Kan 拡張

alg-d
http://alg-d.com/math/kan_extension/

2020 年 7 月 19 日

目次

1 定義

関手 $F\colon C \to D$ と圏 U に対して，関手 $F^{-1}\colon U^D \to U^C$ が $F^{-1}(S) := S \circ F$ により定まるのであった (第 1 章「自然変換・関手圏」の PDF を参照．).

定義. C, D, U を圏，$F\colon C \to D$，$E\colon C \to U$ を関手とする．F に沿った E の左 Kan 拡張とは，E から F^{-1} への普遍射 $\langle F^\dagger E, \eta\rangle$ のことをいう．

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\eta"] \arrow[dr, "\theta"'] & F^\dagger E \circ F \arrow[d, dashed, "\tau_F"] \\ & S \circ F \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} F^\dagger E \arrow[d, dashed, "\tau"] \\ S \end{tikzcd}$$

即ち，以下の条件を満たす $\langle F^\dagger E, \eta\rangle$ のことである．

(1) $F^\dagger E$ は関手 $D \to U$ で，η は自然変換 $E \Rightarrow F^\dagger E \circ F$ である．

$$\begin{tikzcd} D \arrow[dr, "F^\dagger E"] & \\ C \arrow[u, "F"] \arrow[r, "E"'] \arrow[u, phantom, shift left=3ex, "\eta\Uparrow"] & U \end{tikzcd}$$

(2) 組 $\langle S, \theta\rangle$ が同じ条件を満たす (即ち $S\colon D \to U$ は関手で $\theta\colon E \Rightarrow S \circ F$ は自然変換) ならば，自然変換 $\tau\colon F^\dagger E \Rightarrow S$ が一意に存在して $\theta = \tau_F \circ \eta$ となる．即ち次の等式が成り立つ．

$$\begin{tikzcd} D \arrow[dr, "F^\dagger E"'] \arrow[dr, bend left, "S"] \arrow[dr, phantom, shift left=2ex, "\tau"] & \\ C \arrow[u, "F"] \arrow[r, "E"'] \arrow[u, phantom, shift left=3ex, "\eta\Uparrow"] & U \end{tikzcd} = \begin{tikzcd} D \arrow[dr, bend left, "S"] & \\ C \arrow[u, "F"] \arrow[r, "E"'] \arrow[u, phantom, shift left=4ex, "\theta\Uparrow"] & U \end{tikzcd}$$

自然変換 η を左 Kan 拡張 $\langle F^\dagger E, \eta\rangle$ の unit と呼ぶ．また，F に沿った E の右 Kan 拡張 $\langle F^\ddagger E, \varepsilon\rangle$ が自然変換の向きを逆にして得られる．

$$\begin{tikzcd} D \arrow[dr, "F^\ddagger E"'] \arrow[dr, bend left, "S"] \arrow[dr, phantom, shift left=2ex, "\tau"] & \\ C \arrow[u, "F"] \arrow[r, "E"'] \arrow[u, phantom, shift left=3ex, "\varepsilon\Downarrow"] & U \end{tikzcd} = \begin{tikzcd} D \arrow[dr, bend left, "S"] & \\ C \arrow[u, "F"] \arrow[r, "E"'] \arrow[u, phantom, shift left=4ex, "\theta\Downarrow"] & U \end{tikzcd}$$

左 Kan 拡張 $F^\dagger E$ を $\mathrm{Lan}_F E$，右 Kan 拡張 $F^\ddagger E$ を $\mathrm{Ran}_F E$ と書くこともある[*1]．

普遍射の性質 (第 1 章「極限」の PDF を参照) から次の命題が分かる．

命題 1. $F\colon C \to D$，$E\colon C \to U$ に対して関手 $\mathrm{Hom}_{U^C}(E, F^{-1}(-))\colon U^D \to \mathbf{Set}$ が得られる．このとき

$$\mathrm{Hom}_{U^C}(E, F^{-1}(-)) \text{ が表現可能関手} \iff F^\dagger E \text{ が存在する}$$

が成り立つ．またこのとき，$\mathrm{Hom}_{U^C}(E, F^{-1}(-)) \cong \mathrm{Hom}_{U^D}(F^\dagger E, -)$ が成り立つ．これから得られる同型 $\mathrm{Hom}_{U^C}(E, F^{-1}(F^\dagger E)) \cong \mathrm{Hom}_{U^D}(F^\dagger E, F^\dagger E)$ で右辺の $\mathrm{id}_{F^\dagger E}$ に対応する左辺の $\eta\colon E \Rightarrow F^{-1}(F^\dagger E)$ が，左 Kan 拡張 $F^\dagger E$ の unit である． $\square$

[*1] というか，大抵の本・論文では Lan や Ran が使われている．

命題 2. 各 $E \in U^C$ に対して，F に沿った左 Kan 拡張 $F^\dagger E \in U^D$ が存在するとする．このとき $F^\dagger$ は関手 $F^{-1}\colon U^D \to U^C$ の左随伴関手を定める．随伴 $F^\dagger \dashv F^{-1}$ の unit を $\eta\colon \mathrm{id}_{U^C} \Rightarrow F^{-1} \circ F^\dagger$ とするとき，$E \in U^C$ に対して η_E が $F^\dagger E$ の unit となる．同様に右 Kan 拡張 $F^\ddagger\colon U^C \to U^D$ は F^{-1} の右随伴関手である．即ち $F^\dagger \dashv F^{-1} \dashv F^\ddagger$ となる． □

例 3. 関手 $E\colon J \to U$ に対して余極限 $\operatorname{colim} E$ とは E から対角関手 $\Delta\colon U \to U^J$ への普遍射 $E \Rightarrow \Delta(\operatorname{colim} E)$ であった．一方 $\mathbf{1} = \{*\}$ を一点圏として $F\colon J \to \mathbf{1}$ を唯一の関手とすれば，Δ とは $F^{-1}\colon U^{\mathbf{1}} = U \to U^J$ のことである．F に沿った E の左 Kan 拡張は普遍射 $E \Rightarrow \Delta(F^\dagger E)$ であるから，普遍射の一意性から $F^\dagger E \cong \operatorname{colim} E$ が分かる．

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{1} \arrow[dr, "F^\dagger E \cong \operatorname{colim} E"] & \\
J \arrow[u, "F"] \arrow[r, "E"'] \arrow[ur, phantom, "\Uparrow"] & U
\end{tikzcd}$$

即ち，余極限は左 Kan 拡張である．同様にして，極限は右 Kan 拡張である． □

2　各点 Kan 拡張

余極限 (極限) が左 Kan 拡張 (右 Kan 拡張) であることを使うと，「各点 Kan 拡張」という方法で Kan 拡張を計算することができる．C, D, U を圏，$F\colon C \to D$，$E\colon C \to U$ を関手として，左 Kan 拡張 $F^\dagger E\colon D \to U$ が存在するとする．

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[dr, "F^\dagger E"] & \\
C \arrow[u, "F"] \arrow[r, "E"'] \arrow[ur, phantom, "\Uparrow"] & U
\end{tikzcd}$$

$d \in D$ に対して $F^\dagger E(d)$ を計算したい．d を $d(*) = d$ となる関手 $d\colon \mathbf{1} \to D$ とみなしてコンマ圏 $F \downarrow d$ を考えれば次の図式を得る．

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{1} \arrow[r, "d"] & D \arrow[dr, "F^\dagger E"] & \\
F \downarrow d \arrow[u, "P_1"] \arrow[r, "P_0"'] \arrow[ur, phantom, "\Nwarrow"] & C \arrow[u, "F"] \arrow[r, "E"'] \arrow[ur, phantom, "\Uparrow"] & U
\end{tikzcd}$$

自然変換を合成すれば次の図式を得る．

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{1} \arrow[drr, "F^\dagger E(d)"] & & \\
F\downarrow d \arrow[u, "P_1"] \arrow[rr, "E\circ P_0"'] \arrow[r, phantom, "\Uparrow"] & & U
\end{tikzcd}$$

P_1 に沿った左 Kan 拡張は余極限になるから，もしこれが左 Kan 拡張であれば (実は一般にはそうなるとは限らない)，$F^\dagger E(d) \cong \mathrm{colim}(E \circ P_0)$ となり，左 Kan 拡張が余極限に帰着できる．

以上を踏まえて C, D, U を圏，$F\colon C \to D$，$E\colon C \to U$ を関手とする．

$$\begin{tikzcd}
D & \\
C \arrow[u, "F"'] \arrow[r, "E"'] & U
\end{tikzcd}$$

$d \in D$ に対してコンマ圏 $F\downarrow d$ を考えれば次の図式を得る．

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{1} \arrow[r, "d"] & D & \\
F\downarrow d \arrow[u, "P_1"] \arrow[r, "P_0"'] \arrow[ur, phantom, "\Leftarrow"] & C \arrow[u, "F"'] \arrow[r, "E"'] & U
\end{tikzcd}$$

今，左 Kan 拡張 $\langle P_1^\dagger(E \circ P_0), \mu^d \rangle$，即ち余極限 $\mathrm{colim}(F\downarrow d \xrightarrow{P_0} C \xrightarrow{E} U)$ が存在すると仮定しよう．これを使って $T(d) := \mathrm{colim}(F\downarrow d \xrightarrow{P_0} C \xrightarrow{E} U)$ と定義する．

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{1} \arrow[drr, "T(d)"] & & \\
F\downarrow d \arrow[u, "P_1"] \arrow[r, "P_0"'] \arrow[ur, phantom, "\mu^d\Uparrow"] & C \arrow[r, "E"'] & U
\end{tikzcd}$$

次に射 $f\colon d \to d'$ に対して Tf を定める．$f\colon d \to d'$ は自然変換

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{1} \arrow[r, bend left, "d'"] \arrow[r, bend right, "d"'] \arrow[r, phantom, "f\Uparrow"] & D
\end{tikzcd}$$

と同一視できることに注意する．コンマ圏 $F\downarrow d$，$F\downarrow d'$ を考える．

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{1} \arrow[r, "d"] & D \\
F\downarrow d \arrow[u, "P_1"] \arrow[r, "P_0"'] \arrow[ur, phantom, "\theta\ \Nwarrow"] & C \arrow[u, "F"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathbf{1} \arrow[r, "d'"] & D \\
F\downarrow d' \arrow[u, "P'_1"] \arrow[r, "P'_0"'] \arrow[ur, phantom, "\theta'\ \Nwarrow"] & C \arrow[u, "F"']
\end{tikzcd}
$$

左の図式と f を組み合わせて，次の図式が得られる．

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{1} \arrow[r, shift left, "d'"] \arrow[r, shift right, "d"'] \arrow[r, phantom, "f\Uparrow"] & D \\
F\downarrow d \arrow[u, "P_1"] \arrow[r, "P_0"'] \arrow[ur, phantom, "\theta\ \Nwarrow"] & C \arrow[u, "F"']
\end{tikzcd}
$$

コンマ圏 $F\downarrow d'$ の普遍性 (「コンマ圏」の PDF を参照) により関手 $H\colon F\downarrow d \to F\downarrow d'$ が存在し次の等号が成り立つ．

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathbf{1} \arrow[r, "d'"] & D \\
 & F\downarrow d' \arrow[u, "P'_1"] \arrow[r, "P'_0"'] \arrow[ur, phantom, "\theta'\ \Nwarrow"] & C \arrow[u, "F"'] \\
F\downarrow d \arrow[uur, bend left, "P_1"] \arrow[urr, bend right, "P_0"'] \arrow[ur, dashed, "H"'] \arrow[u, phantom, "="] \arrow[ur, phantom, shift right=3, "="] & &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
 & \mathbf{1} \arrow[r, shift left, "d'"] \arrow[r, shift right, "d"'] \arrow[r, phantom, "f\Uparrow"] & D \\
 & \arrow[ur, phantom, "\theta\ \Nwarrow"] & C \arrow[u, "F"'] \\
F\downarrow d \arrow[uur, bend left, "P_1"] \arrow[urr, bend right, "P_0"'] & &
\end{tikzcd}
$$

今，余極限 $T(d)=\mathrm{colim}(F\downarrow d \xrightarrow{P_0} C \xrightarrow{E} U)$，$T(d')=\mathrm{colim}(F\downarrow d' \xrightarrow{P'_0} C \xrightarrow{E} U)$ が存在するのであった．

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathbf{1} \arrow[drr, "T(d)"] & & \\
 & \arrow[r, phantom, "\mu^d\Uparrow"] & C \arrow[r, "E"'] & U \\
F\downarrow d \arrow[uur, bend left, "P_1"] \arrow[urr, bend right, "P_0"'] & & &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & \mathbf{1} \arrow[drr, bend left, "T(d')"] \arrow[r, phantom, "\mu^{d'}\Uparrow"] & & \\
 & F\downarrow d' \arrow[u, "P'_1"] \arrow[r, "P'_0"'] & C \arrow[r, "E"'] & U \\
F\downarrow d \arrow[uur, bend left, "P_1"] \arrow[ur, "H"'] \arrow[urr, bend right, "P_0"'] \arrow[u, phantom, "="] \arrow[ur, phantom, shift right=3, "="] & & &
\end{tikzcd}
$$

故に左 Kan 拡張 $\langle T(d), \mu^d\rangle$ の普遍性により射 $Tf\colon T(d)\to T(d')$ が存在して次の等式が

成り立つ.

$$
\begin{tikzcd}
& \mathbf{1} \arrow[rr, bend left, "T(d')"] \arrow[drr, "T(d)"'] \arrow[dr, phantom, "\mu^d \Uparrow"'] & & {} \\
& & C \arrow[r, "E"'] \arrow[u, phantom, "\Uparrow Tf"] & U \\
F\downarrow d \arrow[uur, bend left, "P_1"] \arrow[urr, bend right, "P_0"'] & & &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
& \mathbf{1} \arrow[rr, bend left, "T(d')"] & & {} \\
& F\downarrow d' \arrow[u, "P_1'"] \arrow[r, "P_0'"'] \arrow[u, phantom, "\mu^{d'} \Uparrow"', shift left=4] & C \arrow[r, "E"'] & U \\
F\downarrow d \arrow[uur, bend left, "P_1"] \arrow[ur, "H"'] \arrow[urr, bend right, "P_0"'] & & &
\end{tikzcd}
$$

このとき T は関手 $T\colon D \to U$ となり，T が F に沿った E の左 Kan 拡張となることが分かる．このことは後で証明することにして認めてしまえば，次の定理が得られる．

定理 4. C, D, U を圏，$F\colon C \to D$，$E\colon C \to U$ を関手とする．各 $d \in D$ に対して余極限 $\operatorname{colim}(F\downarrow d \xrightarrow{P_0} C \xrightarrow{E} U)$ が存在するならば，F に沿った E の左 Kan 拡張 $F^\dagger E$ が存在して $F^\dagger E(d) \cong \operatorname{colim}(F\downarrow d \xrightarrow{P_0} C \xrightarrow{E} U)$ となる．

C が小圏ならば $F\downarrow d$ も小圏となる．故に次の系が得られる．

系 5. C, D, U を圏，$F\colon C \to D$ を関手とする．U が余完備で，C が小圏ならば，任意の関手 $E\colon C \to U$ に対して左 Kan 拡張 $F^\dagger E$ が存在する．故にこの場合 F^{-1} は左随伴を持ち $F^\dagger \dashv F^{-1}\colon U^C \to U^D$ となる． □

Set は余完備であったから次の系を得る．

系 6. C, D を小圏，$F\colon C \to D$ を関手とする．任意の関手 $E\colon C^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ に対して左 Kan 拡張 $F^\dagger E\colon D^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ が存在する．

$$
\begin{tikzcd}
D^{\mathrm{op}} \arrow[dr, "F^\dagger E"] & \\
C^{\mathrm{op}} \arrow[u, "F"] \arrow[r, "E"'] \arrow[ur, phantom, "\Uparrow"] & \mathbf{Set}
\end{tikzcd}
$$

故に随伴 $F^\dagger \dashv F^{-1}\colon \widehat{C} \to \widehat{D}$ が成り立つ[*2]． □

右 Kan 拡張に関しても，同様にして次の定理が得られる．

定理 7. C, D, U を圏として，$F\colon C \to D$，$E\colon C \to U$ を関手とする．各 $d \in D$ に対して極限 $\lim(d\downarrow F \to C \xrightarrow{E} U)$ が存在するならば，F に沿った E の右 Kan 拡張 $F^\ddagger E$ が

[*2] 正確には $(F^{\mathrm{op}})^\dagger \dashv (F^{\mathrm{op}})^{-1}$ であるが，単に $F^\dagger \dashv F^{-1}$ と書いている．

存在して $F^\ddagger E(d) \cong \lim(d\downarrow F \to C \xrightarrow{E} U)$ となる．

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{1} \arrow[r, "d"] & D \arrow[dr, "F^\ddagger E"] & \\
d\downarrow F \arrow[u] \arrow[r] \arrow[ur, phantom, "\Searrow"] & C \arrow[u, "F"'] \arrow[r, "E"'] \arrow[ur, phantom, "\Downarrow"] & U
\end{tikzcd}$$

故に U が完備で C が小圏ならば $F^\ddagger E$ は存在し，特に $F^{-1} \dashv F^\ddagger \colon \widehat{D} \to \widehat{C}$ である． $\square$

例 8. X, Y を集合，$f\colon X \to Y$ を写像とし，逆像を考える写像 $f^{-1}\colon \mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(X)$ を考える．これは ($\mathcal{P}(X), \mathcal{P}(Y)$ を包含関係による順序で圏とみなしたとき) 関手である．

圏 $\mathbf{2} = \{0 \to 1\}$ を考えれば圏同型 $\mathcal{P}(X) = \mathbf{2}^X$ が成り立つが，このとき今考えている関手 f^{-1} は $\mathbf{2}^Y \ni A \mapsto A \circ f \in \mathbf{2}^X$ で与えられる．

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[dr, "A"] & \\
X \arrow[u, "f"] \arrow[r, "f^{-1}(A)"'] & \mathbf{2}
\end{tikzcd}$$

つまりこの f^{-1} は，写像 f を (離散圏 X, Y の間の) 関手 $f\colon X \to Y$ とみなしたときに得られる関手 $f^{-1}\colon \mathbf{2}^Y \to \mathbf{2}^X$ と一致している．

$\mathbf{2}$ は余完備だから，系 5 より関手 $f^{-1}\colon \mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(X)$ の左随伴関手が存在し，それは左 Kan 拡張 $f^\dagger$ である．これを各点左 Kan 拡張で計算してみよう．

$A\colon X \to \mathbf{2}$ に対して $f^\dagger A$ を求めるため，$d \in Y$ を取りコンマ圏 $f\downarrow d$ を考える．

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{1} \arrow[r, "d"] & Y & \\
f\downarrow d \arrow[u, "P_1"] \arrow[r, "P_0"'] \arrow[ur, phantom, "\Nwarrow"] & X \arrow[u, "f"'] \arrow[r, "A"'] & \mathbf{2}
\end{tikzcd}$$

コンマ圏の定義から $f\downarrow d = \{x \in X \mid f(x) = d\} = f^{-1}(d)$ は離散圏である．故に

$$f^\dagger A(d) = \operatorname{colim}(f\downarrow d \xrightarrow{P_0} X \xrightarrow{A} \mathbf{2}) = \coprod_{x \in f^{-1}(d)} A(x)$$

となるから

$$f^\dagger A(d) = \begin{cases} 1 & (\text{ある } x \in f^{-1}(d) \text{ が存在して } A(x) = 1) \\ 0 & (\text{そうでないとき}) \end{cases}$$

である．即ち $A \in \mathcal{P}(X)$ に対して $f^\dagger A = f(A)$ となる．従って $f^{-1}\colon \mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(X)$ の左随伴関手は $f\colon \mathcal{P}(X) \ni A \mapsto f(A) \in \mathcal{P}(Y)$ である．

更に $\mathbf{2}$ は完備でもあるから，f^{-1} の右随伴関手 (= 右 Kan 拡張) も存在する．それを各点右 Kan 拡張により同様に計算してみると

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{1} \arrow[r, "d"] & Y \\
d \downarrow f \arrow[u] \arrow[r] \arrow[ur, phantom, "\Searrow"] & X \arrow[u, "f"'] \arrow[r, "A"'] & \mathbf{2}
\end{tikzcd}$$

$$f^\ddagger A(d) = \lim(d \downarrow f \to X \xrightarrow{A} \mathbf{2}) = \prod_{x \in f^{-1}(d)} A(x)$$

となるから

$$f^\ddagger A(d) = \begin{cases} 0 & (\text{ある } x \in f^{-1}(d) \text{ が存在して } A(x) = 0) \\ 1 & (\text{そうでないとき}) \end{cases}$$

であり，$f^\ddagger A = Y \setminus f(X \setminus A) =: f_!(A)$ となることが分かる[*3]．

以上により，$f^{-1}\colon \mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(X)$ は左随伴，右随伴両方を持つ．

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{P}(X) \arrow[r, shift left=4, "f"] \arrow[r, phantom, shift left=2, "\perp"] \arrow[r, phantom, shift right=2, "\perp"] \arrow[r, shift right=4, "f_!"'] & \mathcal{P}(Y) \arrow[l, "f^{-1}"']
\end{tikzcd}$$

従って f^{-1} は余極限，極限両方と交換する．特に次の等式が成り立つ．

$$f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B), \quad f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B).$$

一方 f は左随伴を持たない．それは f と極限が交換しない (例えば $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ とは限らない) ことから分かる． $\square$

例 9. 位相空間 X に対して，X の開集合全体がなす順序集合 $\mathcal{O}_X$ を圏とみなす．X 上の (集合の) 前層とは関手 $P\colon \mathcal{O}_X^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ のことであった．よって $\widehat{\mathcal{O}_X} := \mathbf{Set}^{\mathcal{O}_X^{\mathrm{op}}}$ が X 上の前層がなす圏である．

X, Y を位相空間，$f\colon X \to Y$ を連続写像とする．このとき，X 上の前層 P に対して Y 上の前層 $f_* P$ が $f_* P(U) := P(f^{-1}(U))$ により定まり，関手 $f_*\colon \widehat{\mathcal{O}_X} \to \widehat{\mathcal{O}_Y}$ を順像と

[*3] この $f_!(A)$ を small image と呼ぶ，らしい．

いうのであった．また関手 f_* は左随伴関手 f^* を持ち，これを逆像というのであった．さて，F を関手 $\mathcal{O}_Y^{\mathrm{op}} \ni U \longmapsto f^{-1}(U) \in \mathcal{O}_X^{\mathrm{op}}$ とすれば，定義から $f_* = F^{-1} \colon \widehat{\mathcal{O}_X} \to \widehat{\mathcal{O}_Y}$ である．

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_X^{\mathrm{op}} \arrow[dr, "P"] & \\
\mathcal{O}_Y^{\mathrm{op}} \arrow[u, "F"] \arrow[r, "f_*(P)"'] & \mathbf{Set}
\end{tikzcd}$$

故に左随伴の一意性から $f^* \cong F^\dagger$ が分かる．そこで前層 $P \in \widehat{\mathcal{O}_Y}$ の逆像 $F^\dagger P \cong f^*(P)$ を各点左 Kan 拡張で計算してみる．

$U \in \mathcal{O}_X$ を取りコンマ圏 $F \downarrow U$ を考える．

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{1} \arrow[r, "U"] & \mathcal{O}_X^{\mathrm{op}} & \\
F \downarrow U \arrow[u, "P_1"] \arrow[r, "P_0"'] \arrow[ur, phantom, "\Leftarrow"] & \mathcal{O}_Y^{\mathrm{op}} \arrow[u, "F"'] \arrow[r, "P"'] & \mathbf{Set}
\end{tikzcd}$$

$F^\dagger P(U) \cong \mathrm{colim}(F \downarrow U \xrightarrow{P_0} \mathcal{O}_Y^{\mathrm{op}} \xrightarrow{P} \mathbf{Set}) \cong \operatorname*{colim}_{\langle V,h\rangle \in F\downarrow U} P(V)$ となる．コンマ圏の定義から

$$\begin{aligned}
\langle V, h\rangle \in F \downarrow U &\iff h \colon F(V) \to U \quad \text{in } \mathcal{O}_X^{\mathrm{op}} \\
&\iff F(V) \supset U \\
&\iff f^{-1}(V) \supset U \\
&\iff V \supset f(U)
\end{aligned}$$

となるので $F^\dagger P(U) \cong \operatorname*{colim}_{V \supset f(U)} P(V)$ となり，普段見る逆像の定義が現れる． □

例 10. 各点左 Kan 拡張で書けない左 Kan 拡張は存在する．$C := \mathbf{1} = \{*\}$，$D := \mathbf{2} = \{0 \to 1\}$，$U = \{a, b\}$ とする．$F \colon \mathbf{1} \to \mathbf{2}$ を $F(*) := 1$，$E \colon \mathbf{1} \to U$ を $E(*) := a$ で定める．

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{2} & \\
\mathbf{1} \arrow[u, "1"'] \arrow[r, "a"'] & \{a, b\}
\end{tikzcd}$$

関手 $\mathbf{2} \to U$ は Δa と Δb の 2 つしか存在しない．また自然変換 $a \Rightarrow \Delta b \circ 1$ は存在せず，$a \Rightarrow \Delta a \circ 1$ は唯一つ存在する．よって $1^{\dagger}a = \Delta a$ である．一方，$0 \in \mathbf{2}$ に対して各点左 Kan 拡張を考えると

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{1} \arrow[r, "0"] & \mathbf{2} & \\
1 \downarrow 0 \arrow[u, "P_1"] \arrow[r, "P_0"'] \arrow[ur, phantom, "\Nwarrow"] & \mathbf{1} \arrow[u, "1"'] \arrow[r, "a"'] & \{a, b\}
\end{tikzcd}
$$

$1 \downarrow 0 = \mathbf{0}$ だから，$\operatorname{colim}(1 \downarrow 0 \xrightarrow{P_0} \mathbf{1} \xrightarrow{a} U)$ は始対象となるが，$\{a, b\}$ は明らかに始対象を持たない． $\square$

さて，残っていた証明を終わらせ，定理 4 の証明を完成させよう．

証明．まず T が関手となることは普遍性から容易に分かる．T が E の F に沿った左 Kan 拡張になっていることを示すため，unit となる自然変換 $\eta\colon E \Rightarrow TF$ を定義する．

$$
\begin{tikzcd}
D \arrow[dr, "T"] & \\
C \arrow[u, "F"] \arrow[r, "E"'] \arrow[ur, phantom, "\eta\Uparrow"] & U
\end{tikzcd}
$$

$c \in C$ とすると $Fc \in D$ である．TFc は左 Kan 拡張

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{1} \arrow[drr, "TFc"] & & \\
F \downarrow Fc \arrow[u, "P_1"] \arrow[r, "P_0"'] \arrow[ur, phantom, "\mu^{Fc}\Uparrow"] & C \arrow[r, "E"'] & U
\end{tikzcd}
$$

で定義されるのであった．$\langle c, \mathrm{id}_{Fc}\rangle \in F \downarrow Fc$ だから，$\mu^{Fc}_{\langle c, \mathrm{id}_{Fc}\rangle}\colon Ec \to TFc$ となる．これを用いて $\eta_c\colon Ec \to TFc$ を $\eta_c := \mu^{Fc}_{\langle c, \mathrm{id}_{Fc}\rangle}$ で定める．この η は自然変換である．

$\because$) $f\colon c \to d$ に対して

$$
\begin{tikzcd}
Ec \arrow[r, "\mu^{Fc}_{\langle c, \mathrm{id}_{Fc}\rangle}"] \arrow[d, "Ef"'] & TFc \arrow[d, "TFf"] \\
Ed \arrow[r, "\mu^{Fd}_{\langle d, \mathrm{id}_{Fd}\rangle}"'] & TFd
\end{tikzcd}
$$

が可換であることを示せばよい．

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathbf{1} \arrow[rrd, "TFc"] \arrow[rrd, bend left, "TFd"] \arrow[rrd, phantom, "\Uparrow\mu^{Fd}\ \Rrightarrow TFf"] & & \\
 & F\downarrow Fd \arrow[u] \arrow[r] \arrow[u, phantom, "\Uparrow\mu^{Fc}"] & C \arrow[r, "E"'] & U \\
F\downarrow Fc \arrow[ruu, bend left, "P_1"] \arrow[ru, "H"'] \arrow[rru, bend right, "P_0"'] \arrow[ru, phantom, "="] & & &
\end{tikzcd}
$$

TFf の定義から $TFf_{P_1}\circ\mu^{Fc}=\mu^{Fd}_H$ である．故に $\langle c,\mathrm{id}_{Fc}\rangle\in F\downarrow Fc$ に対して $TFf\circ\mu^{Fc}_{\langle c,\mathrm{id}_{Fc}\rangle}=\mu^{Fd}_{\langle c,Ff\rangle}$ となる．ここで μ^{Fd} が自然変換だから

$$
\begin{tikzcd}
Fc \arrow[d, "Ff"'] \arrow[dr, "Ff"] & \\
Fd \arrow[r, "\mathrm{id}_{Fd}"'] & Fd
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
Ec \arrow[r, "\mu^{Fd}_{\langle c,Ff\rangle}"] \arrow[d, "Ef"'] & TFd \arrow[d, "\mathrm{id}"] \\
Ed \arrow[r, "\mu^{Fd}_{\langle d,\mathrm{id}_{Fd}\rangle}"'] & TFd
\end{tikzcd}
$$

が可換である．故に $TFf\circ\mu^{Fc}_{\langle c,\mathrm{id}_{Fc}\rangle}=\mu^{Fd}_{\langle d,\mathrm{id}_{Fd}\rangle}\circ Ef$ となり示したい可換性が示せた．

普遍性を示すため，$S\colon D\to U$，$\theta\colon E\Rightarrow SF$ とする．

$$
\begin{tikzcd}
D \arrow[rd, "T"] \arrow[rd, bend left, "S"] \arrow[rd, phantom, "\Rrightarrow\theta"] & \\
C \arrow[u, "F"] \arrow[r, "E"'] \arrow[ru, phantom, "\eta\Uparrow"] & U
\end{tikzcd}
$$

$d\in D$ を取りコンマ圏を考えて，θ と合成すると次の図式を得る．

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{1} \arrow[r, "d"] & D \arrow[rd, bend left, "S"] & \\
F\downarrow d \arrow[u, "P_1"] \arrow[r, "P_0"'] \arrow[ru, phantom, "\Nwarrow\sigma"] & C \arrow[u, "F"'] \arrow[r, "E"'] \arrow[ru, phantom, "\Rrightarrow\theta"] & U
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
\mathbf{1} \arrow[rrd, bend left, "S(d)"] \arrow[rrd, phantom, "\Uparrow S\sigma\circ\theta_{P_0}"] & & \\
F\downarrow d \arrow[u, "P_1"] \arrow[r, "P_0"'] & C \arrow[r, "E"'] & U
\end{tikzcd}
$$

余極限 Td の普遍性により $\tau_d\colon Td \to Sd$ が一意に存在し可換となる．

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{1} \arrow[rr, bend left, "S(d')"] \arrow[drr, "T(d)"] \arrow[rr, phantom, "\Uparrow \tau_d"] & & \\
F\downarrow d \arrow[u, "P_1"] \arrow[r, "P_0"'] \arrow[u, phantom, shift left=4ex, "\mu^d \Uparrow"] & C \arrow[r, "E"'] \arrow[r, phantom, shift left=2ex, "\Uparrow S\sigma\circ\theta_{P_0}"] & U
\end{tikzcd}
$$

この τ_d が自然変換 $\tau\colon T \Rightarrow S$ を定める．

$\because$) $f\colon d \to d'$ に対して

$$
\begin{tikzcd}
Td \arrow[r, "\tau_d"] \arrow[d, "Tf"'] & Sd \arrow[d, "Sf"] \\
Td' \arrow[r, "\tau_{d'}"'] & Sd'
\end{tikzcd}
$$

が可換であることを示せばよい．これらの射は次の図式のようになっている．

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathbf{1} \arrow[rr, bend left=60, "Sd'"] \arrow[rr, bend left=30, "Sd"] \arrow[drr, bend left=10, "Td'"] \arrow[drr, bend right=10, "Td"'] \arrow[rr, phantom, "\Uparrow \tau_d \quad \Uparrow Sf \quad \Uparrow \tau_{d'} \quad \Uparrow Tf"] & & \\
 & F\downarrow d' \arrow[u] \arrow[r] \arrow[u, phantom, shift left=4ex, "\mu^d \Uparrow \ \mu^{d'} \Uparrow"] & C \arrow[r, "E"'] & U \\
F\downarrow d \arrow[uur, bend left, "P_1"] \arrow[ur, "H"'] \arrow[urr, bend right, "P_0"'] \arrow[ur, phantom, shift left=3ex, "="] \arrow[ur, phantom, shift right=3ex, "="] & & &
\end{tikzcd}
$$

よって $Sf_{P_1} \circ (\tau_d)_{P_1} \circ \mu^d = (\tau_{d'})_{P_1} \circ Tf_{P_1} \circ \mu^d$ が示せれば，左 Kan 拡張 $\langle Td, \mu^d \rangle$ の普遍性から $Sf_{P_1} \circ (\tau_d)_{P_1} = (\tau_{d'})_{P_1} \circ Tf_{P_1}$ が分かる．そのためには，任意の $\langle c, k \rangle \in F\downarrow d$ に対して $Sf \circ \tau_d \circ \mu^d_{\langle c,k \rangle} = \tau_{d'} \circ Tf \circ \mu^d_{\langle c,k \rangle}$ を示せばよい．

まず Tf の定義から $Tf_{P_1} \circ \mu^d = \mu^{d'}_H$ である．故に $Tf \circ \mu^d_{\langle c,k \rangle} = \mu^{d'}_{\langle c, f\circ k \rangle}$ が成り立つ．次に τ_d の定義から $(\tau_d)_{P_1} \circ \mu^d = S\sigma \circ \theta_{P_0}$ だから，$\tau_d \circ \mu^d_{\langle c,k \rangle} = Sk \circ \theta_c$ となる．

よって

$$
\begin{aligned}
Sf \circ \tau_d \circ \mu^d_{\langle c,k\rangle} &= Sf \circ Sk \circ \theta_c \\
\tau_{d'} \circ Tf \circ \mu^d_{\langle c,k\rangle} &= \tau_{d'} \circ \mu^{d'}_{\langle c, f\circ k\rangle} \\
&= S(f \circ k) \circ \theta_c \\
&= Sf \circ Sk \circ \theta_c
\end{aligned}
$$

となり証明が終わった.

このとき $c \in C$ に対して $\tau_{Fc} \circ \eta_c = \tau_{Fc} \circ \mu^{Fc}_{\langle c, \mathrm{id}_{Fc}\rangle} = \theta_c$ となるから $\tau_F \circ \eta = \theta$ である. 左 Kan 拡張 Td の普遍性により，このような τ は一意だから，T は F に沿った E の左 Kan 拡張である. $\square$

定理 4 の形で得られる左 Kan 拡張を各点左 Kan 拡張という. 正確には次のように定義する.

定義. $F\colon C \to D$, $E\colon C \to U$, $T\colon D \to U$ を関手，$\eta\colon E \Rightarrow TF$ を自然変換とする.

$$
\begin{tikzcd}
D \arrow[dr, "T"] & \\
C \arrow[u, "F"] \arrow[r, "E"'] \arrow[ur, phantom, "\eta\Uparrow"] & U
\end{tikzcd}
$$

$\langle T, \eta\rangle$ が F に沿った E の各点左 Kan 拡張 $\Longleftrightarrow$ $\langle T, \eta\rangle$ が F に沿った E の左 Kan 拡張であり，任意の $d \in D$ に対して余極限 $\mathrm{colim}(F\downarrow d \xrightarrow{P_0} C \xrightarrow{E} U)$ が存在する.（このとき定理 4 より $Td \cong \mathrm{colim}(F\downarrow d \xrightarrow{P_0} C \xrightarrow{E} U)$ である.）

定義. C, D, U, V を圏，$F\colon C \to D$, $E\colon C \to U$, $K\colon U \to V$ を関手として左 Kan 拡張 $\langle F^\dagger E, \eta\rangle$ が存在するとする.

$$
\begin{tikzcd}
D \arrow[dr, "F^\dagger E"] & & \\
C \arrow[u, "F"] \arrow[r, "E"'] \arrow[ur, phantom, "\eta\Uparrow"] & U \arrow[r, "K"'] & V
\end{tikzcd}
$$

このとき K が左 Kan 拡張 $\langle F^\dagger E, \eta\rangle$ と交換するとは，K を合成して得られる次の図式も

左 Kan 拡張となることを言う．

$$
\begin{tikzcd}
D \arrow[rrrd, "K\circ(F^\dagger E)"] & & & \\
C \arrow[u, "F"] \arrow[r, "E"'] \arrow[ur, phantom, "K\eta \Uparrow"] & U \arrow[rr, "K"'] & & V
\end{tikzcd}
$$

(即ち，$\langle K \circ (F^\dagger E), K\eta\rangle$ が F に沿った KE の左 Kan 拡張になる．)

定理 11. $F\colon C \to D$，$E\colon C \to U$ で各点左 Kan 拡張 $F^\dagger E$ が存在し，関手 $K\colon U \to V$ は余極限と交換するとする．このとき K は $F^\dagger E$ と交換する．

証明. $F^\dagger E$ が各点左 Kan 拡張だから

$$K \circ F^\dagger E(d) = K(\mathrm{colim}(E \circ P_0)) = \mathrm{colim}(K \circ E \circ P_0) = F^\dagger(K \circ E)(d).$$

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{1} \arrow[r, "d"] & D \arrow[dr, "F^\dagger E"] \arrow[drrr, "F^\dagger(K\circ E)"] & & & \\
F\downarrow d \arrow[u] \arrow[r, "P_0"'] & C \arrow[u, "F"] \arrow[r, "E"'] & U \arrow[rr, "K"'] & & V
\end{tikzcd}
$$

$F^\dagger E, F^\dagger(KE)$ の unit をそれぞれ $\eta\colon E \Rightarrow F^\dagger E \circ F$，$\eta'\colon KE \Rightarrow F^\dagger(KE) \circ F$ とする．

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{1} \arrow[rrd, "F^\dagger E(d)"] & & \\
F\downarrow d \arrow[u, "P_1"] \arrow[r, "P_0"'] \arrow[ur, phantom, "\mu^d \Uparrow"] & C \arrow[r, "E"'] & U
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathbf{1} \arrow[rrrd, "F^\dagger(KE)(d)"] & & & \\
F\downarrow d \arrow[u, "P_1"] \arrow[r, "P_0"'] \arrow[ur, phantom, "\mu'^d \Uparrow"] & C \arrow[r, "E"'] & U \arrow[r, "K"'] & V
\end{tikzcd}
$$

とすれば, $\eta_c = \mu^{Fc}_{\langle c,\mathrm{id}_{Fc}\rangle}$, $\eta'_c = \mu'^{Fc}_{\langle c,\mathrm{id}_{Fc}\rangle}$ である．K が余極限と交換するから $K\mu^{Fc}_{\langle c,\mathrm{id}_{Fc}\rangle} = \mu'^{Fc}_{\langle c,\mathrm{id}_{Fc}\rangle}$ となり，$K\eta_c = \eta'_c$ である． □

定理 12. 左随伴関手は左 Kan 拡張と交換する．

証明. $F\colon C \to D$，$E\colon C \to U$ を関手，$L \dashv R\colon U \to V$ を随伴関手として，左 Kan 拡張 $\langle F^\dagger E, \eta\rangle$ が存在するとする．

$$
\begin{tikzcd}
D \arrow[dr, "F^\dagger E"] & & \\
C \arrow[u, "F"] \arrow[r, "E"'] \arrow[ur, phantom, "\eta\Uparrow"] & U \arrow[r, shift left, "L"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & V \arrow[l, shift left, "R"]
\end{tikzcd}
$$

$L \dashv R \colon U^C \to V^C$, $L \dashv R \colon U^D \to V^D$ となるのであった．このとき $S \in V^D$ に対して自然に

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{V^C}(LE, F^{-1}(S)) &= \mathrm{Hom}_{V^C}(LE, SF) \\
&\cong \mathrm{Hom}_{U^C}(E, RSF) \\
&= \mathrm{Hom}_{U^C}(E, F^{-1}(RS)) \\
&\cong \mathrm{Hom}_{U^D}(F^\dagger E, RS) \\
&\cong \mathrm{Hom}_{V^D}(L \circ F^\dagger E, S)
\end{aligned}$$

となるから $\mathrm{Hom}(LE, F^{-1}(-))$ は表現可能で $F^\dagger(LE) \cong L \circ F^\dagger E$ となる．$F^\dagger(LE)$ の unit は自然同型 $\mathrm{Hom}(LE, F^{-1}(L \circ F^\dagger E)) \cong \mathrm{Hom}(L \circ F^\dagger E, L \circ F^\dagger E)$ で id に対応する自然変換 $\eta' \colon LE \Rightarrow F^\dagger(LE) \circ F$ であった．一方，この同型で id に対応するのは，随伴 $L \dashv R$ の unit を α とすれば

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{id} & \in & \mathrm{Hom}(L \circ F^\dagger E, L \circ F^\dagger E) \\
\big\downarrow & & \downarrow \\
\alpha_{F^\dagger E} & \in & \mathrm{Hom}(F^\dagger E, R \circ L \circ F^\dagger E) \\
\big\downarrow & & \downarrow \\
\alpha_{F^\dagger E \circ F} \circ \eta & \in & \mathrm{Hom}(E, R \circ L \circ F^\dagger E \circ F) \\
\big\downarrow & & \downarrow \\
L\eta & \in & \mathrm{Hom}(LE, L \circ F^\dagger E \circ F)
\end{array}$$

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[dr, "F^\dagger E"] & & & \\
C \arrow[u, "F"] \arrow[r, "E"'] \arrow[ur, phantom, "\eta\Uparrow"] & U \arrow[r, "L"] \arrow[rr, bend right=50, "\mathrm{id}"'] \arrow[rr, phantom, bend right=25, "\Uparrow\alpha"] & V \arrow[r, "R"] & U
\end{tikzcd}$$

となるから $\eta' = L\eta$ である． $\square$

3 米田埋込と Kan 拡張

補題 13. $F \colon C \to D$, $E \colon C \to U$ を関手として $d \in D$ に対して $K := (F{\downarrow}d \to C \xrightarrow{E} U)$ と定める．このとき $u \in U$ について自然な同型

$$\mathrm{Hom}_{U^{F\downarrow d}}(K, \Delta u) \cong \mathrm{Hom}_{\widehat{C}}(\mathrm{Hom}_D(F-, d), \mathrm{Hom}_U(E-, u))$$

が成り立つ.

証明. まず互いに逆な写像

$$\mathrm{Hom}_{U^{F\downarrow d}}(K, \Delta u) \underset{\psi_u}{\overset{\varphi_u}{\rightleftarrows}} \mathrm{Hom}_{\widehat{C}}(\mathrm{Hom}_D(F-, d), \mathrm{Hom}_U(E-, u))$$

を定義しよう. $\alpha\colon K \Rightarrow \Delta u$ に対して写像

$$\varphi_u(\alpha)_c\colon \mathrm{Hom}_D(Fc, d) \to \mathrm{Hom}_U(Ec, u)$$

を $\varphi_u(\alpha)_c(f) := \alpha_{\langle c, f\rangle}$ で定義する. この $\varphi_u(\alpha)$ は自然変換である.

∵) $g\colon c \to c'$ を C の射とする. 次の左の図式が可換であることを示せばよい.

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_D(Fc, d) \arrow[r, "\varphi_u(\alpha)_c"] & \mathrm{Hom}_U(Ec, u) \\ \mathrm{Hom}_D(Fc', d) \arrow[u, "-\circ Fg"] \arrow[r, "\varphi_u(\alpha)_{c'}"'] & \mathrm{Hom}_U(Ec', u) \arrow[u, "-\circ Eg"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} f' \circ Fg \arrow[r, mapsto, "\varphi_u(\alpha)_c"] & \alpha_{\langle c, f'\circ Fg\rangle} \\ & \alpha_{\langle c', f'\rangle} \circ Eg \\ f' \arrow[uu, mapsto, "-\circ Fg"] \arrow[r, mapsto, "\varphi_u(\alpha)_{c'}"'] & \alpha_{\langle c', f'\rangle} \arrow[u, mapsto, "-\circ Eg"'] \end{tikzcd}$$

そこで $f' \in \mathrm{Hom}_D(Fc', d)$ として $f := f' \circ Fg$ と置く. このときコンマ圏の定義から $\langle c, f\rangle \in F\downarrow d$, $\langle c', f'\rangle \in F\downarrow d$ であり $g\colon \langle c, f\rangle \to \langle c', f'\rangle$ は $F\downarrow d$ の射である. よって, 今 $\alpha\colon K \Rightarrow \Delta u\colon F\downarrow d \to U$ が自然変換だから, 次の図式は可換である.

$$\begin{tikzcd} Ec \arrow[r, "\alpha_{\langle c, f\rangle}"] \arrow[d, "Eg"'] & u \arrow[d, "\mathrm{id}"] \\ Ec' \arrow[r, "\alpha_{\langle c', f'\rangle}"'] & u \end{tikzcd}$$

即ち $\alpha_{\langle c', f'\rangle} \circ Eg = \alpha_{\langle c, f\rangle} = \alpha_{\langle c, f'\circ Fg\rangle}$ となり, 示したい可換性が分かった.

故に φ_u は写像 $\varphi_u\colon \mathrm{Hom}_{U^{F\downarrow d}}(K, \Delta u) \to \mathrm{Hom}_{\widehat{C}}(\mathrm{Hom}_D(F-, d), \mathrm{Hom}_U(E-, u))$ を与える.

次に $\beta\colon \mathrm{Hom}_D(F-, d) \Rightarrow \mathrm{Hom}_U(E-, u)$ に対して U の射

$$\psi_u(\beta)_{\langle c, f\rangle}\colon K\langle c, f\rangle = Ec \to u$$

を $\psi_u(\beta)_{\langle c, f\rangle} := \beta_c(f)$ で定める. これは自然変換 $\psi_u(\beta)\colon K \Rightarrow \Delta u$ を定める.

∵) $g\colon \langle c,f\rangle \to \langle c',f'\rangle$ を $F{\downarrow}d$ の射とする．即ち $g\colon c\to c'$ は C の射で $f'\circ Fg = f$ となる．次の図式が可換であることを示せばよい．

$$\begin{tikzcd}
Ec \arrow[r, "\beta_c(f)"] \arrow[d, "Eg"'] & u \arrow[d, "\mathrm{id}"] \\
Ec' \arrow[r, "\beta_{c'}(f')"'] & u
\end{tikzcd}$$

β が自然変換だから次が可換である．

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_D(Fc,d) \arrow[r, "\beta_c"] & \mathrm{Hom}_U(Ec,u) \\
\mathrm{Hom}_D(Fc',d) \arrow[r, "\beta_{c'}"'] \arrow[u, "-\circ Fg"] & \mathrm{Hom}_U(Ec',u) \arrow[u, "-\circ Eg"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
f'\circ Fg = f \arrow[r, mapsto, "\beta_c"] & \beta_c(f) \\
 & \beta_{c'}(f')\circ Eg \\
f' \arrow[r, mapsto, "\beta_{c'}"'] \arrow[uu, mapsto, "-\circ Fg"] & \beta_{c'}(f') \arrow[u, mapsto, "-\circ Eg"']
\end{tikzcd}$$

故に $\beta_{c'}(f')\circ Eg = \beta_c(f)$ である．

このとき $\varphi_u\circ\psi_u = \mathrm{id}$，$\psi_u\circ\varphi_u = \mathrm{id}$ である．

∵) まず $\alpha\colon K \Rightarrow \Delta u$，$\langle c,f\rangle \in F{\downarrow}d$ に対して

$$\bigl(\psi_u\circ\varphi_u(\alpha)\bigr)_{\langle c,f\rangle} = \psi_u(\varphi_u(\alpha))_{\langle c,f\rangle} = \varphi_u(\alpha)_c(f) = \alpha_{\langle c,f\rangle}$$

だから $\psi_u\circ\varphi_u = \mathrm{id}$ である．次に β: $\mathrm{Hom}_D(F-,d) \Rightarrow \mathrm{Hom}_U(E-,u)$ に対して

$$\bigl(\varphi_u\circ\psi_u(\beta)\bigr)_c(f) = \varphi_u(\psi_u(\beta))_c(f) = \psi_u(\beta)_{\langle c,f\rangle} = \beta_c(f)$$

だから $\psi_u\circ\varphi_u = \mathrm{id}$ である．

従って φ_u は同型である．

後は φ_u が u について自然であることを示せばよい．そのためには U の射 $k\colon u\to v$ に対して次の図式が可換であることを示せばよい．(ここで ξ は次で定義される自然変換である: $c\in C$ に対して $\xi_c := (k\circ -)$: $\mathrm{Hom}_U(Ec,u)\to\mathrm{Hom}_U(Ec,v)$．)

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{U^{F\downarrow d}}(K,\Delta u) \arrow[r, "\varphi_u"] \arrow[d, "(\Delta k)\circ-"'] & \mathrm{Hom}_{\widehat{C}}(\mathrm{Hom}_D(F-,d),\mathrm{Hom}_U(E-,u)) \arrow[d, "\xi\circ-"] \\
\mathrm{Hom}_{U^{F\downarrow d}}(K,\Delta v) \arrow[r, "\varphi_v"'] & \mathrm{Hom}_{\widehat{C}}(\mathrm{Hom}_D(F-,d),\mathrm{Hom}_U(E-,v))
\end{tikzcd}$$

即ち $\alpha \in \mathrm{Hom}_{U^{F\downarrow d}}(K, \Delta u)$ に対して等式 $\varphi_v((\Delta k)\circ\alpha) = \xi\circ\varphi_u(\alpha)$ を示せばよい．それは $\langle c, f\rangle \in F\downarrow d$ に対して

$$\begin{aligned}\varphi_v((\Delta k)\circ\alpha)_c(f) &= ((\Delta k)\circ\alpha)_{\langle c,f\rangle} = k\circ\alpha_{\langle c,f\rangle}\\ \big(\xi\circ\varphi_u(\alpha)\big)_c(f) &= \big(\xi_c\circ\varphi_u(\alpha)_c\big)(f) = \xi_c(\varphi_u(\alpha)_c(f)) = k\circ\alpha_{\langle c,f\rangle}\end{aligned}$$

となるから分かる． □

補題 14. $F\colon C\to D$，$E\colon C\to U$，$T, S\colon D\to U$ を関手として，$d\in D$，$u\in U$ について自然な同型

$$\varphi_{du}\colon \mathrm{Hom}_U(Td, u) \to \mathrm{Hom}_{\widehat{C}}(\mathrm{Hom}_D(F-, d), \mathrm{Hom}_U(E-, u))$$

が存在するとする．$d\in D$ に対して $\tau_d\colon Td\to Sd$ を U の射として

$$\rho_d := \varphi_{d,Sd}(\tau_d)\colon \mathrm{Hom}_D(F-, d) \Rightarrow \mathrm{Hom}_U(E-, Sd)$$

と置く．このとき

$$\tau_d \text{ が } d \text{ について自然} \iff \rho_d \text{ が } d \text{ について自然}$$

証明． $f\colon d\to d'$ を D の射とする．自然変換 $\xi\colon \mathrm{Hom}_U(E-, Sd) \Rightarrow \mathrm{Hom}_U(E-, Sd')$ を $c\in C$ に対して

$$\xi_c := Sf\circ -\colon \mathrm{Hom}_U(Ec, Sd) \to \mathrm{Hom}_U(Ec, Sd')$$

により定める．このとき φ_{du} が $u\in U$ について自然だから

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_U(Td, Sd) \arrow[r, "\varphi_{d,Sd}"] \arrow[d, "Sf\circ-"'] & \mathrm{Hom}_{\widehat{C}}(\mathrm{Hom}_D(F-, d), \mathrm{Hom}_U(E-, Sd)) \arrow[d, "\xi\circ-"] \\ \mathrm{Hom}_U(Td, Sd') \arrow[r, "\varphi_{d,Sd'}"'] & \mathrm{Hom}_{\widehat{C}}(\mathrm{Hom}_D(F-, d), \mathrm{Hom}_U(E-, Sd')) \end{tikzcd}$$

は可換である．よってこの図式での τ_d の行き先を考えれば $\varphi_{d,Sd'}(Sf\circ\tau_d) = \xi\circ\rho_d$ が分かる．同様にして自然変換 $\zeta\colon \mathrm{Hom}_D(F-, d)\Rightarrow \mathrm{Hom}_D(F-, d')$ を $c\in C$ に対して

$$\zeta_c := f\circ -\colon \mathrm{Hom}_D(Fc, d)\to \mathrm{Hom}_D(Fc, d')$$

により定めれば，φ_{du} が $d\in U$ について自然だから

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_U(Td', Sd') \arrow[r, "\varphi_{d',Sd'}"] \arrow[d, "-\circ Tf"'] & \mathrm{Hom}_{\widehat{C}}(\mathrm{Hom}_D(F-, d'), \mathrm{Hom}_U(E-, Sd')) \arrow[d, "-\circ\zeta"] \\ \mathrm{Hom}_U(Td, Sd') \arrow[r, "\varphi_{d,Sd'}"'] & \mathrm{Hom}_{\widehat{C}}(\mathrm{Hom}_D(F-, d), \mathrm{Hom}_U(E-, Sd')) \end{tikzcd}$$

が可換となり，$\tau_{d'}$ の行き先を考えれば $\varphi_{d,Sd'}(\tau_{d'} \circ Tf) = \rho_{d'} \circ \zeta$ が分かる．ここで τ_d が d について自然とは

$$\begin{tikzcd} Td \arrow[r, "\tau_d"] \arrow[d, "Tf"'] & Sd \arrow[d, "Sf"] \\ Td' \arrow[r, "\tau_{d'}"'] & Sd' \end{tikzcd}$$

が可換であること，即ち $Sf \circ \tau_d = \tau_{d'} \circ Tf$ である．また ρ_d が d について自然とは

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_D(F-, d) \arrow[r, "\rho_d"] \arrow[d, "\zeta"'] & \mathrm{Hom}_U(E-, Sd) \arrow[d, "\xi"] \\ \mathrm{Hom}_D(F-, d') \arrow[r, "\rho_{d'}"'] & \mathrm{Hom}_U(E-, Sd') \end{tikzcd}$$

が可換であること，即ち $\xi \circ \rho_d = \rho_{d'} \circ \zeta$ である．今 $\varphi_{d,Sd'}$ が全単射であるから

$$Sf \circ \tau_d = \tau_{d'} \circ Tf \iff \xi \circ \rho_d = \rho_{d'} \circ \zeta$$

となり「τ_d が d について自然 $\iff$ ρ_{cd} が d について自然」が分かる． $\square$

定理 15. C, D, U を圏，$F\colon C \to D$，$E\colon C \to U$，$T\colon D \to U$ を関手とする．以下の条件は同値である．

(1) ある $\eta\colon E \Rightarrow TF$ が存在して $\langle T, \eta\rangle$ が F に沿った E の各点左 Kan 拡張になる．

(2) ある $\eta\colon E \Rightarrow TF$ が存在して $\langle T, \eta\rangle$ が F に沿った E の左 Kan 拡張になり，任意の $u \in U$ に対して $\mathrm{Hom}_U(-, u)\colon U \to \mathbf{Set}^{\mathrm{op}}$ が $\langle T, \eta\rangle$ と交換する．

(3) $d \in D$，$u \in U$ について自然な同型

$$\mathrm{Hom}_U(Td, u) \cong \mathrm{Hom}_{\widehat{C}}(\mathrm{Hom}_D(F-, d), \mathrm{Hom}_U(E-, u))$$

が存在する．

証明. $(1 \Longrightarrow 2)$ $\mathrm{Hom}_U(-, u)\colon U \to \mathbf{Set}^{\mathrm{op}}$ が余極限と交換するから明らか.

$(2 \Longrightarrow 3)$ 左 Kan 拡張 $T \cong F^{\dagger}E$ が存在し，$\mathrm{Hom}_U(-, u)$ がそれと交換するから F に沿った $\mathrm{Hom}_U(E-, u)$ の左 Kan 拡張も存在し，それは $\mathrm{Hom}_U(F^{\dagger}E-, u)$ である．

$$\begin{tikzcd} D \arrow[dr, "F^{\dagger}E"'] \arrow[drr, "F^{\dagger}(\mathrm{Hom}(E-,u))"] & & \\ C \arrow[u, "F"] \arrow[r, "E"'] & U \arrow[r, "\mathrm{Hom}(-,u)"'] & \mathbf{Set}^{\mathrm{op}} \end{tikzcd}$$

よって $S\colon D \to \mathbf{Set}^{\mathrm{op}}$ に対して自然に

$$\mathrm{Hom}_{(\mathbf{Set}^{\mathrm{op}})^D}(\mathrm{Hom}_U(F^\dagger E-, u), S) \cong \mathrm{Hom}_{(\mathbf{Set}^{\mathrm{op}})^C}(\mathrm{Hom}_U(E-, u), SF)$$

である (これは u についても自然である). opposite を考えれば

$$\mathrm{Hom}_{\widehat{D}}(S, \mathrm{Hom}_U(F^\dagger E-, u)) \cong \mathrm{Hom}_{\widehat{C}}(SF, \mathrm{Hom}_U(E-, u))$$

を得る. 今 $S = \mathrm{Hom}_D(-, d)$ とすれば, 米田の補題と合わせて

$$\mathrm{Hom}_U(F^\dagger E(d), u) \cong \mathrm{Hom}_{\widehat{C}}(\mathrm{Hom}_D(F-, d), \mathrm{Hom}_U(E-, u))$$

を得る.

(3 $\Longrightarrow$ 1) まず $d \in D$ とすると仮定 3 と補題 13 より, $u \in U$ に対して自然に

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_U(Td, u) &\cong \mathrm{Hom}_{\widehat{C}}(\mathrm{Hom}_D(F-, d), \mathrm{Hom}_U(E-, u)) \\ &\cong \mathrm{Hom}_{U^{F\downarrow d}}(F\downarrow d \to C \xrightarrow{E} U, \Delta u)\end{aligned}$$

である. よって $F\downarrow d \to C \xrightarrow{E} U$ の余極限は存在する. 故に後は T が F に沿った E の左 Kan 拡張になることを示せばよい.

仮定 3 で与えられている同型を

$$\varphi_{du}\colon \mathrm{Hom}_U(Td, u) \to \mathrm{Hom}_{\widehat{C}}(\mathrm{Hom}_D(F-, d), \mathrm{Hom}_U(E-, u))$$

とすると $c \in C$ に対して $\beta^c := \varphi_{Fc, TFc}(\mathrm{id}_{TFc})\colon \mathrm{Hom}_D(F-, Fc) \Rightarrow \mathrm{Hom}_U(E-, TFc)$ は自然変換である. そこで $\eta_c := \beta^c_c(\mathrm{id}_{Fc})\colon Ec \to TFc$ と定める. これは c について自然である.

∵) C の射 $f\colon c \to c'$ に対して

$$\begin{tikzcd} Ec \arrow[r, "\eta_c"] \arrow[d, "Ef"'] & TFc \arrow[d, "TFf"] \\ Ec' \arrow[r, "\eta_{c'}"'] & TFc' \end{tikzcd}$$

が可換であることを示せばよい. まず $\beta^{c'}$ が自然変換だから次の左の図式が可換で

ある．

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_D(Fc',Fc') \arrow[r, "\beta^{c'}_{c'}"] \arrow[d, "-\circ Ff"'] & \mathrm{Hom}_U(Ec',TFc') \arrow[d, "-\circ Ef"] \\
\mathrm{Hom}_D(Fc,Fc') \arrow[r, "\beta^{c'}_{c}"'] & \mathrm{Hom}_U(Ec,TFc')
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathrm{id}_{Fc'} \arrow[r, mapsto, "\beta^{c'}_{c'}"] \arrow[d, mapsto, "-\circ Ff"'] & \eta_{c'} \arrow[d, mapsto, "-\circ Ef"] \\
Ff \arrow[r, mapsto, "\beta^{c'}_{c}"'] & \eta_{c'} \circ Ef
\end{tikzcd}$$

故に $\mathrm{id}_{Fc'}$ の行き先を考えれば $\beta^{c'}_c(Ff) = \eta_{c'} \circ Ef$ が分かる．

次に自然変換

$$\begin{aligned}
\xi &\colon \mathrm{Hom}_U(E-,TFc) \Rightarrow \mathrm{Hom}_U(E-,TFc') \\
\zeta &\colon \mathrm{Hom}_D(F-,Fc) \Rightarrow \mathrm{Hom}_D(F-,Fc')
\end{aligned}$$

を $c \in C$ に対して

$$\begin{aligned}
\xi_c &:= TFf \circ - \colon \mathrm{Hom}_U(Ec,TFc) \to \mathrm{Hom}_U(Ec,TFc') \\
\zeta_c &:= Ff \circ - \colon \mathrm{Hom}_D(Fc,Fc) \to \mathrm{Hom}_D(Fc,Fc')
\end{aligned}$$

で定める．このとき φ_{du} が $d \in D$，$u \in U$ について自然だから次の 2 つの図式が可換である．

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_U(TFc,TFc) \arrow[r, "\varphi_{Fc,TFc}"] \arrow[d, "TFf\circ -"'] & \mathrm{Hom}_{\widehat{C}}(\mathrm{Hom}_D(F-,Fc),\mathrm{Hom}_U(E-,TFc)) \arrow[d, "\xi\circ -"] \\
\mathrm{Hom}_U(TFc,TFc') \arrow[r, "\varphi_{Fc,TFc'}"'] & \mathrm{Hom}_{\widehat{C}}(\mathrm{Hom}_D(F-,Fc),\mathrm{Hom}_U(E-,TFc'))
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_U(TFc',TFc') \arrow[r, "\varphi_{Fc',TFc'}"] \arrow[d, "-\circ TFf"'] & \mathrm{Hom}_{\widehat{C}}(\mathrm{Hom}_D(F-,Fc'),\mathrm{Hom}_U(E-,TFc')) \arrow[d, "-\circ\zeta"] \\
\mathrm{Hom}_U(TFc,TFc') \arrow[r, "\varphi_{Fc,TFc'}"'] & \mathrm{Hom}_{\widehat{C}}(\mathrm{Hom}_D(F-,Fc),\mathrm{Hom}_U(E-,TFc'))
\end{tikzcd}$$

よって $\mathrm{id}_{TFc}, \mathrm{id}_{TFc'}$ の行き先を考えれば $\xi \circ \beta^c = \varphi_{Fc,TFc'}(TFf) = \beta^{c'} \circ \zeta$ が分かる．この等式の c 成分を考えれば $\xi_c \circ \beta^c_c = \beta^{c'}_c \circ \zeta_c$ となるから id_{Fc} に適用することで $TFf \circ \eta_c = \beta^{c'}_c(Ff)$ を得る．

以上により $TFf \circ \eta_c = \beta^{c'}_c(Ff) = \eta_{c'} \circ Ef$ が分かる．

このとき $\langle T, \eta \rangle$ が F に沿った E の左 Kan 拡張となることを示そう．そこで $S \colon D \to U$

を関手，$\theta\colon E \Rightarrow SF$ を自然変換とする．$c \in C$ とすると米田の補題により

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}^C}(\mathrm{Hom}_D(Fc,-),\mathrm{Hom}_U(Ec,S-)) \cong \mathrm{Hom}_U(Ec,SFc)$$

だから，θ_c に対応する元 $\widetilde{\theta}_c \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}^C}(\mathrm{Hom}_D(Fc,-),\mathrm{Hom}_U(Ec,S-))$ が取れる．このとき $d \in D$ に対して $\widetilde{\theta}_{cd}\colon \mathrm{Hom}_D(Fc,d) \to \mathrm{Hom}_U(Ec,Sd)$ である．この $\widetilde{\theta}_{cd}$ は $c \in C$ について自然だから自然変換 $\widetilde{\theta}_{-d}\colon \mathrm{Hom}_D(F-,d) \Rightarrow \mathrm{Hom}_U(E-,Sd)$ が得られる．従って $\varphi_{d,Sd}(\tau_d) = \widetilde{\theta}_{-d}$ となる $\tau_d\colon Td \to Sd$ が存在する．補題 14 よりこの τ_d は $d \in D$ について自然である．自然変換 $\xi\colon \mathrm{Hom}_U(E-,TFc) \Rightarrow \mathrm{Hom}_U(E-,SFc)$ を $\xi_c := \tau_{Fc} \circ -$ により与えると次の図式が可換である．

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_U(TFc,TFc) \arrow[r, "\varphi_{Fc,TFc}"] \arrow[d, "\tau_{Fc}\circ-"'] & \mathrm{Hom}_{\widehat{C}}(\mathrm{Hom}_D(F-,Fc),\mathrm{Hom}_U(E-,TFc)) \arrow[d, "\xi\circ-"] \\
\mathrm{Hom}_U(TFc,SFc) \arrow[r, "\varphi_{Fc,SFc}"'] & \mathrm{Hom}_{\widehat{C}}(\mathrm{Hom}_D(F-,Fc),\mathrm{Hom}_U(E-,SFc))
\end{tikzcd}$$

よって id_{TFc} の行き先を考えれば $\xi \circ \beta^c = \varphi_{Fc,SFc}(\tau_{Fc}) = \widetilde{\theta}_{-,Fc}$ が分かる．このとき

$$(\xi \circ \beta^c)_c(\mathrm{id}_{Fc}) = \xi_c(\beta^c_c(\mathrm{id}_{Fc})) = \xi_c(\eta_c) = \tau_{Fc} \circ \eta_c$$

となるから $\widetilde{\theta}_c$ の定義より $\tau_{Fc} \circ \eta_c = \theta_c$ を得る．

　後はこの τ の一意性を示せばよい．そこで $\rho\colon T \Rightarrow S$ が $\rho_F \circ \eta = \theta$ を満たすとする．$d \in D$ に対して $\gamma_d := \varphi_{d,Sd}(\rho_d)\colon \mathrm{Hom}_D(F-,d) \Rightarrow \mathrm{Hom}_U(E-,Sd)$ と定める．このとき $c \in C$ に対して $\gamma_{dc}\colon \mathrm{Hom}_D(Fc,d) \to \mathrm{Hom}_U(Ec,Sd)$ であり，補題 14 により γ_{dc} は d について自然である．更に $\gamma_{Fc,c}(\mathrm{id}_{Fc}) = \theta_c$ である．

$\because$) 自然変換 $\xi\colon \mathrm{Hom}_U(E-,TFc) \Rightarrow \mathrm{Hom}_U(E-,SFc)$ を $c \in C$ に対して

$$\xi_c := \rho_{Fc} \circ -\colon \mathrm{Hom}_U(Ec,TFc) \to \mathrm{Hom}_U(Ec,SFc)$$

により定める．このとき φ_{du} が $u \in U$ について自然だから

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_U(TFc,TFc) \arrow[r, "\varphi_{Fc,TFc}"] \arrow[d, "\rho\circ-"'] & \mathrm{Hom}_{\widehat{C}}(\mathrm{Hom}_D(F-,Fc),\mathrm{Hom}_U(E-,TFc)) \arrow[d, "\xi\circ-"] \\
\mathrm{Hom}_U(TFc,SFc) \arrow[r, "\varphi_{Fc,SFc}"'] & \mathrm{Hom}_{\widehat{C}}(\mathrm{Hom}_D(F-,Fc),\mathrm{Hom}_U(E-,SFc))
\end{tikzcd}$$

は可換である．よって id_{Fc} の行き先を考えれば $\xi\circ\beta^c=\gamma_{Fc}$ を得る．故に

$$\gamma_{Fc,c}(\mathrm{id}_{Fc})=(\xi\circ\beta^c)_c(\mathrm{id}_{Fc})=\xi_c(\beta^c_c(\mathrm{id}_{Fc}))=\xi_c(\eta_c)=\rho_{Fc}\circ\eta_c=\theta_c.$$

従って米田の補題により $\gamma_{dc}=\widetilde{\theta}_{cd}$，即ち $\gamma_d=\widetilde{\theta}_{-d}$ が分かる．よって $\varphi_{d,Sd}$ が全単射だから $\rho_d=\tau_d$ となり τ の一意性が分かった． □

※ 同様にして右 Kan 拡張に対しても次の条件が同値である．

(1) ある $\eta\colon E\Rightarrow TF$ が存在して $\langle T,\eta\rangle$ が F に沿った E の各点右 Kan 拡張になる．
(2) ある $\eta\colon E\Rightarrow TF$ が存在して $\langle T,\eta\rangle$ が F に沿った E の右 Kan 拡張になり，任意の $u\in U$ に対して $\mathrm{Hom}_U(u,-)\colon U\to\mathbf{Set}$ が $\langle T,\eta\rangle$ と交換する．
(3) $d\in D$，$u\in U$ について自然な同型

$$\mathrm{Hom}_U(u,Td)\cong\mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}^C}(\mathrm{Hom}_D(d,F-),\mathrm{Hom}_U(u,E-))$$

が存在する．

系 16. C を小圏，D を圏，$F\colon C\to D$ を関手とするとき $F^\dagger y(d)\cong\mathrm{Hom}_D(F-,d)$.

$$\begin{tikzcd} D \arrow[dr, "F^\dagger y"] & \\ C \arrow[u, "F"] \arrow[r, "y"'] \arrow[ur, phantom, "\Uparrow"] & \widehat{C} \end{tikzcd}$$

証明. $\widehat{C}$ が余完備だから各点左 Kan 拡張 $F^\dagger y$ が存在する．よって任意の $P\in\widehat{C}$ に対して自然に

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\widehat{C}}(F^\dagger y(d),P)&\cong\mathrm{Hom}_{\widehat{C}}(\mathrm{Hom}_D(F-,d),\mathrm{Hom}_{\widehat{C}}(y-,P)) && \text{(定理 15)}\\ &\cong\mathrm{Hom}_{\widehat{C}}(\mathrm{Hom}_D(F-,d),P) && \text{(米田の補題)}\end{aligned}$$

となる．故に米田の補題により $F^\dagger y(d)\cong\mathrm{Hom}_D(F-,d)$ を得る． □

系 17. 小圏 C に対して $y^\dagger y \cong \mathrm{id}$ である.

$$\begin{tikzcd} \widehat{C} \arrow[dr, "y^\dagger y \cong \mathrm{id}"] & \\ C \arrow[u, "y"] \arrow[r, "y"'] \arrow[ur, phantom, "\Uparrow"] & \widehat{C} \end{tikzcd}$$

証明. 系 16 と米田の補題により, $P \in \widehat{C}$ について自然な同型 $y^\dagger y(P) \cong \mathrm{Hom}(y-, P) \cong P$ が成り立つ. □

系 18. 任意の前層 $P \in \widehat{C}$ は $y(c)$ の余極限で書ける.

証明. 系 17 により $y^\dagger y(P) \cong P$ であるが, 一方各点左 Kan 拡張

$$\begin{tikzcd} \mathbf{1} \arrow[r, "P"] & \widehat{C} \arrow[dr, "y^\dagger y \cong \mathrm{id}"] & \\ y \downarrow P \arrow[u, "P_1"] \arrow[r, "P_0"'] \arrow[ur, phantom, "\Nwarrow"] & C \arrow[u, "y"] \arrow[r, "y"'] \arrow[ur, phantom, "\Uparrow"] & \widehat{C} \end{tikzcd}$$

により $P \cong y^\dagger y(P) \cong \mathrm{colim}(y \downarrow P \to C \xrightarrow{y} \widehat{C}) = \operatorname*{colim}_{\langle c, f \rangle \in y \downarrow P} y(c)$ である. □

定理 19. 米田埋込 $y \colon C \to \widehat{C}$ は極限と交換する.

証明. 関手 $T \colon I \to C$ の極限 $\lim T$ が存在するとする. 標準的な射を $p_i \colon \lim T \to Ti$ とする. $y(\lim T)$ が関手 $y \circ T \colon I \to \widehat{C}$ の極限であることを示せばよい.

$$\begin{tikzcd} Ti & \\ Tj \arrow[u] & \lim T \arrow[l, "p_j"] \arrow[ul, "p_i"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} y(Ti) & \\ y(Tj) \arrow[u] & y(\lim T) \arrow[l, "y(p_j)"] \arrow[ul, "y(p_i)"'] \end{tikzcd}$$

そのために, $P \in \widehat{C}$ と自然変換 $\mu \colon \Delta P \Rightarrow y \circ T$ を任意に取る. (射 $P \to y(\lim T)$ が一意に伸びることを示せばよい.) 系 18 によりある $S \colon K \to C$ が存在して $P = \mathrm{colim}(y \circ S)$

と書ける．このときの標準的な射を $\alpha_k\colon y(Sk) \to P$ とする．

$$
\begin{tikzcd}
y(Ti) & & & \\
y(Tj) \arrow[u] & y(\lim T) \arrow[ul, "y(p_i)"'] \arrow[l, "y(p_j)"] & & \\
& & P \arrow[uull, bend right, "\mu_i"'] \arrow[ull, bend left, "\mu_j"] & y(Sk) \arrow[l, "\alpha_k"'] \\
& & & y(Sl) \arrow[u] \arrow[ul, "\alpha_l"]
\end{tikzcd}
$$

このとき，$k \in K$ に対して次の左側の可換図式が得られる．

$$
\begin{tikzcd}
y(Ti) & \\
y(Tj) \arrow[u] & y(Sk) \arrow[ul, "\mu_i \circ \alpha_k"'] \arrow[l, "\mu_j \circ \alpha_k"]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
Ti & \\
Tj \arrow[u] & Sk \arrow[ul, "f_{ik}"'] \arrow[l, "f_{jk}"]
\end{tikzcd}
$$

y は忠実充満だから，ある $f_{ik}\colon Sk \to Ti$ が存在して $y(f_{ik}) = \mu_i \circ \alpha_k$ となる．よって $\lim T$ の普遍性から $g_k\colon Sk \to \lim T$ が存在して次が可換となる．

$$
\begin{tikzcd}
Ti & & \\
Tj \arrow[u] & \lim T \arrow[ul, "p_i"'] \arrow[l, "p_j"] & \\
& & Sk \arrow[uull, bend right, "f_{ik}"'] \arrow[ull, bend left, "f_{jk}"] \arrow[ul, dashed, "g_k"']
\end{tikzcd}
$$

故に $y(g_k)\colon y(Sk) \to y(\lim T)$ が得られる．

$$
\begin{tikzcd}
y(Ti) & & & \\
y(Tj) \arrow[u] & y(\lim T) \arrow[ul, "y(p_i)"'] \arrow[l, "y(p_j)"] & & \\
& & P \arrow[uull, bend right, "\mu_i"'] \arrow[ull, bend left, "\mu_j"] & y(Sk) \arrow[l, "\alpha_k"'] \arrow[ull, dashed, bend right, "y(g_k)"'] \\
& & & y(Sl) \arrow[u] \arrow[ul, "\alpha_l"] \arrow[uull, dashed, bend left, "y(g_l)"]
\end{tikzcd}
$$

よって $P = \operatorname{colim}(y \circ S)$ の普遍性により $h\colon P \to y(\lim T)$ が存在する．このとき $y(p_i) \circ h = \mu_i$ である．

∵) i,k に対して次の図式が得られる．

$$\begin{tikzcd}
y(Ti) & P \arrow[l, "\mu_i"'] \arrow[dl, "h"'] \\
y(\lim T) \arrow[u, "y(p_i)"] & y(Sk) \arrow[l, "y(g_k)"] \arrow[u, "\alpha_k"']
\end{tikzcd}$$

この図式の外側の四角は g_k の取り方により可換である．また右下の三角形は h の取り方により可換である．よって $\mu_i \circ \alpha_k = y(p_i) \circ h \circ \alpha_k$ が成り立つ．故に次の図式を考えれば

$$\begin{tikzcd}
y(Ti) & & & \\
& y(\lim T) \arrow[ul, "y(p_i)"'] & & \\
& & P \arrow[ul, "h"] \arrow[uull, bend right, "\mu_i"'] & y(Sk) \arrow[l, "\alpha_k"'] \arrow[uulll, bend right, "y(p_i)\circ y(g_k)"'] \\
& & & y(Sl) \arrow[u] \arrow[ul, "\alpha_l"] \arrow[uuulll, bend left, "y(p_i)\circ y(g_l)"]
\end{tikzcd}$$

$P = \mathrm{colim}(y \circ S)$ の普遍性により $\mu_i = y(p_i) \circ h$ が分かる．

h の一意性も普遍性により分かるので，$y(\lim T) \cong \lim(y \circ T)$ である． □

定理 20. 関手 $F\colon C \to D$ に対して $F^\dagger \circ y \cong y \circ F$ である．

$$\begin{tikzcd}
\widehat{C} \arrow[r, "F^\dagger"] & \widehat{D} \\
C \arrow[u, "y"] \arrow[r, "F"'] & D \arrow[u, "y"']
\end{tikzcd}$$

証明. $c \in C$ とする．$P \in \widehat{D}$ に関して自然に

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}(y(F(c)), P) &\cong P(F(c)) \cong \mathrm{Hom}(y(c), P \circ F) = \mathrm{Hom}(y(c), F^{-1}P) \\
&\cong \mathrm{Hom}(F^\dagger(y(c)), P)
\end{aligned}$$

であるから米田の補題により $y(F(c)) \cong F^\dagger(y(c))$ である．同型の与え方から分かるようにこれは c に関して自然なので $F^\dagger \circ y \cong y \circ F$ である． □

定理 21. $\langle F^\dagger E, \eta\rangle$ が各点左 Kan 拡張で, F が忠実充満とする．このとき $\eta\colon E \Rightarrow F^\dagger E \circ F$ は同型である．

証明. 各点左 Kan 拡張により $F^\dagger E \circ F(c) = F^\dagger E(F(c)) = \mathrm{colim}(F\downarrow(Fc) \to C \xrightarrow{E} U)$ である．コンマ圏 $F\downarrow(Fc)$ の対象は $g\colon Fc' \to Fc$ であるが，今 F が忠実充満関手だから g は $c' \to c$ と対応する．よって $F\downarrow(Fc) = \mathrm{id}_C \downarrow c$ が分かる．コンマ圏 $\mathrm{id}_C\downarrow c$ は終対象 $\mathrm{id}_c\colon c \to c$ を持つから，$\mathrm{colim}(F\downarrow(Fc) \to C \xrightarrow{E} U) = Ec$ となる．よって同型 $E \cong F^\dagger E \circ F$ が成り立つ． □

逆に

定理 22. $\langle F^\dagger y, \eta\rangle$ を左 Kan 拡張とする．η が同型ならば F は忠実充満である．

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[dr, "F^\dagger y"] & \\
C \arrow[u, "F"] \arrow[r, "y"'] \arrow[ur, phantom, "\eta\Uparrow"] & \widehat{C}
\end{tikzcd}$$

証明. $F^\dagger y(d) \cong \mathrm{Hom}_D(F-, d)$ だから，$y(c) \cong F^\dagger y \circ F(c) \cong \mathrm{Hom}_D(F-, Fc)$ である．故に $\mathrm{Hom}_C(c, c) \cong \mathrm{Hom}_D(Fc, Fc)$. □

定理 23. $F\colon C \to D$ を関手とすれば $F^\dagger, F^\ddagger\colon \widehat{C} \to \widehat{D}$ が得られる (系 6)．このとき次は同値である．

(1) F が忠実充満
(2) $F^\dagger$ が忠実充満
(3) $F^\ddagger$ が忠実充満

証明. ($1 \Longrightarrow 2$) 随伴 $F^\dagger \dashv F^{-1}$ の unit を η とすれば「$F^\dagger$ が忠実充満 $\Longleftrightarrow$ η が同型」であった．仮定 1 により F が忠実充満だから η が同型となり (定理 21)，$F^\dagger$ も忠実充満である．

($2 \Longrightarrow 1$) 定理 20 により $F^\dagger \circ y \cong y \circ F$ である．仮定 2 より $F^\dagger$ が忠実充満で，y も忠実充満だから $F^\dagger \circ y \cong y \circ F$ も忠実充満である．よって F も忠実充満と分かる．

($2 \Longleftrightarrow 3$) 一般に $F \dashv G \dashv H$ のとき「F が忠実充満 $\Longleftrightarrow$ H が忠実充満」であった．よって $F^\dagger \dashv F^{-1} \dashv F^\ddagger$ より分かる． □

定義. $F\colon C \to D$ を関手とする．

(1) F が strongly generating $\iff F^\dagger y$ が conservative [*4]

(2) F が稠密 (dense) $\iff \langle \mathrm{id}_D, \mathrm{id}_F \rangle$ が F に沿った F の各点左 Kan 拡張となる.

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[dr, "\mathrm{id}_D"] & \\
C \arrow[u, "F"] \arrow[r, "F"'] \arrow[ur, phantom, "\mathrm{id}_F \Uparrow"] & D
\end{tikzcd}$$

定理 24. 関手 $F\colon C \to D$ に対して次の条件は同値.

(1) F が稠密である.

(2) 任意の $d \in D$ に対して $\mathrm{colim}(F \downarrow d \to C \xrightarrow{F} D) \cong d$ となる.

(3) ある $\eta\colon F \Rightarrow F$ が存在して, $\langle \mathrm{id}_D, \eta \rangle$ が F に沿った F の各点左 Kan 拡張となる.

(4) $F^\dagger y\colon D \to \widehat{C}$ が忠実充満である.

証明. ($1 \implies 2$) F が稠密, 即ち $\langle \mathrm{id}_D, \mathrm{id}_F \rangle$ が F に沿った F の各点左 Kan 拡張となるから $\mathrm{colim}(F \downarrow d \to C \xrightarrow{F} D) \cong d$ である.

($2 \implies 3$) $\mathrm{colim}(F \downarrow d \to C \xrightarrow{F} D) \cong d$ だから $F^\dagger F$ が存在して $F^\dagger F \cong \mathrm{id}_D$ となる.

($3 \implies 4$) $\langle \mathrm{id}_D, \eta \rangle$ を F に沿った F の各点左 Kan 拡張とする. $d \in D$ に対して $F^\dagger y(d) \cong \mathrm{Hom}_D(F-, d) = \big(F^{-1} \circ y\big)(d)$ だから $F^\dagger y = F^{-1} \circ y$ である.

$$D \xrightarrow{y} \widehat{D} \xrightarrow{F^{-1}} \widehat{C}$$

y が忠実充満なので, $F^\dagger y$ が忠実充満であることを示すには (y により $D \subset \widehat{D}$ と見なして) $F^{-1}|_D\colon D \to \widehat{C}$ が忠実充満であることを示せばよい.

定理 15 より, 各点左 Kan 拡張 $\langle \mathrm{id}_D, \eta \rangle$ は $y(d)$ と交換するから

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[dr, "\mathrm{id}"] & & \\
C \arrow[u, "F"] \arrow[r, "F"'] \arrow[ur, phantom, "\eta \Uparrow"] & D \arrow[r, "y(d)"'] & \mathbf{Set}^{\mathrm{op}}
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
D \arrow[dr, "y(d)"] & \\
C \arrow[u, "F"] \arrow[r, "F^{-1}(y(d))"'] \arrow[ur, phantom, "y(d)\eta \Uparrow"] & \mathbf{Set}^{\mathrm{op}}
\end{tikzcd}$$

$\langle y(d), y(d)\eta \rangle$ が F に沿った $y(d) \circ F = F^{-1}(y(d))$ の左 Kan 拡張となる. 従って命題 1 により同型

$$\mathrm{Hom}_{(\mathbf{Set}^{\mathrm{op}})^C}(F^{-1}(y(d)), F^{-1}-) \cong \mathrm{Hom}_{(\mathbf{Set}^{\mathrm{op}})^D}(y(d), -)$$

[*4] 関手 G が conservative とは, Gf が同型射ならば f が同型射になることをいう. 詳細は「自然変換・圏同値」の PDF を参照.

が得られる．よって

$$\mathrm{Hom}_{(\mathbf{Set}^{\mathrm{op}})^C}(F^{-1}(y(d)), F^{-1}(y(d))) \cong \mathrm{Hom}_{(\mathbf{Set}^{\mathrm{op}})^D}(y(d), y(d))$$

である．普遍射の性質により，この同型は $\theta_F \leftarrow\!\shortmid \theta$ で与えられることが分かる．従って $F^{-1}|_D \colon D \to \widehat{C}$ は忠実充満である．

$(4 \implies 2)$ $F^\dagger y$ が忠実充満だから $d, d' \in D$ に対して

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_D(d, d') &\cong \mathrm{Hom}_{\widehat{C}}(F^\dagger y(d), F^\dagger y(d')) \\
&\cong \mathrm{Hom}_{\widehat{C}}(\mathrm{Hom}_D(F-, d), \mathrm{Hom}_D(F-, d')) \\
&\cong \mathrm{Hom}_{\widehat{C}^{F\downarrow d}}(F\downarrow d \to C \xrightarrow{F} \widehat{C}, \Delta d')
\end{aligned}$$

となる．故に $\mathrm{colim}(F\downarrow d \to C \xrightarrow{F} \widehat{C}) \cong d$ である． □

命題 25. 稠密関手は strongly generating である．

証明. 忠実充満関手は conservative であるから，定理 24 の条件 4 と strongly generating の定義より明らか． □

定理 26. $F \colon C \to D$，$E \colon C \to U$ を関手として各点左 Kan 拡張 $F^\dagger E$，$y^\dagger E$ が存在するとする．($\widehat{C}$ が余完備なので各点左 Kan 拡張 $F^\dagger y$ も存在する．)

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[dr, "F^\dagger E"] & \\
C \arrow[u, "F"] \arrow[r, "E"'] & U
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
D \arrow[r, "F^\dagger y"] & \widehat{C} \arrow[d, "y^\dagger E"] \\
C \arrow[u, "F"] \arrow[ur, "y"] \arrow[r, "E"'] & U
\end{tikzcd}$$

このとき $y^\dagger E \circ F^\dagger y \cong F^\dagger E$ である．

証明. $d \in D$，$u \in U$ に対して自然に

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_U(y^\dagger E(F^\dagger y(d)), u) &\cong \mathrm{Hom}_{\widehat{C}}(\mathrm{Hom}_{\widehat{C}}(y(-), F^\dagger y(d)), \mathrm{Hom}_U(E(-), u)) \\
&\cong \mathrm{Hom}_{\widehat{C}}(F^\dagger y(d), \mathrm{Hom}_U(E(-), u)) \\
&\cong \mathrm{Hom}_{\widehat{C}}(\mathrm{Hom}_D(F(-), d), \mathrm{Hom}_{\widehat{C}}(y(-), \mathrm{Hom}_U(E(-), u))) \\
&\cong \mathrm{Hom}_{\widehat{C}}(\mathrm{Hom}_D(F(-), d), \mathrm{Hom}_U(E(-), u))
\end{aligned}$$

となるから，定理 15 より $y^\dagger E \circ F^\dagger y$ は F に沿った E の各点左 Kan 拡張である．故に $y^\dagger E \circ F^\dagger y \cong F^\dagger E$ である． □

4　普遍随伴

定理 27. C を小圏，U を圏，$F\colon C \to U$ を関手として各点左 Kan 拡張 $y^\dagger F$ が存在するとする．このとき随伴 $y^\dagger F \dashv F^\dagger y$ が成り立つ．($\widehat{C}$ が余完備なので $F^\dagger y$ は存在する．)

$$\begin{tikzcd}
\widehat{C} \arrow[dr, shift left=1.5, "y^\dagger F"] \arrow[dr, phantom, "\perp"] & \\
C \arrow[u, "y"] \arrow[r, "F"'] & U \arrow[ul, shift left=1.5, "F^\dagger y"]
\end{tikzcd}$$

証明. $y^\dagger F$ が各点左 Kan 拡張だから，$P \in \widehat{C}$，$u \in U$ に対して自然に

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_U(y^\dagger F(P), u) &\cong \mathrm{Hom}_{\widehat{C}}(\mathrm{Hom}_C(y-, P), \mathrm{Hom}_U(F-, u)) && (\text{定理 }15)\\
&\cong \mathrm{Hom}_{\widehat{C}}(P, \mathrm{Hom}_U(F-, u)) && (\text{米田の補題})\\
&\cong \mathrm{Hom}_{\widehat{C}}(P, F^\dagger y(u)) && (\text{系 }16)
\end{aligned}$$

となるので $y^\dagger F \dashv F^\dagger y$ である． □

逆に任意の随伴 $L \dashv R\colon \widehat{C} \to U$ はこのようにして得られる．即ち

定理 28. C を小圏，U を圏，$L \dashv R\colon \widehat{C} \to U$ を随伴とする．このとき関手 $F\colon C \to U$ が存在して $y^\dagger F \cong L$，$F^\dagger y \cong R$ となる．

証明. $F := L \circ y\colon C \to U$ とする．定理 12 より，左随伴関手 L は左 Kan 拡張と交換し，また $y^\dagger y$ は各点左 Kan 拡張である．よって $L \circ (y^\dagger y) \cong y^\dagger(L \circ y) = y^\dagger F$ となり $y^\dagger F$ は存在し，これは各点左 Kan 拡張である．また系 17 より $y^\dagger F \cong L \circ (y^\dagger y) \cong L \circ \mathrm{id} = L$ となる．従って定理 27 より $L \dashv F^\dagger y$ となるので随伴の一意性から $R \cong F^\dagger y$ である． □

※ この随伴 $y^\dagger F \dashv F^\dagger y$ を，twitter 等で一部の人が普遍随伴と呼んでいる．一般に広く使われている名称は無いようだが，例えば nlab では nerve and realization というページがある．

例 29. $C = \mathbf{1}$ とすれば $\widehat{\mathbf{1}} = \mathbf{Set}$ だから，随伴 $L \dashv R\colon \mathbf{Set} \to \mathbf{Set}$ に対して $F := L \circ y$

とすれば

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{Set} \arrow[dr, shift left=1.5, "L"] \arrow[dr, phantom, "\perp"] & \\
\mathbf{1} \arrow[u, "y"] \arrow[r, "F"'] & \mathbf{Set} \arrow[ul, shift left=1.5, "R"]
\end{tikzcd}
$$

$L \cong y^\dagger F$，$R \cong F^\dagger y$ である．$x := F(*) \in \mathbf{Set}$ と置けば，$a \in \mathbf{Set}$ に対して

$$R(a) \cong F^\dagger y(a) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(F-, a) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(x, a)$$

だから $R \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(x, -)$ である．一方 $L(a) \cong y^\dagger F(a) \cong \mathrm{colim}(y{\downarrow}a \to \mathbf{1} \xrightarrow{F} \mathbf{Set})$ で $y{\downarrow}a \cong a$ となるから

$$L(a) \cong \coprod_{b \in a} x \cong a \times x$$

により $L \cong - \times x$ である．故に，任意の随伴 $\mathbf{Set} \to \mathbf{Set}$ は $- \times x \dashv \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(x, -)$ の形をしている．

またF$F\colon \mathbf{Set} \to \mathbf{Set}$ を圏同値とすると，これは右随伴となるから，ある $x \in \mathbf{Set}$ を使って $F \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(x, -)$ と書ける．これが余極限と交換するためには $x = 1$ でなければならないから $F \cong \mathrm{id}_{\mathbf{Set}}$ である．即ち圏同値 $\mathbf{Set} \to \mathbf{Set}$ は自明なものしかない． □

例 30. $L \dashv R\colon \mathbf{Set} \to \mathbf{Set}^{\mathrm{op}}$ を随伴とする．$F := L \circ y\colon \mathbf{1} \to \mathbf{Set}^{\mathrm{op}}$ と置けば, $L \cong y^\dagger F$, $R \cong F^\dagger y$ である．

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{Set} \arrow[dr, shift left=1.5, "L"] \arrow[dr, phantom, "\perp"] & \\
\mathbf{1} \arrow[u, "y"] \arrow[r, "F"'] & \mathbf{Set}^{\mathrm{op}} \arrow[ul, shift left=1.5, "R"]
\end{tikzcd}
$$

よって，$x := F(*)$ とすれば $R \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}^{\mathrm{op}}}(x, -) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(-, x)$ である．また任意の $a, b \in \mathbf{Set}$ に対して

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(a, \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(b, x)) &\cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(a \times b, x) \\
&\cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(b, \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(a, x)) \\
&\cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}^{\mathrm{op}}}(\mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(a, x), b)
\end{aligned}
$$

だから $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(-,x) \dashv \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(-,x)$ である．従って $L \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(-,x) = R$ となることが分かる[*5]． □

例 31. 小圏 I に対して随伴 $\Delta \dashv \lim\colon \mathbf{Set} \to \mathbf{Set}^I$ が成り立つ．よって $F := \Delta \circ y$ と置けば，$T \in \mathbf{Set}^I$ に対して $\lim T \cong F^\dagger y(T) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}^I}(F(*), T)$ である．

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Set} \arrow[dr, shift left=1.5, "\Delta"] \arrow[dr, phantom, "\perp"] & \\
\mathbf{1} \arrow[u, "y"] \arrow[r, "F"'] & \mathbf{Set}^I \arrow[ul, shift left=1.5, "\lim"]
\end{tikzcd}$$

$F(*) = \Delta(y(*)) \cong \Delta 1$ だから $\lim T \cong \mathrm{Hom}(\Delta 1, T)$ が分かる． □

例 32. 圏 $\mathbb{\Delta}$ を以下のように定める．

- $\mathrm{Ob}(\mathbb{\Delta}) := \{[n] \mid n \in \mathbb{N}\}$，ここで $[n] := \{0, 1, \cdots, n\}$
- 射 $[m] \to [n]$ は，$[m]$ の自然な順序を保つ写像とする．

このとき圏 C に対して，関手 $\mathbb{\Delta}^{\mathrm{op}} \to C$ を C の単体的対象 (simplicial object) と呼ぶ．特に $C = \mathbf{Set}$ の場合，つまり関手 $\mathbb{\Delta}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ を単体的集合という．$\widehat{\mathbb{\Delta}}$ が単体的集合のなす圏である．

$n \in \mathbb{N}$ に対して $\Delta^n \in \mathbf{Top}$ を $\Delta^n := \{(x_0, \cdots, x_n) \in [0,1]^{n+1} \mid x_0 + \cdots + x_n = 1\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ で定義すれば，関手 $F\colon \mathbb{\Delta} \to \mathbf{Top}$ が $F([n]) := \Delta^n$ により自然に定まる．このとき随伴 $y^\dagger F \dashv F^\dagger y$ が得られる．

$$\begin{tikzcd}
\widehat{\mathbb{\Delta}} \arrow[dr, shift left=1.5, "y^\dagger F"] \arrow[dr, phantom, "\perp"] & \\
\mathbb{\Delta} \arrow[u, "y"] \arrow[r, "F"'] & \mathbf{Top} \arrow[ul, shift left=1.5, "F^\dagger y"]
\end{tikzcd}$$

$|-| := y^\dagger F\colon \widehat{\mathbb{\Delta}} \to \mathbf{Top}$ を幾何学的実現，$\mathrm{Sing} := F^\dagger y\colon \mathbf{Top} \to \widehat{\mathbb{\Delta}}$ を singular functor という． □

例 33. 順序集合 $[n] = \{0, 1, \cdots, n\}$ を圏とみなして包含関手 $F\colon \mathbb{\Delta} \to \mathbf{Cat}$ を考えれば，

[*5] 正確に書けば $L \cong R^{\mathrm{op}}$ である．

随伴 $y^\dagger F \dashv F^\dagger y$ が得られる．

$$\begin{tikzcd} \widehat{\mathbb{\Delta}} \arrow[drr, bend left, "y^\dagger F"] \arrow[drr, phantom, "\perp"] & & \\ \mathbb{\Delta} \arrow[u, "y"] \arrow[rr, "F"'] & & \mathbf{Cat} \arrow[ull, "F^\dagger y"] \end{tikzcd}$$

$N := F^\dagger y\colon \mathbf{Cat} \to \widehat{\mathbb{\Delta}}$ を nerve functor という． □

定義. 対象 $a \in C$ が small projective $\iff \mathrm{Hom}_C(a, -)$ が余連続.

定理 34. 圏 C が，ある小圏 A を使って $C \cong \widehat{A}$ と書ける
$\iff$ C が余完備で，小さい充満部分圏 $A \subset C$ が存在して，包含関手 $F\colon A \to C$ が strongly generating で，任意の $a \in A$ が small projective.

証明. $(\Longrightarrow)$ $C \cong \widehat{A}$ のとき，C は余完備で，米田埋込 $y\colon A \to C$ により $A \subset C$ は充満部分圏と見なせる．また $y^\dagger y \cong \mathrm{id}$ は明らかに余連続かつ conservative である．

$(\Longleftarrow)$ 仮定の充満部分圏と包含関手 $F\colon A \to C$ を取る．C が余完備だから，定理 27 により普遍随伴 $y^\dagger F \dashv F^\dagger y\colon \widehat{A} \to C$ を得る．

$$\begin{tikzcd} \widehat{A} \arrow[drr, bend left, "y^\dagger F"] \arrow[drr, phantom, "\perp"] & & \\ A \arrow[u, "y"] \arrow[rr, "F"'] & & C \arrow[ull, "F^\dagger y"] \end{tikzcd}$$

$F^\dagger y$ が本質的全射かつ忠実充満であることを示せばよい．そのためにまず $F^\dagger y$ が余連続であることを示す．

$\because$) $c \in C$ に対して $F^\dagger y(c) \cong \mathrm{Hom}_C(F-, c)$ である．よって

$$\mathrm{Hom}_C(F-, \operatorname*{colim}_j c_j) \cong \operatorname*{colim}_j \mathrm{Hom}_C(F-, c_j)$$

を示せばよい．$\widehat{A}$ の余極限は各点ごとに計算すればよいから，$a \in A$ に対して $\mathrm{Hom}_C(a, \mathrm{colim}_j\, c_j) \cong \mathrm{colim}_j \mathrm{Hom}_C(a, c_j)$ を示せばよい．ところがいま $a \in A$ は small projective なのでこれは成り立つ.

本質的全射であることを示すため，$P \in \widehat{A}$ を取る．系 18 により $P \cong \mathrm{colim}_j\, y(a_j)$ と

書ける．$c := \operatorname{colim}_j F(a_j) \in C$ と置けば，$F^\dagger y \cong \operatorname{Hom}_C(F-, \Box)$ が余連続だから

$$F^\dagger y(c) \cong \operatorname{colim}_j \operatorname{Hom}_C(F-, F(a_j)) \cong \operatorname{colim}_j \operatorname{Hom}_A(-, a_j) = \operatorname{colim}_j y(a_j) \cong P$$

となり，$F^\dagger y$ は本質的全射である．

$F^\dagger y$ が忠実充満であることを示す．そのためには F が稠密であること，即ち $c \in C$ に対して $\operatorname{colim}(F \downarrow c \to A \xrightarrow{F} C) \cong c$ を示せばよい．$G := (F \downarrow c \to A \xrightarrow{F} C)$ とする．まず C が余完備なので G の余極限が存在するから，それを $\mu \colon G \Rightarrow \Delta(\operatorname{colim} G)$ とする．$\langle a, f \rangle \in F \downarrow c$ に対して $\theta_{\langle a,f \rangle} := f \colon Fa \to c$ と定義すればこれは自然変換 $\theta \colon G \Rightarrow \Delta c$ を定める．$\operatorname{colim} G$ の普遍性から $h \colon \operatorname{colim} G \to c$ が一意に存在して $h \circ \mu_{\langle a,f \rangle} = \theta_{\langle a,f \rangle}$ となる．

$$\begin{tikzcd}
G\langle a,f \rangle \arrow[d] \arrow[dr, "\mu_{\langle a,f \rangle}"] \arrow[drr, bend left, "\theta_{\langle a,f \rangle}"] & & \\
 & \operatorname{colim} G \arrow[r, dashed, "h"] & c \\
G\langle b,g \rangle \arrow[ur, "\mu_{\langle b,g \rangle}"] \arrow[urr, bend right, "\theta_{\langle b,g \rangle}"'] & &
\end{tikzcd}$$

今 $F^\dagger y$ が余連続だから $(F^\dagger y)\mu \colon F^\dagger y \circ G \Rightarrow \Delta(F^\dagger y(\operatorname{colim} G))$ も余極限である．

$$\begin{tikzcd}
F^\dagger y(G\langle a,f \rangle) \arrow[d] \arrow[dr, "F^\dagger y(\mu_{\langle a,f \rangle})"'] \arrow[drr, bend left, "F^\dagger y(\theta_{\langle a,f \rangle})"] & & \\
 & F^\dagger y(\operatorname{colim} G) \arrow[r, "F^\dagger y(h)"] & F^\dagger y(c) \\
F^\dagger y(G\langle b,g \rangle) \arrow[ur, "F^\dagger y(\mu_{\langle b,g \rangle})"] \arrow[urr, bend right, "F^\dagger y(\theta_{\langle b,g \rangle})"'] & &
\end{tikzcd}$$

ところで定理 21 より

$$\begin{aligned}
F^\dagger y \circ G &= (F \downarrow c \to A \xrightarrow{F} C \xrightarrow{F^\dagger y} \widehat{A}) \\
&\cong (F \downarrow c \to A \xrightarrow{y} \widehat{A})
\end{aligned}$$

だから，各点 Kan 拡張により $\operatorname{colim}(F^\dagger y \circ G) = \operatorname{colim}(F \downarrow c \to A \xrightarrow{y} \widehat{A}) \cong F^\dagger y(c)$ となる．故に余極限 $F^\dagger y(\operatorname{colim} G)$ の普遍性から，$F^\dagger y(h)$ は同型射となる．今 F が strongly generating だったから $F^\dagger y$ は conservative であり，よって h は同型射である．即ち $\operatorname{colim} G \cong c$ である． $\Box$

定理 35. 小圏 C 上の前層 P に対して圏同値 $\widehat{y\downarrow P} \cong \widehat{C}/P$ が成り立つ．(特に $a \in C$ に対して $P := y(a)$ の場合を考えると，$y\downarrow y(a) = C/a$ だから $\widehat{C/a} \cong \widehat{C}/y(a)$ となる．)

証明. $y\downarrow P$ は充満部分圏 $y\downarrow P \subset \widehat{C}/P$ とみなせる．米田埋込 $y\downarrow P \to \widehat{y\downarrow P}$ をここでは区別の為 z と書くことにし，包含関手を $F\colon y\downarrow P \to \widehat{C}/P$ とすると，定理 27 により普遍随伴 $z^\dagger F \dashv F^\dagger z\colon \widehat{y\downarrow P} \to \widehat{C}/P$ を得る．

$$
\begin{tikzcd}
\widehat{y\downarrow P} \arrow[dr, shift left, "z^\dagger F"] & \\
y\downarrow P \arrow[u, "z"] \arrow[r, "F"'] & \widehat{C}/P \arrow[ul, shift left, "F^\dagger z"] \arrow[ul, phantom, "\perp"]
\end{tikzcd}
$$

この随伴が圏同値 $\widehat{y\downarrow P} \cong \widehat{C}/P$ を与えることを示す．定理 34 (の証明) によれば

(1) $\widehat{C}/P$ が余完備.
(2) 包含関手 $F\colon y\downarrow P \to \widehat{C}/P$ が strongly generating.
(3) 任意の $\langle a, x\rangle \in y\downarrow P$ が small projective.

を示せばよい．

(1) $\widehat{C}$ が余完備だから，余完備な圏 U と対象 $u \in U$ に対して U/u が余完備であることを示せばよい．そのために J を小圏として $T\colon J \to U$ を関手とする．$i \in J$ に対して $Ti = \langle a_i, f_i\rangle \in U/u$ と書くことにする．射影関手を $P\colon U/u \to U$ とすると U が余完備だから $PT\colon J \to U$ の余極限 $\langle a, \mu\rangle$ が存在する．余極限の普遍性から，次の点線の射 h が存在し可換となる．

$$
\begin{tikzcd}
a_j \arrow[dr, "\mu_j"] \arrow[drr, bend left, "f_j"] & & \\
& a \arrow[r, dashed, "h"] & u \\
a_i \arrow[uu] \arrow[ur, "\mu_i"] \arrow[urr, bend right, "f_i"'] & &
\end{tikzcd}
$$

よって μ_i は U/u の射 $\mu_i\colon \langle a_i, f_i\rangle \to \langle a, h\rangle$ を与える．

$\operatorname{colim} T = \langle a, h\rangle$ となることを示そう．そのために $\theta\colon T \Rightarrow \Delta\langle b, g\rangle$ を自然変換とする

と次の実線の可換図式が得られる．

$$
\begin{tikzcd}
{} & a_j \arrow[dr, "\mu_j"] \arrow[drr, bend left, "\theta_j"] \arrow[ddd, "f_j"] & {} & {} \\
{} & {} & a \arrow[r, dashed, "l"] \arrow[ddl, "h"] & b \arrow[ddll, "g"] \\
a_i \arrow[uur] \arrow[urr, "\mu_i"] \arrow[urrr, bend right, "\theta_i"'] \arrow[dr, "f_i"'] & {} & {} & {} \\
{} & u & {} & {}
\end{tikzcd}
$$

$\operatorname{colim} PT = \langle a, \mu \rangle$ の普遍性により，点線の射 l が存在して $l \circ \mu_i = \theta_i$ となる．このとき $\operatorname{colim} PT$ の普遍性により $g \circ l = h$ である．故に l は U/u の射 $l \colon \langle a, h \rangle \to \langle b, g \rangle$ を与える．再び $\operatorname{colim} PT$ の普遍性から，このような l は明らかに一意である．従って $\operatorname{colim} T = \langle a, h \rangle$ となることが分かった．

(2) まず $\widehat{C}/P$ の対象 $\tau \colon Q \Rightarrow P$ に対して $F^\dagger z(\tau) = \operatorname{Hom}_{\widehat{C}/P}(-, \tau) \in \widehat{y \downarrow P}$ は次で与えられる．

- $\langle a, u \rangle \in y \downarrow P$ に対して $\operatorname{Hom}_{\widehat{C}/P}(\langle a, u \rangle, \tau) = \{ s \in Qa \mid \tau_a(s) = u \}$ である．
- $y \downarrow P$ の射 $f \colon \langle a, u \rangle \to \langle b, v \rangle$ に対して

$$
\begin{array}{rccc}
\operatorname{Hom}_{\widehat{C}/P}(f, \tau) \colon & \{ s \in Qb \mid \tau_b(s) = v \} & \longrightarrow & \{ t \in Qa \mid \tau_a(t) = u \} \\
& \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\
& s & \longmapsto & Qf(s)
\end{array}
$$

次に $\alpha \colon \langle Q, \tau \rangle \to \langle R, \rho \rangle$ を $\widehat{C}/P$ の射とすると $F^\dagger z(\alpha)$ は自然変換であり，その $\langle a, u \rangle$ 成分は

$$
\begin{array}{rccc}
F^\dagger z(\alpha)_{\langle a, u \rangle} \colon & \{ s \in Qa \mid \tau_a(s) = u \} & \longrightarrow & \{ t \in Ra \mid \rho_a(t) = u \} \\
& \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\
& s & \longmapsto & \alpha_a(s)
\end{array}
$$

で与えられる．

$F^\dagger z$ が conservative であることを示すため，$F^\dagger z(\alpha)$ が自然同型であるとする．つまり各 $\langle a, u \rangle \in y \downarrow P$ に対して $F^\dagger z(\alpha)_{\langle a, u \rangle}$ は全単射である．このとき $a \in C$ に対して $\alpha_a \colon Qa \to Ra$ が全単射であることを示せばよい．

単射であることを示すため $s, s \in Qa$ が $\alpha_a(s) = \alpha_a(t)$ を満たすとする．このとき

$$
\tau_a(s) = \rho_a \circ \alpha_a(s) = \rho_a \circ \alpha_a(t) = \tau_a(t)
$$

である．よって $u := \tau_a(s)$ とすると $s, t \in \mathrm{dom}(F^\dagger z(\alpha)_{\langle a,u\rangle})$ であり

$$F^\dagger z(\alpha)_{\langle a,u\rangle}(s) = \alpha_a(s) = \alpha_a(t) = F^\dagger z(\alpha)_{\langle a,u\rangle}(t)$$

だから $F^\dagger z(\alpha)_{\langle a,u\rangle}$ の単射性により $s = t$ が分かる．

全射であることを示すため $t \in Ra$ とする．$u := \rho_a(t)$ とすれば $t \in \mathrm{cod}(F^\dagger z(\alpha)_{\langle a,u\rangle})$ である．故に $s \in \mathrm{dom}(F^\dagger z(\alpha)_{\langle a,u\rangle})$ が存在して $F^\dagger z(\alpha)_{\langle a,u\rangle}(s) = t$ とできる．このとき明らかに $\alpha_a(s) = t$ である．

(3) $\langle a, u\rangle \in y\downarrow P$ に対して $\mathrm{Hom}_{\widehat{C}/P}(\langle a,u\rangle, -)$ が余連続であることを示す．

J を小圏として $T\colon J \to \widehat{C}/P$ を関手とする．$i \in J$ に対して $T(i) = \langle Q^i, \tau^i\rangle$ と書き，$\operatorname{colim} T = \langle\langle R, \rho\rangle, \mu\rangle$ と書くことにする．このとき図式

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
\mathrm{Hom}_{\widehat{C}/P}(\langle a,u\rangle, T(i)) \arrow[d] \arrow[dr, "\mathrm{Hom}_{\widehat{C}/P}(\langle a,u\rangle, \mu^i)"] & \\
& \mathrm{Hom}_{\widehat{C}/P}(\langle a,u\rangle, \rho) \\
\mathrm{Hom}_{\widehat{C}/P}(\langle a,u\rangle, T(j)) \arrow[ur, "\mathrm{Hom}_{\widehat{C}/P}(\langle a,u\rangle, \mu^j)"'] &
\end{tikzcd}$$

が $\operatorname{colim} \mathrm{Hom}_{\widehat{C}/P}(\langle a,u\rangle, T-)$ を与えることを示せばよい．上記で計算した通り，この図式は

$$\begin{tikzcd}
\{s \in Q^i a \mid \tau^i_a(s) = u\} \arrow[d] \arrow[dr, "\mu^i"] & \\
& \{s \in Ra \mid \rho_a(s) = u\} \\
\{s \in Q^j a \mid \tau^j_a(s) = u\} \arrow[ur, "\mu^j"'] &
\end{tikzcd} \tag{$*$}$$

である．ここで (1) で示した通り $R = \operatorname{colim}_i Q^i$ であり，ρ はその普遍性により得られる射である．次の (i)(ii) の場合に $(*)$ が余極限を与えることを示せばよい．

(i) J が離散圏の場合，図式 $(*)$ は次のようになる．

$$\begin{tikzcd}
\{s \in Q^i a \mid \tau^i_a(s) = u\} \arrow[dr, "\mu^i"] & \\
& \left\{ s \in \coprod_{i \in J} Q^i a \,\middle|\, \rho_a(s) = u \right\} \\
\{s \in Q^j a \mid \tau^j_a(s) = u\} \arrow[ur, "\mu^j"'] &
\end{tikzcd}$$

ρ の取り方から明らかに $\left\{ s \in \coprod_{i \in J} Q^i a \,\middle|\, \rho_a(s) = u \right\} = \coprod_{i \in J} \{s \in Q^i a \mid \tau^i_a(s) = u\}$ だからこの場合は良い．

(ii) $J = (j \leftarrow i \rightarrow k)$ の場合，図式 $(*)$ は次のようになる．

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & \{s \in Q^j a \mid \tau^j_a(s) = u\} \arrow[dr, "\mu^j"] & \\ \{s \in Q^i a \mid \tau^i_a(s) = u\} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \{s \in Ra \mid \rho_a(s) = u\} \\ & \{s \in Q^k a \mid \tau^k_a(s) = u\} \arrow[ur, "\mu^k"'] & \end{tikzcd}$$

ここで $Ra = (Q^j_a \amalg Q^k a)/\sim$ であり，ρ の取り方から

$$\{s \in Ra \mid \rho_a(s) = u\} = (\{s \in Q^j a \mid \tau^j_a(s) = u\} \amalg \{s \in Q^k a \mid \tau^k_a(s) = u\})/\sim$$

となるからこの場合も良い． □

参考文献

[1] Saunders Mac Lane, Categories for the Working Mathematician, Springer, 2nd ed. 1978 版 (1998)

[2] ft_math さんによる圏論祭, 2012 年 12 月 8 日, `http://alg-d.com/math/ft_math/`

[3] ft_math さんによる圏論祭, 2013 年 12 月 7 日・8 日, `http://alg-d.com/math/ft_math/`