可能な限り最短で Kan 拡張に到達する

alg-d
http://alg-d.com/math/kan_extension/

2018 年 8 月 15 日

当サイト (http://alg-d.com/math/kan_extension/) の PDF は，Kan 拡張に重点を置いた圏論の PDF であり，圏論の知識がゼロでも，前から読み進めていけば Kan 拡張を理解することができると考えます．が，現在ではかなりのボリュームがあり，とりあえずざっと Kan 拡張について知りたいという場合には向いていません．そこで，ここでは，可能な限り最短で Kan 拡張をざっと理解するための説明をします (最終目標は普遍随伴です)．細かい証明は省略したりする場合があるので，もっとしっかりした証明を知りたい場合は本編を読んでください．

目次

1　前提知識について

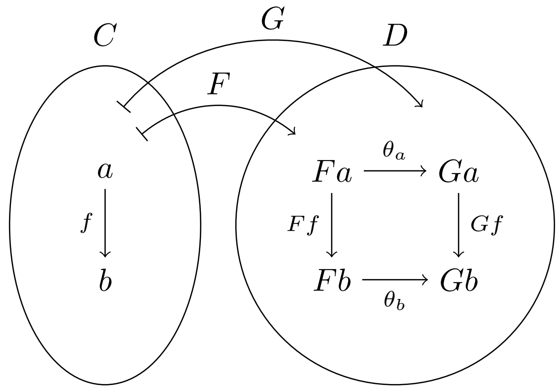
圏，関手の定義や，普遍性がどんな感じのものかについては知っているものとする．具体的には当サイト第 0 章の以下の PDF の内容が分かればよい．

- 『圏論とは何か』(intro.pdf)
- 『普遍性』(universality.pdf)
- 『双対』(dual.pdf)

2　自然変換

定義. C, D を圏，$F, G\colon C \to D$ を関手とする．F から G への自然変換とは，D の射の族 $\theta = \{\theta_a\colon Fa \to Ga\}_{a\in \mathrm{Ob}(C)}$ であって，C の射 $f\colon a \to b$ に対して $Gf \circ \theta_a = \theta_b \circ Ff$ を満たすものをいう．(またこのとき θ_a は a について自然であるという言い方をする．)

絵で書けば次のようになる．



θ が F から G への自然変換であることを記号で $\theta\colon F \Rightarrow G$ と表す．また θ_a を θ の a 成分と呼ぶ．

C, D を圏，$F, G\colon C \to D$ を関手，$\theta\colon F \Rightarrow G$ を自然変換とする．このとき，図式では次のように表す．

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "G"'] \arrow[r, phantom, "\theta\Downarrow"] & D \end{tikzcd}$$

さて，更に $H\colon C \to D$ を関手として $\sigma\colon G \Rightarrow H$ も自然変換とする．図式で書くと次のような状況となる．

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, bend left=50, "F", ""{name=U, below}] \arrow[r, "G" description, ""{name=M}] \arrow[r, bend right=50, "H"', ""{name=L, above}] & D
\arrow[Rightarrow, from=U, to=M, "\theta"'] \arrow[Rightarrow, from=M, to=L, "\sigma"']
\end{tikzcd}$$

このとき，この自然変換 θ, σ を合成して新しい自然変換 $\sigma \circ \theta\colon F \Rightarrow H$ を得ることができる．

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, bend left=50, "F", ""{name=U, below}] \arrow[r, bend right=50, "H"', ""{name=L, above}] & D
\arrow[Rightarrow, from=U, to=L, "\sigma\circ\theta"']
\end{tikzcd}$$

その為には $a \in C$ に対して $(\sigma \circ \theta)_a := \sigma_a \circ \theta_a$ と定義すればよい．この定義により $\sigma \circ \theta$ が自然変換となることを示そう．その為には C の射 $f\colon a \to b$ に対して

$$\begin{tikzcd}
Fa \arrow[r, "(\sigma\circ\theta)_a"] \arrow[d, "Ff"'] & Ha \arrow[d, "Hf"] \\
Fb \arrow[r, "(\sigma\circ\theta)_b"'] & Hb
\end{tikzcd}$$

が可換となることを示せばよい．定義より，この図式は次のように書き換えられる．

$$\begin{tikzcd}
Fa \arrow[r, "\theta_a"] \arrow[d, "Ff"'] & Ga \arrow[r, "\sigma_a"] \arrow[d, "Gf"] & Ha \arrow[d, "Hf"] \\
Fb \arrow[r, "\theta_b"'] & Gb \arrow[r, "\sigma_b"'] & Hb
\end{tikzcd}$$

θ, σ は自然変換だから，この小さい四角は可換となる．故に全体も可換となり，$\sigma \circ \theta$ が自然変換であることが分かった．

この $\sigma \circ \theta$ を θ と σ の垂直合成と呼ぶ．

さて，自然変換が合成できるという事は，関手を対象，自然変換を射とすれば圏になるということである．実際，C, D を圏とするとき D^C を

- $\mathrm{Ob}(D^C)$ を C から D への関手全体とする．
- $F, G \in \mathrm{Ob}(D^C)$ に対して，自然変換 $F \Rightarrow G$ を F から G への射とする．

- 射の合成は垂直合成とする．
- $F \in \mathrm{Ob}(D^C)$ に対して，自然変換 $\mathrm{id}_F \colon F \Rightarrow F$ を $(\mathrm{id}_F)_a := \mathrm{id}_{Fa}$ で定める．この id_F を恒等変換と呼ぶ．

で定義すれば，D^C は圏となる．これを関手圏 (functor category) と呼ぶ．

∵) それを示すため，まずは結合律を示す．$E, F, G, H \colon C \to D$ を関手として，$\theta \colon E \Rightarrow F$，$\sigma \colon F \Rightarrow G$，$\tau \colon G \Rightarrow H$ を自然変換とする．$(\tau \circ \sigma) \circ \theta = \tau \circ (\sigma \circ \theta)$ を示す．即ち，$a \in C$ に対して $((\tau \circ \sigma) \circ \theta)_a = (\tau \circ (\sigma \circ \theta))_a$ を示せばよい．定義から $(\tau_a \circ \sigma_a) \circ \theta_a = \tau_a \circ (\sigma_a \circ \theta_a)$ を示せばよいが，これは D が圏だから成り立つ．

後は $\theta \circ \mathrm{id}_E = \theta$ と $\mathrm{id}_F \circ \theta = \theta$ を示せばよい．つまり $\theta_a \circ \mathrm{id}_{Ea} = \theta_a$, $\mathrm{id}_{Fa} \circ \theta_a = \theta_a$ を示せばよいが，これは D が圏だから成り立つ．

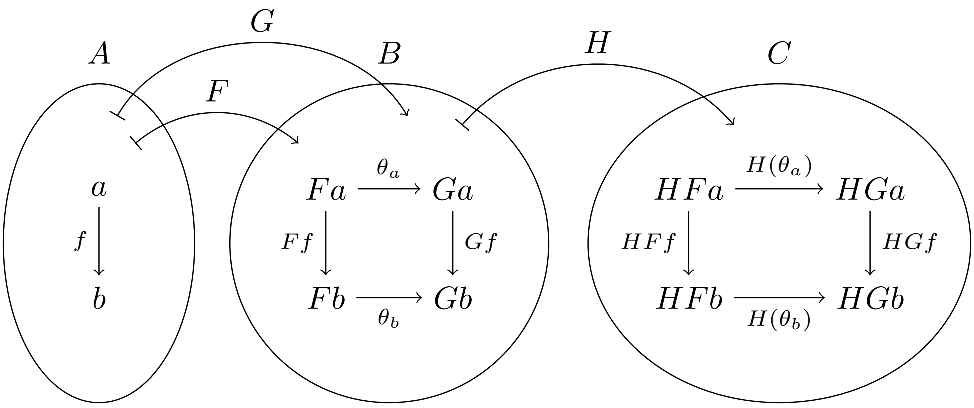
A, B, C を圏，$F, G \colon A \to B$ と $H \colon B \to C$ を関手，$\theta \colon F \Rightarrow G$ を自然変換とする．即ち次の図式のような状況である．

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "G"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \theta"] & B \arrow[r, "H"] & C \end{tikzcd}$$

このとき H と θ を使って新しい自然変換 $H\theta \colon HF \Rightarrow HG$ を定義することができる．

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[dr, bend left, "H"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow H\theta"] & \\ A \arrow[ur, bend left, "F"] \arrow[dr, bend right, "G"'] & {} & C \\ & B \arrow[ur, bend right, "H"'] & \end{tikzcd}$$

その為には $a \in A$ に対して $(H\theta)_a := H(\theta_a)$ と定義すればよい．ここで $\theta_a \colon Fa \to Ga$ だから $(H\theta)_a \colon HFa \to HGa$ である．絵で描けば次のような状況である．



この定義により $H\theta$ が自然変換となることを示すためには，$f\colon a \to b$ に対して

$$\begin{tikzcd}
HFa \arrow[r, "(H\theta)_a"] \arrow[d, "HFf"'] & HGa \arrow[d, "HGf"] \\
HFb \arrow[r, "(H\theta)_b"'] & HGb
\end{tikzcd}$$

が可換であることを示せばよいが，それは上の絵から明らかであろう．

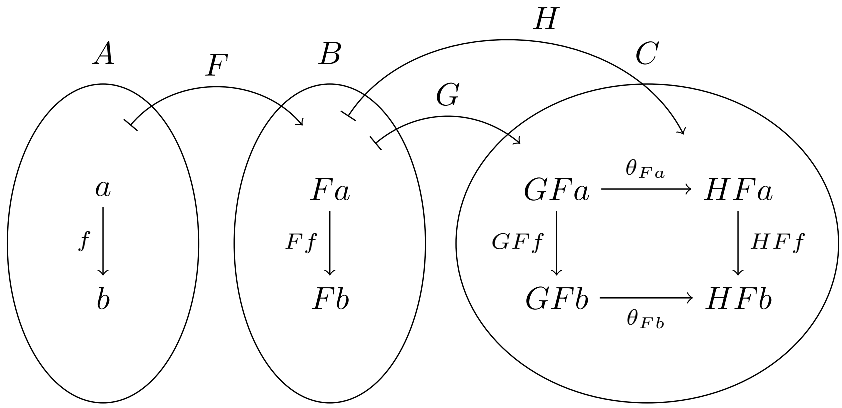
今度は A, B, C を圏，$F\colon A \to B$ と $G, H\colon B \to C$ を関手，$\theta\colon G \Rightarrow H$ を自然変換とする．即ち次の図式の状況である．

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "F"] & B \arrow[r, bend left, "G"{name=U}] \arrow[r, bend right, "H"'{name=D}] & C
\arrow[from=U, to=D, Rightarrow, "\theta"]
\end{tikzcd}$$

このとき F と θ を使って新しい自然変換 $\theta_F\colon GF \Rightarrow HF$ を定義することができる．

$$\begin{tikzcd}
 & B \arrow[dr, "G"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\theta_F"] & \\
A \arrow[ur, "F"] \arrow[dr, "F"'] & {} & C \\
 & B \arrow[ur, "H"'] &
\end{tikzcd}$$

その為には $a \in A$ に対して $(\theta_F)_a := \theta_{Fa}$ と定義すればよい．絵で描けば次のようになる．



この定義により θ_F が自然変換になることを示すためには，$f\colon a \to b$ に対して

$$\begin{tikzcd}
GFa \arrow[r, "(\theta_F)_a"] \arrow[d, "GFf"'] & HFa \arrow[d, "HFf"] \\
GFb \arrow[r, "(\theta_F)_b"'] & HFb
\end{tikzcd}$$

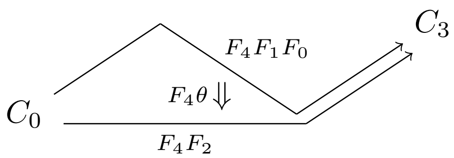
が可換であることを示せばよいが，これも上の絵から明らかであろう．

これらを使うと，様々な自然変換を合成することができるようになる．

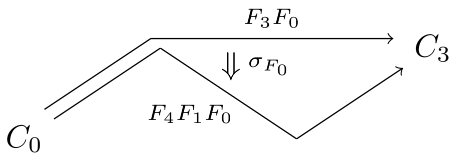
例 1. 次の $\theta\colon F_1F_0 \Rightarrow F_2$ と $\sigma\colon F_3 \Rightarrow F_4F_1$ を合成する．

$$
\begin{tikzcd}
 & C_1 \arrow[rr, "F_3"] \arrow[dr, "F_1"'] \arrow[d, phantom, "\theta\Downarrow"] & & C_3 \\
C_0 \arrow[ur, "F_0"] \arrow[rr, "F_2"'] & {} & C_2 \arrow[ur, "F_4"'] \arrow[u, phantom, "\Downarrow\sigma"] &
\end{tikzcd}
$$

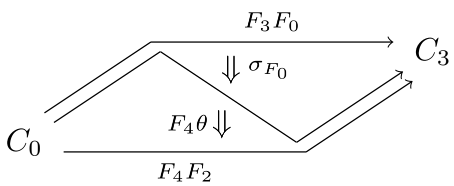
まず θ と F_4 から自然変換 $F_4\theta$ を得る．



次に σ と F_0 から自然変換 σ_{F_0} を得る．



これらを垂直合成して



自然変換 $F_4\theta \circ \sigma_{F_0}\colon F_3F_0 \Rightarrow F_4F_2$ が得られた． □

例 2. 次の自然変換 θ と σ を合成する．

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, bend left, "F_0"] \arrow[r, bend right, "F_1"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\theta"] & B \arrow[r, bend left, "G_0"] \arrow[r, bend right, "G_1"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\sigma"] & C
\end{tikzcd}
$$

まず θ と G_0 から自然変換 $G_0\theta$ を得る.

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge]
A \arrow[r, bend left=40, "G_0F_0"{name=U}] \arrow[r, bend right=20, "G_0F_1"'{name=D}] & C
\arrow[from=U, to=D, phantom, "G_0\theta\Downarrow"]
\end{tikzcd}$$

次に σ と F_1 から自然変換 σ_{F_1} を得る.

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge]
A \arrow[r, bend left=20, "G_0F_1"{name=U}] \arrow[r, bend right=40, "G_1F_1"'{name=D}] & C
\arrow[from=U, to=D, phantom, "\Downarrow\sigma_{F_1}"]
\end{tikzcd}$$

これにより垂直合成 $\sigma_{F_1} \circ G_0\theta\colon G_0F_0 \Rightarrow G_1F_1$ を考えることができる.

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge]
A \arrow[r, bend left=50, "G_0F_0"{name=U}] \arrow[r, ""{name=M}] \arrow[r, bend right=50, "G_1F_1"'{name=D}] & C
\arrow[from=U, to=M, phantom, "G_0\theta\Downarrow"]
\arrow[from=M, to=D, phantom, "\Downarrow\sigma_{F_1}"]
\end{tikzcd}$$

この合成 $\sigma_{F_1} \circ G_0\theta$ を θ と σ の水平合成と呼ぶ. $\square$

3 米田

C を圏とする. $a, b \in C$ に対して $\mathrm{Hom}_C(a,b) \in \mathbf{Set}$ だった. よって関数

$$\begin{array}{rccc}
F\colon & \mathrm{Ob}(C) & \longrightarrow & \mathrm{Ob}(\mathbf{Set}) \\
& \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\
& b & \longmapsto & \mathrm{Hom}_C(a,b)
\end{array}$$

を考えることができる. これは実は関手になる. その為には C の射 $g\colon b \to b'$ に対して写像 $F(g)\colon \mathrm{Hom}_C(a,b) \to \mathrm{Hom}_C(a,b')$ を

$$\begin{array}{rccc}
F(g)\colon & \mathrm{Hom}_C(a,b) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_C(a,b') \\
& \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\
& (a \xrightarrow{h} b) & \longmapsto & (a \xrightarrow{h} b \xrightarrow{g} b')
\end{array}$$

で定めればよい.

∵) この F が関手になっていることを示すには $b \in C$ に対して $F(\mathrm{id}_b) = \mathrm{id}_{Fb}$ と，$b \xrightarrow{g} b' \xrightarrow{g'} b''$ に対して $F(g' \circ g) = Fg' \circ Fg$ を示せばよい．

$h \in \mathrm{Hom}_C(a, b)$ とする．定義より $F(\mathrm{id}_b)(h) = \mathrm{id}_b \circ h = h$ だから $F(\mathrm{id}_b) = \mathrm{id}_{Fb}$ である．また

$$\begin{aligned}(Fg' \circ Fg)(h) &= Fg'(Fg(h)) = Fg'(g \circ h) = g' \circ (g \circ h) \\ &= (g' \circ g) \circ h = F(g' \circ g)(h)\end{aligned}$$

だから $F(g' \circ g) = Fg' \circ Fg$ である．

この関手 $F\colon C \to \mathbf{Set}$ を Hom 関手といい，$\mathrm{Hom}_C(a, -)$ で表す．

同様にして関手 $\mathrm{Hom}_C(-, b)\colon C^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ を考えることもできる．つまり $f\colon a' \to a$ に対して

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{Hom}_C(f, b)\colon & \mathrm{Hom}_C(a, b) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_C(a', b) \\ & \cup & & \cup \\ & (a \xrightarrow{h} b) & \longmapsto & (a' \xrightarrow{f} a \xrightarrow{h} b) \end{array}$$

と定めるのである．この $\mathrm{Hom}_C(-, b)$ も Hom 関手という．

$a \in C$ に対して $y(a) := \mathrm{Hom}_C(-, a)$ と書く．これは関手 $y(a)\colon C^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ であるから，$\widehat{C} := \mathbf{Set}^{C^{\mathrm{op}}}$ と書けば $y(a) \in \widehat{C}$ である．実はこの y は関手 $y\colon C \to \widehat{C}$ を与えることが分かる．この関手 $y\colon C \to \widehat{C}$ を米田埋込と呼ぶ．米田埋込は圏論で重要な役割を持つが，まず基本的な性質として次の定理がある (証明は省略する)．

定理 3 (米田の補題)**.** C を圏，$a \in C$ を対象，$P\colon C^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ を関手とする．このとき全単射 $\varphi_{a,P}\colon \mathrm{Hom}_{\widehat{C}}(y(a), P) \to P(a)$ が存在する． □

米田の補題からすぐ分かる重要な事実として，次の系がある．

系 4. $y(a) \cong y(b)$ ならば $a \cong b$ である． □

ここで，$y(a) \cong y(b)$ というのは，関手圏 $\widehat{C} = \mathbf{Set}^{C^{\mathrm{op}}}$ において $y(a)$ と $y(b)$ が同型であるということである．この条件を具体的に書き下すと次の定理が得られる．

定理 5. C を圏，$a, b \in C$ とする．$x \in C$ について自然に $\mathrm{Hom}_C(x, a) \cong \mathrm{Hom}_C(x, b)$ ならば，$a \cong b$ である． □

双対を考えれば次の定理も得られる．

定理 6. C を圏，$a, b \in C$ とする．$x \in C$ について自然に $\mathrm{Hom}_C(a, x) \cong \mathrm{Hom}_C(b, x)$ な

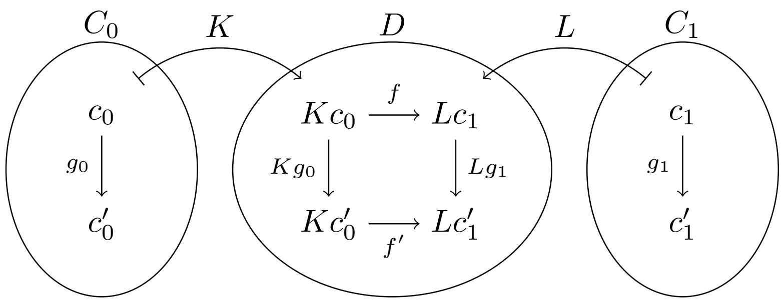
らば，$a \cong b$ である．　□

即ち，圏の対象が同型であるかどうかは，射の集合によって決定されるのである．(これは非常に良く使う重要な事実である．)

4　コンマ圏

定義. C_0, C_1, D を圏，$K\colon C_0 \to D$，$L\colon C_1 \to D$ を関手とする．以下のようにして定まる圏をコンマ圏といい，$K \downarrow L$ と書く．

- $K \downarrow L$ の対象は組 $\langle c_0, c_1, f \rangle$ であり以下を満たすものである．
  (1) c_0 は C_0 の対象である．
  (2) c_1 は C_1 の対象である．
  (3) $f\colon Kc_0 \to Lc_1$ は D の射である．
- $K \downarrow L$ の射 $\langle c_0, c_1, f \rangle \to \langle c_0', c_1', f' \rangle$ とは組 $\langle g_0, g_1 \rangle$ であり以下を満たすものである．
  (1) $g_0\colon c_0 \to c_0'$ は C_0 の射である．
  (2) $g_1\colon c_1 \to c_1'$ は C_1 の射である．
  (3) $Lg_1 \circ f = f' \circ Kg_0$，即ち以下の図式を可換にする．



C_0, C_1, D を圏，$K\colon C_0 \to D$，$L\colon C_1 \to D$ を関手とする．コンマ圏 $K \downarrow L$ を考えると，関手 $P_0\colon K \downarrow L \to C_0$，$P_1\colon K \downarrow L \to C_1$ と自然変換 $\theta\colon K \circ P_0 \Rightarrow L \circ P_1$ が以下のように定まる．

$$\begin{tikzcd}
C_1 \arrow[r, "L"] & D \\
K \downarrow L \arrow[u, "P_1"] \arrow[r, "P_0"'] \arrow[ur, phantom, "\Uparrow \theta"] & C_0 \arrow[u, "K"']
\end{tikzcd}$$

- $\langle c_0, c_1, f\rangle \in \mathrm{Ob}(K\downarrow L)$ に対して $P_0\langle c_0, c_1, f\rangle := c_0$，$\langle g_0, g_1\rangle \in \mathrm{Mor}(K\downarrow L)$ に対して $P_0\langle g_0, g_1\rangle := g_0$.
- $\langle c_0, c_1, f\rangle \in \mathrm{Ob}(K\downarrow L)$ に対して $P_1\langle c_0, c_1, f\rangle := c_1$，$\langle g_0, g_1\rangle \in \mathrm{Mor}(K\downarrow L)$ に対して $P_1\langle g_0, g_1\rangle := g_1$.
- $\langle c_0, c_1, f\rangle \in \mathrm{Ob}(K\downarrow L)$ に対して $\theta_{\langle c_0, c_1, f\rangle} := f$.

コンマ圏の重要な性質は，この $\langle K\downarrow L, P_0, P_1, \theta\rangle$ がある種の普遍性を持つ事である.

命題 7. C_0, C_1, D を圏，$K\colon C_0 \to D$，$L\colon C_1 \to D$ を関手として，上記のように関手 $P_0\colon K\downarrow L \to C_0$，$P_1\colon K\downarrow L \to C_1$ と自然変換 $\theta\colon K\circ P_0 \Rightarrow L\circ P_1$ を定める．このとき，別の組 $\langle X, Q_0, Q_1, \rho\rangle$ が同じ条件，即ち

- X は圏である.
- $Q_0\colon X \to C_0$ は関手である.
- $Q_1\colon X \to C_1$ は関手である.
- $\rho\colon K\circ Q_0 \Rightarrow L\circ Q_1$ は自然変換である.

$$
\begin{tikzcd}
C_1 \arrow[r, "L"] & D \\
X \arrow[u, "Q_1"] \arrow[r, "Q_0"'] \arrow[ur, phantom, "\Nwarrow\rho"] & C_0 \arrow[u, "K"']
\end{tikzcd}
$$

を満たすならば，関手 $H\colon X \to K\downarrow L$ が一意に存在して以下を満たす.

(1) $P_0\circ H = Q_0$，$P_1\circ H = Q_1$ である.
(2) 次の自然変換の等式が成り立つ.

$$
\begin{tikzcd}
 & C_1 \arrow[r, "L"] & D \\
 & K\downarrow L \arrow[u, "P_1"] \arrow[r, "P_0"'] \arrow[ur, phantom, "\Nwarrow\theta"] & C_0 \arrow[u, "K"'] \\
X \arrow[ur, dashed, "H"'] \arrow[uur, bend left, "Q_1"] \arrow[urr, bend right, "Q_0"'] & &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
 & C_1 \arrow[r, "L"] & D \\
 & & C_0 \arrow[u, "K"'] \arrow[ul, phantom, "\Nwarrow\rho"] \\
X \arrow[uur, bend left, "Q_1"] \arrow[urr, bend right, "Q_0"'] & &
\end{tikzcd}
$$

証明. $Q_0\colon X \to C_0$，$Q_1\colon X \to C_1$ を関手，$\rho\colon K\circ Q_0 \Rightarrow L\circ Q_1$ を自然変換とする．関手 $H\colon X \to K\downarrow L$ を

- 対象 $x \in X$ に対して $H(x) := \langle Q_0(x), Q_1(x), \rho_x\rangle$.

- 射 $f \in X$ に対して $H(f) := \langle Q_0(f), Q_1(f) \rangle$.

で定める．このとき明らかに条件 (1)(2) を満たす．またこの条件を満たす H は明らかにこれしかない． $\square$

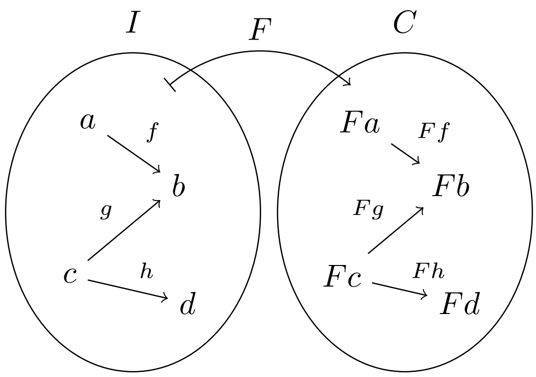
要するに，コンマ圏というのは，こういう形の図式のうちで一番「良い」ものになっているということである．

5　余極限

一般の余極限は以下のように定義される．まず，

定義. 圏 C における図式とは，関手 $F\colon I \to C$ のことをいう．また I を添え字圏という．

$F\colon I \to C$ を図式とする．このとき I 全体を F で写すことで，圏 C の中に I の形をした「図式」ができる．



こうしてできた図式の「余極限」を，F の余極限といい $\operatorname{colim} F$ と書く．より正確に定義すると次のようになる．

定義. $F\colon I \to C$ を図式とする．このとき F の余極限とは $\langle \operatorname{colim} F, \{\mu_i\}_{i \in I} \rangle$ であって以下の条件を満たすものである．

- $\operatorname{colim} F$ は C の対象である．
- $i \in I$ に対して，μ_i は C の射 $\mu_i\colon Fi \to \operatorname{colim} F$ である．

- I の射 $f\colon i \to j$ に対して $\mu_j \circ Ff = \mu_i$ である．

$$\begin{tikzcd}
Fi \arrow[d, "Ff"'] \arrow[dr, "\mu_i"] & \\
Fj \arrow[r, "\mu_j"'] & \operatorname{colim} F
\end{tikzcd}$$

- $\langle x, \{\nu_i\}_{i\in I}\rangle$ が同じ条件を満たすならば，C の射 $h\colon \operatorname{colim} F \to x$ が一意に存在して，任意の $i \in I$ に対して $\mu_i \circ h = \nu_i$ を満たす．

$$\begin{tikzcd}
Fi \arrow[d, "Ff"'] \arrow[dr, "\mu_i"] \arrow[drr, bend left, "\nu_i"] & & \\
Fj \arrow[r, "\mu_j"'] \arrow[rr, bend right, "\nu_j"'] & \operatorname{colim} F \arrow[r, dashed, "h"] & x
\end{tikzcd}$$

例えば I が離散圏の場合の余極限が余直積であり，$I = (\,\cdot \leftarrow \cdot \rightarrow \cdot\,)$ の場合が pushout である．最後に以下で使う言葉の定義をしておく．

定義.
- 添え字圏が小圏 (Mor(C) が集合となる圏 C のこと) となる図式の余極限を小余極限という．
- 任意の小余極限が存在する圏を余完備な圏という．例えば **Set**, **Ab** などは余完備である．
- 関手 $F\colon C \to D$ が余極限と交換する
  $\iff$ $G\colon I \to C$ を図式として G の余極限 $\langle \operatorname{colim} G, \{\mu_i\}_{i\in I}\rangle$ が存在するとき，$\langle F(\operatorname{colim} G), \{F\mu_i\}_{i\in I}\rangle$ が $FG\colon I \to D$ の余極限となる．
  つまり図式

$$\begin{tikzcd}
Gi \arrow[d, "Gf"'] \arrow[dr, "\mu_i"] & \\
Gj \arrow[r, "\mu_j"'] & \operatorname{colim} G
\end{tikzcd}$$

  が G の余極限を与えているならば，これを F で写した図式

$$\begin{tikzcd}
FGi \arrow[d, "FGf"'] \arrow[dr, "F\mu_i"] & \\
FGj \arrow[r, "F\mu_j"'] & F(\operatorname{colim} G)
\end{tikzcd}$$

  が FG の余極限を与えるという事である．

極限に関しても同様に定義する (ここでは省略する).

6　随伴

定義. C, D を圏，$F\colon C \to D$，$G\colon D \to C$ を関手とする．$c \in C$，$d \in D$ について自然な同型 $\mathrm{Hom}_D(Fc, d) \cong \mathrm{Hom}_C(c, Gd)$ が成り立つとき，F を G の左随伴関手，G を F の右随伴関手という．これを記号 $F \dashv G\colon C \to D$ もしくは単に $F \dashv G$ で表す.

ここでは随伴については詳しく説明しないが，代表的な例としては次のようなものがある.

例 8. $F\colon \mathbf{Set} \to \mathbf{Ab}$ を，$x \in \mathbf{Set}$ に対して自由アーベル群 $Fx \in \mathbf{Ab}$ を対応させる関手とし，$U\colon \mathbf{Ab} \to \mathbf{Set}$ を忘却関手とする．このとき $F \dashv U\colon \mathbf{Set} \to \mathbf{Ab}$ である.　□

例 9. a を集合とする．$F\colon \mathbf{Set} \to \mathbf{Set}$ を右から a を直積する関手，即ち $x \in \mathbf{Set}$ に対して $x \times a \in \mathbf{Set}$ を対応させる関手とする．このとき $F \dashv \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(a, -)\colon \mathbf{Set} \to \mathbf{Set}$ である．（この関手 F を $- \times a$ などと書くことが多い．）　□

また，以下で使う定理として次のようなものがある. (証明は省略する．)

定理 10. 関手 F の右随伴は同型を除いて一意である．即ち，$F \dashv G$，$F \dashv H$ ならば $G \cong H$ である.　□

定理 11. 左随伴関手は余極限と交換する．右随伴関手は極限と交換する.　□

7　Kan 拡張

定義. C, D, U を圏，$F\colon C \to D$，$E\colon C \to U$ を関手とする．F に沿った E の左 Kan 拡張とは組 $\langle F^\dagger E, \eta \rangle$ であって，以下の条件を満たすものである.

(1) $F^\dagger E$ は関手 $D \to U$，η は自然変換 $E \Rightarrow F^\dagger E \circ F$ である.

$$\begin{tikzcd} D \arrow[drr, "F^\dagger E"] & & \\ C \arrow[u, "F"] \arrow[rr, "E"'] \arrow[r, phantom, "\eta\Uparrow"] & & U \end{tikzcd}$$

(2) 組 $\langle S,\theta\rangle$ が同じ条件を満たす (即ち $S\colon D\to U$ は関手で $\theta\colon E\Rightarrow S\circ F$ は自然変換) ならば，自然変換 $\tau\colon F^\dagger E\Rightarrow S$ が一意に存在して $\theta=\tau_F\circ\eta$ となる．即ち次の等式が成り立つ．

$$
\begin{tikzcd}
D \arrow[rr, bend left, "S"] \arrow[drr, "F^\dagger E"'] \arrow[rr, phantom, "\Nearrow\tau"'] & & \\
C \arrow[u, "F"] \arrow[rr, "E"'] \arrow[ur, phantom, "\eta\Uparrow"] & & U
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
D \arrow[rr, bend left, "S"] & & \\
C \arrow[u, "F"] \arrow[rr, "E"'] \arrow[ur, phantom, "\theta\Uparrow"] & & U
\end{tikzcd}
$$

※ 自然変換の向きを逆にしたものを，F に沿った E の右 Kan 拡張という (記号では $F^\ddagger E$ と書く)．

$$
\begin{tikzcd}
D \arrow[rr, bend left, "S"] \arrow[drr, "F^\ddagger E"'] \arrow[rr, phantom, "\Swarrow\tau"'] & & \\
C \arrow[u, "F"] \arrow[rr, "E"'] \arrow[ur, phantom, "\varepsilon\Downarrow"] & & U
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
D \arrow[rr, bend left, "S"] & & \\
C \arrow[u, "F"] \arrow[rr, "E"'] \arrow[ur, phantom, "\theta\Downarrow"] & & U
\end{tikzcd}
$$

左 Kan 拡張 $F^\dagger E$ を $\mathrm{Lan}_F E$，右 Kan 拡張 $F^\ddagger E$ を $\mathrm{Ran}_F E$ と書くこともある[*1]．

例 12. 余極限は左 Kan 拡張である．これはどういうことかというと $F\colon C\to\mathbf{1}=\{*\}$ を一意な関手としたとき，$F^\dagger E\cong\operatorname{colim}E$ となる．(より正確に書くと $F^\dagger E(*)\cong\operatorname{colim}E$ である．)

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{1} \arrow[dr, "F^\dagger E"] & \\
C \arrow[u, "F"] \arrow[r, "E"'] \arrow[ur, phantom, "\eta\Uparrow"] & U
\end{tikzcd}
$$

これを理解するために，具体例として $C=(b\xleftarrow{f}a\xrightarrow{g}c)$ の場合を見てみよう．まず関手 E により，$b\xleftarrow{f}a\xrightarrow{g}c$ は圏 U の図式 $Eb\xleftarrow{Ef}Ea\xrightarrow{Eg}Ec$ に写される．

$$
C \xrightarrow[E]{} U
\qquad
\begin{tikzcd}
b \\
a \arrow[u, "f"] \arrow[d, "g"'] \\
c
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
Eb \\
Ea \arrow[u, "Ef"] \arrow[d, "Eg"'] \\
Ec
\end{tikzcd}
$$

$$\overset{\frown}{\longmapsto}_{E}$$

[*1] というか，大抵の本・論文では Lan や Ran が使われている．

一方，F により $b \xleftarrow{f} a \xrightarrow{g} c$ は $* \xleftarrow{\mathrm{id}_*} * \xrightarrow{\mathrm{id}_*} *$ に写される．

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{1} \\
C \arrow[u, "F"] \arrow[r, "E"'] & U
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
* & \\
* \arrow[u, "\mathrm{id}_*"] \arrow[d, "\mathrm{id}_*"'] & \\
* & \\
b & Eb \\
a \arrow[u, "f"] \arrow[d, "g"'] & Ea \arrow[u, "Ef"] \arrow[d, "Eg"'] \\
c & Ec
\end{tikzcd}
$$

F ($\mapsto$), E ($\mapsto$)

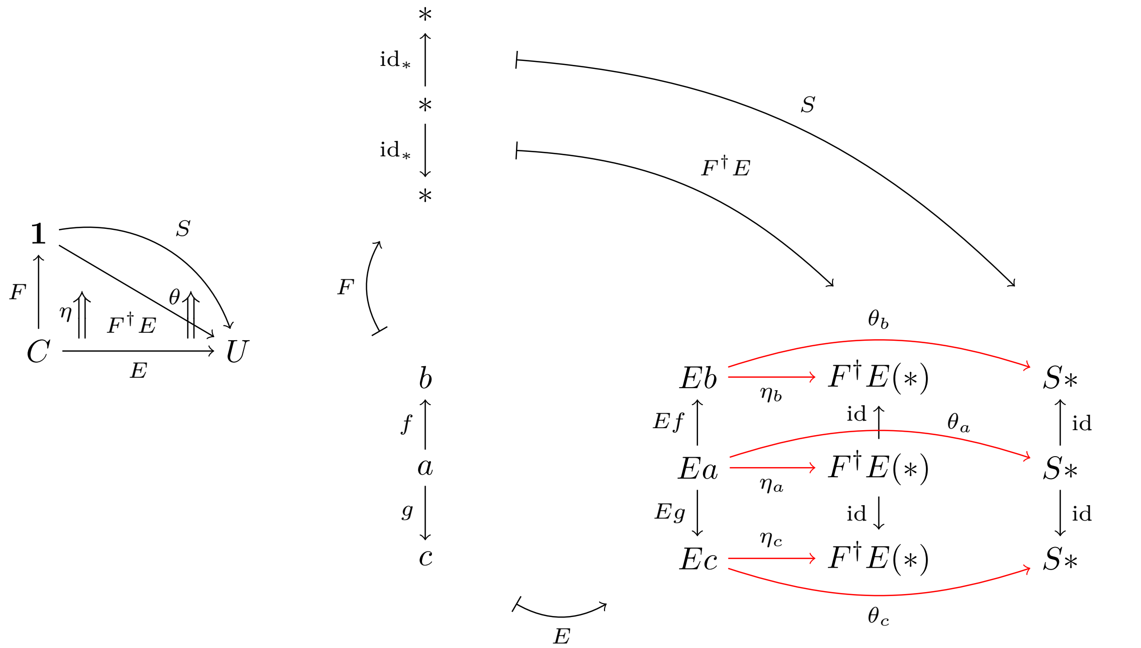
この $* \xleftarrow{\mathrm{id}_*} * \xrightarrow{\mathrm{id}_*} *$ は $F^\dagger E$ と S により U へと写される．

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{1} \arrow[dr, "F^\dagger E"] \arrow[dr, bend left, "S"] & \\
C \arrow[u, "F"] \arrow[r, "E"'] & U
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
* & & & \\
* \arrow[u, "\mathrm{id}_*"] \arrow[d, "\mathrm{id}_*"'] & & & \\
* & & & \\
b & Eb & F^\dagger E(*) & S* \\
a \arrow[u, "f"] \arrow[d, "g"'] & Ea \arrow[u, "Ef"] \arrow[d, "Eg"'] & F^\dagger E(*) \arrow[u, "\mathrm{id}"] \arrow[d, "\mathrm{id}"'] & S* \arrow[u, "\mathrm{id}"'] \arrow[d, "\mathrm{id}"] \\
c & Ec & F^\dagger E(*) & S*
\end{tikzcd}
$$

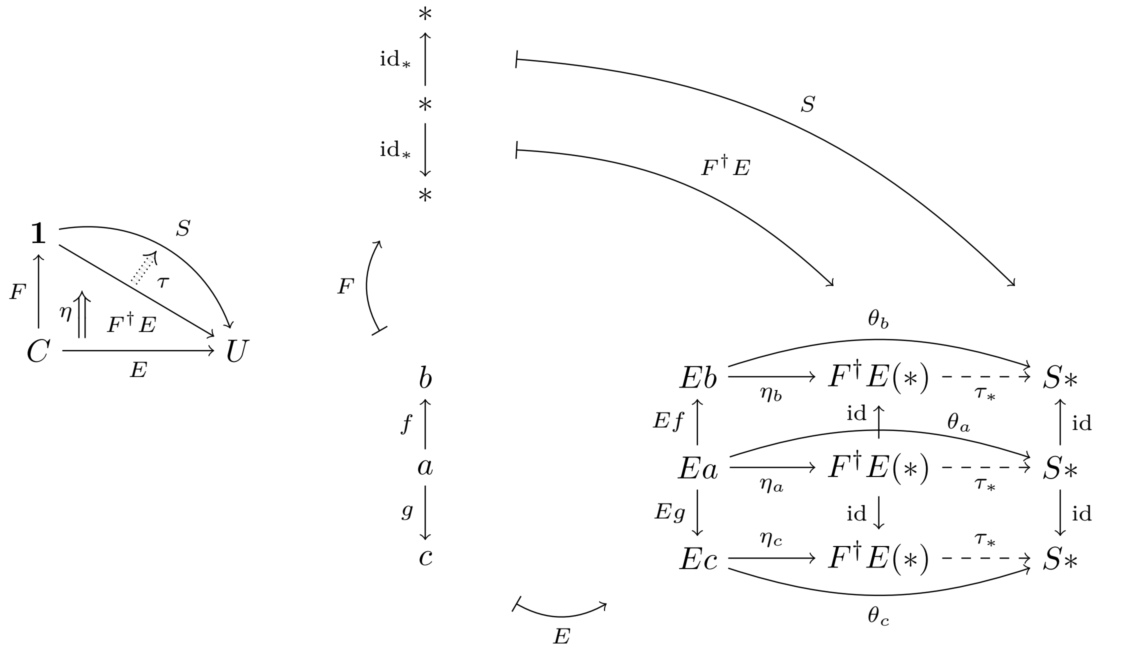
F ($\mapsto$), E ($\mapsto$), $F^\dagger E$ ($\mapsto$), S ($\mapsto$)

このとき，自然変換 η と θ は次の図式の赤い部分の射となり，またこれらが作る四角は可

換となる．



左 Kan 拡張の条件は，このとき点線の射 τ_* が一意に存在して，図式が可換になるということである．



ここで，id で繋がっている部分をまとめて一つにすると，次の図式が得られる．

$$
\begin{tikzcd}
Eb \arrow[dr, "\eta_b"] \arrow[drr, bend left, "\theta_b"] & & \\
Ea \arrow[u, "Ef"] \arrow[d, "Eg"'] & F^\dagger E(*) \arrow[r, dashed, "\tau_*"'] & S* \\
Ec \arrow[ur, "\eta_c"] \arrow[urr, bend right, "\theta_c"'] & &
\end{tikzcd}
$$

つまり，$F^\dagger E(*)$ は $Eb \xleftarrow{Ef} Ea \xrightarrow{Eg} Ec$ の pushout である．

一般の場合にも，同じようにして $F^\dagger E \cong \operatorname{colim} E$ となることが分かる．また，同様にして，極限が右 Kan 拡張であることも分かる． $\square$

さて，一般に $F\colon C \to D$，$E\colon C \to U$ を関手として，左 Kan 拡張 $F^\dagger E\colon D \to U$ が存在するとする．

$$
\begin{tikzcd}
D \arrow[dr, "F^\dagger E"] & \\
C \arrow[u, "F"] \arrow[r, "E"'] \arrow[ur, phantom, "\Uparrow"] & U
\end{tikzcd}
$$

このとき，定義だけでは $F^\dagger E$ がどういう関手なのかはよく分からないと思う．例えば，対象 $d \in D$ に対して，$F^\dagger E(d)$ は何になるのだろうか? 実は，余極限 (極限) が左 Kan 拡張 (右 Kan 拡張) であることを使うと，「各点 Kan 拡張」という方法でこれを計算することができる．

まず対象 $d \in D$ を $d(*) = d$ となる関手 $d\colon \mathbf{1} \to D$ とみなしてコンマ圏 $F \downarrow d$ を考えれば次の図式を得る．

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{1} \arrow[r, "d"] & D \arrow[dr, "F^\dagger E"] & \\
F \downarrow d \arrow[u, "P_1"] \arrow[r, "P_0"'] \arrow[ur, phantom, "\Nwarrow"] & C \arrow[u, "F"] \arrow[r, "E"'] \arrow[ur, phantom, "\Uparrow"] & U
\end{tikzcd}
$$

自然変換を合成すれば次の図式を得る．

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{1} \arrow[dr, "F^\dagger E(d)"] & \\
F \downarrow d \arrow[u, "P_1"] \arrow[r, "E \circ P_0"'] \arrow[ur, phantom, "\Uparrow"] & U
\end{tikzcd}
$$

コンマ圏というのは，こういう形の図式のうちで一番「良い」ものだった (7) から，この図式も「良い」図式，即ち左 Kan 拡張になるのではないかと期待できる (実は一般にはそうなるとは限らない)．もしそうなってくれれば，この場合 P_1 に沿った左 Kan 拡張は余極限になる (例 12) から $F^\dagger E(d) \cong \mathrm{colim}(F \downarrow d \xrightarrow{P_0} C \xrightarrow{E} U)$ となり，左 Kan 拡張が余極限に帰着できる．

実は，ある程度の仮定があれば上記の期待は正しいことが分かり，次の定理を示すことができる (証明は省略する)．

定理 13. C, D, U を圏，$F\colon C \to D$，$E\colon C \to U$ を関手とする．各 $d \in D$ に対して余極限 $\mathrm{colim}(F \downarrow d \xrightarrow{P_0} C \xrightarrow{E} U)$ が存在するならば，F に沿った E の左 Kan 拡張 $F^\dagger E$ が存在し，$F^\dagger E(d) \cong \mathrm{colim}(F \downarrow d \xrightarrow{P_0} C \xrightarrow{E} U)$ となる． □

C が小圏ならば $F \downarrow d$ も小圏となる．故に次の系が得られる．

系 14. C, D, U を圏，$F\colon C \to D$ を関手とする．U が余完備で，C が小圏ならば，任意の関手 $E\colon C \to U$ に対して左 Kan 拡張 $F^\dagger E$ が存在する． □

つまり，U が余完備[*2]であれば左 Kan 拡張は余極限で計算できると思ってしまってほぼ良いのである．

さて，C, D, U を圏，$F\colon C \to D$ を関手として，任意の $E\colon C \to U$ に対して $F^\dagger E$ が存在するとする．このとき実は $E \mapsto F^\dagger E$ という対応は関手 $F^\dagger\colon U^C \to U^D$ を定めることが分かる (左 Kan 拡張の普遍性を使えばよい)．また，左 Kan 拡張の普遍性

$$
\begin{tikzcd}
D \arrow[r, bend left=50, "S"] \arrow[dr, "F^\dagger E" description] \arrow[r, phantom, shift right=2, "\Uparrow\tau"] & U \\
C \arrow[u, "F"] \arrow[r, "E"'] \arrow[ur, phantom, shift right=3, "\eta\Uparrow"] & U
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
D \arrow[dr, bend left=50, "S"] & \\
C \arrow[u, "F"] \arrow[r, "E"'] \arrow[ur, phantom, "\theta\Uparrow"] & U
\end{tikzcd}
$$

から，同型

$$
\begin{array}{ccc}
\mathrm{Hom}_{U^D}(F^\dagger E, S) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Hom}_{U^C}(E, SF) \\
\Cup & & \Cup \\
\tau & \longmapsto & \theta = \tau_F \circ \eta
\end{array}
$$

が成り立つことが分かる．ここで関手 $F^{-1}\colon U^D \to U^C$ を

[*2] 応用上は大抵この条件は成り立っているので，最初から U は余完備であると思ってしまってもあまり問題ない．

- $K \in U^D$ に対して $F^{-1}(K) := KF$.
- $\theta\colon K \Rightarrow L\colon D \to U$ に対して $F^{-1}(\theta) := \theta_F$.

で定義すると先の同型は

$$\mathrm{Hom}_{U^D}(F^\dagger E, S) \cong \mathrm{Hom}_{U^C}(E, F^{-1}(S))$$

と書ける．この同型は E, S について自然であることが分かる．つまり左 Kan 拡張は随伴 $F^\dagger \dashv F^{-1}$ を与えることになる．

なお，右 Kan 拡張に関しても，同様にして次の定理が得られる．

定理 15. C, D, U を圏として，$F\colon C \to D$，$E\colon C \to U$ を関手とする．各 $d \in D$ に対して極限 $\lim(d \downarrow F \to C \xrightarrow{E} U)$ が存在するならば，F に沿った E の右 Kan 拡張 $F^\ddagger E$ が存在し，$F^\ddagger E(d) \cong \lim(d \downarrow F \to C \xrightarrow{E} U)$ となる．

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{1} \arrow[r, "d"] & D \arrow[dr, "F^\ddagger E"] & \\
d \downarrow F \arrow[u] \arrow[r] \arrow[ur, phantom, "\Searrow F"] & C \arrow[u] \arrow[r, "E"'] \arrow[ur, phantom, "\Downarrow"] & U
\end{tikzcd}$$

故に U が完備で C が小圏ならば $F^\ddagger E$ は存在する．

また，各 $E\colon C \to U$ に対して $F^\ddagger E$ が存在するならば，$F^\ddagger\colon U^C \to U^D$ は関手となり $F^{-1} \dashv F^\ddagger$ である． □

例 16. X, Y を集合，$f\colon X \to Y$ を写像とする．集合を離散圏とみなせば $f\colon X \to Y$ は関手である．また逆像を考える写像 $f^{-1}\colon \mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(X)$ を考えると，これも ($\mathcal{P}(X), \mathcal{P}(Y)$ を包含関係による順序で圏とみなしたとき) 関手である．

圏 $\mathbf{2} = \{0 \to 1\}$ を考えれば圏同型 $\mathcal{P}(X) = \mathbf{2}^X$ が成り立つが，このとき今考えている関手 f^{-1} は $\mathbf{2}^Y \ni A \mapsto A \circ f \in \mathbf{2}^X$ で与えられる．

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[dr, "A"] & \\
X \arrow[u, "f"] \arrow[r, "f^{-1}(A)"'] \arrow[ur, phantom, "\parallel"] & \mathbf{2}
\end{tikzcd}$$

つまり，この f^{-1} は先ほど定義した意味での関手 $f^{-1}\colon \mathbf{2}^Y \to \mathbf{2}^X$ と一致している．

一方, $\mathbf{2}$ は余完備だから, 系 14 より任意の $A\colon X \to \mathbf{2}$ に対して左 Kan 拡張 $f^\dagger A\colon Y \to \mathbf{2}$ が存在する.

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[dr, "f^\dagger A"] & \\ X \arrow[u, "f"] \arrow[r, "A"'] \arrow[ur, phantom, "\Uparrow"] & \mathbf{2} \end{tikzcd}$$

故に関手 $f^\dagger\colon \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(Y)$ が得られて, $f^\dagger \dashv f^{-1}$ となる. この $f^\dagger$ を各点左 Kan 拡張で計算してみよう.

$A\colon X \to \mathbf{2}$ に対して $f^\dagger A$ を求める為, $d \in Y$ を取りコンマ圏 $f\downarrow d$ を考える.

$$\begin{tikzcd} \mathbf{1} \arrow[r, "d"] & Y & \\ f\downarrow d \arrow[u] \arrow[r] \arrow[ur, phantom, "\Nwarrow"] & X \arrow[u, "f"'] \arrow[r, "A"'] & \mathbf{2} \end{tikzcd}$$

コンマ圏の定義から $f\downarrow d = \{x \in X \mid f(x) = d\} = f^{-1}(d)$ は離散圏である. 故に

$$f^\dagger A(d) = \operatorname{colim}(f\downarrow d \to X \xrightarrow{A} \mathbf{2}) = \coprod_{x \in f^{-1}(d)} A(x)$$

となるから

$$f^\dagger A(d) = \begin{cases} 1 & (\text{ある } x \in f^{-1}(d) \text{ が存在して } A(x) = 1 \text{ となるとき}) \\ 0 & (\text{そうでないとき}) \end{cases}$$

となる. つまり $A \in \mathcal{P}(X)$ に対して $f^\dagger A = f(A)$ である. 従って $f^{-1}\colon \mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(X)$ の左随伴関手は $f\colon \mathcal{P}(X) \ni A \mapsto f(A) \in \mathcal{P}(Y)$ である.

更に $\mathbf{2}$ は完備でもあるから, f^{-1} の右随伴関手 (= 右 Kan 拡張) も存在する. それを各点右 Kan 拡張により同様に計算してみると

$$\begin{tikzcd} \mathbf{1} \arrow[r, "d"] & Y & \\ d\downarrow f \arrow[u] \arrow[r] \arrow[ur, phantom, "\Searrow"] & X \arrow[u, "f"'] \arrow[r, "A"'] & \mathbf{2} \end{tikzcd}$$

$$f^\ddagger A(d) = \lim(d\downarrow f \to X \xrightarrow{A} \mathbf{2}) = \prod_{x \in f^{-1}(d)} A(x)$$

となるから

$$f^\ddagger A(d) = \begin{cases} 0 & (\text{ある } x \in f^{-1}(d) \text{ が存在して } A(x)=0 \text{ となるとき}) \\ 1 & (\text{そうでないとき}) \end{cases}$$

であり，$f^\ddagger A = Y \setminus f(X \setminus A) =: f_!(A)$ となることが分かる[*3].

以上により，$f^{-1}\colon \mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(X)$ は左随伴，右随伴両方を持つ．

$$\begin{tikzcd} \mathcal{P}(X) \arrow[r, shift left=4, "f"] \arrow[r, phantom, shift left=2, "\perp"] \arrow[r, phantom, shift right=2, "\perp"] \arrow[r, shift right=4, "f_!"'] & \mathcal{P}(Y) \arrow[l, "f^{-1}"'] \end{tikzcd}$$

従って定理 11 より f^{-1} は余極限，極限両方と交換する．特に次の等式が成り立つ:

$$f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B), \quad f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B).$$

一方 f は左随伴を持たない．それは f と極限が交換しない (例えば $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ とは限らない) ことから分かる． □

例 17. (位相空間上の前層を知っている人向けの例．知らない人は飛ばしてください．)
位相空間 X に対して，X の開集合全体がなす順序集合 $\mathcal{O}_X$ を圏とみなす．X 上の (集合の) 前層とは関手 $P\colon \mathcal{O}_X^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ のことであった．よって $\widehat{\mathcal{O}_X} := \mathbf{Set}^{\mathcal{O}_X^{\mathrm{op}}}$ が X 上の前層がなす圏である．

X, Y を位相空間，$f\colon X \to Y$ を連続写像とする．このとき，X 上の前層 P に対して Y 上の前層 f_*P が $f_*P(U) := P(f^{-1}(U))$ により定まり，関手 $f_*\colon \widehat{\mathcal{O}_X} \to \widehat{\mathcal{O}_Y}$ を順像というのであった．また関手 f_* は左随伴関手 f^* を持ち，これを逆像というのであった．さて，F を関手 $\mathcal{O}_Y^{\mathrm{op}} \ni U \longmapsto f^{-1}(U) \in \mathcal{O}_X^{\mathrm{op}}$ とすれば，定義から $f_* = F^{-1}\colon \widehat{\mathcal{O}_X} \to \widehat{\mathcal{O}_Y}$ である．

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}_X^{\mathrm{op}} \arrow[dr, "P"] & \\ \mathcal{O}_Y^{\mathrm{op}} \arrow[u, "F"] \arrow[r, "f_*(P)"'] & \mathbf{Set} \end{tikzcd}$$

故に左随伴の一意性から $f^* \cong F^\dagger$ が分かる．そこで前層 $P \in \widehat{\mathcal{O}_Y}$ の逆像 $F^\dagger P \cong f^*(P)$ を各点左 Kan 拡張で計算してみよう．

[*3] この $f_!(A)$ を small image と呼ぶ，らしい．

$U \in \mathcal{O}_X$ を取りコンマ圏 $F\downarrow U$ を考える．

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{1} \arrow[r, "U"] & \mathcal{O}_X^{\mathrm{op}} & \\
F\downarrow U \arrow[u] \arrow[r] \arrow[ur, phantom, "\Leftarrow"] & \mathcal{O}_Y^{\mathrm{op}} \arrow[u, "F"'] \arrow[r, "P"'] & \mathbf{Set}
\end{tikzcd}$$

$F^\dagger P(U) \cong \operatorname{colim}(F\downarrow U \to \mathcal{O}_Y^{\mathrm{op}} \xrightarrow{P} \mathbf{Set}) \cong \operatorname*{colim}_{\langle V,h\rangle \in F\downarrow U} P(V)$ となる．コンマ圏の定義から

$$\begin{aligned}
\langle V,h\rangle \in F\downarrow U &\iff h\colon F(V) \to U \quad \text{in } \mathcal{O}_X^{\mathrm{op}} \\
&\iff F(V) \supset U \\
&\iff f^{-1}(V) \supset U \\
&\iff V \supset f(U)
\end{aligned}$$

となるので $F^\dagger P(U) \cong \operatorname*{colim}_{V\supset f(U)} P(V)$ となり，普段見る逆像の定義が現れる． □

定義. 定理 13 の形で得られる左 Kan 拡張を各点左 Kan 拡張という．

各点左 Kan 拡張に対しては，次の重要な同型がある (証明は省略する)．

定理 18. $F^\dagger E$ が各点左 Kan 拡張のとき，$d \in D$，$u \in U$ について自然な同型

$$\mathrm{Hom}_U(F^\dagger E(d), u) \cong \mathrm{Hom}_{\widehat{C}}(\mathrm{Hom}_D(F-, d), \mathrm{Hom}_U(E-, u))$$

が成り立つ． □

系 19. C を小圏，D を圏，$F\colon C \to D$ を関手とするとき $F^\dagger y(d) \cong \mathrm{Hom}_D(F-, d)$.

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[dr, "F^\dagger y"] & \\
C \arrow[u, "F"] \arrow[r, "y"'] \arrow[ur, phantom, "\Uparrow"] & \widehat{C}
\end{tikzcd}$$

証明. $\widehat{C}$ が余完備だから各点左 Kan 拡張 $F^\dagger y$ が存在する．故に $P \in \widehat{C}$ に対して自然に

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{\widehat{C}}(F^\dagger y(d), P) &\cong \mathrm{Hom}_{\widehat{C}}(\mathrm{Hom}_D(F-, d), \mathrm{Hom}_{\widehat{C}}(y-, P)) && \text{(定理 18)} \\
&\cong \mathrm{Hom}_{\widehat{C}}(\mathrm{Hom}_D(F-, d), P) && \text{(米田の補題)}
\end{aligned}$$

となる．従って定理 6 により $F^\dagger y(d) \cong \mathrm{Hom}_D(F-, d)$ を得る． □

系 20. 小圏 C に対して $y^\dagger y \cong \mathrm{id}$ である．

$$
\begin{tikzcd}
\widehat{C} \arrow[dr, "y^\dagger y \cong \mathrm{id}"] & \\
C \arrow[u, "y"] \arrow[r, "y"'] \arrow[ur, phantom, "\Uparrow"] & \widehat{C}
\end{tikzcd}
$$

証明. 系 19 と米田の補題により, $P \in \widehat{C}$ について自然な同型 $y^\dagger y(P) \cong \mathrm{Hom}(y-, P) \cong P$ が成り立つ. □

系 21. 任意の前層 $P \in \widehat{C}$ は $y(c)$ の余極限で書ける．

証明. 系 20 により $y^\dagger y(P) \cong P$ であるが，一方各点左 Kan 拡張

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{1} \arrow[r, "P"] & \widehat{C} \arrow[dr, "y^\dagger y \cong \mathrm{id}"] & \\
y \downarrow P \arrow[u] \arrow[r] \arrow[ur, phantom, "\Nwarrow"] & C \arrow[u, "y"] \arrow[r, "y"'] \arrow[ur, phantom, "\Uparrow"] & \widehat{C}
\end{tikzcd}
$$

により $P \cong y^\dagger y(P) \cong \mathrm{colim}(y \downarrow P \to C \xrightarrow{y} \widehat{C}) = \operatorname*{colim}_{\langle c, f\rangle \in y\downarrow P} y(c)$ である． □

8 普遍随伴

定理 22. C を小圏，U を余完備な圏とすると，関手 $F \colon C \to U$ から二つの各点左 Kan 拡張 $y^\dagger F$，$F^\dagger y$ が得られる．このとき随伴 $y^\dagger F \dashv F^\dagger y$ が成り立つ．

$$
\begin{tikzcd}
\widehat{C} \arrow[dr, shift left, "y^\dagger F"] \arrow[dr, phantom, "\perp"] & \\
C \arrow[u, "y"] \arrow[r, "F"'] & U \arrow[ul, shift left, "F^\dagger y"]
\end{tikzcd}
$$

※ この随伴を，twitter 等で一部の人が普遍随伴と呼んでいる．一般に広く使われている名称は無いようだが，例えば nlab では nerve and realization というページがある．

証明．$P \in \widehat{C}$，$u \in U$ に対して自然に

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_U(y^\dagger F(P), u) &\cong \mathrm{Hom}_{\widehat{C}}(\mathrm{Hom}_C(y-, P), \mathrm{Hom}_U(F-, u)) && \text{(定理 18)} \\
&\cong \mathrm{Hom}_{\widehat{C}}(P, \mathrm{Hom}_U(F-, u)) && \text{(米田の補題)} \\
&\cong \mathrm{Hom}_{\widehat{C}}(P, F^\dagger y(u)). && \text{(系 19)}
\end{aligned}$$

よって $y^\dagger F \dashv F^\dagger y$ である． □

逆に次が成り立つ．

定理 23. 任意の随伴 $L \dashv R \colon \widehat{C} \to U$ はこのようにして得られる．

証明．$F := L \circ y \colon C \to U$ とする．随伴 $y^\dagger F \dashv F^\dagger y$ が得られる．このとき $y^\dagger F \cong L$ となることが証明できる．右随伴の一意性から $R \cong F^\dagger y$ も分かる． □

例 24. $L \dashv R \colon \mathbf{Set} \to \mathbf{Set}$ を随伴とする．$\widehat{\mathbf{1}} = \mathbf{Set}$ だから，$F := L \circ y$ とすれば

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Set} \arrow[dr, shift left=1.5, "L"] \arrow[dr, phantom, "\perp"] & \\
\mathbf{1} \arrow[u, "y"] \arrow[r, "F"'] & \mathbf{Set} \arrow[ul, shift left=1.5, "R"]
\end{tikzcd}$$

定理 23 の証明より $L \cong y^\dagger F$，$R \cong F^\dagger y$ である．$x := F(*) \in \mathbf{Set}$ と置けば，$a \in \mathbf{Set}$ に対して

$$R(a) \cong F^\dagger y(a) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(F-, a) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(x, a)$$

だから $R \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(x, -)$ である．一方 $L(a) \cong y^\dagger F(a) \cong \mathrm{colim}(y{\downarrow}a \to \mathbf{1} \xrightarrow{F} \mathbf{Set})$ で $y{\downarrow}a \cong a$ となるから

$$L(a) \cong \coprod_{b \in a} x \cong a \times x$$

により $L \cong - \times x$ である．故に，任意の随伴 $\mathbf{Set} \to \mathbf{Set}$ は $- \times x \dashv \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(x, -)$ の形をしている． □

例 25. $L \dashv R \colon \mathbf{Set} \to \mathbf{Set}^{\mathrm{op}}$ を随伴とする．$F := L \circ y \colon \mathbf{1} \to \mathbf{Set}^{\mathrm{op}}$ と置けば, $L \cong y^\dagger F$,

$R \cong F^\dagger y$ である．

$$\begin{tikzcd} \mathbf{Set} \arrow[dr, shift left, "L"] & \\ \mathbf{1} \arrow[u, "y"] \arrow[r, "F"'] & \mathbf{Set}^{\mathrm{op}} \arrow[ul, shift left, "R"] \arrow[ul, phantom, "\perp"] \end{tikzcd}$$

よって，$x := F(*)$ とすれば $R \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}^{\mathrm{op}}}(x, -) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(-, x)$ である．また任意の $a, b \in \mathbf{Set}$ に対して

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(a, \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(b, x)) &\cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(a \times b, x) \\ &\cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(b, \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(a, x)) \\ &\cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}^{\mathrm{op}}}(\mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(a, x), b) \end{aligned}$$

だから $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(-, x) \dashv \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(-, x)$ である．従って $L \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(-, x) = R$ となることが分かる[*4]． $\square$

例 26. 小圏 I に対して随伴 $\Delta \dashv \lim \colon \mathbf{Set} \to \mathbf{Set}^I$ が成り立つ．よって $F := \Delta \circ y$ と置けば，$T \in \mathbf{Set}^I$ に対して $\lim T \cong F^\dagger y(T) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}^I}(F(*), T)$ である．

$$\begin{tikzcd} \mathbf{Set} \arrow[dr, shift left, "\Delta"] & \\ \mathbf{1} \arrow[u, "y"] \arrow[r, "F"'] & \mathbf{Set}^I \arrow[ul, shift left, "\lim"] \arrow[ul, phantom, "\perp"] \end{tikzcd}$$

$F(*) = \Delta(y(*)) \cong \Delta 1$ だから $\lim T \cong \mathrm{Hom}(\Delta 1, T)$ が分かる． $\square$

例 27. 圏 $\mathbb{\Delta}$ を以下のように定める．

- $\mathrm{Ob}(\mathbb{\Delta}) := \{[n] \mid n \in \mathbb{N}\}$，ここで $[n] := \{0, 1, \cdots, n\}$ であり $0 \in \mathbb{N}$ とする．
- 射 $[m] \to [n]$ は，$[m]$ の自然な順序を保つ写像とする．

このとき関手 $\mathbb{\Delta}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ を単体的集合 (simplicial set) と呼ぶ．単体的集合の間の射とは自然変換のこととする．よって $\widehat{\mathbb{\Delta}}$ が単体的集合のなす圏である[*5]．

[*4] 正確に書けば $L \cong R^{\mathrm{op}}$ である．

[*5] この圏を **sSet** などと書くことが多い．

$n \in \mathbb{N}$ に対して位相空間 Δ^n を

$$\Delta^n := \{(x_0, \cdots, x_n) \in [0,1]^{n+1} \mid x_0 + \cdots + x_n = 1\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

で定義すれば，関手 $F\colon \mathbb{\Delta} \to \mathbf{Top}$ が $F([n]) := \Delta^n$ により自然に定まる．このとき普遍随伴により $y^\dagger F \dashv F^\dagger y$ が得られる．

$$\begin{tikzcd}
\widehat{\mathbb{\Delta}} \arrow[dr, shift left, "y^\dagger F"] \arrow[dr, phantom, "\perp"] & \\
\mathbb{\Delta} \arrow[u, "y"] \arrow[r, "F"'] & \mathbf{Top} \arrow[ul, shift left, "F^\dagger y"]
\end{tikzcd}$$

$|-| := y^\dagger F\colon \widehat{\mathbb{\Delta}} \to \mathbf{Top}$ を幾何学的実現，$\mathrm{Sing} := F^\dagger y\colon \mathbf{Top} \to \widehat{\mathbb{\Delta}}$ を singular functor という．各点左 Kan 拡張により，$X \in \widehat{\mathbb{\Delta}}$ に対して $|X| \cong \mathrm{colim}(y \downarrow X \to \mathbb{\Delta} \xrightarrow{F} \mathbf{Top})$ と書ける．また系 19 より $X \in \mathbf{Top}$，$n \in \mathbb{N}$ に対して $\mathrm{Sing}(X)(n) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(\Delta^n, X)$ である． $\square$

例 28. 順序集合 $[n] = \{0, 1, \cdots, n\}$ を圏とみなして包含関手 $F\colon \mathbb{\Delta} \to \mathbf{Cat}$ を考えれば，随伴 $y^\dagger F \dashv F^\dagger y$ が得られる．

$$\begin{tikzcd}
\widehat{\mathbb{\Delta}} \arrow[dr, shift left, "y^\dagger F"] \arrow[dr, phantom, "\perp"] & \\
\mathbb{\Delta} \arrow[u, "y"] \arrow[r, "F"'] & \mathbf{Cat} \arrow[ul, shift left, "F^\dagger y"]
\end{tikzcd}$$

$N := F^\dagger y\colon \mathbf{Cat} \to \widehat{\mathbb{\Delta}}$ を nerve functor という． $\square$