

Kan 拡張

alg-d

http://alg-d.com/math/kan_extension/

2016 年 8 月 22 日

目次

1	定義	1
2	各点 Kan 拡張	3
3	米田埋込と Kan 拡張	16
4	普遍随伴	26

1 定義

定義. C, D, U を圏, $F: C \rightarrow D, E: C \rightarrow U$ を関手とする. F に沿った E の左 Kan 拡張とは組 $\langle F^{\dagger}E, \eta \rangle$ であって, 以下の条件を満たすものである.

(1) $F^{\dagger}E$ は関手 $D \rightarrow U$, η は自然変換 $E \Rightarrow F^{\dagger}E \circ F$ である.

$$\begin{array}{ccc} D & & \\ \uparrow F & \searrow F^{\dagger}E & \\ C & \xrightarrow{E} & U \end{array}$$

$\eta \Uparrow$

(2) 組 $\langle S, \theta \rangle$ が同じ条件を満たす (即ち $S: D \rightarrow U$ は関手で $\theta: E \Rightarrow S \circ F$ は自然変換) ならば, 自然変換 $\tau: F^{\dagger}E \Rightarrow S$ が一意に存在して $\theta = \tau_F \circ \eta$ となる. 即ち

次の等式が成り立つ .

$$\begin{array}{ccc}
 D & \xrightarrow{S} & U \\
 F \uparrow & \nearrow \tau & \\
 C & \xrightarrow{E} & U \\
 \eta \uparrow \parallel & & \\
 C & \xrightarrow{E} & U
 \end{array}
 \quad F^\dagger E
 \quad = \quad
 \begin{array}{ccc}
 D & \xrightarrow{S} & U \\
 F \uparrow & \nearrow \theta & \\
 C & \xrightarrow{E} & U
 \end{array}$$

自然変換 η を Kan 拡張 $\langle F^\dagger E, \eta \rangle$ の unit と呼ぶ . また , F に沿った E の右 Kan 拡張 $\langle F^\dagger E, \varepsilon \rangle$ が自然変換の向きを逆にして得られる .

$$\begin{array}{ccc}
 D & \xrightarrow{S} & U \\
 F \uparrow & \nearrow \tau & \\
 C & \xrightarrow{E} & U \\
 \varepsilon \downarrow \parallel & & \\
 C & \xrightarrow{E} & U
 \end{array}
 \quad F^\dagger E
 \quad = \quad
 \begin{array}{ccc}
 D & \xrightarrow{S} & U \\
 F \uparrow & \nearrow \theta & \\
 C & \xrightarrow{E} & U
 \end{array}$$

左 Kan 拡張 $F^\dagger E$ を $\text{Lan}_F E$, 右 Kan 拡張 $F^\dagger E$ を $\text{Ran}_F E$ と書くこともある^{*1} . 以下 , 左 Kan 拡張を単に Kan 拡張と書く .

※ 関手の向きを逆にしたものは Kan リフトという .

関手 $F: C \rightarrow D$ に対して , 関手 $F^{-1}: U^D \rightarrow U^C$ が $F^{-1}(S) := S \circ F$ により定まるのであった . このとき , Kan 拡張 $\langle F^\dagger E, \eta \rangle$ の定義を言い換えれば , $E \in U^C$ から F^{-1} への普遍射 $\eta: E \rightarrow F^{-1}(F^\dagger E) = F^\dagger E \circ F$ のことであると分かる .

$$\begin{array}{ccc}
 E & \xrightarrow{\eta} & F^\dagger E \circ F & F^\dagger E \\
 & \searrow \theta & \downarrow \tau_F & \downarrow \tau \\
 & & S \circ F & S
 \end{array}$$

故に普遍射の性質から次の命題が分かる .

命題 1. $F: C \rightarrow D, E: C \rightarrow U$ に対して関手 $\text{Hom}_{U^C}(E, F^{-1}(-)): U^D \rightarrow \text{Set}$ が得られる . このとき

$$\text{Hom}_{U^C}(E, F^{-1}(-)) \text{ が表現可能関手 } \iff F^\dagger E \text{ が存在する}$$

が成り立つ . またこのとき , $\text{Hom}_{U^C}(E, F^{-1}(-)) \cong \text{Hom}_{U^D}(F^\dagger E, -)$ が成り立つ . これから得られる同型 $\text{Hom}_{U^C}(E, F^{-1}(F^\dagger E)) \cong \text{Hom}_{U^D}(F^\dagger E, F^\dagger E)$ で右辺の $\text{id}_{F^\dagger E}$ に対応する左辺の $\eta: E \rightarrow F^{-1}(F^\dagger E)$ が , Kan 拡張 $F^\dagger E$ の unit である . \square

^{*1} というか , 大抵の本・論文では Lan や Ran が使われている .

命題 2. 各 $E \in U^C$ に対して F に沿った Kan 拡張 $F^\dagger E \in U^D$ が存在するとする. このとき F^\dagger は関手 $F^{-1}: U^D \rightarrow U^C$ の左随伴関手を定める. 随伴 $F^\dagger \dashv F^{-1}$ の unit を $\eta: \text{id}_{U^C} \Rightarrow F^{-1} \circ F^\dagger$ とするとき, $E \in U^C$ に対して η_E が $F^\dagger E$ の unit となる. 同様に右 Kan 拡張 $F^\ddagger: U^C \rightarrow U^D$ は F^{-1} の右随伴関手である. 即ち $F^\dagger \dashv F^{-1} \dashv F^\ddagger$ となる.

例 3. 関手 $E: J \rightarrow U$ に対して余極限 $\text{colim } E$ とは E から対角関手 $\Delta: U \rightarrow U^J$ への普遍射 $E \rightarrow \Delta(\text{colim } E)$ であった. 一方, $\mathbf{1} = \{*\}$ を一点圏として $F: J \rightarrow \mathbf{1}$ を唯一の関手とすれば $F^{-1}: U^{\mathbf{1}} = U \rightarrow U^J$ は Δ と一致する. よって F に沿った E の Kan 拡張は普遍射 $E \rightarrow \Delta(F^\dagger E)$ であり, 普遍射の一意性から $F^\dagger E \cong \text{colim } E$ が分かる.

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbf{1} & & \\
 \uparrow F & \searrow F^\dagger E = \text{colim } E & \\
 J & \xrightarrow{E} & U
 \end{array}$$

即ち, 余極限は Kan 拡張である. 同様にして, 極限は右 Kan 拡張である. □

2 各点 Kan 拡張

余極限が Kan 拡張であることを使うと, 「各点 Kan 拡張」という方法で Kan 拡張を計算することができる. C, D, U を圏, $F: C \rightarrow D, E: C \rightarrow U$ を関手として, Kan 拡張 $F^\dagger E: D \rightarrow U$ が存在するとする.

$$\begin{array}{ccc}
 D & & \\
 \uparrow F & \searrow F^\dagger E & \\
 C & \xrightarrow{E} & U
 \end{array}$$

$d \in D$ に対して $F^\dagger E(d)$ を計算したい. $d: \mathbf{1} \rightarrow D$ を $d(*) = d$ なる関手とみなしてコマ圏 $F \downarrow d$ を考えれば次の図式を得る.

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathbf{1} & \xrightarrow{d} & D & & \\
 \uparrow \pi_2 & \swarrow & \uparrow F & \searrow F^\dagger E & \\
 F \downarrow d & \xrightarrow{\pi_1} & C & \xrightarrow{E} & U
 \end{array}$$

自然変換を合成すれば次の図式を得る .

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbf{1} & & \\
 \pi_2 \uparrow & \searrow^{(F^\dagger E) \circ d} & \\
 F \downarrow d & \xrightarrow{E \circ \pi_1} & U
 \end{array}$$

π_2 に沿った Kan 拡張は余極限だったから , もしこれが Kan 拡張であれば (実は一般にはそうなるとは限らない) , $F^\dagger E(d) \cong \text{colim}(E \circ \pi)$ となり , Kan 拡張が余極限に帰着できる .

以上を踏まえて , C, D, U を圏 , $F: C \rightarrow D$, $E: C \rightarrow U$ を関手とする .

$$\begin{array}{ccc}
 D & & \\
 \uparrow F & & \\
 C & \xrightarrow{E} & U
 \end{array}$$

$d \in D$ に対してコマ圏 $F \downarrow d$ を考えれば次の図式を得る .

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathbf{1} & \xrightarrow{d} & D & & \\
 \pi_2 \uparrow & \swarrow & \uparrow F & & \\
 F \downarrow d & \xrightarrow{\pi_1} & C & \xrightarrow{E} & U
 \end{array}$$

今 , Kan 拡張 $\pi_2^\dagger(F \downarrow d \xrightarrow{\pi_1} C \xrightarrow{E} U)$, 即ち余極限 $\text{colim}(F \downarrow d \xrightarrow{\pi_1} C \xrightarrow{E} U)$ が存在すると仮定しよう . これを使って $T(d) := \text{colim}(F \downarrow d \xrightarrow{\pi_1} C \xrightarrow{E} U)$ と定義する .

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbf{1} & & \\
 \pi_2 \uparrow & \searrow^{T(d)} & \\
 F \downarrow d & \xrightarrow{\pi_1} & C \xrightarrow{E} U
 \end{array}$$

次に射 $h: d \rightarrow d'$ に対して $T(h)$ を定める . $h: d \rightarrow d'$ は自然変換

$$\mathbf{1} \xrightarrow[h \uparrow]{d'} D$$

と同一視できることに注意する．コンマ圏 $F \downarrow d, F \downarrow d'$ を考える．

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbf{1} & \xrightarrow{d} & D \\
 \pi_2 \uparrow & \swarrow \theta & \uparrow F \\
 F \downarrow d & \xrightarrow{\pi_1} & C
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 \mathbf{1} & \xrightarrow{d'} & D \\
 \pi'_2 \uparrow & \swarrow \theta' & \uparrow F \\
 F \downarrow d' & \xrightarrow{\pi'_1} & C
 \end{array}$$

左の図式と h を組み合わせて，次の図式が得られる．

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbf{1} & \xrightarrow{d'} & D \\
 \pi_2 \uparrow & \xrightarrow{h \uparrow} & D \\
 \swarrow \theta & \uparrow d & \uparrow F \\
 F \downarrow d & \xrightarrow{\pi_1} & C
 \end{array}
 =
 \begin{array}{ccc}
 \mathbf{1} & \xrightarrow{d'} & D \\
 \pi_2 \uparrow & \swarrow h \pi_2 \circ \theta & \uparrow F \\
 F \downarrow d & \xrightarrow{\pi_1} & C
 \end{array}$$

コンマ圏 $F \downarrow d'$ の普遍性により関手 $H: F \downarrow d \rightarrow F \downarrow d'$ が存在し次の等号が成り立つ．

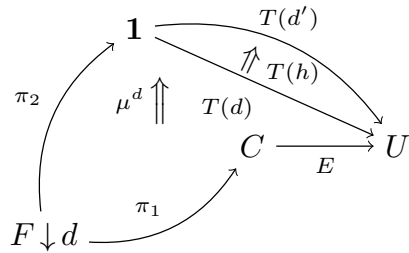
$$\begin{array}{ccc}
 \mathbf{1} & \xrightarrow{d'} & D \\
 \pi_2 \uparrow & \swarrow \theta' & \uparrow F \\
 F \downarrow d' & \xrightarrow{\pi'_1} & C \xrightarrow{E} U \\
 \uparrow H & \swarrow \pi_1 & \\
 F \downarrow d & &
 \end{array}
 =
 \begin{array}{ccc}
 \mathbf{1} & \xrightarrow{d'} & D \\
 \pi_2 \uparrow & \swarrow h \pi_2 \circ \theta & \uparrow F \\
 F \downarrow d & \xrightarrow{\pi_1} & C \xrightarrow{E} U
 \end{array}$$

今，余極限 $T(d) = \text{colim}(F \downarrow d \xrightarrow{\pi_1} C \xrightarrow{E} U)$ ， $T(d') = \text{colim}(F \downarrow d' \xrightarrow{\pi'_1} C \xrightarrow{E} U)$ が存在するのであった．

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbf{1} & \xrightarrow{T(d')} & U \\
 \pi_2 \uparrow & \swarrow \mu^{d'} & \uparrow \\
 F \downarrow d' & \xrightarrow{\pi'_1} & C \xrightarrow{E} U \\
 \uparrow H & \swarrow \pi_1 & \\
 F \downarrow d & &
 \end{array}
 =
 \begin{array}{ccc}
 \mathbf{1} & \xrightarrow{T(d)} & U \\
 \pi_2 \uparrow & \swarrow \mu^d & \uparrow \\
 F \downarrow d & \xrightarrow{\pi_1} & C \xrightarrow{E} U
 \end{array}$$

故に Kan 拡張 $\langle T(d), \mu^d \rangle$ の普遍性により射 $T(h): T(d) \rightarrow T(d')$ が存在することが分

かる .



このとき T は関手 $T: D \rightarrow U$ となり, T が F に沿った E の左 Kan 拡張となるのである . このことは後で証明することにして認めてしまえば, 次の定理が得られる .

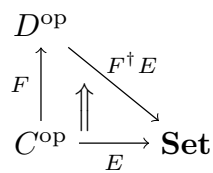
定理 4. C, D, U を圏, $F: C \rightarrow D, E: C \rightarrow U$ を関手とする . 各 $d \in D$ に対して余極限 $\text{colim}(F \downarrow d \rightarrow C \xrightarrow{E} U)$ が存在するならば, F に沿った E の Kan 拡張 $F^\dagger E$ が存在し, $F^\dagger E(d) \cong \text{colim}(F \downarrow d \rightarrow C \xrightarrow{E} U)$ となる .

C が小圏ならば $F \downarrow d$ も小圏となる . 故に次の系が得られる .

系 5. C, D, U を圏, $F: C \rightarrow D, E: C \rightarrow U$ を関手とする . U が余完備で, C が小圏ならば Kan 拡張 $F^\dagger E$ が存在する . □

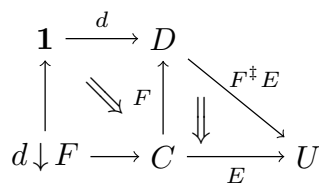
Set は余完備であったから次の系を得る .

系 6. C, D を小圏, $F: C \rightarrow D$ を関手とする . 任意の関手 $E: C^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$ に対して Kan 拡張 $F^\dagger E: D^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$ が存在する .



故に随伴 $F^\dagger \dashv F^{-1}: \widehat{C} \rightarrow \widehat{D}$ が成り立つ . □

※ 同様にして, F に沿った E の右 Kan 拡張が, 各点右 Kan 拡張



により $F^\dagger E(d) \cong \lim(d \downarrow F \rightarrow C \rightarrow U)$ として得られる。

例 7. X, Y を集合, $f: X \rightarrow Y$ を写像とする. 集合を離散圏とみなせば $f: X \rightarrow Y$ は関手である. また (順序集合を圏とみなして) $f^{-1}: \mathcal{P}(Y) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ も関手である.

圏 $\mathbf{2} = \{0 \rightarrow 1\}$ を考えれば圏同型 $\mathcal{P}(X) = \mathbf{2}^X$ が成り立つが, このとき関手 f^{-1} は $\mathbf{2}^Y \ni A \mapsto A \circ f \in \mathbf{2}^X$ で与えられる.

$$\begin{array}{ccc} & Y & \\ & \uparrow & \searrow A \\ f & \uparrow & \\ & X & \xrightarrow{f^{-1}(A)} \mathbf{2} \end{array}$$

故に関手 $f^{-1}: \mathcal{P}(Y) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ の左随伴関手が Kan 拡張 f^\dagger である. これを各点 Kan 拡張で計算してみる.

$A: X \rightarrow \mathbf{2}$ に対して $f^\dagger A$ を求める. $y \in Y$ を取りコンマ圏 $f \downarrow y$ を考える.

$$\begin{array}{ccccc} & \mathbf{1} & \xrightarrow{y} & Y & \\ & \uparrow & \swarrow & \uparrow f & \\ f \downarrow y & \longrightarrow & X & \xrightarrow{A} & \mathbf{2} \end{array}$$

コンマ圏の定義から $f \downarrow y = \{x \in X \mid f(x) = y\} = f^{-1}(y)$ は離散圏である. 故に

$$f^\dagger A(y) = \operatorname{colim}(f \downarrow y \rightarrow X \xrightarrow{A} \mathbf{2}) = \coprod_{x \in f^{-1}(y)} A(x)$$

となるから

$$f^\dagger A(y) = \begin{cases} 1 & (\text{ある } x \in f^{-1}(y) \text{ が存在して } A(x) = 1) \\ 0 & (\text{そうでないとき}) \end{cases}$$

である. 即ち $A \in \mathcal{P}(X)$ に対して $f^\dagger A = f(A) \in \mathcal{P}(Y)$ となる. 従って $f^{-1}: \mathcal{P}(Y) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ の左随伴関手は $f: \mathcal{P}(X) \ni A \mapsto f(A) \in \mathcal{P}(Y)$ である.

更にこの場合, f^{-1} の右随伴関手 (= 右 Kan 拡張) も存在する. それには各点右 Kan 拡張を同様に計算すればよい. すると

$$\begin{array}{ccccc} & \mathbf{1} & \xrightarrow{y} & Y & \\ & \uparrow & \swarrow & \uparrow f & \\ y \downarrow f & \longrightarrow & X & \xrightarrow{A} & \mathbf{2} \end{array}$$

$$f^\dagger A(y) = \lim(y \downarrow f \rightarrow X \xrightarrow{A} \mathbf{2}) = \prod_{x \in f^{-1}(y)} A(x)$$

となるから

$$f^\dagger A(y) = \begin{cases} 0 & (\text{ある } x \in f^{-1}(y) \text{ が存在して } A(x) = 0) \\ 1 & (\text{そうでないとき}) \end{cases}$$

であり, $f^\dagger A = Y \setminus f(X \setminus A) =: f_!(A)$ となることが分かる*2.

以上により, $f^{-1}: \mathcal{P}(Y) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ は左随伴, 右随伴両方を持つ.

$$\begin{array}{ccc} & \xrightarrow{f} & \\ & \perp & \\ \mathcal{P}(X) & \xleftarrow{f^{-1}} & \mathcal{P}(Y) \\ & \perp & \\ & \xrightarrow{f_!} & \end{array}$$

従って f^{-1} は余極限, 極限両方と交換する. 特に以下が成り立つ.

$$f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B), \quad f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$$

一方 f は左随伴を持たない. 実際, f と極限は交換しないのである. 例えば $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ は成立しない. \square

例 8. 位相空間 X に対して, X の開集合全体がなす順序集合 \mathcal{O}_X を圏とみなす. X 上の (集合の) 前層とは関手 $P: \mathcal{O}_X^{\text{op}} \rightarrow \text{Set}$ のことであった. よって $\widehat{\mathcal{O}_X} := \text{Set}^{\mathcal{O}_X^{\text{op}}}$ が X 上の前層がなす圏である.

X, Y を位相空間, $f: X \rightarrow Y$ を連続写像とする. このとき, X 上の前層 P に対して Y 上の前層 f_*P が $f_*P(U) := P(f^{-1}(U))$ により定まり, 関手 $f_*: \widehat{\mathcal{O}_X} \rightarrow \widehat{\mathcal{O}_Y}$ を順像というのであった. また関手 f_* は左随伴関手 f^* を持ち, これを逆像というのであった. さて, F を関手 $\mathcal{O}_Y^{\text{op}} \ni U \mapsto f^{-1}(U) \in \mathcal{O}_X^{\text{op}}$ とすれば, 定義から $f_* = F^{-1}: \widehat{\mathcal{O}_X} \rightarrow \widehat{\mathcal{O}_Y}$ である.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_X^{\text{op}} & & \\ \uparrow F & \searrow P & \\ \mathcal{O}_Y^{\text{op}} & \xrightarrow{f_*(P)} & \text{Set} \end{array}$$

故に左随伴の一意性から $f^* \cong F^\dagger$ が分かる. そこで前層 $P \in \widehat{\mathcal{O}_Y}$ の逆像 $F^\dagger P \cong f^*(P)$ を各点 Kan 拡張で計算してみる.

*2 この $f_!(A)$ を small image と呼ぶ, らしい.

$U \in \mathcal{O}_X$ を取りコマ圏 $F \downarrow U$ を考える .

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbf{1} & \xrightarrow{U} & \mathcal{O}_X^{\text{op}} \\
 \uparrow & \swarrow & \uparrow F \\
 F \downarrow U & \longrightarrow & \mathcal{O}_Y^{\text{op}} \xrightarrow{P} \mathbf{Set}
 \end{array}$$

$F^\dagger P(U) \cong \text{colim}(F \downarrow U \rightarrow \mathcal{O}_Y^{\text{op}} \xrightarrow{P} \mathbf{Set}) \cong \underset{\langle V, h \rangle \in F \downarrow U}{\text{colim}} P(V)$ となる . コマ圏の定義から

$$\begin{aligned}
 \langle V, h \rangle \in F \downarrow U &\iff h: F(V) \longrightarrow U \text{ in } \mathcal{O}_X^{\text{op}} \\
 &\iff F(V) \supset U \\
 &\iff f^{-1}(V) \supset U \\
 &\iff V \supset f(U)
 \end{aligned}$$

となるので $F^\dagger P(U) \cong \underset{V \supset f(U)}{\text{colim}} P(V)$ となり , 普段見る逆像の定義が現れる . □

例 9. 各点 Kan 拡張で書けない Kan 拡張は存在する . $C := \mathbf{1} = \{*\}$, $D := \mathbf{2} = \{0 \rightarrow 1\}$, $U = \{a, b\}$ とする . $F: \mathbf{1} \rightarrow \mathbf{2}$ を $F(*) := 1$, $E: \mathbf{1} \rightarrow U$ を $E(*) := a$ で定める .

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbf{2} & & \\
 \uparrow 1 & & \\
 \mathbf{1} & \xrightarrow{a} & \{a, b\}
 \end{array}$$

関手 $\mathbf{2} \rightarrow U$ は Δa と Δb の二つしかない . また自然変換 $a \implies \Delta b \circ 1$ は存在せず , $a \implies \Delta a \circ 1$ は唯一つ存在する . よって $1^\dagger a = \Delta a$ である . 一方 , $0 \in \mathbf{2}$ に対して各点 Kan 拡張を考えると

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbf{1} & \xrightarrow{0} & \mathbf{2} \\
 \uparrow & \swarrow & \uparrow 1 \\
 1 \downarrow 0 & \longrightarrow & \mathbf{1} \xrightarrow{a} \{a, b\}
 \end{array}$$

$1 \downarrow 0 = \mathbf{0}$ だから , $\text{colim}(1 \downarrow 0 \rightarrow \mathbf{1} \xrightarrow{a} U)$ は始対象となるが , $\{a, b\}$ は明らかに始対象を持たない . □

さて , 残っていた証明を終わらせ , 定理 4 の証明を完成させよう .

証明. まず T が関手となることは普遍性から容易に分かる. T が E の F に沿った Kan 拡張になっていることを示すため, unit となる自然変換 $\eta: E \Rightarrow TF$ を定義する.

$$\begin{array}{ccc} D & & \\ \uparrow F & \searrow T & \\ C & \xrightarrow{E} & U \end{array}$$

η \Uparrow

$c \in C$ とすると $Fc \in D$ である. TFc は Kan 拡張

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{1} & & \\ \uparrow \pi_2 & \searrow TFc & \\ F \downarrow Fc & \xrightarrow{\pi_1} C & \xrightarrow{E} U \end{array}$$

μ^{Fc} \Uparrow

で定義されるのであった. $\langle c, \text{id}_{Fc} \rangle \in F \downarrow Fc$ だから, $\mu_{\langle c, \text{id}_{Fc} \rangle}^{Fc}: Ec \rightarrow TFc$ となる. これを用いて $\eta_c: Ec \rightarrow TFc$ を $\eta_c := \mu_{\langle c, \text{id}_{Fc} \rangle}^{Fc}$ で定める. この η は自然変換である.

∴) $f: c \rightarrow d$ に対して

$$\begin{array}{ccc} Ec & \xrightarrow{\mu_{\langle c, \text{id}_{Fc} \rangle}^{Fc}} & TFc \\ Ef \downarrow & & \downarrow TFf \\ Ed & \xrightarrow{\mu_{\langle d, \text{id}_{Fd} \rangle}^{Fd}} & TFd \end{array}$$

が可換であることを示せばよい.

$$\begin{array}{ccc} & \mathbf{1} & \\ & \uparrow \mu^{Fc} & \searrow TFd \\ \pi_2 \curvearrowright & F \downarrow Fd & \xrightarrow{E} U \\ & \uparrow \mu^{Fd} & \nearrow TFf \\ & F \downarrow Fc & \xrightarrow{E} U \end{array}$$

H \nearrow

TFf の定義から $TFf_{\pi_2} \circ \mu^{Fc} = \mu_{H}^{Fd}$ である. 故に $\langle c, \text{id}_{Fc} \rangle \in F \downarrow Fc$ に対して

$TFf \circ \mu_{\langle c, \text{id}_{Fc} \rangle}^{Fc} = \mu_{\langle c, Ff \rangle}^{Fd}$ となる．ここで μ^{Fd} が自然変換だから

$$\begin{array}{ccc}
 Fc & \xrightarrow{Ff} & Fd \\
 Ff \downarrow & & \nearrow \text{id}_{Fd} \\
 & & Fd
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 Ec & \xrightarrow{\mu_{\langle c, Ff \rangle}^{Fd}} & TFd \\
 Ef \downarrow & & \downarrow \text{id} \\
 Ed & \xrightarrow{\mu_{\langle d, \text{id}_{Fd} \rangle}^{Fd}} & TFd
 \end{array}$$

が可換である．故に $TFf \circ \mu_{\langle c, \text{id}_{Fc} \rangle}^{Fc} = \mu_{\langle d, \text{id}_{Fd} \rangle}^{Fd} \circ Ef$ となり示したい可換性が示せた．

普遍性を示すため， $S: D \rightarrow U$ ， $\theta: E \Rightarrow SF$ とする．

$$\begin{array}{ccc}
 D & \xrightarrow{S} & U \\
 F \uparrow & \eta \uparrow \uparrow & \nearrow \theta \\
 C & \xrightarrow{E} & U
 \end{array}$$

$d \in D$ を取りコマ圏を考えて， θ と合成すると次の図式を得る．

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbf{1} & \xrightarrow{d} & D \\
 \pi_2 \uparrow & \swarrow \sigma & \uparrow F \\
 F \downarrow d & \xrightarrow{\pi_1} & C \\
 & & \nearrow \theta \\
 & & U
 \end{array}
 \xrightarrow{S}
 \begin{array}{ccc}
 \mathbf{1} & \xrightarrow{S(d)} & U \\
 \pi_2 \uparrow & \uparrow S\sigma\theta\pi_1 & \\
 F \downarrow d & \xrightarrow{\pi_1} & C \\
 & & \nearrow \theta \\
 & & U
 \end{array}$$

余極限 Td の普遍性により $\tau_d: Td \rightarrow Sd$ が一意に存在し可換となる．

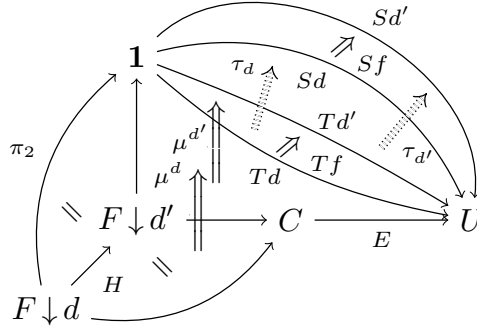
$$\begin{array}{ccc}
 \mathbf{1} & \xrightarrow{S(d')} & U \\
 \pi_2 \uparrow & \mu^d \uparrow \uparrow & \nearrow \tau_d \\
 F \downarrow d & \xrightarrow{\pi_1} & C \\
 & & \nearrow \theta \\
 & & U
 \end{array}$$

この τ_d が自然変換 $\tau: T \Rightarrow S$ を定める．

∴) $f: d \rightarrow d'$ に対して

$$\begin{array}{ccc}
 Td & \xrightarrow{\tau_d} & Sd \\
 Tf \downarrow & & \downarrow Sf \\
 Td' & \xrightarrow{\tau_{d'}} & Sd'
 \end{array}$$

が可換であることを示せばよい．これらの射は次の図式のようにになっている．



よって $Sf_{\pi_2} \circ (\tau_d)_{\pi_2} \circ \mu^d = (\tau_{d'})_{\pi_2} \circ Tf_{\pi_2} \circ \mu^d$ が示せれば，Kan 拡張 $\langle Td, \mu^d \rangle$ の普遍性から $Sf_{\pi_2} \circ (\tau_d)_{\pi_2} = (\tau_{d'})_{\pi_2} \circ Tf_{\pi_2}$ が分かる．その為には，任意の $\langle c, k \rangle \in F \downarrow d$ に対して $Sf \circ \tau_d \circ \mu^d_{\langle c, k \rangle} = \tau_{d'} \circ Tf \circ \mu^d_{\langle c, k \rangle}$ を示せばよい．

まず Tf の定義から $Tf_{\pi_2} \circ \mu^d = \mu^d_H$ である．故に $Tf \circ \mu^d_{\langle c, k \rangle} = \mu^d_{\langle c, f \circ k \rangle}$ が成り立つ．次に τ_d の定義から $(\tau_d)_{\pi_2} \circ \mu^d = S\sigma \circ \theta_{\pi_1}$ だから， $\tau_d \circ \mu^d_{\langle c, k \rangle} = Sk \circ \theta_c$ となる．よって

$$\begin{aligned} Sf \circ \tau_d \circ \mu^d_{\langle c, k \rangle} &= Sf \circ Sk \circ \theta_c \\ \tau_{d'} \circ Tf \circ \mu^d_{\langle c, k \rangle} &= \tau_{d'} \circ \mu^d_{\langle c, f \circ k \rangle} \\ &= S(f \circ k) \circ \theta_c \\ &= Sf \circ Sk \circ \theta_c \end{aligned}$$

となり証明が終わった．

このとき $c \in C$ に対して $\tau_{Fc} \circ \eta_c = \tau_{Fc} \circ \mu^c_{\langle c, \text{id}_{Fc} \rangle} = \theta_c$ となるから $\tau_F \circ \eta = \theta$ である．Kan 拡張 Td の普遍性により，このような τ は一意だから， T は F に沿った E の左 Kan 拡張である． \square

定義．定理 4 の形で得られる Kan 拡張を各点 Kan 拡張という．

定義． C, D, U, V を圏， $F: C \rightarrow D$ ， $E: C \rightarrow U$ ， $K: U \rightarrow V$ を関手として Kan 拡

張 $\langle F^\dagger E, \eta \rangle$ が存在するとする .

$$\begin{array}{ccccc}
 D & & & & \\
 \uparrow F & \searrow F^\dagger E & & & \\
 C & \xrightarrow{E} & U & \xrightarrow{K} & V \\
 & \uparrow \eta & & &
 \end{array}$$

このとき K が Kan 拡張 $\langle F^\dagger E, \eta \rangle$ と交換するとは , K を合成して得られる次の図式も Kan 拡張となることを言う .

$$\begin{array}{ccccc}
 D & & & & \\
 \uparrow F & \searrow K \circ (F^\dagger E) & & & \\
 C & \xrightarrow{E} & U & \xrightarrow{K} & V \\
 & \uparrow K\eta & & &
 \end{array}$$

即ち , $\langle K \circ (F^\dagger E), K\eta \rangle$ が F に沿った KE の Kan 拡張である .

定理 10. $F: C \rightarrow D, E: C \rightarrow U$ で各点 Kan 拡張 $F^\dagger E$ が存在し , 関手 $K: U \rightarrow V$ は余極限と交換するとする . このとき K は $F^\dagger E$ と交換する .

証明. $F^\dagger E$ が各点 Kan 拡張だから

$$K \circ F^\dagger E(d) = K(\text{colim}(E \circ \pi)) = \text{colim}(K \circ E \circ \pi) = F^\dagger(K \circ E)(d).$$

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathbf{1} & \xrightarrow{d} & D & & \\
 \uparrow & & \uparrow F & \searrow F^\dagger(K \circ E) & \\
 F \downarrow d & \xrightarrow{\pi} & C & \xrightarrow{E} & U & \xrightarrow{K} & V \\
 & & & \uparrow F^\dagger E & & &
 \end{array}$$

$F^\dagger E, F^\dagger(KE)$ の unit をそれぞれ $\eta: E \Rightarrow F^\dagger E \circ F, \eta': KE \Rightarrow F^\dagger(KE) \circ F$ とする .

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{ccccc}
 \mathbf{1} & & & & \\
 \uparrow \pi_2 & \searrow F^\dagger E(d) & & & \\
 F \downarrow d & \xrightarrow{\pi_1} & C & \xrightarrow{E} & U \\
 & \uparrow \mu^d & & &
 \end{array} & &
 \begin{array}{ccccc}
 \mathbf{1} & & & & \\
 \uparrow \pi_2 & \searrow F^\dagger(KE)(d) & & & \\
 F \downarrow d & \xrightarrow{\pi_1} & C & \xrightarrow{E} & U & \xrightarrow{K} & V \\
 & \uparrow \mu'^d & & &
 \end{array}
 \end{array}$$

とすれば $\eta_c = \mu_{\langle c, \text{id}_{Fc} \rangle}^{Fc}, \eta'_c = \mu'_{\langle c, \text{id}_{Fc} \rangle}^{Fc}$ である . K が余極限と交換するから $K\mu_{\langle c, \text{id}_{Fc} \rangle}^{Fc} = \mu'_{\langle c, \text{id}_{Fc} \rangle}^{Fc}$ となり , $K\eta_c = \eta'_c$ である . \square

定理 11. 左随伴関手は Kan 拡張と交換する .

証明. $F: C \rightarrow D, E: C \rightarrow U$ を関手, $L \dashv R: U \rightarrow V$ を随伴関手として, Kan 拡張 $\langle F^\dagger E, \eta \rangle$ が存在するとする.

$$\begin{array}{ccccc}
 & D & & & \\
 & \uparrow F & \searrow F^\dagger E & & \\
 & C & \xrightarrow{E} & U & \xrightleftharpoons[L]{L} V \\
 & & \uparrow \eta & & \\
 & & & &
 \end{array}$$

$L \dashv R: U^C \rightarrow V^C, L \dashv R: U^D \rightarrow V^D$ となるのであった. このとき $S \in V^D$ に対して自然に

$$\begin{aligned}
 \text{Hom}_{V^C}(LE, F^{-1}(S)) &= \text{Hom}_{V^C}(LE, SF) \\
 &\cong \text{Hom}_{U^C}(E, RSF) \\
 &= \text{Hom}_{U^C}(E, F^{-1}(RS)) \\
 &\cong \text{Hom}_{U^D}(F^\dagger E, RS) \\
 &\cong \text{Hom}_{V^D}(L \circ F^\dagger E, S)
 \end{aligned}$$

となるから $\text{Hom}(LE, F^{-1}(-))$ は表現可能で $F^\dagger(LE) \cong L \circ F^\dagger E$ となる. $F^\dagger(LE)$ の unit は自然同型 $\text{Hom}(LE, F^{-1}(L \circ F^\dagger E)) \cong \text{Hom}(L \circ F^\dagger E, L \circ F^\dagger E)$ で id に対応する自然変換 $\eta': LE \Rightarrow F^\dagger(LE) \circ F$ であった. 一方, この同型で id に対応するのは, 随伴 $L \dashv R$ の unit を α とすれば

$$\begin{array}{ccc}
 \text{id} & \in & \text{Hom}(L \circ F^\dagger E, L \circ F^\dagger E) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \alpha_{F^\dagger E} & \in & \text{Hom}(F^\dagger E, R \circ L \circ F^\dagger E) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \alpha_{F^\dagger E \circ F} \circ \eta & \in & \text{Hom}(E, R \circ L \circ F^\dagger E \circ F) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 L\eta & \in & \text{Hom}(LE, L \circ F^\dagger E \circ F)
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
 & D & & & \\
 & \uparrow F & \searrow F^\dagger E & & \\
 & C & \xrightarrow{E} & U & \xrightarrow{L} V \xrightarrow{R} U \\
 & & \uparrow \eta & & \uparrow \alpha \\
 & & & & \text{id}
 \end{array}$$

となるから $\eta' = L\eta$ である. □

定理 12. $F: C \rightarrow D, E: C \rightarrow U$ で, Kan 拡張 $\langle F^\dagger E, \eta \rangle$ が存在すると仮定する.

$$\begin{array}{ccc} D & & \\ \uparrow F & \searrow F^\dagger E & \\ C & \xrightarrow{E} & U \\ & \uparrow \eta & \end{array}$$

このとき $G: D \rightarrow B$ に対して

Kan 拡張 $\langle (GF)^\dagger E, \sigma \rangle$ が存在する \iff Kan 拡張 $\langle G^\dagger(F^\dagger E), \tau \rangle$ が存在する.

$$\begin{array}{ccc} B & & B \\ \uparrow G & \searrow (GF)^\dagger E & \uparrow G & \searrow G^\dagger(F^\dagger E) \\ D & & D & \uparrow \tau \\ \uparrow F & \uparrow \sigma & \uparrow F & \uparrow \eta \\ C & \xrightarrow{E} & U & \xrightarrow{E} & U \end{array}$$

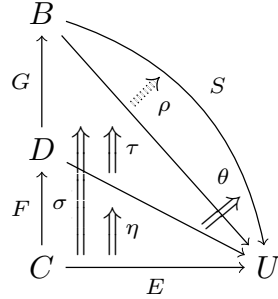
更に, これらが存在するとき $(GF)^\dagger E = G^\dagger(F^\dagger E), \sigma = \tau_F \circ \eta$ である.

証明. (\implies) Kan 拡張 $\langle (GF)^\dagger E, \sigma \rangle$ が存在するとする. $\langle F^\dagger E, \eta \rangle$ の普遍性により $\tau: F^\dagger E \implies (GF)^\dagger E \circ G$ が存在して, $\sigma = \tau_F \circ \eta$ となる.

$$\begin{array}{ccc} B & & \\ \uparrow G & \searrow (GF)^\dagger E & \\ D & & \\ \uparrow F & \uparrow \sigma & \uparrow \tau \\ C & \xrightarrow{E} & U \\ & \uparrow \eta & \end{array}$$

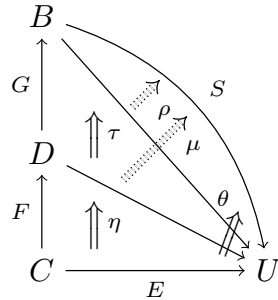
$\langle (GF)^\dagger E, \tau \rangle$ が G に沿った $F^\dagger E$ の Kan 拡張であることを示せばよい. 任意の関手

$S: B \rightarrow U$ と $\theta: F^\dagger E \Rightarrow S \circ G$ を取る .



$(GF)^\dagger E$ の普遍性から , $\rho: (GF)^\dagger E \Rightarrow S$ が一意に存在して $\rho_{GF} \circ \sigma = \theta_F \circ \eta$ となる . $\sigma = \tau_F \circ \eta$ だったから $\rho_{GF} \circ \tau_F \circ \eta = \theta_F \circ \eta$ である . よって Kan 拡張 $F^\dagger E$ の普遍性から $\rho_G \circ \tau = \theta$ となる . 従って $\langle (GF)^\dagger E, \tau \rangle$ が G に沿った $F^\dagger E$ の Kan 拡張である .

(\Leftarrow) Kan 拡張 $\langle G^\dagger(F^\dagger E), \tau \rangle$ が存在するとする . $\langle G^\dagger(F^\dagger E), \tau_F \circ \eta \rangle$ が GF に沿った E の Kan 拡張であることを示せばよい . 任意の関手 $S: B \rightarrow U$ と $\theta: E \Rightarrow SGF$ を取る .



$F^\dagger E$ の普遍性から $\mu: F^\dagger E \Rightarrow SG$ が一意に存在して $\mu_F \circ \eta = \theta$ となる . よって $G^\dagger(F^\dagger E)$ の普遍性から $\rho: G^\dagger(F^\dagger E) \Rightarrow S$ が一意に存在して $\rho_G \circ \tau = \mu$ となる . このとき $\rho_{GF} \circ (\tau_F \circ \eta) = \theta$ である . 従って $\langle G^\dagger(F^\dagger E), \tau_F \circ \eta \rangle$ が GF に沿った E の Kan 拡張である . \square

3 米田埋込と Kan 拡張

補題 13. C, D, U を圏 , $F: C \rightarrow D$, $E: C \rightarrow U$ を関手とする . $d \in D$, $u \in U$ として $K := (F \downarrow d \rightarrow C \xrightarrow{E} U)$ とするとき , $u \in U$ について自然な同型

$$\text{Hom}_{U \downarrow d}(K, \Delta u) \cong \text{Hom}_{\widehat{C}}(\text{Hom}_D(F(-), d), \text{Hom}_U(E(-), u))$$

が成り立つ .

証明. 互いに逆な写像

$$\mathrm{Hom}_{U^{F \downarrow d}}(K, \Delta u) \begin{array}{c} \xrightarrow{\varphi} \\ \xleftarrow{\psi} \end{array} \mathrm{Hom}_{\widehat{C}}(\mathrm{Hom}_D(F-, d), \mathrm{Hom}_U(E-, u))$$

を定義する. まず $\alpha: K \implies \Delta u$ に対して写像

$$\varphi(\alpha)_c: \mathrm{Hom}_D(Fc, d) \longrightarrow \mathrm{Hom}_U(Ec, u)$$

を $\varphi(\alpha)_c(f) := \alpha_{\langle c, f \rangle}$ で定義する. この $\varphi(\alpha)$ は自然変換である.

∴) $g: c \longrightarrow c'$ を C の射とする. 次の図式が可換であることを示せばよい.

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_D(Fc, d) & \xrightarrow{\varphi(\alpha)_c} & \mathrm{Hom}_U(Ec, u) \\ \uparrow -\circ Fg & & \uparrow -\circ Eg \\ \mathrm{Hom}_D(Fc', d) & \xrightarrow{\varphi(\alpha)_{c'}} & \mathrm{Hom}_U(Ec', u) \end{array}$$

$f' \in \mathrm{Hom}_D(Fc', d)$ を取る. このとき $\langle c', f' \rangle \in F \downarrow d$ である. また $f := f' \circ Fg$ とすれば $\langle c, f \rangle \in F \downarrow d$ であり $g: \langle c, f \rangle \longrightarrow \langle c', f' \rangle$ は $F \downarrow d$ の射である. 今 α が自然変換だから

$$\begin{array}{ccc} Ec & \xrightarrow{\alpha_{\langle c, f \rangle}} & u \\ Eg \downarrow & & \downarrow \mathrm{id} \\ Ec' & \xrightarrow{\alpha_{\langle c', f' \rangle}} & u \end{array}$$

が可換である. 故に $\alpha_{\langle c', f' \rangle} \circ Eg = \alpha_{\langle c, f \rangle}$ が成り立つ. よって初めの図式

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_D(Fc, d) & \xrightarrow{\varphi(\alpha)_c} & \mathrm{Hom}_U(Ec, u) & f' \circ Fg = f & \xrightarrow{\varphi(\alpha)_c} & \alpha_{\langle c, f \rangle} \\ \uparrow -\circ Fg & & \uparrow -\circ Eg & \uparrow -\circ Fg & & \alpha_{\langle c', f' \rangle} \circ Eg \\ \mathrm{Hom}_D(Fc', d) & \xrightarrow{\varphi(\alpha)_{c'}} & \mathrm{Hom}_U(Ec', u) & f' & \xrightarrow{\varphi(\alpha)_{c'}} & \alpha_{\langle c', f' \rangle} \\ & & & & & \uparrow -\circ Eg \end{array}$$

は可換である.

故に $\varphi: \mathrm{Hom}_{U^{F \downarrow d}}(K, \Delta u) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\widehat{C}}(\mathrm{Hom}_D(F-, d), \mathrm{Hom}_U(E-, u))$ は写像である. これは明らかに $u \in U$ について自然である.

次に $\theta: \text{Hom}_D(F-, d) \Rightarrow \text{Hom}_U(E-, u)$ に対して射

$$\psi(\theta)_{\langle c, f \rangle}: K(c, f) = Ec \longrightarrow u$$

を $\psi(\theta)_{\langle c, f \rangle} := \theta_c(f)$ で定める．これは自然変換 $\alpha: K \Rightarrow \Delta u$ を定める．

$\therefore g: \langle c, f \rangle \longrightarrow \langle c', f' \rangle$ を $F \downarrow d$ の射とする．即ち $g: c \longrightarrow c'$ は C の射で $f' \circ Fg = f$ となる．次の図式が可換であることを示せばよい．

$$\begin{array}{ccc} Ec & \xrightarrow{\alpha_{\langle c, f \rangle} = \theta_c(f)} & u \\ Eg \downarrow & & \downarrow \text{id} \\ Ec' & \xrightarrow{\alpha_{\langle c', f' \rangle} = \theta_{c'}(f')} & u \end{array}$$

θ が自然変換だから次が可換である．

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_D(Fc, d) & \xrightarrow{\theta_c} & \text{Hom}_U(Ec, d) & f' \circ Fg = f \xrightarrow{\theta_c} \theta_c(f) \\ \uparrow - \circ Fg & & \uparrow - \circ Eg & \theta_c(f') \circ Eg \\ \text{Hom}_D(Fc', d) & \xrightarrow{\theta_{c'}} & \text{Hom}_U(Ec', d) & f' \xrightarrow{\theta_{c'}} \theta_{c'}(f') \\ & & & \uparrow - \circ Eg \end{array}$$

故に $\theta_{c'}(f') \circ Eg = \theta_c(f)$ である．

このとき明らかに $\varphi \circ \psi = \text{id}$, $\psi \circ \varphi = \text{id}$ だから φ は全単射である． □

定理 14. C, D, U を圏 , $F: C \longrightarrow D$, $E: C \longrightarrow U$, $T: D \longrightarrow U$ を関手とする．以下の条件は同値である．

- (1) T は F に沿った E の各点 Kan 拡張である．
- (2) T は F に沿った E の Kan 拡張で , 任意の $u \in U$ に対して $\text{Hom}_U(-, u): U \longrightarrow \mathbf{Set}^{\text{op}}$ は Kan 拡張 T と交換する．
- (3) $d \in D$, $u \in U$ に対して自然に

$$\text{Hom}_U(Td, u) \cong \text{Hom}_{\widehat{C}}(\text{Hom}_D(F-, d), \text{Hom}_U(E-, u))$$

となる．

証明. (1 \implies 2) $\text{Hom}_U(-, u): U \longrightarrow \mathbf{Set}^{\text{op}}$ が余極限と交換するから明らか．

(2 \implies 3) Kan 拡張 $T \cong F^\dagger E$ が存在し, $\text{Hom}_U(-, u)$ がそれと交換するから Kan 拡張 $F^\dagger(\text{Hom}_U(E-, u)) \cong \text{Hom}_U(F^\dagger E-, u)$ が存在する.

$$\begin{array}{ccc}
 D & & \\
 \uparrow F & \searrow F^\dagger(\text{Hom}(E-, u)) & \\
 C & \xrightarrow{E} U & \xrightarrow{\text{Hom}(-, u)} \mathbf{Set}^{\text{op}} \\
 & \searrow F^\dagger E & \\
 & &
 \end{array}$$

よって $S: D \rightarrow \mathbf{Set}^{\text{op}}$ に対して自然に

$$\text{Hom}_{(\mathbf{Set}^{\text{op}})^D}(\text{Hom}_U(F^\dagger E-, u), S) \cong \text{Hom}_{(\mathbf{Set}^{\text{op}})^C}(\text{Hom}_U(E-, u), SF)$$

である (これは u についても自然である). opposite を取れば

$$\text{Hom}_{\widehat{C}}(S, \text{Hom}_U(F^\dagger E-, u)) \cong \text{Hom}_{\widehat{C}}(SF, \text{Hom}_U(E-, u))$$

を得る. 今 $S = \text{Hom}_D(-, d)$ とすれば, 米田の補題と合わせて

$$\text{Hom}_U(F^\dagger E(d), u) \cong \text{Hom}_{\widehat{C}}(\text{Hom}_D(F-, d), \text{Hom}_U(E-, u))$$

を得る.

(3 \implies 1) $d \in D$ とする. 仮定 3 と補題 13 より, $u \in U$ に対して自然に

$$\begin{aligned}
 \text{Hom}_U(Td, u) &\cong \text{Hom}_{\widehat{C}}(\text{Hom}_D(F-, d), \text{Hom}_U(E-, u)) \\
 &\cong \text{Hom}_{U^{F \downarrow d}}(F \downarrow d \rightarrow C \xrightarrow{E} U, \Delta u)
 \end{aligned}$$

だから $\text{colim}(F \downarrow d \rightarrow C \xrightarrow{E} U) \cong Td$ が存在する. 故に各点 Kan 拡張 $F^\dagger E$ が存在して $F^\dagger E(d) \cong Td$ である. \square

※ 同様に, 各点右 Kan 拡張に対しても

$$\begin{aligned}
 \text{Hom}_U(u, F^\ddagger E(d)) &\cong \text{Hom}_U(u, \lim(d \downarrow F \rightarrow C \xrightarrow{E} U)) \\
 &\cong \text{Hom}_U(\Delta u, d \downarrow F \rightarrow C \xrightarrow{E} U) \\
 &\cong \text{Hom}_{\widehat{C}}(\text{Hom}_D(d, F-), \text{Hom}_U(u, E-)).
 \end{aligned}$$

が成り立つ.

系 15. C を小圏, D を圏, $F: C \rightarrow D$ を関手とするととき $F^\dagger y(d) \cong \text{Hom}_D(F-, d)$.

$$\begin{array}{ccc} D & & \\ \uparrow F & \searrow F^\dagger y \cong \text{Hom}_D(F-, d) & \\ C & \xrightarrow{y} & \widehat{C} \end{array}$$

証明. \widehat{C} が余完備だから各点 Kan 拡張 $F^\dagger y$ が存在する. よって定理 14 を使えば, 任意の $P \in \widehat{C}$ に対して自然に

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\widehat{C}}(F^\dagger y(d), P) &\cong \text{Hom}_{\widehat{C}}(\text{Hom}_D(F-, d), \text{Hom}_{\widehat{C}}(y-, P)) \\ &\cong \text{Hom}_{\widehat{C}}(\text{Hom}_D(F-, d), P) \end{aligned}$$

となる. 故に米田の補題により $F^\dagger y(d) \cong \text{Hom}_D(F-, d)$ である. □

系 16. 小圏 C に対して $y^\dagger y \cong \text{id}$ である.

$$\begin{array}{ccc} \widehat{C} & & \\ \uparrow y & \searrow y^\dagger y \cong \text{id} & \\ C & \xrightarrow{y} & \widehat{C} \end{array}$$

証明. 任意の $P \in \widehat{C}$ に対して前系により $y^\dagger y(P) \cong \text{Hom}(y-, P) \cong P$. □

系 17. 任意の前層 $P \in \widehat{C}$ は $y(c)$ の余極限で書ける.

証明. 系 16 により $y^\dagger y(P) \cong P$ であるが, 一方各点 Kan 拡張

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{1} & \xrightarrow{P} & \widehat{C} \\ \uparrow & \swarrow & \uparrow y \\ y \downarrow P & \longrightarrow & C \xrightarrow{y} \widehat{C} \end{array}$$

により $P \cong y^\dagger y(P) \cong \text{colim}(y \downarrow P \rightarrow C \xrightarrow{y} \widehat{C}) = \text{colim}_{\langle c, f \rangle \in y \downarrow P} y(c)$ である. □

系 18. $P \in \widehat{C}$ が表現可能 \iff コンマ圏 $y \downarrow P$ が終対象を持つ.

証明. (\implies) $P = y(c)$ とする. $y \downarrow P = y \downarrow y(c) = \{\langle d, f \rangle \mid f: y(d) \rightarrow y(c)\}$ で, y は忠実充満なので $y \downarrow P = \text{id}_C \downarrow c$ である. よって終対象 $\text{id}_c: c \rightarrow c$ が存在する.

(\Leftarrow) コンマ圏 $y \downarrow P$ が終対象 $\langle c, f \rangle$ を持つとすれば, 系 17 により $P = \text{colim}(y \downarrow P \rightarrow C \rightarrow \widehat{C}) = y(c)$ である. \square

定理 19. 米田埋込 $y: C \rightarrow \widehat{C}$ は極限と交換する.

証明. 関手 $T: I \rightarrow C$ の極限 $\lim T$ が存在するとする. 標準的な射を $p_i: \lim T \rightarrow T_i$ とする. $y(\lim T)$ が関手 $y \circ T: I \rightarrow \widehat{C}$ の極限であることを示せばよい.

$$\begin{array}{ccc}
 T_i & \xleftarrow{p_i} & \lim T \\
 \uparrow & & \\
 T_j & \xleftarrow{p_j} & \lim T
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 y(T_i) & \xleftarrow{y(p_i)} & y(\lim T) \\
 \uparrow & & \\
 y(T_j) & \xleftarrow{y(p_j)} & y(\lim T)
 \end{array}$$

その為に, $P \in \widehat{C}$ と自然変換 $\mu: \Delta P \Rightarrow y \circ T$ を任意に取る. (射 $P \rightarrow y(\lim T)$ が一意に伸びることを示せばよい.) 系 17 によりある $S: K \rightarrow C$ が存在して $P = \text{colim}(y \circ S)$ と書ける. このときの標準的な射を $\alpha_k: y(Sk) \rightarrow P$ とする.

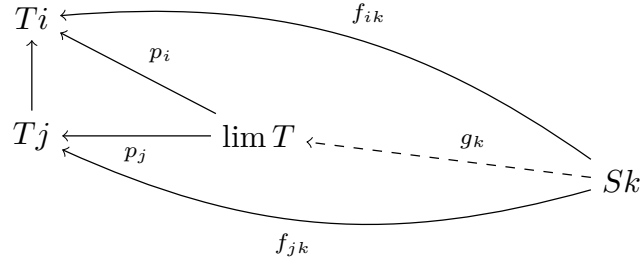
$$\begin{array}{ccc}
 y(T_i) & \xleftarrow{\mu_i} & P \\
 \uparrow & \swarrow y(p_i) & \\
 y(T_j) & \xleftarrow{y(p_j)} & y(\lim T) \\
 & \searrow \mu_j & \\
 & & P
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 & & y(Sk) \\
 & \swarrow \alpha_k & \\
 & & P \\
 & \swarrow \alpha_l & \\
 & & y(Sl)
 \end{array}$$

このとき, $k \in K$ に対して次の左側の可換図式が得られる.

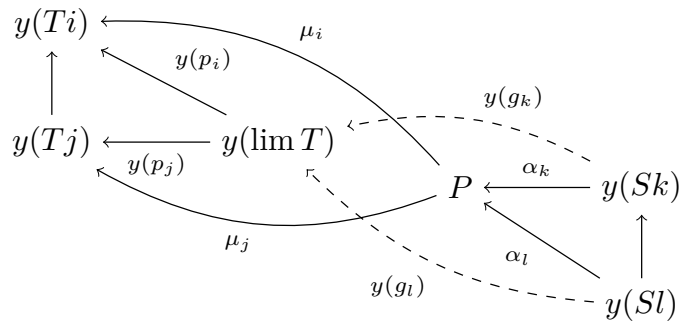
$$\begin{array}{ccc}
 y(T_i) & \xleftarrow{\mu_i \circ \alpha_k} & y(Sk) \\
 \uparrow & & \\
 y(T_j) & \xleftarrow{\mu_j \circ \alpha_k} & y(Sk)
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 T_i & \xleftarrow{f_{ik}} & Sk \\
 \uparrow & & \\
 T_j & \xleftarrow{f_{jk}} & Sk
 \end{array}$$

y は忠実充満だから, ある $f_{ik}: Sk \rightarrow T_i$ が存在して $y(f_{ik}) = \mu_i \circ \alpha_k$ となる. よって

$\lim T$ の普遍性から $g_k: Sk \rightarrow \lim T$ が存在して次が可換となる .

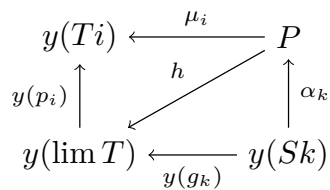


故に $y(g_k): y(Sk) \rightarrow y(\lim T)$ が得られる .



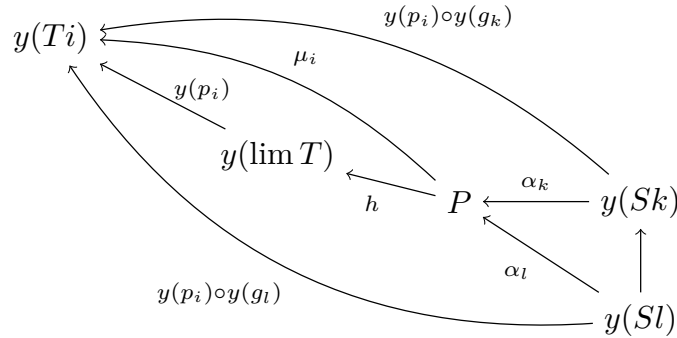
よって $P = \text{colim}(y \circ S)$ の普遍性により $h: P \rightarrow y(\lim T)$ が存在する . このとき $y(p_i) \circ h = \mu_i$ である .

$\therefore i, k$ に対して次の図式が得られる .



この図式の外側の四角は g_k の取り方により可換である . また右下の三角形は h の取り方により可換である . よって $\mu_i \circ \alpha_k = y(p_i) \circ h \circ \alpha_k$ が成り立つ . 故に次の図式を

考えれば



$P = \text{colim}(y \circ S)$ の普遍性により $\mu_i = y(p_i) \circ h$ が分かる .

h の一意性も普遍性により分かるので , $y(\lim T) \cong \lim(y \circ T)$ である . □

定理 20. 関手 $F: C \rightarrow D$ に対して $F^\dagger \circ y \cong y \circ F$ である .

$$\begin{array}{ccc} \widehat{C} & \xrightarrow{F^\dagger} & \widehat{D} \\ y \uparrow & & \uparrow y \\ C & \xrightarrow{F} & D \end{array}$$

証明. $c \in C$ とする . $P \in \widehat{D}$ に関して自然に

$$\begin{aligned} \text{Hom}(y(F(c)), P) &\cong P(F(c)) \cong \text{Hom}(y(c), P \circ F) = \text{Hom}(y(c), F^{-1}P) \\ &\cong \text{Hom}(F^\dagger(y(c)), P) \end{aligned}$$

であるから米田の補題により $y(F(c)) \cong F^\dagger(y(c))$ である . 同型の与え方から分かるようにこれは c に関して自然なので $F^\dagger \circ y \cong y \circ F$ である . □

定理 21. $\langle F^\dagger E, \eta \rangle$ が各点 Kan 拡張で , F が忠実充満とする . このとき $\eta: E \Rightarrow F^\dagger E \circ F$ は同型である .

証明. 各点 Kan 拡張により $F^\dagger E \circ F(c) = F^\dagger E(F(c)) = \text{colim}(F \downarrow (Fc) \rightarrow C \xrightarrow{E} U)$ である . コンマ圏 $F \downarrow (Fc)$ の対象は $g: Fc' \rightarrow Fc$ であるが , 今 F が忠実充満関手だから g は $c' \rightarrow c$ と対応する . よって $F \downarrow (Fc) = \text{id}_C \downarrow c$ が分かる . コンマ圏 $\text{id}_C \downarrow c$ は終対象 $\text{id}_c: c \rightarrow c$ を持つから , $\text{colim}(F \downarrow (Fc) \rightarrow C \xrightarrow{E} U) = Ec$ となる . よって同型 $E \cong F^\dagger E \circ F$ が成り立つ . □

逆に

定理 22. 米田埋込 $y: C \rightarrow \widehat{C}$ に対して $\eta: y \Rightarrow F^\dagger y \circ F$ が同型ならば, F は忠実充満である.

$$\begin{array}{ccc} & D & \\ & \nearrow^{F^\dagger y} & \\ F \uparrow & & \\ C & \xrightarrow{y} & \widehat{C} \\ & \eta \Uparrow & \end{array}$$

証明. $F^\dagger y(d) \cong \text{Hom}_D(F-, d)$ だから, $y(c) \cong F^\dagger y \circ F(c) \cong \text{Hom}_D(F-, Fc)$ である. 故に $\text{Hom}_C(c, c) \cong \text{Hom}_D(Fc, Fc)$. \square

定理 23. $F: C \rightarrow D$ を関手とすれば $F^\dagger, F^\ddagger: \widehat{C} \rightarrow \widehat{D}$ が得られる. このとき次は同値である.

- (1) F が忠実充満
- (2) F^\dagger が忠実充満
- (3) F^\ddagger が忠実充満

証明. (1 \Rightarrow 2) 随伴 $F^\dagger \dashv F^{-1}$ の unit を η とすれば「 F^\dagger が忠実充満 $\iff \eta$ が同型」であった. 仮定 1 により F が忠実充満だから η が同型となり (定理 21), F^\dagger も忠実充満である.

(2 \Rightarrow 1) 定理 20 により $F^\dagger \circ y \cong y \circ F$ である. 仮定 2 より F^\dagger が忠実充満で, y も忠実充満だから $F^\dagger \circ y \cong y \circ F$ も忠実充満である. よって F も忠実充満と分かる.

(2 \iff 3) 一般に $F \dashv G \dashv H$ のとき「 F が忠実充満 $\iff H$ が忠実充満」であった. よって $F^\dagger \dashv F^{-1} \dashv F^\ddagger$ より分かる. \square

定義. (1) $S \subset \text{Ob}(C)$ が generating class $\iff C$ の任意の射 $f \neq g: a \rightarrow b$ に対し, ある $s \in S$ と $k: s \rightarrow a$ が存在して $f \circ k \neq g \circ k$ となる.

- (2) 関手 $F: C \rightarrow D$ が稠密 (dense) $\iff \langle \text{id}_D, \text{id}_F \rangle$ が F に沿った F の各点 Kan 拡張となる.

$$\begin{array}{ccc} & D & \\ & \nearrow^{\text{id}_D} & \\ F \uparrow & & \\ C & \xrightarrow{F} & D \\ & \text{id}_F \Uparrow & \end{array}$$

定理 24. $F: C \rightarrow D$ を関手とするとき

$\{Fc \mid c \in C\} \subset D$ が generating class $\iff F^\dagger y: D \rightarrow \widehat{C}$ が忠実.

証明. $F^\dagger y: D \longrightarrow \widehat{C}$ が忠実でない

\iff ある D の射 $f \neq g: a \longrightarrow b$ に対して $F^\dagger y(f) = F^\dagger y(g)$ となる

\iff ある D の射 $f \neq g: a \longrightarrow b$ に対して $\text{Hom}_D(F-, f) = \text{Hom}_D(F-, g)$ となる

\iff ある D の射 $f \neq g: a \longrightarrow b$ に対して, 任意の $c \in C$ について $\text{Hom}_D(Fc, f) = \text{Hom}_D(Fc, g)$ となる

\iff ある D の射 $f \neq g: a \longrightarrow b$ に対して, 任意の $c \in C, k: Fc \longrightarrow a$ に対して $f \circ k = g \circ k$ となる

$\iff \{Fc \mid c \in C\} \subset D$ が generating class でない □

定理 25. 関手 $F: C \longrightarrow D$ に対して次の条件は同値 .

- (1) F が稠密
- (2) 任意の $d \in D$ に対して $d \cong \text{colim}(F \downarrow d \rightarrow C \xrightarrow{F} D)$ となる
- (3) $F^\dagger y: D \longrightarrow \widehat{C}$ が忠実充満

証明. (1 \iff 2) 明らか .

(2 \implies 3) $d, d' \in D$ に対して

$$\begin{aligned} \text{Hom}_D(F^\dagger y(d), F^\dagger y(d')) &\cong \text{Hom}_{\widehat{C}}(\text{Hom}_D(F-, d), \text{Hom}_D(F-, d')) \\ &\cong \text{Hom}_{\widehat{C}_{F \downarrow d}}(F \downarrow d \rightarrow C \xrightarrow{F} \widehat{C}, \Delta d') \\ &\cong \text{Hom}_D(\text{colim}(F \downarrow d \rightarrow C \xrightarrow{F} \widehat{C}), d') \\ &\cong \text{Hom}_D(d, d') \end{aligned}$$

(3 \implies 2) $F^\dagger y$ が忠実充満だから $d, d' \in D$ に対して

$$\begin{aligned} \text{Hom}_D(d, d') &\cong \text{Hom}_{\widehat{C}}(F^\dagger y(d), F^\dagger y(d')) \\ &\cong \text{Hom}_{\widehat{C}}(\text{Hom}_D(F-, d), \text{Hom}_D(F-, d')) \\ &\cong \text{Hom}_{\widehat{C}_{F \downarrow d}}(F \downarrow d \rightarrow C \xrightarrow{F} \widehat{C}, \Delta d') \end{aligned}$$

となる . 故に $\text{colim}(F \downarrow d \rightarrow C \xrightarrow{F} \widehat{C}) \cong d$ である . □

定義. (1) 関手 $F: C \longrightarrow D$ が conservative $\iff C$ の射 f について「 Ff が同型ならば f が同型」が成り立つ .

(2) 関手 $F: C \longrightarrow D$ が strongly generating $\iff F^\dagger y$ が conservative

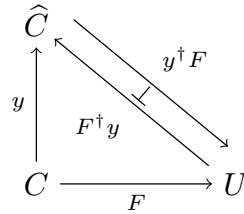
命題 26. 忠実充満 \implies conservative \implies 忠実 .

証明. 容易にわかる . □

系 27. 稠密 \implies strongly generating $\implies \{Fc \mid c \in C\}$ が generating class □

4 普遍随伴

定理 28. C を小圏, U を余完備な圏とすると, 関手 $F: C \rightarrow U$ から二つの関手 $y^\dagger F$, $F^\dagger y$ が得られる. このとき随伴 $y^\dagger F \dashv F^\dagger y$ が成り立つ.



※ この随伴を, twitter 等で一部の人が普遍随伴と呼んでいる.

証明. $P \in \widehat{C}$, $u \in U$ に対して

$$\begin{aligned} \text{Hom}_U(y^\dagger F(P), u) &\cong \text{Hom}_{\widehat{C}}(\text{Hom}_C(y-, P), \text{Hom}_U(F-, u)) \\ &\cong \text{Hom}_{\widehat{C}}(P, \text{Hom}_U(F-, u)) \\ &\cong \text{Hom}_{\widehat{C}}(P, F^\dagger y(u)). \end{aligned}$$

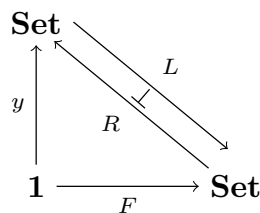
□

逆に次が成り立つ.

定理 29. 任意の随伴 $L \dashv R: \widehat{C} \rightarrow U$ はこのようにして得られる.

証明. $F := L \circ y: C \rightarrow U$ とする. 随伴 $y^\dagger F \dashv F^\dagger y$ が得られる. 一方, 左随伴関手 L は Kan 拡張と交換する (定理 11) から $y^\dagger F = y^\dagger(L \circ y) \cong L \circ (y^\dagger y) \cong L \circ \text{id} = L$ である. よって随伴の一意性から $R \cong F^\dagger y$ である. □

例 30. $C = \mathbf{1}$ とすれば $\widehat{\mathbf{1}} = \mathbf{Set}$ だから, 随伴 $L \dashv R: \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Set}$ に対して $F := L \circ y$ とすれば



$L \cong y^\dagger F, R \cong F^\dagger y$ である . $X := F(*) \in \mathbf{Set}$ と置けば , $Y \in \mathbf{Set}$ に対して

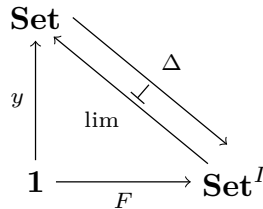
$$R(Y) \cong F^\dagger y(Y) \cong \mathbf{Hom}_{\mathbf{Set}}(F-, Y) \cong \mathbf{Hom}_{\mathbf{Set}}(X, Y)$$

だから $R \cong \mathbf{Hom}_{\mathbf{Set}}(X, -)$ である . 一方 $L(Y) \cong y^\dagger F(Y) \cong \mathbf{colim}(y \downarrow Y \rightarrow \mathbf{1} \xrightarrow{F} \mathbf{Set})$ で $y \downarrow Y \cong Y$ となるから

$$L(Y) \cong \coprod_{a \in Y} X \cong Y \times X$$

により $L \cong - \times X$ である . 故に , 任意の随伴 $\mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Set}$ は $- \times X \dashv \mathbf{Hom}_{\mathbf{Set}}(X, -)$ の形をしている . \square

例 31. 小圏 I に対して随伴 $\Delta \dashv \lim: \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Set}^I$ が成り立つ . よって $F := \Delta \circ y$ と置けば , $T \in \mathbf{Set}^I$ に対して $\lim T \cong F^\dagger y(T) \cong \mathbf{Hom}_{\mathbf{Set}^I}(F(*), T)$ である .



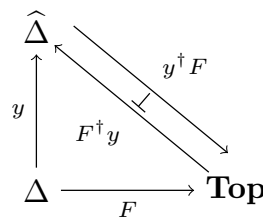
$F(*) = \Delta(y(*)) \cong \Delta 1$ だから $\lim T \cong \mathbf{Hom}(\Delta 1, T)$ が分かる . \square

例 32. 圏 Δ を以下のように定める .

- $\mathbf{Ob}(\Delta) := \{[n] \mid n \in \mathbb{N}\}$, ここで $[n] := \{0, 1, \dots, n\}$
- 射 $[m] \rightarrow [n]$ は , $[m]$ の自然な順序を保つ写像とする .

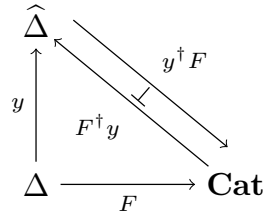
このとき圏 C に対して , 関手 $\Delta^{\text{op}} \rightarrow C$ を C の単体的対象 (simplicial object) と呼ぶ . 特に $C = \mathbf{Set}$ の場合 , つまり関手 $\Delta^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$ を単体的集合という . $\widehat{\Delta}$ が単体的集合のなす圏である .

$n \in \mathbb{N}$ に対して $\Delta^n \in \mathbf{Top}$ を $\Delta^n := \{(x_0, \dots, x_n) \in [0, 1]^{n+1} \mid x_0 + \dots + x_n = 1\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ で定義すれば , 関手 $F: \Delta \rightarrow \mathbf{Top}$ が $F([n]) := \Delta^n$ により自然に定まる . このとき随伴 $y^\dagger F \dashv F^\dagger y$ が得られる .



$|-| := y^\dagger F: \widehat{\Delta} \rightarrow \mathbf{Top}$ を幾何学的実現, $\text{Sing} := F^\dagger y: \mathbf{Top} \rightarrow \widehat{\Delta}$ を singular functor という. □

例 33. 順序集合 $[n] = \{0, 1, \dots, n\}$ を圏とみなして包含関手 $F: \Delta \rightarrow \mathbf{Cat}$ を考えれば, 随伴 $y^\dagger F \dashv F^\dagger y$ が得られる.



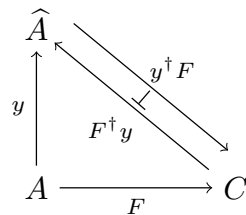
$N := F^\dagger y: \mathbf{Cat} \rightarrow \widehat{\Delta}$ を nerve functor という. □

定義. 対象 $a \in C$ が small projective $\iff \text{Hom}_C(a, -)$ が余連続.

定理 34. 圏 C が, ある小圏 A を使って $C \cong \widehat{A}$ と書ける $\iff C$ が余完備で, 小さい充満部分圏 $A \subset C$ が存在して, 包含関手 $F: A \rightarrow C$ が strongly generating で, 任意の $a \in A$ が small projective.

証明. (\implies) $C \cong \widehat{A}$ のとき, C は余完備で, $y: A \rightarrow C$ は充満部分圏である. また $y^\dagger y \cong \text{id}$ は明らかに余連続かつ conservative である.

(\impliedby) 仮定の充満部分圏 $F: A \rightarrow C$ を取る. C が余完備だから, 定理 28 により随伴 $y^\dagger F \dashv F^\dagger y: \widehat{A} \rightarrow C$ を得る.



$F^\dagger y$ が本質的全射かつ忠実充満であることを示せばよい. その為にまず $F^\dagger y$ が余連続であることを示す.

$\therefore c \in C$ に対して $F^\dagger y(c) \cong \text{Hom}_C(F-, c)$ である. よって

$$\text{Hom}_C(F-, \text{colim}_j c_j) \cong \text{colim}_j \text{Hom}_C(F-, c_j)$$

を示せばよい. \widehat{A} の余極限は各点ごとに計算すればよいから, $a \in A$ に対して

$\text{Hom}_C(a, \text{colim}_j c_j) \cong \text{colim}_j \text{Hom}_C(a, c_j)$ を示せばよい．ところがいま $a \in A$ は small projective なのでこれは成り立つ．

本質的全射であることを示すため, $P \in \widehat{A}$ を取る．系 17 により $P \cong \text{colim}_j y(a_j)$ と書ける． $c := \text{colim}_j i(a_j) \in C$ と置けば, $F^\dagger y \cong \text{Hom}_C(F-, \square)$ が余連続だから

$$F^\dagger y(c) \cong \text{colim}_j \text{Hom}_C(F-, F(a_j)) \cong \text{colim}_j \text{Hom}_A(-, a_j) = \text{colim}_j y(a_j) \cong P$$

となり, $F^\dagger y$ は本質的全射である．

忠実充満であることを示す．その為には F が稠密, 即ち $c \in C$ に対して $\text{colim}(F \downarrow c \rightarrow A \xrightarrow{F} C) \cong c$ を示せばよい．今 $F^\dagger y$ が conservative だから $F^\dagger y(\text{colim}(F \downarrow c \rightarrow A \xrightarrow{F} C)) \cong F^\dagger y(c)$ を示せばよい．それは $F^\dagger y$ が余連続だから

$$\begin{aligned} F^\dagger y(\text{colim}(F \downarrow c \rightarrow A \xrightarrow{F} C)) &\cong \text{colim}(F \downarrow c \rightarrow A \xrightarrow{F} C \xrightarrow{F^\dagger y} \widehat{A}) \\ &\cong \text{colim}(F \downarrow c \rightarrow A \xrightarrow{y} \widehat{A}) \\ &\cong F^\dagger y(c) \end{aligned}$$

である．

□

参考文献

- [1] Saunders Mac Lane, Categories for the Working Mathematician, Springer, 2nd ed. 1978 版 (1998)
- [2] ft_math さんによる圏論祭, 2012 年 12 月 8 日, http://alg-d.com/math/ft_math/
- [3] ft_math さんによる圏論祭, 2013 年 12 月 7 日・8 日, http://alg-d.com/math/ft_math/