \arrow[urr, "{T(\mathrm{id},g)}"'] \arrow[rrrr, "{T(f,\mathrm{id})}"'] & & & & T(i_1,j_0) \arrow[uuul] \arrow[uur] \arrow[urr, "{T(\mathrm{id},g)}"'] & &
\end{tikzcd}
$$

するとこの図式の実線部は可換だから，$\operatorname{colim}_{\langle i,j\rangle} T(i,j)$ の普遍性により射 $h\colon \operatorname{colim}_{\langle i,j\rangle} T(i,j) \to x$ が存在して可換となる．このような h は一意だから $\operatorname{colim}_{\langle i,j\rangle} T(i,j)$ が $\operatorname{colim}_j T(-,j)$ の余極限であることが分かった． □

よって，(各余極限が存在すれば) $\operatorname{colim}_i(\operatorname{colim}_j T(i,j)) \cong \operatorname{colim}_j(\operatorname{colim}_i T(i,j))$ となることが分かる．即ち，余極限の順序は交換可能である．双対を考えれば，同様のことが極限についても成り立つことが分かる．

さて，再び $T\colon I \times J \to C$ を関手とする．このとき関手 $\widetilde{T}\colon I \to C^J$ が得られるので

あった (「自然変換・関手圏」の PDF を参照．)．よってこの余極限 $\operatorname{colim}\widetilde{T} \in C^J$ も考えることができる．

定理 10. $T\colon I \times J \to C$ を関手として，$j \in J$ に対して余極限 $\langle \operatorname{colim}_i T(i,j), \mu_j \rangle$ が存在するとする．このとき $\operatorname{colim}\widetilde{T}\colon J \to C$ も存在し，$j \in J$ に対して $(\operatorname{colim}\widetilde{T})(j) \cong \operatorname{colim}_i T(i,j)$ が成り立つ．即ちこの場合，$\widetilde{T}$ の余極限は各点ごとに計算すればよい．

証明.

$$
\begin{tikzcd}
 & \operatorname{colim}_i T(i,j_0) \arrow[rrr, "\operatorname{colim}_i T(i,g)"] & & & \operatorname{colim}_i T(i,j_1) & \\
 & & T(i_1,j_0) \arrow[ul, "(\mu_{j_0})_{i_1}"'] \arrow[rrr, "T(\mathrm{id},g)"] & & & T(i_1,j_1) \arrow[ul, "(\mu_{j_1})_{i_1}"'] \\
T(i_0,j_0) \arrow[uur, "(\mu_{j_0})_{i_0}"] \arrow[urr, "T(f,\mathrm{id})"'] \arrow[rrr, "T(\mathrm{id},g)"'] & & & T(i_0,j_1) \arrow[uur, "(\mu_{j_1})_{i_0}"] \arrow[urr, "T(f,\mathrm{id})"'] & &
\end{tikzcd}
$$

$P\colon J \to C$ を関手，$\nu\colon \widetilde{T} \Rightarrow \Delta(P)$ を自然変換とする．$i \in I$ に対して $\nu_i\colon \widetilde{T}(i) \Rightarrow P$ も自然変換である．$j \in J$ に対して $(\nu_i)_j\colon T(i,j) \to Pj$ となる．次の実線の可換図式を得る．

$$
\begin{tikzcd}
 & Pj_0 \arrow[rrr, "Pg"] & & & Pj_1 & \\
 & \operatorname{colim}_i T(i,j_0) \arrow[u, dashed, "\kappa_{j_0}"] \arrow[rrr] & & & \operatorname{colim}_i T(i,j_1) \arrow[u, dashed, "\kappa_{j_1}"] & \\
 & & T(i_1,j_0) \arrow[ul] \arrow[uul, bend right, "(\nu_{i_1})_{j_0}"'] \arrow[rrr] & & & T(i_1,j_1) \arrow[ul] \arrow[uul, bend right, "(\nu_{i_1})_{j_1}"'] \\
T(i_0,j_0) \arrow[uur] \arrow[uuur, bend left, "(\nu_{i_0})_{j_0}"] \arrow[urr, "T(f,\mathrm{id})"'] \arrow[rrr, "T(\mathrm{id},g)"'] & & & T(i_0,j_1) \arrow[uur] \arrow[uuur, bend left, "(\nu_{i_0})_{j_1}"] \arrow[urr, "T(f,\mathrm{id})"'] & &
\end{tikzcd}
$$

よって余極限の普遍性から $\kappa_j\colon \operatorname{colim}_i T(i,j) \to Pj$ を得る．これで得られた四角

$$
\begin{tikzcd}
Pj_0 \arrow[r, "Pg"] & Pj_1 \\
\operatorname{colim}_i T(i,j_0) \arrow[u, "\kappa_{j_0}"] \arrow[r, "\operatorname{colim}_i T(i,g)"'] & \operatorname{colim}_i T(i,j_1) \arrow[u, "\kappa_{j_1}"']
\end{tikzcd}
$$

は，余極限の普遍性により可換である．従って $\kappa\colon \operatorname{colim}_i T(i,-) \Rightarrow P$ は自然変換である．このような自然変換 κ は，余極限 $\operatorname{colim}_i T(i,j)$ の普遍性から一意的であることが分かるから，$\widetilde{T} \Rightarrow \Delta(\operatorname{colim}_i T(i,-))$ は普遍射であり，$(\operatorname{colim} \widetilde{T})(j) \cong \operatorname{colim}_i T(i,j)$ が分かった． $\square$

系 11. 圏 D が余完備ならば D^C も余完備である．双対的に，圏 D が完備ならば D^C も完備である． $\square$

例 12. 圏 C に対して $\widehat{C} = \mathbf{Set}^{C^{\mathrm{op}}}$ は完備かつ余完備である． $\square$

例 13. $\widetilde{T}\colon I \to C^J$ の余極限が存在したとしても，$\operatorname{colim}_i T(i,j)$ が存在するとは限らない．例えば $J = \mathbf{2}$ として，圏 C を

$$a \xrightarrow{h} b \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} c$$

で $f \circ h = g \circ h$ を満たすものとする．$C^J = C^{\mathbf{2}}$ は C の arrow category である．$C^{\mathbf{2}}$ の次の図式を考える．(縦向きの射が $C^{\mathbf{2}}$ の対象である．)

$$\begin{tikzcd}
 & c \arrow[rr, "\mathrm{id}_c"] & & c \\
b \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "f"'] & & c \arrow[ur, "\mathrm{id}_c"'] & \\
 & b \arrow[uu, "g"] \arrow[rr, "\mathrm{id}_b"] & & b \arrow[uu, "g"'] \\
a \arrow[uu, "h"] \arrow[ur, "h"] \arrow[rr, "h"'] & & b \arrow[uu, "g"'] \arrow[ur, "\mathrm{id}_b"'] &
\end{tikzcd}$$

この図式は pushout を与えていることが分かる．この図式で，底面の四角が $0 \in \mathbf{2}$ 成分であるが，圏 C において $b \xleftarrow{h} a \xrightarrow{h} b$ の pushout は存在しない． $\square$

定義. 関手 $F\colon C \to \mathbf{Set}$ が表現可能関手 (representable functor)
$\Longleftrightarrow$ ある対象 $a \in C$ と自然同型 $F \cong \mathrm{Hom}_C(a,-)$ が存在する．
また，このとき a は F を表現するという．

命題 14. 表現可能関手 F を表現する対象は同型を除いて一意である．

証明. $F \cong \mathrm{Hom}_C(a,-) \cong \mathrm{Hom}_C(b,-)$ とすれば米田の補題により $a \cong b$ である． $\square$

定理 15. $G\colon D \to C$ を関手として，$c \in C$ を取る．このとき
c から G への普遍射が存在する $\Longleftrightarrow \mathrm{Hom}_C(c, G(-))$ が表現可能関手.

証明. ($\Longrightarrow$) $f\colon c \to Gr$ を普遍射とする．このとき $\mathrm{Hom}(c, G(-)) \cong \mathrm{Hom}(r, -)$ であることを示す．

$d \in D$ に対して $\varphi_d\colon \mathrm{Hom}(c, Gd) \to \mathrm{Hom}(r, d)$ を，$g \in \mathrm{Hom}(c, Gd)$ に対して普遍性により対応する射 $r \to d$ により定める (次の図)．

$$\begin{tikzcd} c \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g"'] & Gr \arrow[d, dashed, "G\varphi_d(g)"] & r \arrow[d, dashed, "\varphi_d(g)"] \\ & Gd & d \end{tikzcd}$$

このとき φ は自然変換である．普遍射の性質から明らかに φ は同型である．

($\Longleftarrow$) $\varphi\colon \mathrm{Hom}(c, G(-)) \cong \mathrm{Hom}(r, -)$ を自然同型とする．すると $\varphi_r\colon \mathrm{Hom}(c, Gr) \cong \mathrm{Hom}(r, r)$ が同型であるから，$f := \varphi_r^{-1}(\mathrm{id}_r) \in \mathrm{Hom}(c, Gr)$ が取れる．$f\colon c \to Gr$ が普遍射であることを示す．

その為に $g\colon c \to Gd$ とする．$\varphi_d\colon \mathrm{Hom}(c, Gd) \cong \mathrm{Hom}(r, d)$ を使って $h := \varphi_d(g) \in \mathrm{Hom}(r, d)$ と定義する．このとき φ の自然性から次が可換となる．

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}(c, Gr) \arrow[d, "Gh\circ -"'] & \mathrm{Hom}(r, r) \arrow[l, "\varphi_r^{-1}"'] \arrow[d, "h\circ -"] \\ \mathrm{Hom}(c, Gd) & \mathrm{Hom}(r, d) \arrow[l, "\varphi_d^{-1}"] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} f \arrow[d, mapsto, "Gh\circ -"'] & \mathrm{id}_r \arrow[l, mapsto, "\varphi_r^{-1}"'] \arrow[dd, mapsto, "h\circ -"] \\ Gh \circ f & \\ g & h \arrow[l, mapsto, "\varphi_d^{-1}"] \end{tikzcd}$$

故に $Gh \circ f = g$ で，このような h は明らかに一意だから $f\colon c \to Gr$ が普遍射であることが分かった． □

双対を考えれば

定理 16. $F\colon C \to D$ を関手として，$d \in D$ を取る．このとき
F から d への普遍射が存在する $\Longleftrightarrow$ $\mathrm{Hom}_D(F(-), d)$ が表現可能関手． □

例 17. C を圏，$\Delta\colon C \to C \times C$ を対角関手とすると，Δ から $\langle a, b\rangle \in C \times C$ への普遍射が直積であった．よって直積 $a \times b$ が存在すれば $\mathrm{Hom}(\Delta(-), \langle a, b\rangle)$ は表現可能関手である．定理 15 の証明から $\mathrm{Hom}(\Delta(-), \langle a, b\rangle) \cong \mathrm{Hom}(-, a \times b)$ となることが分かる．特に $x \in C$ に対して $\mathrm{Hom}(\langle x, x\rangle, \langle a, b\rangle) \cong \mathrm{Hom}(x, a \times b)$ である．ここで圏の直積の定義から $\mathrm{Hom}(\langle x, x\rangle, \langle a, b\rangle) = \mathrm{Hom}(x, a) \times \mathrm{Hom}(x, b)$ となるので $\mathrm{Hom}(x, a \times b) \cong$

$\mathrm{Hom}(x,a)\times\mathrm{Hom}(x,b)$ である．故に，直積を取る操作と $\mathrm{Hom}(x,-)$ を適用する操作は可換である．

逆に $\mathrm{Hom}(\Delta(-),\langle a,b\rangle)\cong\mathrm{Hom}(-,r)$ となるような $r\in C$ が存在するならば，定理 15 の証明より $r\cong a\times b$ となることが分かる．また圏の直積の定義から $\mathrm{Hom}(\Delta(-),\langle a,b\rangle)\cong\mathrm{Hom}(-,a)\times\mathrm{Hom}(-,b)$ が分かるから，直積 $a\times b$ とは関手 $\mathrm{Hom}(-,a)\times\mathrm{Hom}(-,b)$ を表現する対象である． □

定義. $T\colon J\to C$，$F\colon C\to D$ を関手とし，T の極限 $\langle\lim T,\pi\rangle$ が存在するとする．F が極限 $\langle\lim T,\pi\rangle$ と交換するとは，$\langle F(\lim T),F\pi\rangle$ が FT の極限となることを言う．余極限との交換も同様に定義する．

定理 18. $\mathrm{Hom}_C(c,-)$ は任意の極限と交換する．

証明. J を圏，$T\colon J\to C$ を関手として，T の極限 $\langle\lim T,\pi\rangle$ が存在するとする．次の図式が関手 $\mathrm{Hom}(c,T-)\colon J\to\mathbf{Set}$ の極限を与えることを示せばよい．

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}(c,Tj) \arrow[dd, "Tf\circ-"'] & \\
& \mathrm{Hom}(c,\lim T) \arrow[ul, "\pi_j\circ-"'] \arrow[dl, "\pi_k\circ-"] \\
\mathrm{Hom}(c,Tk) &
\end{tikzcd}$$

その為に任意の $x\in\mathbf{Set}$ と自然変換 $\theta\colon\Delta x\Rightarrow\mathrm{Hom}_C(c,T-)$ を取る．

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_C(c,Tj) \arrow[dd, "Tf\circ-"'] & & \\
& \mathrm{Hom}_C(c,\lim T) \arrow[ul, "\pi_j\circ-"'] \arrow[dl, "\pi_k\circ-"] & x \arrow[ull, bend right, "\theta_j"'] \arrow[dll, bend left, "\theta_k"] \\
\mathrm{Hom}_C(c,Tk) & &
\end{tikzcd}$$

可換性から，任意の $a\in x$ に対して $Tf\circ(\theta_j(a))=\theta_k(a)$ である．即ち次の図式の外側の三角形が可換であり，よって $\lim T$ の普遍性から $h(a)\colon c\to\lim T$ が一意に存在して可換

となる．

$$
\begin{tikzcd}
Tj \arrow[dd, "Tf"'] & & \\
& \lim T \arrow[ul, "\pi_j"'] \arrow[dl, "\pi_k"] & c \arrow[l, dashed, "h(a)"] \arrow[ull, bend right, "\theta_j(a)"'] \arrow[dll, bend left, "\theta_k(a)"] \\
Tk & &
\end{tikzcd}
$$

この $h(a)$ は写像 $h\colon x \to \mathrm{Hom}_C(c, \lim T)$ を与える．次の図式が可換になることを示せばよい．

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_C(c, Tj) \arrow[dd, "Tf\circ-"'] & & \\
& \mathrm{Hom}_C(c, \lim T) \arrow[ul, "\pi_j\circ-"'] \arrow[dl, "\pi_k\circ-"] & x \arrow[l, dashed, "h"] \arrow[ull, bend right, "\theta_j"'] \arrow[dll, bend left, "\theta_k"] \\
\mathrm{Hom}_C(c, Tk) & &
\end{tikzcd}
$$

即ち，任意の $a \in x$ に対して $\pi_j \circ (h(a)) = \theta_j$ を示せばよいが，それは $h(a)$ の定義から明らか．逆に，このような h の一意性も $h(a)$ の一意性から分かる．

以上により $\langle \mathrm{Hom}_C(c, \lim T), \mathrm{Hom}_C(c, \pi) \rangle$ が $\mathrm{Hom}_C(c, T-)$ の極限である． $\square$

参考文献

[1] Saunders Mac Lane, Categories for the Working Mathematician, Springer, 2nd ed. 1978 版 (1998)

[2] G.M. Kelly, Basic Concepts of Enriched Category Theory, Cambridge University Press, Lecture Notes in Mathematics 64 (1982), section 3.3, `http://tac.mta.ca/tac/reprints/articles/10/tr10abs.html`