極限

alg-d
http://alg-d.com/math/kan_extension/

2020 年 4 月 15 日

定義. C, D を圏，$c \in C$ を対象，$G\colon D \to C$ を関手とする．コンマ圏 $c \downarrow G$ の始対象を c から G への普遍射 (universal arrow) という．即ち，以下を満たす組 $\langle d, f\rangle$ のことである．

(1) d は D の対象である．
(2) f は C の射 $f\colon c \to Gd$ である．
(3) 組 $\langle d', f'\rangle$ が同じ条件 (即ち $d' \in D$ で $f'\colon c \to Gd'$ となる) を満たすならば，D の射 $g\colon d \to d'$ が一意に存在して $Gg \circ f = f'$ となる．

$$\begin{tikzcd} c \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f'"'] & Gd \arrow[d, dashed, "Gg"] & d \arrow[d, dashed, "g"] \\ & Gd' & d' \end{tikzcd}$$

双対的に，コンマ圏 $G \downarrow c$ の終対象 $\langle d, f\rangle$ を G から c への普遍射という．

$$\begin{tikzcd} d & Gd \arrow[r, "f"] & c \\ d' \arrow[u, dashed, "g"] & Gd' \arrow[u, dashed, "Gg"] \arrow[ur, "f'"'] & \end{tikzcd}$$

例 1. $U\colon \mathbf{Ab} \to \mathbf{Set}$ を忘却関手とする．集合 X で生成される自由アーベル群を FX として標準的な包含写像を $i\colon X \to U(FX)$ とする．このとき FX は以下の性質を満たす: 任意のアーベル群 A と写像 $f\colon X \to U(A)$ に対して，準同型写像 $g\colon FX \to A$ が一意に

存在して $Ug \circ i = f$ を満たす．

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "f"'] & U(FX) \arrow[d, dashed, "Ug"] & FX \arrow[d, dashed, "g"] \\ & U(A) & A \end{tikzcd}$$

即ち，$\langle FX, i\rangle$ は $X \in \mathbf{Set}$ から U への普遍射である．

この意味で「自由アーベル群」は集合からアーベル群を構成する方法としては一番《自然》と言える． $\square$

例 2. C を圏として，$\Delta\colon C \to C \times C$ を対角関手とする．$\langle a, b\rangle \in C \times C$ から Δ への普遍射 $\langle c, \langle f, g\rangle\rangle$ が存在したとする (ここで $\langle f, g\rangle\colon \langle a, b\rangle \to \Delta c$ は $C \times C$ の射である)．つまり，別の射 $\langle f', g'\rangle\colon \langle a, b\rangle \to \Delta c'$ に対して射 $h\colon c \to c'$ が一意に存在して次が可換となる．

$$\begin{tikzcd} \langle a, b\rangle \arrow[r, "{\langle f, g\rangle}"] \arrow[dr, "{\langle f', g'\rangle}"'] & \Delta c \arrow[d, dashed, "\Delta h"] & c \arrow[d, dashed, "h"] \\ & \Delta c' & c' \end{tikzcd}$$

これを圏の直積の定義を思い出して書き直すと，次の可換図式になる．

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f'"'] & c \arrow[d, dashed, "h"] & b \arrow[l, "g"'] \arrow[dl, "g'"] \\ & c' & \end{tikzcd}$$

即ち，$\langle a, b\rangle$ から Δ への普遍射とは余直積 $a \amalg b$ のことである．

同様にして以下の事が分かる．

- $\Delta\colon C \to C \times C$ から $\langle a, b\rangle$ への普遍射が直積 $a \times b$ である．
- $!\colon C \to \mathbf{1} = \{0\}$ を一意に定まる関手として，0 から $!$ への普遍射 $\langle c, f\rangle$ が存在とする．このとき c が始対象である．同様にして $!$ から 0 への普遍射を $\langle c, f\rangle$ とすれば c が終対象である．
- $J := \{* \leftarrow * \rightarrow *\}$ として $\Delta\colon C \to C^J$ を対角関手とすれば，$(a \leftarrow c \to b) \in C^J$ から Δ への普遍射が pushout である．pullback も同様．
- 同様に，$J = \{* \rightrightarrows *\}$ の場合が equalizer, coequalizer である． $\square$

定義. J, C を圏として $\Delta\colon C \to C^J$ を対角関手とする.

(1) 関手 $T\colon J \to C$ を図式 (diagram) という[*1]. また J を図式 T の添え字圏 (index category) という.

(2) Δ から $T \in C^J$ への普遍射 $\langle \lim T, \pi \rangle$ を図式 T の極限 (limit) という.

(3) $T \in C^J$ から Δ への普遍射 $\langle \operatorname{colim} T, \mu \rangle$ を図式 T の余極限 (colimit) という[*2].

定義. (1) 圏 J が有限 $\iff \mathrm{Mor}(J)$ が有限集合.

(2) 圏 J が小圏 (small category) $\iff \mathrm{Mor}(J)$ が集合.

(3) 添え字圏が有限な図式の極限を有限極限 (finite limit), 余極限を有限余極限 (finite colimit) という.

(4) 添え字圏が小圏となる図式の極限を小極限 (small limit), 余極限を小余極限 (small colimit) という.

(5) 添え字圏が集合 (小離散圏) となる図式の極限を小直積 (small product), 余極限を小余直積 (small coproduct) という. この場合, 図式 $T\colon J \to C$ は Tj $(j \in J)$ で決まる. そこで C の対象の族 $\{a_j\}_{j \in J}$ が与えられたとき, $Tj := a_j$ で定まる図式 T の極限を $\displaystyle\prod_{j \in J} a_j$, 余極限を $\displaystyle\coprod_{j \in J} a_j$ と書くことが多い.

(6) 添え字圏が有限集合 (有限離散圏) となる図式の極限を有限直積 (finite product), 余極限を有限余直積 (finite coproduct) という.

(7) C が完備 (complete) $\iff$ 任意の小極限が存在する.

(8) C が余完備 (cocomplete) $\iff$ 任意の小余極限が存在する.

(9) C が有限完備 (finitely complete) $\iff$ 任意の有限極限が存在する.

(10) C が有限余完備 (finitely cocomplete) $\iff$ 任意の有限余極限が存在する.

(11) C が小直積を持つ $\iff$ 任意の小直積が存在する.

(12) C が小余直積を持つ $\iff$ 任意の小余直積が存在する.

(13) C が有限直積を持つ $\iff$ 任意の有限直積が存在する.

(14) C が有限余直積を持つ $\iff$ 任意の有限余直積が存在する.

自然変換 $T \Rightarrow \Delta c$ を余錐 (cocone) と呼ぶ. 従って余極限とは, 普遍性を持つ余錐のことだと言える. 同様に自然変換 $\Delta c \Rightarrow T$ を錐 (cone) といい, 極限とは普遍性を持つ錐のことだと言える. また $\mu\colon T \Rightarrow \Delta c$ が余極限を与えるとき (即ち, $\langle c, \mu \rangle$ が T の余極限の

[*1] 要は図式とは関手と同じ意味なのだが, 図式として扱いたい気持ちのときは図式と呼ぶことが多い.

[*2] 数学でよく出てくる射影極限 (projective limit)・逆極限 (inverse limit) は極限で, 帰納極限 (inductive limit)・直極限 (direct limit)・順極限は余極限である.

とき)，μ を余極限余錐 (colimiting cocone) という．極限の場合も同様に極限錐 (limiting cone) という．[*3]

命題 3. 小圏 J と図式 $T \in \mathbf{Set}^J$ に対して $\lim T \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}^J}(\Delta 1, T)$ である．即ち **Set** は完備である．

証明. $j \in J$ とする．$\alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}^J}(\Delta 1, T)$ を取ると $\alpha_j \colon 1 = \{*\} \to Tj$ が定まる．そこで $\pi_j(\alpha) := \alpha_j(*) \in Tj$ と置く．これにより自然変換 $\pi \colon \Delta(\mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}^J}(\Delta 1, T)) \Rightarrow T$ が定まる．これが普遍射であることを示せばよい．その為に集合 x と自然変換 $\sigma \colon \Delta x \Rightarrow T$ を取る．

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}(\Delta 1, T) \\
x \arrow[u, dashed, "f"]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\Delta(\mathrm{Hom}(\Delta 1, T)) \arrow[r, "\pi"] & T \\
\Delta x \arrow[u, dashed, "\Delta f"] \arrow[ur, "\sigma"'] &
\end{tikzcd}
$$

このとき写像 $f \colon x \to \mathrm{Hom}(\Delta 1, T)$ を次のように定める．$a \in x$ に対して $f(a) \colon \Delta 1 \Rightarrow T$ を $f(a)_j \colon 1 \ni * \mapsto \sigma_j(a) \in Tj$ で定める．このとき $\pi \circ \Delta f = \sigma$ である．

$\because$) $j \in J$，$a \in x$ に対して

$$(\pi \circ \Delta f)_j(a) = \pi_j \circ f(a) = \pi_j(f(a)) = f(a)_j(*) = \sigma_j(a).$$

逆に $\pi \circ \Delta f = \sigma$ となるような f が一意であることも容易にわかる．故に π が普遍射であり，$\lim T \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}^J}(\Delta 1, T)$ となる． □

命題 4. **Set** は余完備である．

証明. まず **Set** が小余直積を持つことは容易に分かる (非交和を取ればよい)．そこで J を小圏，$T \in \mathbf{Set}^J$ を関手とすると余直積 $x := \displaystyle\coprod_{j \in \mathrm{Ob}(J)} Tj$ が存在する．$a \in Tj$，$b \in Tk$ に対して

$$aRb \Longleftrightarrow \text{ある } f \in \mathrm{Hom}_J(j,k) \text{ が存在して } (Tf)(a) = b \text{ となる}$$

と定めれば，この R は x 上の二項関係を定める．R を含む最小の同値関係を $\sim$ とする．このとき $x/{\sim}$ が T の余極限になっていることを示す．

[*3] 但し，[1] では余錐と錐の区別をせずにどちらも錐と呼んでいるようだ．

そのために任意の集合 u と自然変換 $\theta\colon T \Rightarrow \Delta u$ を取る．$x = \coprod_{j\in J} Tj$ の普遍性により射 $h\colon x \to u$ が一意に延びる．

$$\begin{tikzcd}
Tj \arrow[d, "Tf"'] \arrow[dr] \arrow[drr, bend left, "\theta_j"] & & \\
 & x \arrow[r, dashed, "h"] & u \\
Tk \arrow[ur] \arrow[urr, bend right, "\theta_k"'] & &
\end{tikzcd}$$

このとき定義から明らかに，$a, b \in x$ に対して「$a \sim b$ ならば $h(a) = h(b)$」である．故に射 $x/{\sim} \to u$ が自然に定まる． □

この証明は次のように一般化される．

定理 5. 小余直積と coequalizer を持つ圏 C は余完備である．

証明. J を小圏として，$T\colon J \to C$ を図式とする．$\mathrm{Ob}(J)$ と $\mathrm{Mor}(J)$ が集合だから，仮定より余直積 $\left\langle \coprod_{j\in\mathrm{Ob}(J)} Tj, \mu \right\rangle$ と $\left\langle \coprod_{f\in\mathrm{Mor}(J)} T(\mathrm{dom}\, f), \nu \right\rangle$ が存在する．各 $f \in \mathrm{Mor}(J)$ に対して $\mathrm{dom}\, f = j$ となる $j \in \mathrm{Ob}(J)$ が一意に定まるから，$\mathrm{id}\colon T(\mathrm{dom}\, f) \to Tj$ を考えると射 $p\colon \coprod_{f\in\mathrm{Mor}(J)} T(\mathrm{dom}\, f) \to \coprod_{j\in\mathrm{Ob}(J)} Tj$ が余直積の普遍性により定まる．

$$\begin{tikzcd}
\coprod_{f\in\mathrm{Mor}(J)} T(\mathrm{dom}\, f) \arrow[r, dashed, "p"'] & \coprod_{j\in\mathrm{Ob}(J)} Tj \\
T(\mathrm{dom}\, f) \arrow[u, "\nu_f"] \arrow[r, "\mathrm{id}"'] & Tj \arrow[u, "\mu_j"']
\end{tikzcd}$$

一方，各 $f \in \mathrm{Mor}(J)$ に対して $\mathrm{cod}\, f = k$ となる $k \in \mathrm{Ob}(J)$ が一意に定まるから，射 $Tf\colon T(\mathrm{dom}\, f) \to Tk$ を考えると射 $q\colon \coprod_{f\in\mathrm{Mor}(J)} T(\mathrm{dom}\, f) \to \coprod_{j\in\mathrm{Ob}(J)} Tj$ が余直積の普遍性により定まる．

$$\begin{tikzcd}
T(\mathrm{dom}\, f) \arrow[r, "Tf"] \arrow[d, "\nu_f"'] & Tk \arrow[d, "\mu_k"] \\
\coprod_{f\in\mathrm{Mor}(J)} T(\mathrm{dom}\, f) \arrow[r, dashed, "q"] & \coprod_{j\in\mathrm{Ob}(J)} Tj
\end{tikzcd}$$

仮定より p,q の coequalizer $e\colon \coprod_{j\in \mathrm{Ob}(J)} Tj \to c$ が存在する．$\eta_j := (Tj \xrightarrow{\mu_j} \coprod Tj \xrightarrow{e} c)$ と定める．

$$\begin{tikzcd}
T(\operatorname{dom} f) \arrow[rr, "Tf"] \arrow[d, "\nu_f"'] & & Tk \arrow[d, "\mu_k"'] \arrow[dr, "\eta_k"] & \\
\coprod_{f\in \mathrm{Mor}(J)} T(\operatorname{dom} f) \arrow[rr, shift left, "q"] \arrow[rr, shift right, "p"'] & & \coprod_{j\in \mathrm{Ob}(J)} Tj \arrow[r, "e"] & c \\
T(\operatorname{dom} f) \arrow[rr, "\mathrm{id}"'] \arrow[u, "\nu_f"] & & Tj \arrow[u, "\mu_j"] \arrow[ur, "\eta_j"'] &
\end{tikzcd}$$

このとき η は自然変換 $\eta\colon T \Rightarrow \Delta c$ である．

$\because$) $f\colon j \to k$ を T の射とする．$\eta_k \circ Tf = \eta_j$ を示せばよい．まず上の図式の上半分，下半分の可換性から $\eta_k \circ Tf = e\circ q\circ \nu_f$，$\eta_j = \eta_j \circ \mathrm{id}_{Tj} = e\circ p\circ \nu_f$ が分かる．一方 e は p,q の coequalizer だったから $e\circ p = e\circ q$ である．従って $\eta_j = \eta_k \circ Tf$ が分かる．

η が T から Δ への普遍射であることを示せばよい．そのために任意の $\sigma\colon T \Rightarrow \Delta a$ を取る．このとき $\sigma_j\colon Tj \to a$ と coproduct の普遍性から $g\colon \coprod Tj \to a$ が得られる．

$$\begin{tikzcd}
T(\operatorname{dom} f) \arrow[rr, "Tf"] \arrow[d, "\nu_f"'] & & Tk \arrow[d, "\mu_k"'] \arrow[dr, "\eta_k"] \arrow[drr, bend left, "\sigma_k"] & & \\
\coprod_{f\in \mathrm{Mor}(J)} T(\operatorname{dom} f) \arrow[rr, shift left, "q"] \arrow[rr, shift right, "p"'] & & \coprod_{j\in \mathrm{Ob}(J)} Tj \arrow[r, "e"] \arrow[rr, dashed, bend right, "g"'] & c & a \\
T(\operatorname{dom} f) \arrow[rr, "\mathrm{id}"'] \arrow[u, "\nu_f"] & & Tj \arrow[u, "\mu_j"] \arrow[ur, "\eta_j"'] \arrow[urr, bend right, "\sigma_j"'] & &
\end{tikzcd}$$

$g\circ p = g\circ q$ である．

$\because$) $f\colon j \to k$ を取る．g の取り方から $\sigma_j = g\circ p\circ \nu_f$，$\sigma_k \circ Tf = g\circ q\circ \nu_f$ となる．今 σ が自然変換だから $\sigma_j = \sigma_k \circ Tf$ である。故に $g\circ p\circ \nu_f = g\circ q\circ \nu_f$ が成り立つ．よって $\coprod T(\operatorname{dom} f)$ の普遍性から $g\circ p = g\circ q$ である．

よって coequalizer の普遍性から $h\colon c \to a$ が存在して $h\circ e = g$ となる．このとき

$$(\Delta h \circ \eta)_j = h\circ \eta_j = h\circ e\circ \mu_j = g\circ \mu_j = \sigma_j$$

である．よって $\Delta h \circ \eta = \sigma$ である．h の一意性も容易に分かるので，$\langle c, \eta \rangle$ が T の余極限であることが分かった． $\square$

双対を考えれば次も分かる．

定理 6. 小直積と equalizer を持つ圏は完備である． $\square$

同様にして

定理 7. 有限直積と equalizer を持つ圏は有限完備であり，有限余直積と coequalizer を持つ圏は有限余完備である． $\square$

$T\colon I \times J \to C$ を関手とする．$i \in I$ とすれば $T(i,-)\colon J \to C$ は関手である．よってこの関手の余極限 $\langle \operatorname{colim} T(i,-), \mu_i \rangle$ を考えることができる．念のため確認しておくと，この μ_i は自然変換 $T(i,-) \Rightarrow \Delta(\operatorname{colim} T(i,-))$ であり各 $k \in J$ に対して $(\mu_i)_k$ は C の射 : $T(i,k) \to \operatorname{colim} T(i,-)$ となる．

定理 8. 各 $i \in I$ に対して余極限 $\langle \operatorname{colim} T(i,-), \mu_i \rangle$ が存在するとき，関手 $F\colon I \to C$ が一意に存在して，以下の条件を満たす．

(1) $i \in I$ に対して $F(i) = \operatorname{colim} T(i,-)$ となる．

(2) $(\mu_i)_k\colon T(i,k) \to F(i)$ が自然変換 $(\mu_-)_k\colon T(-,k) \Rightarrow F$ を定める

証明. $i_0, i_1 \in I$，$j_0, j_1 \in J$，$f\colon i_0 \to i_1$，$g\colon j_0 \to j_1$ とする．次は可換である．

$$\begin{tikzcd}
T(i_0, j_0) \arrow[r, "T(\mathrm{id}, g)"] \arrow[d, "T(f, \mathrm{id})"'] & T(i_0, j_1) \arrow[d, "T(f, \mathrm{id})"] \\
T(i_1, j_0) \arrow[r, "T(\mathrm{id}, g)"'] & T(i_1, j_1)
\end{tikzcd}$$

一方次が可換である．

$$\begin{tikzcd}
T(i_0, j_0) \arrow[r, "T(\mathrm{id}, g)"] \arrow[dr, "(\mu_{i_0})_{j_0}"'] & T(i_0, j_1) \arrow[d, "(\mu_{i_0})_{j_1}"] \\
& \operatorname{colim} T(i_0, -)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
T(i_1, j_0) \arrow[r, "T(\mathrm{id}, g)"] \arrow[dr, "(\mu_{i_1})_{j_0}"'] & T(i_1, j_1) \arrow[d, "(\mu_{i_1})_{j_1}"] \\
& \operatorname{colim} T(i_1, -)
\end{tikzcd}$$

これらを組み合わせて次の図式の実線部を得る.

$$
\begin{tikzcd}
& F(i_0)=\operatorname{colim}T(i_0,-) \arrow[rrr, dashed, "F(f)"] & & & \operatorname{colim}T(i_1,-)=F(i_1) & \\
& & T(i_0,j_1) \arrow[ul, "(\mu_{i_0})_{j_1}"'] \arrow[rrr, "T(f,\mathrm{id})"] & & & T(i_1,j_1) \arrow[ul, "(\mu_{i_1})_{j_1}"'] \\
T(i_0,j_0) \arrow[uur, "(\mu_{i_0})_{j_0}"] \arrow[urr, "T(\mathrm{id},g)"'] \arrow[rrr, "T(f,\mathrm{id})"'] & & & T(i_1,j_0) \arrow[uur, "(\mu_{i_1})_{j_0}"] \arrow[urr, "T(\mathrm{id},g)"'] & &
\end{tikzcd}
$$

実線部は全て可換だから，余極限の普遍性により点線の射が得られる．これを $F(f)$ と定める．すると $F\colon I\to C$ は関手である.

$\because$) $F(f_1\circ f_0)=Ff_1\circ Ff_0$ と $F(\mathrm{id})=\mathrm{id}$ を示せばよい.

　$f_0\colon i_0\to i_1$，$f_1\colon i_1\to i_2$ を I の射とする．$F(f_0)$，$F(f_1)$，$F(f_1\circ f_0)$ は次の図式により定義されるのであった.

$$
\begin{tikzcd}
& F(i_0) \arrow[rrr, dashed, "F(f_0)"'] \arrow[rrrrrr, dashed, bend left, "F(f_1\circ f_0)"] & & & F(i_1) \arrow[rrr, dashed, "F(f_1)"'] & & & F(i_2) & \\
& & T(i_0,j_1) \arrow[ul] \arrow[rrr, "T(f_0,\mathrm{id})"] & & & T(i_1,j_1) \arrow[ul] \arrow[rrr, "T(f_1,\mathrm{id})"] & & & T(i_2,j_1) \arrow[ul] \\
T(i_0,j_0) \arrow[uur] \arrow[urr] \arrow[rrr, "T(f_0,\mathrm{id})"'] & & & T(i_1,j_0) \arrow[uur] \arrow[urr] \arrow[rrr, "T(f_1,\mathrm{id})"'] & & & T(i_2,j_0) \arrow[uur] \arrow[urr] & &
\end{tikzcd}
$$

よって余極限の普遍性により $F(f_1)\circ F(f_0)=F(f_1\circ f_0)$ である．同様に余極限の普遍性により $F(\mathrm{id})=\mathrm{id}$ も分かる.

F の定義の仕方から，$(\mu_-)_k\colon T(-,k)\Rightarrow F$ は自然変換である．また余極限の普遍性から，このような F は一意であることも分かる． $\square$

　定理 8 によって得られる関手 F は $\operatorname{colim}T(\square,-)\colon I\to C$ とでも書くべき関手となるが，このように書いてしまうと何が何なのか分からなくなってしまう．そこで，関手 $G\colon J\to C$ に対して $\operatorname{colim}_j G(j):=\operatorname{colim}G$ のように「動かす変数」を colim の添え字で表すことにすると，定理 8 で得られた関手 F は $\operatorname{colim}_j T(-,j)$ で表すことができる．(なお，変数 j の動く範囲 (添え字圏) も明示したい場合には $\operatorname*{colim}_{j\in J}G(j)$ のように書くことにする．)

さて，更にこの関手の余極限 $\operatorname{colim}(\operatorname{colim}_j T(-,j)) = \operatorname{colim}_i(\operatorname{colim}_j T(i,j))$ を考えられるが，一方「i と j を同時に動かした」ときの余極限 $\operatorname{colim}_{\langle i,j\rangle} T(i,j)$ $(= \operatorname{colim} T)$ を考えることもできる．

定理 9. $T\colon I \times J \to C$ を関手として各 $i \in I$ に対して余極限 $\operatorname{colim}_j T(i,j)$ が存在するとする．このとき，$\operatorname{colim}_i(\operatorname{colim}_j T(i,j))$ と $\operatorname{colim}_{\langle i,j\rangle} T(i,j)$ のうちどちらか一方が存在すればもう一方も存在し，$\operatorname{colim}_i(\operatorname{colim}_j T(i,j)) \cong \operatorname{colim}_{\langle i,j\rangle} T(i,j)$ が成り立つ．

証明. $\operatorname{colim}_i(\operatorname{colim}_j T(i,j))$ が存在したとする．これが T の余極限となっていることを示そう．その為に任意の自然変換 $\varphi\colon T \Rightarrow \Delta x$ を取る．

$$
\begin{tikzcd}
 & & & x & & & \\
 & & & \operatorname{colim}_i(\operatorname{colim}_j T(i,j)) \arrow[u, dashed, "h"] & & & \\
 & \operatorname{colim}_j T(i_0,j) \arrow[urr] \arrow[rrrr] \arrow[uurr, dashed, bend left, "\psi_{i_0}"] & & & & \operatorname{colim}_j T(i_1,j) \arrow[ull] \arrow[uull, dashed, bend right, "\psi_{i_1}"'] & \\
 & & T(i_0,j_1) \arrow[ul] \arrow[rrrr, "{T(f,\mathrm{id})}"] & & & & T(i_1,j_1) \arrow[ul] \arrow[uuulll, bend right, "\varphi_{i_1j_1}"'] \\
T(i_0,j_0) \arrow[urr, "{T(\mathrm{id},g)}"] \arrow[uur] \arrow[rrrr, "{T(f,\mathrm{id})}"'] \arrow[uuuurrr, bend left, "\varphi_{i_0j_0}"] & & & & T(i_1,j_0) \arrow[urr, "{T(\mathrm{id},g)}"'] \arrow[uur] & &
\end{tikzcd}
$$

$\operatorname{colim}_j T(i,j)$ の普遍性から，射 $\psi_i\colon \operatorname{colim}_j T(i,j) \to x$ が存在して図式が可換となる．故に $\operatorname{colim}_i(\operatorname{colim}_j T(i,j))$ の普遍性から射 $h\colon \operatorname{colim}_i(\operatorname{colim}_j T(i,j)) \to x$ が存在して図式が可換となる．普遍性から，このような h が一意であることは容易に分かる．従って $\operatorname{colim}_i(\operatorname{colim}_j T(i,j))$ が T の余極限であることが分かった．

逆に $\operatorname{colim}_{\langle i,j\rangle} T(i,j)$ が存在したとする．

$$
\begin{tikzcd}
 & & & \operatorname{colim}_{\langle i,j\rangle} T(i,j) & & & \\
 & \operatorname{colim}_j T(i_0,j) \arrow[urr, dashed, "\nu_{i_0}"] \arrow[rrrr] & & & & \operatorname{colim}_j T(i_1,j) \arrow[ull, dashed, "\nu_{i_1}"'] & \\
 & & T(i_0,j_1) \arrow[ul] \arrow[uur] \arrow[rrrr, "T(f,\mathrm{id})"] & & & & T(i_1,j_1) \arrow[ul] \arrow[uulll] \\
T(i_0,j_0) \arrow[ur, "(\mu_{i_0})_{j_0}"] \arrow[urr, "T(\mathrm{id},g)"'] \arrow[uuurrr] \arrow[rrrr, "T(f,\mathrm{id})"'] & & & & T(i_1,j_0) \arrow[urr, "T(\mathrm{id},g)"'] \arrow[uur] \arrow[uuul] & &
\end{tikzcd}
$$

余極限 $\operatorname{colim}_j T(i,j)$ の普遍性から，射 $\nu_i\colon \operatorname{colim}_j T(i,j) \to \operatorname{colim}_{\langle i,j\rangle} T(i,j)$ が存在し可換となる．$\langle \operatorname{colim}_{\langle i,j\rangle} T(i,j), \nu\rangle$ が $\operatorname{colim}_j T(-,j)$ の余極限になることを示そう．その為に任意の自然変換 $\varphi\colon \operatorname{colim}_j T(-,j) \Rightarrow \Delta x$ を取る．

$$
\begin{tikzcd}
 & & & x & & & \\
 & & & \operatorname{colim}_{\langle i,j\rangle} T(i,j) \arrow[u, dashed, "h"] & & & \\
 & \operatorname{colim}_j T(i_0,j) \arrow[uurr, bend left, "\varphi_{i_0}"] \arrow[urr, "\nu_{i_0}"] \arrow[rrrr] & & & & \operatorname{colim}_j T(i_1,j) \arrow[uull, bend right, "\varphi_{i_1}"'] \arrow[ull, "\nu_{i_1}"'] & \\
 & & T(i_0,j_1) \arrow[ul] \arrow[uur] \arrow[rrrr, "T(f,\mathrm{id})"] & & & & T(i_1,j_1) \arrow[ul] \arrow[uulll] \\
T(i_0,j_0) \arrow[ur, "(\mu_{i_0})_{j_0}"] \arrow[urr, "T(\mathrm{id},g)"'] \arrow[uuurrr] \arrow[rrrr, "T(f,\mathrm{id})"'] & & & & T(i_1,j_0) \arrow[urr, "T(\mathrm{id},g)"'] \arrow[uur] \arrow[uuul] & &
\end{tikzcd}
$$

するとこの図式の実線部は可換だから，余極限 $\operatorname{colim}_{\langle i,j\rangle} T(i,j)$ の普遍性により射 $h\colon \operatorname{colim}_{\langle i,j\rangle} T(i,j) \to x$ が存在して可換となる．このような h は明らかに一意だから，$\operatorname{colim}_{\langle i,j\rangle} T(i,j)$ が $\operatorname{colim}_j T(-,j)$ の余極限であることが分かった． $\square$

よって，(各余極限が存在すれば) $\operatorname{colim}_i(\operatorname{colim}_j T(i,j)) \cong \operatorname{colim}_j(\operatorname{colim}_i T(i,j))$ となることが分かる．即ち，余極限の順序は交換可能である．双対を考えれば，同様のことが極限についても成り立つことが分かる[*4]．

[*4] 一方，極限と余極限の交換については，一般には成り立たない．これについては「フィルター圏」の PDF を参照.

さて，再び $T\colon I\times J\to C$ を関手とする．このとき関手 $\widetilde{T}\colon I\to C^J$ が得られるのであった (「自然変換・関手圏」の PDF を参照．)．よってこの余極限 $\operatorname{colim}\widetilde{T}\in C^J$ も考えることができる．

定理 10. $T\colon I\times J\to C$ を関手として，$j\in J$ に対して余極限 $\langle \operatorname{colim}_i T(i,j),\mu_j\rangle$ が存在するとする．このとき $\operatorname{colim}\widetilde{T}\colon J\to C$ も存在し，$j\in J$ に対して $(\operatorname{colim}\widetilde{T})(j)\cong \operatorname{colim}_i T(i,j)$ が成り立つ．即ちこの場合，$\widetilde{T}$ の余極限は各点ごとに計算すればよい．

証明. $P\colon J\to C$ を関手, $\nu\colon \widetilde{T}\Rightarrow \Delta(P)$ を自然変換とする．$i\in I$ に対して $\nu_i\colon \widetilde{T}(i)\Rightarrow P$ も自然変換である．$j\in J$ に対して $(\nu_i)_j\colon T(i,j)\to Pj$ となる．次の実線の可換図式を得る．

$$
\begin{tikzcd}
& Pj_0 \arrow[rrr, "Pg"] & & & Pj_1 & \\
& \operatorname{colim}_i T(i,j_0) \arrow[u, dashed, "\kappa_{j_0}"] \arrow[rrr] & & & \operatorname{colim}_i T(i,j_1) \arrow[u, dashed, "\kappa_{j_1}"'] & \\
& & T(i_1,j_0) \arrow[ul] \arrow[uul, bend right, "(\nu_{i_1})_{j_0}"'] \arrow[rrr] & & & T(i_1,j_1) \arrow[ul] \arrow[uul, bend right, "(\nu_{i_1})_{j_1}"'] \\
T(i_0,j_0) \arrow[uuur, bend left, "(\nu_{i_0})_{j_0}"] \arrow[uur] \arrow[ur, "T(f,\mathrm{id})"] \arrow[rrr, "T(\mathrm{id},g)"'] & & & T(i_0,j_1) \arrow[uuur, bend left, "(\nu_{i_0})_{j_1}"] \arrow[uur] \arrow[ur, "T(f,\mathrm{id})"'] & &
\end{tikzcd}
$$

よって余極限の普遍性から $\kappa_j\colon \operatorname{colim}_i T(i,j)\to Pj$ を得る．これで得られた四角

$$
\begin{tikzcd}
Pj_0 \arrow[r, "Pg"] & Pj_1 \\
\operatorname{colim}_i T(i,j_0) \arrow[u, "\kappa_{j_0}"] \arrow[r, "\operatorname{colim}_i T(i,g)"'] & \operatorname{colim}_i T(i,j_1) \arrow[u, "\kappa_{j_1}"']
\end{tikzcd}
$$

は，余極限の普遍性により可換である．従って $\kappa\colon \operatorname{colim}_i T(i,-)\Rightarrow P$ は自然変換である．このような自然変換 κ は，余極限 $\operatorname{colim}_i T(i,j)$ の普遍性から一意的であることが分かるから，$\widetilde{T}\Rightarrow \Delta(\operatorname{colim}_i T(i,-))$ は普遍射であり，$(\operatorname{colim}\widetilde{T})(j)\cong \operatorname{colim}_i T(i,j)$ が分かった． □

系 11. 圏 D が余完備ならば D^C も余完備である．双対的に，圏 D が完備ならば D^C も完備である． □

例 12. 圏 C に対して $\widehat{C} = \mathbf{Set}^{C^{\mathrm{op}}}$ は完備かつ余完備である. $\square$

例 13. $\widetilde{T}\colon I \to C^J$ の余極限が存在したとしても, $\mathrm{colim}_i\, T(i,j)$ が存在するとは限らない. 例えば $J = \mathbf{2}$ として, 圏 C を

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "h"] & b \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & c \end{tikzcd}$$

で $f \circ h = g \circ h$ を満たすものとする. $C^J = C^{\mathbf{2}}$ は C の arrow category である. $C^{\mathbf{2}}$ の次の図式を考える. (縦向きの射が $C^{\mathbf{2}}$ の対象である.)

$$\begin{tikzcd}
 & c \arrow[rr, "\mathrm{id}_c"] & & c \\
b \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "f"'] & & c \arrow[ur, "\mathrm{id}_c"'] & \\
 & b \arrow[uu, "g"'] \arrow[rr, "\mathrm{id}_b"] & & b \arrow[uu, "g"'] \\
a \arrow[uu, "h"] \arrow[ur, "h"] \arrow[rr, "h"'] & & b \arrow[uu, "g"'] \arrow[ur, "\mathrm{id}_b"'] &
\end{tikzcd}$$

この図式は pushout を与えていることが分かる. この図式で, 底面の四角が $0 \in \mathbf{2}$ 成分であるが, 圏 C において $b \xleftarrow{h} a \xrightarrow{h} b$ の pushout は存在しない. $\square$

例 14. $\theta\colon F \Rightarrow G\colon C \to D$ を自然変換として D は余完備であるとする. このとき θ が (D^C の射として) エピ射 $\Longleftrightarrow$ 各 $a \in C$ に対して θ_a がエピ射である[*5].

$\because$) 一般に, 射 $f\colon a \to b$ がエピ射であることは

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "f"] \arrow[d, "f"'] & b \arrow[d, "\mathrm{id}_b"] \\ b \arrow[r, "\mathrm{id}_b"'] & b \end{tikzcd}$$

が pushout になることと同値であった (「双対」の PDF を参照). 故に定理 10 により

*5 $\Longleftarrow$ は D が余完備でなくても成り立つ. $\Longrightarrow$ については例 13 も参照.

θ がエピ射 $\iff$ 次の図式が pushout

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, "\theta"'] & G \arrow[d, "\mathrm{id}_G"] \\ G \arrow[r, "\mathrm{id}_G"'] & G \end{tikzcd}$$

$\iff$ 各 $a \in C$ に対して次の図式が pushout

$$\begin{tikzcd} Fa \arrow[r, "\theta_a"] \arrow[d, "\theta_a"'] & Ga \arrow[d, "\mathrm{id}_{Ga}"] \\ Ga \arrow[r, "\mathrm{id}_{Ga}"'] & Ga \end{tikzcd}$$

$\iff$ 各 $a \in C$ に対して θ_a がエピ射.

特に，$\widehat{C}$ の射がエピ射であるかどうかは，全ての成分が全射かどうかで決まる.

双対を考えれば，モノ射についても同様であることが分かる. □

定義. 関手 $F\colon C \to \mathbf{Set}$ が表現可能関手 (representable functor)
$\iff$ ある対象 $a \in C$ と自然同型 $F \cong \mathrm{Hom}_C(a, -)$ が存在する.
また，このとき a は F を表現するという.

※ 反変関手の場合，つまり関手 $F\colon C^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ が表現可能とは $F \cong \mathrm{Hom}_{C^{\mathrm{op}}}(a, -)$ と書けることであるが，$\mathrm{Hom}_{C^{\mathrm{op}}}(a, -) = \mathrm{Hom}_C(-, a)$ だから，この場合は表現可能関手とは $F \cong \mathrm{Hom}_C(-, a)$ と書けることだと思ってよい.

命題 15. 表現可能関手 F を表現する対象は同型を除いて一意である.

証明. $F \cong \mathrm{Hom}_C(a, -) \cong \mathrm{Hom}_C(b, -)$ とすれば米田の補題により $a \cong b$ である. □

$F\colon C \to \mathbf{Set}$ を表現可能関手として $\alpha\colon \mathrm{Hom}_C(a, -) \Rightarrow F$ を自然同型とする．このとき米田の補題により $x \in Fa$ が得られる．逆に $a \in C$ と $x \in Fa$ を任意に取れば，米田の補題により自然変換 $\alpha\colon \mathrm{Hom}_C(a, -) \Rightarrow F$ が得られるが，勿論これは同型とは限らない．そこで，どのような a, x を取ったら α が同型になるかという問題が考えられる．これは次のように普遍性で述べることができる.

定理 16. $\alpha\colon \mathrm{Hom}_C(a, -) \Rightarrow F$ を自然変換として米田の補題で α に対応する $x \in Fa$ を

取る．このとき α が同型 $\iff$ 任意の $b \in C$，$u \in Fb$ に対して，ある射 $h\colon a \to b$ が一意に存在して $Fh(x) = u$ となる．

証明. ($\Longrightarrow$) $b \in C$，$u \in Fb$ とする．α が自然同型だから $\alpha_b\colon \mathrm{Hom}_C(a,b) \to Fb$ は全単射である．よって $\alpha_b(h) = u$ となる $h\colon a \to b$ が存在する．このとき α の自然性により

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_C(a,a) \arrow[r, "\alpha_a"] \arrow[d, "h\circ-"'] & Fa \arrow[d, "Fh"] \\
\mathrm{Hom}_C(a,b) \arrow[r, "\alpha_b"'] & Fb
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathrm{id}_a \arrow[r, mapsto, "\alpha_a"] \arrow[dd, mapsto, "h\circ-"'] & x \arrow[d, mapsto, "Fh"] \\
 & Ph(x) \\
h \arrow[r, mapsto, "\alpha_b"'] & u
\end{tikzcd}
$$

$Fh(x) = u$ となる．

($\Longleftarrow$) 任意の $b \in C$ に対して α_b が同型であることを示す．米田の補題の証明により，α_b は $f\colon a \to b$ に対して $\alpha_b(f) = Ff(x)$ で与えられる．故に仮定の条件は α_b が同型であることを意味している． $\square$

定理 16 の条件は「コンマ圏 $1 \downarrow F$ において $\langle a, x\rangle$ が始対象となる」と言い換えることができる (1 は関手 $\mathbf{1} \ni * \mapsto 1 \in \mathbf{Set}$)．従って次の系を得る．

系 17. 関手 $F\colon C \to \mathbf{Set}$ が表現可能 $\iff$ $1 \downarrow F$ が始対象を持つ． $\square$

系 18. $G\colon D \to C$ を関手として，$c \in C$ を取る．このとき

$$c \text{ から } G \text{ への普遍射が存在する} \iff \mathrm{Hom}_C(c, G(-)) \text{ が表現可能関手.}$$

証明. $F := \mathrm{Hom}_C(c, G(-))$ とする．このときコンマ圏 $1 \downarrow F$ とは次のような圏である．

- 対象は $a \in C$ と射 $f\colon c \to Ga$ の組 $\langle a, f\rangle$ である．
- $\langle a, f\rangle$ から $\langle b, g\rangle$ への射とは C の射 $k\colon a \to b$ であって $Gk \circ f = g$ を満たすものである．

$$
\begin{tikzcd}
c \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g"'] & Ga \arrow[d, "Gk"] & a \arrow[d, "k"] \\
 & Gb & b
\end{tikzcd}
$$

従って $1{\downarrow}F = c{\downarrow}G$ である．故に

$$\begin{aligned} F\text{ が表現可能} &\iff 1{\downarrow}F\text{ が始対象を持つ} && \text{(系 17)} \\ &\iff c{\downarrow}G\text{ が始対象を持つ} \\ &\iff c\text{ から }G\text{ への普遍射が存在する} && \text{(普遍射の定義)} \end{aligned}$$

である． $\square$

双対を考えれば

定理 19. $F\colon C \to D$ を関手として，$d \in D$ を取る．このとき

$$F\text{ から }d\text{ への普遍射が存在する} \iff \mathrm{Hom}_D(F(-), d)\text{ が表現可能関手.}$$

$\square$

例 20. C を圏，$\Delta\colon C \to C \times C$ を対角関手とすると，Δ から $\langle a, b\rangle \in C \times C$ への普遍射が直積であった．よって直積 $a \times b$ が存在すれば $\mathrm{Hom}(\Delta(-), \langle a, b\rangle)$ は表現可能関手である．系 18 の証明から $\mathrm{Hom}(\Delta(-), \langle a, b\rangle) \cong \mathrm{Hom}(-, a \times b)$ となることが分かる．特に $x \in C$ に対して $\mathrm{Hom}(\langle x, x\rangle, \langle a, b\rangle) \cong \mathrm{Hom}(x, a \times b)$ である．ここで圏の直積の定義から $\mathrm{Hom}(\langle x, x\rangle, \langle a, b\rangle) = \mathrm{Hom}(x, a) \times \mathrm{Hom}(x, b)$ となるので $\mathrm{Hom}(x, a \times b) \cong \mathrm{Hom}(x, a) \times \mathrm{Hom}(x, b)$ である．(故に，直積を取る操作と $\mathrm{Hom}(x, -)$ を適用する操作は「可換」であると言える)

逆に $\mathrm{Hom}(\Delta(-), \langle a, b\rangle) \cong \mathrm{Hom}(-, r)$ となるような $r \in C$ が存在するならば，系 18 の証明より $r \cong a \times b$ となることが分かる．また圏の直積の定義から $\mathrm{Hom}(\Delta(-), \langle a, b\rangle) \cong \mathrm{Hom}(-, a) \times \mathrm{Hom}(-, b)$ が分かるから，直積 $a \times b$ とは関手 $\mathrm{Hom}(-, a) \times \mathrm{Hom}(-, b)$ を表現する対象のことであると言える． $\square$

今の例で，直積と $\mathrm{Hom}(x, -)$ が交換できることは次のように一般化できる．

定義. $T\colon J \to C$，$F\colon C \to D$ を関手とし，T の極限 $\langle \lim T, \pi\rangle$ が存在するとする．F が極限 $\langle \lim T, \pi\rangle$ と交換するとは，$\langle F(\lim T), F\pi\rangle$ が FT の極限となることを言う．余極限との交換も同様に定義する．

定理 21. $\mathrm{Hom}_C(c, -)$ は任意の極限と交換する．

証明. J を圏，$T\colon J \to C$ を関手として，T の極限 $\langle \lim T, \pi\rangle$ が存在するとする．次の図

式が関手 $\mathrm{Hom}(c, T-) \colon J \to \mathbf{Set}$ の極限を与えることを示せばよい．

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}(c,Tj) \arrow[dd, "Tf\circ-"'] & \\
& \mathrm{Hom}(c,\lim T) \arrow[ul, "\pi_j\circ-"'] \arrow[dl, "\pi_k\circ-"] \\
\mathrm{Hom}(c,Tk) &
\end{tikzcd}$$

その為に任意の $x \in \mathbf{Set}$ と自然変換 $\theta \colon \Delta x \Rightarrow \mathrm{Hom}_C(c, T-)$ を取る．

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_C(c,Tj) \arrow[dd, "Tf\circ-"'] & & \\
& \mathrm{Hom}_C(c,\lim T) \arrow[ul, "\pi_j\circ-"'] \arrow[dl, "\pi_k\circ-"] & x \arrow[ull, bend right, "\theta_j"'] \arrow[dll, bend left, "\theta_k"] \\
\mathrm{Hom}_C(c,Tk) & &
\end{tikzcd}$$

可換性から，任意の $a \in x$ に対して $Tf \circ (\theta_j(a)) = \theta_k(a)$ である．即ち次の図式の外側の三角形が可換であり，よって $\lim T$ の普遍性から $h(a) \colon c \to \lim T$ が一意に存在して可換となる．

$$\begin{tikzcd}
Tj \arrow[dd, "Tf"'] & & \\
& \lim T \arrow[ul, "\pi_j"'] \arrow[dl, "\pi_k"] & c \arrow[ull, bend right, "\theta_j(a)"'] \arrow[dll, bend left, "\theta_k(a)"] \arrow[l, dashed, "h(a)"] \\
Tk & &
\end{tikzcd}$$

この $h(a)$ は写像 $h \colon x \to \mathrm{Hom}_C(c, \lim T)$ を与える．次の図式が可換になることを示せばよい．

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_C(c,Tj) \arrow[dd, "Tf\circ-"'] & & \\
& \mathrm{Hom}_C(c,\lim T) \arrow[ul, "\pi_j\circ-"'] \arrow[dl, "\pi_k\circ-"] & x \arrow[ull, bend right, "\theta_j"'] \arrow[dll, bend left, "\theta_k"] \arrow[l, dashed, "h"] \\
\mathrm{Hom}_C(c,Tk) & &
\end{tikzcd}$$

即ち，任意の $a \in x$ に対して $\pi_j \circ (h(a)) = \theta_j$ を示せばよいが，それは $h(a)$ の定義から明らか．逆に，このような h の一意性も $h(a)$ の一意性から分かる．

以上により $\langle \mathrm{Hom}_C(c, \lim T), \mathrm{Hom}_C(c, \pi) \rangle$ が $\mathrm{Hom}_C(c, T-)$ の極限である． $\square$

参考文献

[1] Saunders Mac Lane, Categories for the Working Mathematician, Springer, 2nd ed. 1978 版 (1998)

[2] G.M. Kelly, Basic Concepts of Enriched Category Theory, Cambridge University Press, Lecture Notes in Mathematics 64 (1982), section 3.3, `http://tac.mta.ca/tac/reprints/articles/10/tr10abs.html`