Kan 拡張

alg-d
http://alg-d.com/math/kan_extension/

2016 年 8 月 22 日

目次

1 定義

定義. C, D, U を圏，$F\colon C \longrightarrow D$，$E\colon C \longrightarrow U$ を関手とする．F に沿った E の左 Kan 拡張とは組 $\langle F^\dagger E, \eta\rangle$ であって，以下の条件を満たすものである．

(1) $F^\dagger E$ は関手 $D \longrightarrow U$，η は自然変換 $E \Longrightarrow F^\dagger E \circ F$ である．

$$\begin{tikzcd} D \arrow[rrd, "F^\dagger E"] & & \\ C \arrow[u, "F"] \arrow[rr, "E"'] \arrow[r, phantom, "\eta\Uparrow"] & & U \end{tikzcd}$$

(2) 組 $\langle S, \theta\rangle$ が同じ条件を満たす (即ち $S\colon D \longrightarrow U$ は関手で $\theta\colon E \Longrightarrow S \circ F$ は自然変換) ならば，自然変換 $\tau\colon F^\dagger E \Longrightarrow S$ が一意に存在して $\theta = \tau_F \circ \eta$ となる．即ち

次の等式が成り立つ．

$$
\begin{tikzcd}
D \arrow[drr, bend left=40, "S", ""'{name=B}] \arrow[drr, "F^\dagger E" description, ""{name=A}] & & \\
C \arrow[u, "F"] \arrow[rr, "E"'] \arrow[ur, phantom, "\eta\Uparrow"] & & U
\arrow[Rightarrow, dotted, from=A, to=B, "\tau"']
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
D \arrow[drr, bend left=40, "S"] & & \\
C \arrow[u, "F"] \arrow[rr, "E"'] \arrow[ur, phantom, "\theta\Uparrow"] & & U
\end{tikzcd}
$$

自然変換 η を Kan 拡張 $\langle F^\dagger E, \eta\rangle$ の unit と呼ぶ．また，F に沿った E の右 Kan 拡張 $\langle F^\ddagger E, \varepsilon\rangle$ が自然変換の向きを逆にして得られる．

$$
\begin{tikzcd}
D \arrow[drr, bend left=40, "S", ""'{name=B}] \arrow[drr, "F^\ddagger E" description, ""{name=A}] & & \\
C \arrow[u, "F"] \arrow[rr, "E"'] \arrow[ur, phantom, "\varepsilon\Downarrow"] & & U
\arrow[Rightarrow, dotted, from=B, to=A, "\tau"]
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
D \arrow[drr, bend left=40, "S"] & & \\
C \arrow[u, "F"] \arrow[rr, "E"'] \arrow[ur, phantom, "\theta\Downarrow"] & & U
\end{tikzcd}
$$

左 Kan 拡張 $F^\dagger E$ を $\mathrm{Lan}_F E$，右 Kan 拡張 $F^\ddagger E$ を $\mathrm{Ran}_F E$ と書くこともある[*1]．以下，左 Kan 拡張を単に Kan 拡張と書く．

> ※ 関手の向きを逆にしたものは Kan リフトという．

関手 $F\colon C \longrightarrow D$ に対して，関手 $F^{-1}\colon U^D \longrightarrow U^C$ が $F^{-1}(S) := S \circ F$ により定まるのであった．このとき，Kan 拡張 $\langle F^\dagger E, \eta\rangle$ の定義を言い換えれば，$E \in U^C$ から F^{-1} への普遍射 $\eta\colon E \longrightarrow F^{-1}(F^\dagger E) = F^\dagger E \circ F$ のことであると分かる．

$$
\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "\eta"] \arrow[dr, "\theta"'] & F^\dagger E \circ F \arrow[d, dashed, "\tau_F"] \\
& S \circ F
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
F^\dagger E \arrow[d, dashed, "\tau"] \\
S
\end{tikzcd}
$$

故に普遍射の性質から次の命題が分かる．

命題 1． $F\colon C \longrightarrow D$，$E\colon C \longrightarrow U$ に対して関手 $\mathrm{Hom}_{U^C}(E, F^{-1}(-))\colon U^D \longrightarrow \mathbf{Set}$ が得られる．このとき

$$\mathrm{Hom}_{U^C}(E, F^{-1}(-)) \text{ が表現可能関手} \iff F^\dagger E \text{ が存在する}$$

が成り立つ．またこのとき，$\mathrm{Hom}_{U^C}(E, F^{-1}(-)) \cong \mathrm{Hom}_{U^D}(F^\dagger E, -)$ が成り立つ．これから得られる同型 $\mathrm{Hom}_{U^C}(E, F^{-1}(F^\dagger E)) \cong \mathrm{Hom}_{U^D}(F^\dagger E, F^\dagger E)$ で右辺の $\mathrm{id}_{F^\dagger E}$ に対応する左辺の $\eta\colon E \Longrightarrow F^{-1}(F^\dagger E)$ が，Kan 拡張 $F^\dagger E$ の unit である． $\square$

[*1] というか，大抵の本・論文では Lan や Ran が使われている．

命題 2. 各 $E \in U^C$ に対して F に沿った Kan 拡張 $F^\dagger E \in U^D$ が存在するとする．このとき $F^\dagger$ は関手 $F^{-1}\colon U^D \longrightarrow U^C$ の左随伴関手を定める．随伴 $F^\dagger \dashv F^{-1}$ の unit を $\eta\colon \mathrm{id}_{U^C} \Longrightarrow F^{-1} \circ F^\dagger$ とするとき，$E \in U^C$ に対して η_E が $F^\dagger E$ の unit となる．同様に右 Kan 拡張 $F^\ddagger\colon U^C \longrightarrow U^D$ は F^{-1} の右随伴関手である．即ち $F^\dagger \dashv F^{-1} \dashv F^\ddagger$ となる． □

例 3. 関手 $E\colon J \longrightarrow U$ に対して余極限 $\operatorname{colim} E$ とは E から対角関手 $\Delta\colon U \longrightarrow U^J$ への普遍射 $E \longrightarrow \Delta(\operatorname{colim} E)$ であった．一方，$\mathbf{1} = \{*\}$ を一点圏として $F\colon J \longrightarrow \mathbf{1}$ を唯一の関手とすれば $F^{-1}\colon U^{\mathbf{1}} = U \longrightarrow U^J$ は Δ と一致する．よって F に沿った E の Kan 拡張は普遍射 $E \longrightarrow \Delta(F^\dagger E)$ であり，普遍射の一意性から $F^\dagger E \cong \operatorname{colim} E$ が分かる．

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{1} \arrow[dr, "F^\dagger E = \operatorname{colim} E"] & \\
J \arrow[u, "F"] \arrow[r, "E"'] \arrow[ur, phantom, "\Uparrow"] & U
\end{tikzcd}
$$

即ち，余極限は Kan 拡張である．同様にして，極限は右 Kan 拡張である． □

2　各点 Kan 拡張

余極限が Kan 拡張であることを使うと，「各点 Kan 拡張」という方法で Kan 拡張を計算することができる．C, D, U を圏，$F\colon C \longrightarrow D$，$E\colon C \longrightarrow U$ を関手として，Kan 拡張 $F^\dagger E\colon D \longrightarrow U$ が存在するとする．

$$
\begin{tikzcd}
D \arrow[dr, "F^\dagger E"] & \\
C \arrow[u, "F"] \arrow[r, "E"'] \arrow[ur, phantom, "\Uparrow"] & U
\end{tikzcd}
$$

$d \in D$ に対して $F^\dagger E(d)$ を計算したい．$d\colon \mathbf{1} \longrightarrow D$ を $d(*) = d$ なる関手とみなしてコンマ圏 $F{\downarrow}d$ を考えれば次の図式を得る．

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{1} \arrow[r, "d"] & D \arrow[dr, "F^\dagger E"] & \\
F{\downarrow}d \arrow[u, "\pi_2"] \arrow[r, "\pi_1"'] \arrow[ur, phantom, "\Nwarrow"] & C \arrow[u, "F"'] \arrow[r, "E"'] \arrow[ur, phantom, "\Uparrow"] & U
\end{tikzcd}
$$

自然変換を合成すれば次の図式を得る.

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{1} \arrow[drr, "(F^\dagger E)\circ d"] & & \\
F\downarrow d \arrow[u, "\pi_2"] \arrow[rr, "E\circ\pi_1"'] \arrow[ur, phantom, "\Uparrow"] & & U
\end{tikzcd}
$$

π_2 に沿った Kan 拡張は余極限だったから，もしこれが Kan 拡張であれば (実は一般にはそうなるとは限らない)，$F^\dagger E(d) \cong \operatorname{colim}(E\circ\pi)$ となり，Kan 拡張が余極限に帰着できる.

　以上を踏まえて，C, D, U を圏，$F\colon C \longrightarrow D$，$E\colon C \longrightarrow U$ を関手とする.

$$
\begin{tikzcd}
D & \\
C \arrow[u, "F"'] \arrow[r, "E"'] & U
\end{tikzcd}
$$

$d \in D$ に対してコンマ圏 $F\downarrow d$ を考えれば次の図式を得る.

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{1} \arrow[r, "d"] & D & \\
F\downarrow d \arrow[u, "\pi_2"] \arrow[r, "\pi_1"'] \arrow[ur, phantom, "\Nwarrow"] & C \arrow[u, "F"'] \arrow[r, "E"'] & U
\end{tikzcd}
$$

今，Kan 拡張 $\pi_2^\dagger(F\downarrow d \xrightarrow{\pi_1} C \xrightarrow{E} U)$，即ち余極限 $\operatorname{colim}(F\downarrow d \xrightarrow{\pi_1} C \xrightarrow{E} U)$ が存在すると仮定しよう．これを使って $T(d) := \operatorname{colim}(F\downarrow d \xrightarrow{\pi_1} C \xrightarrow{E} U)$ と定義する.

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{1} \arrow[drr, "T(d)"] & & \\
F\downarrow d \arrow[u, "\pi_2"] \arrow[r, "\pi_1"'] \arrow[ur, phantom, "\mu^d\Uparrow"] & C \arrow[r, "E"'] & U
\end{tikzcd}
$$

次に射 $h\colon d \longrightarrow d'$ に対して $T(h)$ を定める．$h\colon d \longrightarrow d'$ は自然変換

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{1} \arrow[r, shift left=1.5, "d'"] \arrow[r, shift right=1.5, "d"'] \arrow[r, phantom, "h\Uparrow"] & D
\end{tikzcd}
$$

と同一視できることに注意する．コンマ圏 $F{\downarrow}d$，$F{\downarrow}d'$ を考える．

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{1} \arrow[r, "d"] & D \\
F{\downarrow}d \arrow[u, "\pi_2"] \arrow[r, "\pi_1"'] \arrow[ur, phantom, "\Nwarrow\theta"] & C \arrow[u, "F"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathbf{1} \arrow[r, "d'"] & D \\
F{\downarrow}d' \arrow[u, "\pi_2'"] \arrow[r, "\pi_1'"'] \arrow[ur, phantom, "\Nwarrow\theta'"] & C \arrow[u, "F"']
\end{tikzcd}
$$

左の図式と h を組み合わせて，次の図式が得られる．

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{1} \arrow[r, shift left=2, "d'"] \arrow[r, shift right=2, "d"'] \arrow[r, phantom, "h\Uparrow"] & D \\
F{\downarrow}d \arrow[u, "\pi_2"] \arrow[r, "\pi_1"'] \arrow[ur, phantom, "\Nwarrow\theta"] & C \arrow[u, "F"']
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
\mathbf{1} \arrow[r, "d'"] & D \\
F{\downarrow}d \arrow[u, "\pi_2"] \arrow[r, "\pi_1"'] \arrow[ur, phantom, "\Nwarrow h_{\pi_2}\circ\theta"] & C \arrow[u, "F"']
\end{tikzcd}
$$

コンマ圏 $F{\downarrow}d'$ の普遍性により関手 $H\colon F{\downarrow}d \longrightarrow F{\downarrow}d'$ が存在し次の等号が成り立つ．

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathbf{1} \arrow[r, "d'"] & D & \\
 & F{\downarrow}d' \arrow[u, "\pi_2'"] \arrow[r, "\pi_1'"'] \arrow[ur, phantom, "\Nwarrow\theta'"] & C \arrow[u, "F"'] \arrow[r, "E"'] & U \\
F{\downarrow}d \arrow[uur, bend left, "\pi_2"] \arrow[ur, dashed, "H"'] \arrow[urr, bend right, "\pi_1"'] & & &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
 & \mathbf{1} \arrow[r, "d'"] & D & \\
 & & C \arrow[u, "F"'] \arrow[r, "E"'] \arrow[u, phantom, "\Nwarrow h_{\pi_2}\circ\theta"] & U \\
F{\downarrow}d \arrow[uur, bend left, "\pi_2"] \arrow[urr, bend right, "\pi_1"'] & & &
\end{tikzcd}
$$

今，余極限 $T(d) = \operatorname{colim}(F{\downarrow}d \xrightarrow{\pi_1} C \xrightarrow{E} U)$，$T(d') = \operatorname{colim}(F{\downarrow}d' \xrightarrow{\pi_1'} C \xrightarrow{E} U)$ が存在するのであった．

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathbf{1} \arrow[rrd, "T(d')"] & & \\
 & F{\downarrow}d' \arrow[u, "\pi_2'"] \arrow[r, "\pi_1'"'] \arrow[ur, phantom, "\mu^{d'}\Uparrow"] & C \arrow[r, "E"'] & U \\
F{\downarrow}d \arrow[uur, bend left, "\pi_2"] \arrow[ur, "H"'] \arrow[urr, bend right, "\pi_1"'] & & &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & \mathbf{1} \arrow[rrd, "T(d)"] & & \\
 & \arrow[ur, phantom, "\mu^{d}\Uparrow"] & C \arrow[r, "E"'] & U \\
F{\downarrow}d \arrow[uur, bend left, "\pi_2"] \arrow[urr, bend right, "\pi_1"'] & & &
\end{tikzcd}
$$

故に Kan 拡張 $\langle T(d), \mu^d \rangle$ の普遍性により射 $T(h)\colon T(d) \longrightarrow T(d')$ が存在することが分

かる．

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathbf{1} \arrow[drr, bend left, "T(d')"] \arrow[drr, "T(d)"'] \arrow[drr, phantom, bend left=15, "\Uparrow T(h)"] & & \\
 & \arrow[u, phantom, "\mu^d \Uparrow"] & C \arrow[r, "E"'] & U \\
F\downarrow d \arrow[uur, bend left, "\pi_2"] \arrow[urr, bend right, "\pi_1"'] & & &
\end{tikzcd}
$$

このとき T は関手 $T\colon D \longrightarrow U$ となり，T が F に沿った E の左 Kan 拡張となるのである．このことは後で証明することにして認めてしまえば，次の定理が得られる．

定理 4. C, D, U を圏，$F\colon C \longrightarrow D$，$E\colon C \longrightarrow U$ を関手とする．各 $d \in D$ に対して余極限 $\operatorname{colim}(F\downarrow d \to C \xrightarrow{E} U)$ が存在するならば，F に沿った E の Kan 拡張 $F^\dagger E$ が存在し，$F^\dagger E(d) \cong \operatorname{colim}(F\downarrow d \to C \xrightarrow{E} U)$ となる．

C が小圏ならば $F\downarrow d$ も小圏となる．故に次の系が得られる．

系 5. C, D, U を圏，$F\colon C \longrightarrow D$，$E\colon C \longrightarrow U$ を関手とする．U が余完備で，C が小圏ならば Kan 拡張 $F^\dagger E$ が存在する． □

Set は余完備であったから次の系を得る．

系 6. C, D を小圏，$F\colon C \longrightarrow D$ を関手とする．任意の関手 $E\colon C^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Set}$ に対して Kan 拡張 $F^\dagger E\colon D^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Set}$ が存在する．

$$
\begin{tikzcd}
D^{\mathrm{op}} \arrow[dr, "F^\dagger E"] & \\
C^{\mathrm{op}} \arrow[u, "F"] \arrow[r, "E"'] \arrow[ur, phantom, "\Uparrow"] & \mathbf{Set}
\end{tikzcd}
$$

故に随伴 $F^\dagger \dashv F^{-1}\colon \widehat{C} \longrightarrow \widehat{D}$ が成り立つ． □

※ 同様にして，F に沿った E の右 Kan 拡張が，各点右 Kan 拡張

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{1} \arrow[r, "d"] \arrow[dr, phantom, "\Searrow"] & D \arrow[dr, "F^\ddagger E"] & \\
d\downarrow F \arrow[u] \arrow[r] & C \arrow[u, "F"] \arrow[r, "E"'] \arrow[ur, phantom, "\Downarrow"] & U
\end{tikzcd}
$$

により $F^{\ddagger}E(d) \cong \lim(d{\downarrow}F \to C \to U)$ として得られる．

例 7. X, Y を集合，$f\colon X \longrightarrow Y$ を写像とする．集合を離散圏とみなせば $f\colon X \longrightarrow Y$ は関手である．また (順序集合を圏とみなして) $f^{-1}\colon \mathcal{P}(Y) \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ も関手である．

圏 $\mathbf{2} = \{0 \to 1\}$ を考えれば圏同型 $\mathcal{P}(X) = \mathbf{2}^X$ が成り立つが，このとき関手 f^{-1} は $\mathbf{2}^Y \ni A \longmapsto A \circ f \in \mathbf{2}^X$ で与えられる．

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[dr, "A"] & \\
X \arrow[u, "f"] \arrow[r, "f^{-1}(A)"'] & \mathbf{2}
\end{tikzcd}$$

故に関手 $f^{-1}\colon \mathcal{P}(Y) \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ の左随伴関手が Kan 拡張 $f^{\dagger}$ である．これを各点 Kan 拡張で計算してみる．

$A\colon X \longrightarrow \mathbf{2}$ に対して $f^{\dagger}A$ を求める．$y \in Y$ を取りコンマ圏 $f{\downarrow}y$ を考える．

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{1} \arrow[r, "y"] & Y & \\
f{\downarrow}y \arrow[u] \arrow[r] \arrow[ur, phantom, "\Nwarrow"] & X \arrow[u, "f"'] \arrow[r, "A"'] & \mathbf{2}
\end{tikzcd}$$

コンマ圏の定義から $f{\downarrow}y = \{x \in X \mid f(x) = y\} = f^{-1}(y)$ は離散圏である．故に

$$f^{\dagger}A(y) = \operatorname{colim}(f{\downarrow}y \to X \xrightarrow{A} \mathbf{2}) = \coprod_{x \in f^{-1}(y)} A(x)$$

となるから

$$f^{\dagger}A(y) = \begin{cases} 1 & (\text{ある } x \in f^{-1}(y) \text{ が存在して } A(x) = 1) \\ 0 & (\text{そうでないとき}) \end{cases}$$

である．即ち $A \in \mathcal{P}(X)$ に対して $f^{\dagger}A = f(A) \in \mathcal{P}(Y)$ となる．従って $f^{-1}\colon \mathcal{P}(Y) \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ の左随伴関手は $f\colon \mathcal{P}(X) \ni A \longmapsto f(A) \in \mathcal{P}(Y)$ である．

更にこの場合，f^{-1} の右随伴関手 (= 右 Kan 拡張) も存在する．それには各点右 Kan 拡張を同様に計算すればよい．すると

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{1} \arrow[r, "y"] & Y & \\
y{\downarrow}f \arrow[u] \arrow[r] \arrow[ur, phantom, "\Searrow"] & X \arrow[u, "f"'] \arrow[r, "A"'] & \mathbf{2}
\end{tikzcd}$$

$$f^{\ddagger}A(y) = \lim(y{\downarrow}f \to X \xrightarrow{A} \mathbf{2}) = \prod_{x\in f^{-1}(y)} A(x)$$

となるから

$$f^{\ddagger}A(y) = \begin{cases} 0 & (\text{ある } x \in f^{-1}(y) \text{ が存在して } A(x) = 0) \\ 1 & (\text{そうでないとき}) \end{cases}$$

であり，$f^{\ddagger}A = Y \setminus f(X \setminus A) =: f_!(A)$ となることが分かる[*2].

以上により，$f^{-1}\colon \mathcal{P}(Y) \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ は左随伴，右随伴両方を持つ．

$$\begin{tikzcd} \mathcal{P}(X) \arrow[r, bend left=50, "f"] \arrow[r, phantom, shift left=3, "\perp"] \arrow[r, phantom, shift right=3, "\perp"] \arrow[r, bend right=50, "f_!"'] & \mathcal{P}(Y) \arrow[l, "f^{-1}"'] \end{tikzcd}$$

従って f^{-1} は余極限，極限両方と交換する．特に以下が成り立つ．

$$f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B), \quad f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$$

一方 f は左随伴を持たない．実際，f と極限は交換しないのである．例えば $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ は成立しない． $\square$

例 8. 位相空間 X に対して，X の開集合全体がなす順序集合 $\mathcal{O}_X$ を圏とみなす．X 上の (集合の) 前層とは関手 $P\colon \mathcal{O}_X^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Set}$ のことであった．よって $\widehat{\mathcal{O}_X} := \mathbf{Set}^{\mathcal{O}_X^{\mathrm{op}}}$ が X 上の前層がなす圏である．

X, Y を位相空間，$f\colon X \longrightarrow Y$ を連続写像とする．このとき，X 上の前層 P に対して Y 上の前層 f_*P が $f_*P(U) := P(f^{-1}(U))$ により定まり，関手 $f_*\colon \widehat{\mathcal{O}_X} \longrightarrow \widehat{\mathcal{O}_Y}$ を順像というのであった．また関手 f_* は左随伴関手 f^* を持ち，これを逆像というのであった．さて，F を関手 $\mathcal{O}_Y^{\mathrm{op}} \ni U \longmapsto f^{-1}(U) \in \mathcal{O}_X^{\mathrm{op}}$ とすれば，定義から $f_* = F^{-1}\colon \widehat{\mathcal{O}_X} \longrightarrow \widehat{\mathcal{O}_Y}$ である．

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}_X^{\mathrm{op}} \arrow[dr, "P"] & \\ \mathcal{O}_Y^{\mathrm{op}} \arrow[u, "F"] \arrow[r, "f_*(P)"'] & \mathbf{Set} \end{tikzcd}$$

故に左随伴の一意性から $f^* \cong F^{\dagger}$ が分かる．そこで前層 $P \in \widehat{\mathcal{O}_Y}$ の逆像 $F^{\dagger}P \cong f^*(P)$ を各点 Kan 拡張で計算してみる．

[*2] この $f_!(A)$ を small image と呼ぶ，らしい．

$U \in \mathcal{O}_X$ を取りコンマ圏 $F{\downarrow}U$ を考える．

$$\begin{tikzcd} \mathbf{1} \arrow[r, "U"] & \mathcal{O}_X^{\mathrm{op}} & \\ F{\downarrow}U \arrow[u] \arrow[r] \arrow[ur, phantom, "\Nwarrow"] & \mathcal{O}_Y^{\mathrm{op}} \arrow[u, "F"'] \arrow[r, "P"'] & \mathbf{Set} \end{tikzcd}$$

$F^{\dagger}P(U) \cong \operatorname{colim}(F{\downarrow}U \to \mathcal{O}_Y^{\mathrm{op}} \xrightarrow{P} \mathbf{Set}) \cong \operatorname*{colim}_{\langle V,h\rangle \in F\downarrow U} P(V)$ となる．コンマ圏の定義から

$$\begin{aligned} \langle V, h\rangle \in F{\downarrow}U &\iff h\colon F(V) \longrightarrow U \quad \text{in } \mathcal{O}_X^{\mathrm{op}} \\ &\iff F(V) \supset U \\ &\iff f^{-1}(V) \supset U \\ &\iff V \supset f(U) \end{aligned}$$

となるので $F^{\dagger}P(U) \cong \operatorname*{colim}_{V \supset f(U)} P(V)$ となり，普段見る逆像の定義が現れる． $\square$

例 9. 各点 Kan 拡張で書けない Kan 拡張は存在する．$C := \mathbf{1} = \{*\}$，$D := \mathbf{2} = \{0 \to 1\}$，$U = \{a, b\}$ とする．$F\colon \mathbf{1} \longrightarrow \mathbf{2}$ を $F(*) := 1$，$E\colon \mathbf{1} \longrightarrow U$ を $E(*) := a$ で定める．

$$\begin{tikzcd} \mathbf{2} & \\ \mathbf{1} \arrow[u, "1"'] \arrow[r, "a"'] & \{a, b\} \end{tikzcd}$$

関手 $\mathbf{2} \longrightarrow U$ は Δa と Δb の二つしかない．また自然変換 $a \Longrightarrow \Delta b \circ 1$ は存在せず，$a \Longrightarrow \Delta a \circ 1$ は唯一つ存在する．よって $1^{\dagger}a = \Delta a$ である．一方，$0 \in \mathbf{2}$ に対して各点 Kan 拡張を考えると

$$\begin{tikzcd} \mathbf{1} \arrow[r, "0"] & \mathbf{2} & \\ 1{\downarrow}0 \arrow[u] \arrow[r] \arrow[ur, phantom, "\Nwarrow"] & \mathbf{1} \arrow[u, "1"'] \arrow[r, "a"'] & \{a, b\} \end{tikzcd}$$

$1{\downarrow}0 = \mathbf{0}$ だから，$\operatorname{colim}(1{\downarrow}0 \to \mathbf{1} \xrightarrow{a} U)$ は始対象となるが，$\{a, b\}$ は明らかに始対象を持たない． $\square$

さて，残っていた証明を終わらせ，定理 4 の証明を完成させよう．

証明. まず T が関手となることは普遍性から容易に分かる．T が E の F に沿った Kan 拡張になっていることを示すため，unit となる自然変換 $\eta\colon E \Longrightarrow TF$ を定義する．

$$
\begin{tikzcd}
D \arrow[dr, "T"] & \\
C \arrow[u, "F"] \arrow[r, "E"'] \arrow[ur, phantom, "\eta\Uparrow"] & U
\end{tikzcd}
$$

$c \in C$ とすると $Fc \in D$ である．TFc は Kan 拡張

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{1} \arrow[rrd, "TFc"] & & \\
F\downarrow Fc \arrow[u, "\pi_2"] \arrow[r, "\pi_1"'] \arrow[ur, phantom, "\mu^{Fc}\Uparrow"] & C \arrow[r, "E"'] & U
\end{tikzcd}
$$

で定義されるのであった．$\langle c, \mathrm{id}_{Fc}\rangle \in F\downarrow Fc$ だから，$\mu^{Fc}_{\langle c, \mathrm{id}_{Fc}\rangle}\colon Ec \longrightarrow TFc$ となる．これを用いて $\eta_c\colon Ec \longrightarrow TFc$ を $\eta_c := \mu^{Fc}_{\langle c, \mathrm{id}_{Fc}\rangle}$ で定める．この η は自然変換である．

∵) $f\colon c \longrightarrow d$ に対して

$$
\begin{tikzcd}
Ec \arrow[r, "\mu^{Fc}_{\langle c, \mathrm{id}_{Fc}\rangle}"] \arrow[d, "Ef"'] & TFc \arrow[d, "TFf"] \\
Ed \arrow[r, "\mu^{Fd}_{\langle d, \mathrm{id}_{Fd}\rangle}"'] & TFd
\end{tikzcd}
$$

が可換であることを示せばよい．

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathbf{1} \arrow[rrd, "TFc"'] \arrow[rrd, bend left, "TFd"] \arrow[rr, phantom, "\Uparrow\mu^{Fd}\ \Uparrow TFf"] & & \\
 & F\downarrow Fd \arrow[u] \arrow[r] \arrow[ur, phantom, "\mu^{Fc}\Uparrow"] & C \arrow[r, "E"'] & U \\
F\downarrow Fc \arrow[ruu, bend left, "\pi_2"] \arrow[ru, "H"'] \arrow[rru, bend right] \arrow[u, phantom, "="] \arrow[rr, phantom, "="] & & &
\end{tikzcd}
$$

TFf の定義から $TFf_{\pi_2} \circ \mu^{Fc} = \mu^{Fd}_H$ である．故に $\langle c, \mathrm{id}_{Fc}\rangle \in F\downarrow Fc$ に対して

$TFf \circ \mu^{Fc}_{\langle c, \mathrm{id}_{Fc}\rangle} = \mu^{Fd}_{\langle c, Ff\rangle}$ となる．ここで μ^{Fd} が自然変換だから

$$
\begin{tikzcd}
Fc \arrow[dr, "Ff"] \arrow[d, "Ff"'] & \\
Fd \arrow[r, "\mathrm{id}_{Fd}"'] & Fd
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
Ec \arrow[r, "\mu^{Fd}_{\langle c, Ff\rangle}"] \arrow[d, "Ef"'] & TFd \arrow[d, "\mathrm{id}"] \\
Ed \arrow[r, "\mu^{Fd}_{\langle d, \mathrm{id}_{Fd}\rangle}"'] & TFd
\end{tikzcd}
$$

が可換である．故に $TFf \circ \mu^{Fc}_{\langle c, \mathrm{id}_{Fc}\rangle} = \mu^{Fd}_{\langle d, \mathrm{id}_{Fd}\rangle} \circ Ef$ となり示したい可換性が示せた．

普遍性を示すため，$S\colon D \longrightarrow U$，$\theta\colon E \Longrightarrow SF$ とする．

$$
\begin{tikzcd}
D \arrow[dr, "T"] \arrow[dr, bend left, "S"] & \\
C \arrow[u, "F"] \arrow[r, "E"'] \arrow[u, phantom, shift left=3, "\eta\Uparrow"] & U \arrow[ul, phantom, "\Uparrow\theta"]
\end{tikzcd}
$$

$d \in D$ を取りコンマ圏を考えて，θ と合成すると次の図式を得る．

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{1} \arrow[r, "d"] & D \arrow[dr, bend left, "S"] & \\
F{\downarrow}d \arrow[u, "\pi_2"] \arrow[r, "\pi_1"'] \arrow[ur, phantom, "\Nwarrow\sigma"] & C \arrow[u, "F"'] \arrow[r, "E"'] & U \arrow[ul, phantom, "\Nearrow\theta"]
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
\mathbf{1} \arrow[rr, bend left, "S(d)"] & & \\
F{\downarrow}d \arrow[u, "\pi_2"] \arrow[r, "\pi_1"'] & C \arrow[u, phantom, "\Uparrow S\sigma\circ\theta_{\pi_1}"] \arrow[r, "E"'] & U
\end{tikzcd}
$$

余極限 Td の普遍性により $\tau_d\colon Td \longrightarrow Sd$ が一意に存在し可換となる．

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{1} \arrow[drr, "T(d)"] \arrow[drr, bend left, "S(d')"] & & \\
F{\downarrow}d \arrow[u, "\pi_2"] \arrow[r, "\pi_1"'] & C \arrow[ul, phantom, "\mu^d\Uparrow"] \arrow[r, "E"'] & U \arrow[ul, phantom, "\Uparrow S\sigma\circ\theta_{\pi_1}"] \arrow[ull, phantom, "\Uparrow\tau_d"]
\end{tikzcd}
$$

この τ_d が自然変換 $\tau\colon T \Longrightarrow S$ を定める．

$\because$) $f\colon d \longrightarrow d'$ に対して

$$
\begin{tikzcd}
Td \arrow[r, "\tau_d"] \arrow[d, "Tf"'] & Sd \arrow[d, "Sf"] \\
Td' \arrow[r, "\tau_{d'}"'] & Sd'
\end{tikzcd}
$$

が可換であることを示せばよい．これらの射は次の図式のようになっている．

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathbf{1} \arrow[drr, bend left=60, "Sd'"] \arrow[drr, bend left=35, "Sd"'] \arrow[drr, bend left=10, "Td'"] \arrow[drr, bend right=15, "Td"'] \arrow[drr, phantom, bend left=48, "\Uparrow Sf"] \arrow[drr, phantom, bend left=0, "\Uparrow Tf"] \arrow[drr, phantom, bend left=22, "\Uparrow \tau_d"] \arrow[drr, phantom, bend left=35, "\Uparrow \tau_{d'}"] & & \\
 & F\downarrow d' \arrow[u] \arrow[r] \arrow[ur, phantom, "\Uparrow \mu^{d'}"] \arrow[r, phantom, shift left=3, "\Uparrow \mu^{d}"] & C \arrow[r, "E"'] & U \\
F\downarrow d \arrow[uur, bend left, "\pi_2"] \arrow[ur, "H"'] \arrow[urr, bend right] \arrow[u, phantom, "="] \arrow[ur, phantom, shift right=4, "="] & & &
\end{tikzcd}
$$

よって $Sf_{\pi_2} \circ (\tau_d)_{\pi_2} \circ \mu^d = (\tau_{d'})_{\pi_2} \circ Tf_{\pi_2} \circ \mu^d$ が示せれば，Kan 拡張 $\langle Td, \mu^d \rangle$ の普遍性から $Sf_{\pi_2} \circ (\tau_d)_{\pi_2} = (\tau_{d'})_{\pi_2} \circ Tf_{\pi_2}$ が分かる．その為には，任意の $\langle c, k \rangle \in F\downarrow d$ に対して $Sf \circ \tau_d \circ \mu^d_{\langle c,k \rangle} = \tau_{d'} \circ Tf \circ \mu^d_{\langle c,k \rangle}$ を示せばよい．

まず Tf の定義から $Tf_{\pi_2} \circ \mu^d = \mu^{d'}_H$ である．故に $Tf \circ \mu^d_{\langle c,k \rangle} = \mu^{d'}_{\langle c, f\circ k \rangle}$ が成り立つ．次に τ_d の定義から $(\tau_d)_{\pi_2} \circ \mu^d = S\sigma \circ \theta_{\pi_1}$ だから，$\tau_d \circ \mu^d_{\langle c,k \rangle} = Sk \circ \theta_c$ となる．よって

$$
\begin{aligned}
Sf \circ \tau_d \circ \mu^d_{\langle c,k \rangle} &= Sf \circ Sk \circ \theta_c \\
\tau_{d'} \circ Tf \circ \mu^d_{\langle c,k \rangle} &= \tau_{d'} \circ \mu^{d'}_{\langle c, f\circ k \rangle} \\
&= S(f \circ k) \circ \theta_c \\
&= Sf \circ Sk \circ \theta_c
\end{aligned}
$$

となり証明が終わった．

このとき $c \in C$ に対して $\tau_{Fc} \circ \eta_c = \tau_{Fc} \circ \mu^{Fc}_{\langle c, \mathrm{id}_{Fc} \rangle} = \theta_c$ となるから $\tau_F \circ \eta = \theta$ である．Kan 拡張 Td の普遍性により，このような τ は一意だから，T は F に沿った E の左 Kan 拡張である． □

定義. 定理 4 の形で得られる Kan 拡張を各点 Kan 拡張という．

定義. C, D, U, V を圏，$F\colon C \longrightarrow D$，$E\colon C \longrightarrow U$，$K\colon U \longrightarrow V$ を関手として Kan 拡

張 $\langle F^\dagger E, \eta\rangle$ が存在するとする．

$$
\begin{tikzcd}
D \arrow[dr, "F^\dagger E"] & & \\
C \arrow[u, "F"] \arrow[r, "E"'] \arrow[ur, phantom, "\eta\Uparrow"] & U \arrow[r, "K"'] & V
\end{tikzcd}
$$

このとき K が Kan 拡張 $\langle F^\dagger E, \eta\rangle$ と交換するとは，K を合成して得られる次の図式も Kan 拡張となることを言う．

$$
\begin{tikzcd}
D \arrow[drr, "K\circ(F^\dagger E)"] & & \\
C \arrow[u, "F"] \arrow[r, "E"'] \arrow[ur, phantom, "K\eta\Uparrow"] & U \arrow[r, "K"'] & V
\end{tikzcd}
$$

即ち，$\langle K\circ(F^\dagger E), K\eta\rangle$ が F に沿った KE の Kan 拡張である．

定理 10. $F\colon C \longrightarrow D$, $E\colon C \longrightarrow U$ で各点 Kan 拡張 $F^\dagger E$ が存在し，関手 $K\colon U \longrightarrow V$ は余極限と交換するとする．このとき K は $F^\dagger E$ と交換する．

証明. $F^\dagger E$ が各点 Kan 拡張だから

$$
K\circ F^\dagger E(d) = K(\mathrm{colim}(E\circ\pi)) = \mathrm{colim}(K\circ E\circ\pi) = F^\dagger(K\circ E)(d).
$$

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{1} \arrow[r, "d"] & D \arrow[dr, "F^\dagger E"] \arrow[drr, "F^\dagger(K\circ E)"] & & \\
F{\downarrow}d \arrow[u] \arrow[r, "\pi"'] & C \arrow[u, "F"] \arrow[r, "E"'] & U \arrow[r, "K"'] & V
\end{tikzcd}
$$

$F^\dagger E, F^\dagger(KE)$ の unit をそれぞれ $\eta\colon E \Longrightarrow F^\dagger E\circ F$, $\eta'\colon KE \Longrightarrow F^\dagger(KE)\circ F$ とする．

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{1} \arrow[drr, "F^\dagger E(d)"] & & \\
F{\downarrow}d \arrow[u, "\pi_2"] \arrow[r, "\pi_1"'] \arrow[ur, phantom, "\mu^d\Uparrow"] & C \arrow[r, "E"'] & U
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathbf{1} \arrow[drrr, "F^\dagger(KE)(d)"] & & & \\
F{\downarrow}d \arrow[u, "\pi_2"] \arrow[r, "\pi_1"'] \arrow[ur, phantom, "\mu'^d\Uparrow"] & C \arrow[r, "E"'] & U \arrow[r, "K"'] & V
\end{tikzcd}
$$

とすれば，$\eta_c = \mu^{Fc}_{\langle c,\mathrm{id}_{Fc}\rangle}$, $\eta'_c = \mu'^{Fc}_{\langle c,\mathrm{id}_{Fc}\rangle}$ である．K が余極限と交換するから $K\mu^{Fc}_{\langle c,\mathrm{id}_{Fc}\rangle} = \mu'^{Fc}_{\langle c,\mathrm{id}_{Fc}\rangle}$ となり，$K\eta_c = \eta'_c$ である． □

定理 11. 左随伴関手は Kan 拡張と交換する．

証明. $F\colon C \longrightarrow D$, $E\colon C \longrightarrow U$ を関手，$L \dashv R\colon U \longrightarrow V$ を随伴関手として，Kan 拡張 $\langle F^\dagger E, \eta\rangle$ が存在するとする．

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[dr, "F^\dagger E"] & & \\
C \arrow[u, "F"] \arrow[r, "E"'] \arrow[ur, phantom, "\eta\Uparrow"] & U \arrow[r, shift left, "L"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & V \arrow[l, shift left, "R"]
\end{tikzcd}$$

$L \dashv R\colon U^C \longrightarrow V^C$，$L \dashv R\colon U^D \longrightarrow V^D$ となるのであった．このとき $S \in V^D$ に対して自然に

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{V^C}(LE, F^{-1}(S)) &= \mathrm{Hom}_{V^C}(LE, SF) \\
&\cong \mathrm{Hom}_{U^C}(E, RSF) \\
&= \mathrm{Hom}_{U^C}(E, F^{-1}(RS)) \\
&\cong \mathrm{Hom}_{U^D}(F^\dagger E, RS) \\
&\cong \mathrm{Hom}_{V^D}(L \circ F^\dagger E, S)
\end{aligned}$$

となるから $\mathrm{Hom}(LE, F^{-1}(-))$ は表現可能で $F^\dagger(LE) \cong L \circ F^\dagger E$ となる．$F^\dagger(LE)$ の unit は自然同型 $\mathrm{Hom}(LE, F^{-1}(L \circ F^\dagger E)) \cong \mathrm{Hom}(L \circ F^\dagger E, L \circ F^\dagger E)$ で id に対応する自然変換 $\eta'\colon LE \Longrightarrow F^\dagger(LE) \circ F$ であった．一方，この同型で id に対応するのは，随伴 $L \dashv R$ の unit を α とすれば

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{id} & \in & \mathrm{Hom}(L \circ F^\dagger E, L \circ F^\dagger E) \\
\big\downarrow & & \downarrow \\
\alpha_{F^\dagger E} & \in & \mathrm{Hom}(F^\dagger E, R \circ L \circ F^\dagger E) \\
\big\downarrow & & \downarrow \\
\alpha_{F^\dagger E \circ F} \circ \eta & \in & \mathrm{Hom}(E, R \circ L \circ F^\dagger E \circ F) \\
\big\downarrow & & \downarrow \\
L\eta & \in & \mathrm{Hom}(LE, L \circ F^\dagger E \circ F)
\end{array}$$

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[dr, "F^\dagger E"] & & & \\
C \arrow[u, "F"] \arrow[r, "E"'] \arrow[ur, phantom, "\eta\Uparrow"] & U \arrow[r, "L"] \arrow[rr, bend right, "\mathrm{id}"'] & V \arrow[r, "R"] \arrow[d, phantom, "\Uparrow\alpha"] & U \\
& & \; &
\end{tikzcd}$$

となるから $\eta' = L\eta$ である． $\square$

定理 12. $F\colon C \longrightarrow D$, $E\colon C \longrightarrow U$ で，Kan 拡張 $\langle F^\dagger E, \eta\rangle$ が存在すると仮定する．

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[dr, "F^\dagger E"] & \\
C \arrow[u, "F"] \arrow[r, "E"'] \arrow[ur, phantom, "\eta\Uparrow"] & U
\end{tikzcd}$$

このとき $G\colon D \longrightarrow B$ に対して

$$\text{Kan 拡張 } \langle (GF)^\dagger E, \sigma\rangle \text{ が存在する} \iff \text{Kan 拡張 } \langle G^\dagger(F^\dagger E), \tau\rangle \text{ が存在する．}$$

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[ddr, "(GF)^\dagger E"] & \\
D \arrow[u, "G"] & \\
C \arrow[u, "F"] \arrow[r, "E"'] \arrow[ur, phantom, "\Uparrow\sigma"] & U
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
B \arrow[ddr, "G^\dagger(F^\dagger E)"] & \\
D \arrow[u, "G"] \arrow[dr, "F^\dagger E"] \arrow[ur, phantom, "\Uparrow\tau"] & \\
C \arrow[u, "F"] \arrow[r, "E"'] \arrow[ur, phantom, "\Uparrow\eta"] & U
\end{tikzcd}$$

更に，これらが存在するとき $(GF)^\dagger E = G^\dagger(F^\dagger E)$，$\sigma = \tau_F \circ \eta$ である．

証明. ($\Longrightarrow$) Kan 拡張 $\langle (GF)^\dagger E, \sigma\rangle$ が存在するとする．$\langle F^\dagger E, \eta\rangle$ の普遍性により $\tau\colon F^\dagger E \Longrightarrow (GF)^\dagger E \circ G$ が存在して，$\sigma = \tau_F \circ \eta$ となる．

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[ddr, "(GF)^\dagger E"] & \\
D \arrow[u, "G"] \arrow[dr, "F^\dagger E"] \arrow[ur, phantom, "\Uparrow\tau"] & \\
C \arrow[u, "F"] \arrow[r, "E"'] \arrow[ur, phantom, "\sigma\Uparrow \quad \Uparrow\eta"] & U
\end{tikzcd}$$

$\langle (GF)^\dagger E, \tau\rangle$ が G に沿った $F^\dagger E$ の Kan 拡張であることを示せばよい．任意の関手

$S\colon B \longrightarrow U$ と $\theta\colon F^{\dagger}E \Longrightarrow S \circ G$ を取る．

$$
\begin{tikzcd}
B \arrow[ddr] \arrow[ddr, bend left, "S"] \arrow[ddr, phantom, bend left=20, "\Uparrow\theta"] \\
D \arrow[u, "G"] \arrow[dr] \arrow[ur, phantom, "\Uparrow\tau"] \arrow[ur, phantom, shift left=4, "\rho"] \\
C \arrow[u, "F"] \arrow[r, "E"'] \arrow[u, phantom, shift left=3, "\Uparrow\sigma"] \arrow[ur, phantom, "\Uparrow\eta"] & U
\end{tikzcd}
$$

$(GF)^{\dagger}E$ の普遍性から，$\rho\colon (GF)^{\dagger}E \Longrightarrow S$ が一意に存在して $\rho_{GF} \circ \sigma = \theta_F \circ \eta$ となる．$\sigma = \tau_F \circ \eta$ だったから $\rho_{GF} \circ \tau_F \circ \eta = \theta_F \circ \eta$ である．よって Kan 拡張 $F^{\dagger}E$ の普遍性から $\rho_G \circ \tau = \theta$ となる．従って $\langle (GF)^{\dagger}E, \tau \rangle$ が G に沿った $F^{\dagger}E$ の Kan 拡張である．

($\Longleftarrow$) Kan 拡張 $\langle G^{\dagger}(F^{\dagger}E), \tau \rangle$ が存在するとする．$\langle G^{\dagger}(F^{\dagger}E), \tau_F \circ \eta \rangle$ が GF に沿った E の Kan 拡張であることを示せばよい．任意の関手 $S\colon B \longrightarrow U$ と $\theta\colon E \Longrightarrow SGF$ を取る．

$$
\begin{tikzcd}
B \arrow[ddr] \arrow[ddr, bend left, "S"] \arrow[ddr, phantom, bend left=20, "\rho"] \\
D \arrow[u, "G"] \arrow[dr] \arrow[ur, phantom, "\Uparrow\tau"] \arrow[ur, phantom, shift left=4, "\mu"] \\
C \arrow[u, "F"] \arrow[r, "E"'] \arrow[ur, phantom, "\Uparrow\eta"] & U \arrow[u, phantom, "\theta"]
\end{tikzcd}
$$

$F^{\dagger}E$ の普遍性から $\mu\colon F^{\dagger}E \Longrightarrow SG$ が一意に存在して $\mu_F \circ \eta = \theta$ となる．よって $G^{\dagger}(F^{\dagger}E)$ の普遍性から $\rho\colon G^{\dagger}(F^{\dagger}E) \Longrightarrow S$ が一意に存在して $\rho_G \circ \tau = \mu$ となる．このとき $\rho_{GF} \circ (\tau_F \circ \eta) = \theta$ である．従って $\langle G^{\dagger}(F^{\dagger}E), \tau_F \circ \eta \rangle$ が GF に沿った E の Kan 拡張である． $\square$

3　米田埋込と Kan 拡張

補題 13. C, D, U を圏，$F\colon C \longrightarrow D$，$E\colon C \longrightarrow U$ を関手とする．$d \in D$，$u \in U$ として $K := (F{\downarrow}d \to C \xrightarrow{E} U)$ とするとき，$u \in U$ について自然な同型

$$
\mathrm{Hom}_{U^{F\downarrow d}}(K, \Delta u) \cong \mathrm{Hom}_{\widehat{C}}(\mathrm{Hom}_D(F(-), d), \mathrm{Hom}_U(E(-), u))
$$

が成り立つ．

証明. 互いに逆な写像

$$\mathrm{Hom}_{U^{F\downarrow d}}(K, \Delta u) \underset{\psi}{\overset{\varphi}{\rightleftarrows}} \mathrm{Hom}_{\widehat{C}}(\mathrm{Hom}_D(F-, d), \mathrm{Hom}_U(E-, u))$$

を定義する．まず $\alpha\colon K \Longrightarrow \Delta u$ に対して写像

$$\varphi(\alpha)_c\colon \mathrm{Hom}_D(Fc, d) \longrightarrow \mathrm{Hom}_U(Ec, u)$$

を $\varphi(\alpha)_c(f) := \alpha_{\langle c, f\rangle}$ で定義する．この $\varphi(\alpha)$ は自然変換である．

$\because$) $g\colon c \longrightarrow c'$ を C の射とする．次の図式が可換であることを示せばよい．

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_D(Fc, d) \arrow[r, "\varphi(\alpha)_c"] & \mathrm{Hom}_U(Ec, u) \\
\mathrm{Hom}_D(Fc', d) \arrow[u, "-\circ Fg"] \arrow[r, "\varphi(\alpha)_{c'}"'] & \mathrm{Hom}_U(Ec', u) \arrow[u, "-\circ Eg"']
\end{tikzcd}$$

$f' \in \mathrm{Hom}_D(Fc', d)$ を取る．このとき $\langle c', f'\rangle \in F\downarrow d$ である．また $f := f' \circ Fg$ とすれば $\langle c, f\rangle \in F\downarrow d$ であり $g\colon \langle c, f\rangle \longrightarrow \langle c', f'\rangle$ は $F\downarrow d$ の射である．今 α が自然変換だから

$$\begin{tikzcd}
Ec \arrow[r, "\alpha_{\langle c,f\rangle}"] \arrow[d, "Eg"'] & u \arrow[d, "\mathrm{id}"] \\
Ec' \arrow[r, "\alpha_{\langle c',f'\rangle}"'] & u
\end{tikzcd}$$

が可換である．故に $\alpha_{\langle c', f'\rangle} \circ Eg = \alpha_{\langle c, f\rangle}$ が成り立つ．よって初めの図式

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_D(Fc, d) \arrow[r, "\varphi(\alpha)_c"] & \mathrm{Hom}_U(Ec, u) \\
\mathrm{Hom}_D(Fc', d) \arrow[u, "-\circ Fg"] \arrow[r, "\varphi(\alpha)_{c'}"'] & \mathrm{Hom}_U(Ec', u) \arrow[u, "-\circ Eg"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
f' \circ Fg = f \arrow[r, mapsto, "\varphi(\alpha)_c"] & \alpha_{\langle c,f\rangle} \\
 & \alpha_{\langle c',f'\rangle} \circ Eg \\
f' \arrow[uu, mapsto, "-\circ Fg"] \arrow[r, mapsto, "\varphi(\alpha)_{c'}"'] & \alpha_{\langle c',f'\rangle} \arrow[u, mapsto, "-\circ Eg"']
\end{tikzcd}$$

は可換である．

故に $\varphi\colon \mathrm{Hom}_{U^{F\downarrow d}}(K, \Delta u) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\widehat{C}}(\mathrm{Hom}_D(F-, d), \mathrm{Hom}_U(E-, u))$ は写像である．これは明らかに $u \in U$ について自然である．

次に $\theta\colon \mathrm{Hom}_D(F-,d) \Longrightarrow \mathrm{Hom}_U(E-,u)$ に対して射

$$\psi(\theta)_{\langle c,f\rangle}\colon K(c,f) = Ec \longrightarrow u$$

を $\psi(\theta)_{\langle c,f\rangle} := \theta_c(f)$ で定める．これは自然変換 $\alpha\colon K \Longrightarrow \Delta u$ を定める．

$\because$) $g\colon \langle c,f\rangle \longrightarrow \langle c',f'\rangle$ を $F{\downarrow}d$ の射とする．即ち $g\colon c \longrightarrow c'$ は C の射で $f'\circ Fg = f$ となる．次の図式が可換であることを示せばよい．

$$\begin{tikzcd}
Ec \arrow[r, "\alpha_{\langle c,f\rangle}=\theta_c(f)"] \arrow[d, "Eg"'] & u \arrow[d, "\mathrm{id}"] \\
Ec' \arrow[r, "\alpha_{\langle c',f'\rangle}=\theta_{c'}(f')"'] & u
\end{tikzcd}$$

θ が自然変換だから次が可換である．

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_D(Fc,d) \arrow[r, "\theta_c"] & \mathrm{Hom}_U(Ec,d) \\
\mathrm{Hom}_D(Fc',d) \arrow[r, "\theta_{c'}"'] \arrow[u, "-\circ Fg"] & \mathrm{Hom}_U(Ec',d) \arrow[u, "-\circ Eg"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
f'\circ Fg = f \arrow[r, mapsto, "\theta_c"] & \theta_c(f) \\
 & \theta_c(f')\circ Eg \\
f' \arrow[r, mapsto, "\theta_{c'}"'] \arrow[uu, mapsto, "-\circ Fg"] & \theta_{c'}(f') \arrow[u, mapsto, "-\circ Eg"']
\end{tikzcd}$$

故に $\theta_{c'}(f')\circ Eg = \theta_c(f)$ である．

このとき明らかに $\varphi\circ\psi = \mathrm{id}$，$\psi\circ\varphi = \mathrm{id}$ だから φ は全単射である． $\square$

定理 14. C,D,U を圏，$F\colon C \longrightarrow D$，$E\colon C \longrightarrow U$，$T\colon D \longrightarrow U$ を関手とする．以下の条件は同値である．

(1) T は F に沿った E の各点 Kan 拡張である．
(2) T は F に沿った E の Kan 拡張で，任意の $u \in U$ に対して $\mathrm{Hom}_U(-,u)\colon U \longrightarrow \mathbf{Set}^{\mathrm{op}}$ は Kan 拡張 T と交換する．
(3) $d \in D$，$u \in U$ に対して自然に

$$\mathrm{Hom}_U(Td,u) \cong \mathrm{Hom}_{\widehat{C}}(\mathrm{Hom}_D(F-,d), \mathrm{Hom}_U(E-,u))$$

となる．

証明. ($1 \Longrightarrow 2$) $\mathrm{Hom}_U(-,u)\colon U \longrightarrow \mathbf{Set}^{\mathrm{op}}$ が余極限と交換するから明らか．

(2 $\Longrightarrow$ 3) Kan 拡張 $T \cong F^\dagger E$ が存在し，$\mathrm{Hom}_U(-,u)$ がそれと交換するから Kan 拡張 $F^\dagger(\mathrm{Hom}_U(E-,u)) \cong \mathrm{Hom}_U(F^\dagger E-,u)$ が存在する．

$$\begin{tikzcd} D \arrow[dr, "F^\dagger E"'] \arrow[drr, "F^\dagger(\mathrm{Hom}(E-,u))"] & & \\ C \arrow[u, "F"] \arrow[r, "E"'] & U \arrow[r, "\mathrm{Hom}(-,u)"'] & \mathbf{Set}^{\mathrm{op}} \end{tikzcd}$$

よって $S\colon D \longrightarrow \mathbf{Set}^{\mathrm{op}}$ に対して自然に

$$\mathrm{Hom}_{(\mathbf{Set}^{\mathrm{op}})^D}(\mathrm{Hom}_U(F^\dagger E-,u),S) \cong \mathrm{Hom}_{(\mathbf{Set}^{\mathrm{op}})^C}(\mathrm{Hom}_U(E-,u),SF)$$

である (これは u についても自然である)．opposite を取れば

$$\mathrm{Hom}_{\widehat{D}}(S,\mathrm{Hom}_U(F^\dagger E-,u)) \cong \mathrm{Hom}_{\widehat{C}}(SF,\mathrm{Hom}_U(E-,u))$$

を得る．今 $S = \mathrm{Hom}_D(-,d)$ とすれば，米田の補題と合わせて

$$\mathrm{Hom}_U(F^\dagger E(d),u) \cong \mathrm{Hom}_{\widehat{C}}(\mathrm{Hom}_D(F-,d),\mathrm{Hom}_U(E-,u))$$

を得る．

(3 $\Longrightarrow$ 1) $d \in D$ とする．仮定 3 と補題 13 より，$u \in U$ に対して自然に

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_U(Td,u) &\cong \mathrm{Hom}_{\widehat{C}}(\mathrm{Hom}_D(F-,d),\mathrm{Hom}_U(E-,u)) \\ &\cong \mathrm{Hom}_{U^{F\downarrow d}}(F\!\downarrow\! d \to C \xrightarrow{E} U, \Delta u)\end{aligned}$$

だから $\mathrm{colim}(F\!\downarrow\! d \to C \xrightarrow{E} U) \cong Td$ が存在する．故に各点 Kan 拡張 $F^\dagger E$ が存在して $F^\dagger E(d) \cong Td$ である． $\square$

※ 同様に，各点右 Kan 拡張に対しても

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_U(u,F^\ddagger E(d)) &\cong \mathrm{Hom}_U(u,\lim(d\!\downarrow\! F \to C \xrightarrow{E} U)) \\ &\cong \mathrm{Hom}_U(\Delta u, d\!\downarrow\! F \to C \xrightarrow{E} U) \\ &\cong \mathrm{Hom}_{\widehat{C}}(\mathrm{Hom}_D(d,F-),\mathrm{Hom}_U(u,E-)).\end{aligned}$$

が成り立つ．

系 15. C を小圏，D を圏，$F\colon C \longrightarrow D$ を関手とするとき $F^\dagger y(d) \cong \mathrm{Hom}_D(F-, d)$.

$$\begin{tikzcd} D \arrow[dr, "F^\dagger y \cong \mathrm{Hom}_D(F-,d)"] & \\ C \arrow[u, "F"] \arrow[r, "y"'] \arrow[r, phantom, shift left=3, "\Uparrow"] & \widehat{C} \end{tikzcd}$$

証明. $\widehat{C}$ が余完備だから各点 Kan 拡張 $F^\dagger y$ が存在する．よって定理 14 を使えば，任意の $P \in \widehat{C}$ に対して自然に

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\widehat{C}}(F^\dagger y(d), P) &\cong \mathrm{Hom}_{\widehat{C}}(\mathrm{Hom}_D(F-, d), \mathrm{Hom}_{\widehat{C}}(y-, P)) \\ &\cong \mathrm{Hom}_{\widehat{C}}(\mathrm{Hom}_D(F-, d), P) \end{aligned}$$

となる．故に米田の補題により $F^\dagger y(d) \cong \mathrm{Hom}_D(F-, d)$ である． □

系 16. 小圏 C に対して $y^\dagger y \cong \mathrm{id}$ である．

$$\begin{tikzcd} \widehat{C} \arrow[dr, "y^\dagger y \cong \mathrm{id}"] & \\ C \arrow[u, "y"] \arrow[r, "y"'] \arrow[r, phantom, shift left=3, "\mathrm{id}\Uparrow"] & \widehat{C} \end{tikzcd}$$

証明. 任意の $P \in \widehat{C}$ に対して前系により $y^\dagger y(P) \cong \mathrm{Hom}(y-, P) \cong P$. □

系 17. 任意の前層 $P \in \widehat{C}$ は $y(c)$ の余極限で書ける．

証明. 系 16 により $y^\dagger y(P) \cong P$ であるが，一方各点 Kan 拡張

$$\begin{tikzcd} \mathbf{1} \arrow[r, "P"] & \widehat{C} \arrow[dr, "y^\dagger y \cong \mathrm{id}"] & \\ y{\downarrow}P \arrow[u] \arrow[r] \arrow[ur, phantom, "\Nwarrow"] & C \arrow[u, "y"] \arrow[r, "y"'] \arrow[r, phantom, shift left=3, "\Uparrow"] & \widehat{C} \end{tikzcd}$$

により $P \cong y^\dagger y(P) \cong \mathrm{colim}(y{\downarrow}P \to C \xrightarrow{y} \widehat{C}) = \operatorname*{colim}_{\langle c,f\rangle \in y\downarrow P} y(c)$ である． □

系 18. $P \in \widehat{C}$ が表現可能 $\Longleftrightarrow$ コンマ圏 $y{\downarrow}P$ が終対象を持つ．

証明. $(\Longrightarrow)$ $P = y(c)$ とする．$y{\downarrow}P = y{\downarrow}y(c) = \{\langle d, f\rangle \mid f\colon y(d) \longrightarrow y(c)\}$ で，y は忠実充満なので $y{\downarrow}P = \mathrm{id}_C{\downarrow}c$ である．よって終対象 $\mathrm{id}_c\colon c \longrightarrow c$ が存在する．

($\Longleftarrow$) コンマ圏 $y{\downarrow}P$ が終対象 $\langle c, f\rangle$ を持つとすれば，系 17 により $P = \mathrm{colim}(y{\downarrow}P \to C \to \widehat{C}) = y(c)$ である． $\square$

定理 19. 米田埋込 $y\colon C \longrightarrow \widehat{C}$ は極限と交換する．

証明. 関手 $T\colon I \longrightarrow C$ の極限 $\lim T$ が存在するとする．標準的な射を $p_i\colon \lim T \longrightarrow Ti$ とする．$y(\lim T)$ が関手 $y \circ T\colon I \longrightarrow \widehat{C}$ の極限であることを示せばよい．

$$
\begin{tikzcd}
Ti & \\
Tj \arrow[u] & \lim T \arrow[l, "p_j"] \arrow[ul, "p_i"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
y(Ti) & \\
y(Tj) \arrow[u] & y(\lim T) \arrow[l, "y(p_j)"] \arrow[ul, "y(p_i)"']
\end{tikzcd}
$$

その為に，$P \in \widehat{C}$ と自然変換 $\mu\colon \Delta P \Longrightarrow y{\circ}T$ を任意に取る．(射 $P \longrightarrow y(\lim T)$ が一意に伸びることを示せばよい．) 系 17 によりある $S\colon K \longrightarrow C$ が存在して $P = \mathrm{colim}(y{\circ}S)$ と書ける．このときの標準的な射を $\alpha_k\colon y(Sk) \longrightarrow P$ とする．

$$
\begin{tikzcd}
y(Ti) & & & \\
y(Tj) \arrow[u] & y(\lim T) \arrow[l, "y(p_j)"] \arrow[ul, "y(p_i)"'] & & \\
& & P \arrow[uull, bend right, "\mu_i"'] \arrow[ull, bend left, "\mu_j"] & y(Sk) \arrow[l, "\alpha_k"'] \\
& & & y(Sl) \arrow[u] \arrow[ul, "\alpha_l"]
\end{tikzcd}
$$

このとき，$k \in K$ に対して次の左側の可換図式が得られる．

$$
\begin{tikzcd}
y(Ti) & \\
y(Tj) \arrow[u] & y(Sk) \arrow[l, "\mu_j \circ \alpha_k"] \arrow[ul, "\mu_i \circ \alpha_k"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
Ti & \\
Tj \arrow[u] & Sk \arrow[l, "f_{jk}"] \arrow[ul, "f_{ik}"']
\end{tikzcd}
$$

y は忠実充満だから，ある $f_{ik}\colon Sk \longrightarrow Ti$ が存在して $y(f_{ik}) = \mu_i \circ \alpha_k$ となる．よって

$\lim T$ の普遍性から $g_k\colon Sk \longrightarrow \lim T$ が存在して次が可換となる．

$$
\begin{tikzcd}
Ti & & \\
Tj \arrow[u] & \lim T \arrow[ul, "p_i"'] \arrow[l, "p_j"] & Sk \arrow[l, dashed, "g_k"'] \arrow[ull, bend right, "f_{ik}"'] \arrow[ll, bend left, "f_{jk}"]
\end{tikzcd}
$$

故に $y(g_k)\colon y(Sk) \longrightarrow y(\lim T)$ が得られる．

$$
\begin{tikzcd}
y(Ti) & & & \\
y(Tj) \arrow[u] & y(\lim T) \arrow[ul, "y(p_i)"'] \arrow[l, "y(p_j)"] & & \\
& & P \arrow[uull, bend right, "\mu_i"'] \arrow[ull, bend left, "\mu_j"] & y(Sk) \arrow[l, "\alpha_k"'] \arrow[ull, dashed, bend right, "y(g_k)"'] \\
& & & y(Sl) \arrow[u] \arrow[ul, "\alpha_l"] \arrow[uull, dashed, bend left, "y(g_l)"]
\end{tikzcd}
$$

よって $P = \operatorname{colim}(y \circ S)$ の普遍性により $h\colon P \longrightarrow y(\lim T)$ が存在する．このとき $y(p_i) \circ h = \mu_i$ である．

$\because$) i, k に対して次の図式が得られる．

$$
\begin{tikzcd}
y(Ti) & P \arrow[l, "\mu_i"'] \arrow[dl, "h"'] \\
y(\lim T) \arrow[u, "y(p_i)"] & y(Sk) \arrow[l, "y(g_k)"] \arrow[u, "\alpha_k"']
\end{tikzcd}
$$

この図式の外側の四角は g_k の取り方により可換である．また右下の三角形は h の取り方により可換である．よって $\mu_i \circ \alpha_k = y(p_i) \circ h \circ \alpha_k$ が成り立つ．故に次の図式を

考えれば

$$
\begin{tikzcd}
y(Ti) & & & \\
& y(\lim T) \arrow[ul, "y(p_i)"'] & & \\
& & P \arrow[ul, "h"] \arrow[uull, bend right, "\mu_i"'] & y(Sk) \arrow[l, "\alpha_k"'] \arrow[uulll, bend right, "y(p_i)\circ y(g_k)"'] \\
& & & y(Sl) \arrow[u] \arrow[ul, "\alpha_l"] \arrow[uuulll, bend left, "y(p_i)\circ y(g_l)"]
\end{tikzcd}
$$

$P = \mathrm{colim}(y \circ S)$ の普遍性により $\mu_i = y(p_i) \circ h$ が分かる．

h の一意性も普遍性により分かるので，$y(\lim T) \cong \lim(y \circ T)$ である． □

定理 20. 関手 $F\colon C \longrightarrow D$ に対して $F^\dagger \circ y \cong y \circ F$ である．

$$
\begin{tikzcd}
\widehat{C} \arrow[r, "F^\dagger"] & \widehat{D} \\
C \arrow[u, "y"] \arrow[r, "F"'] & D \arrow[u, "y"']
\end{tikzcd}
$$

証明. $c \in C$ とする．$P \in \widehat{D}$ に関して自然に

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Hom}(y(F(c)), P) \cong P(F(c)) \cong \mathrm{Hom}(y(c), P \circ F) &= \mathrm{Hom}(y(c), F^{-1}P) \\
&\cong \mathrm{Hom}(F^\dagger(y(c)), P)
\end{aligned}
$$

であるから米田の補題により $y(F(c)) \cong F^\dagger(y(c))$ である．同型の与え方から分かるようにこれは c に関して自然なので $F^\dagger \circ y \cong y \circ F$ である． □

定理 21. $\langle F^\dagger E, \eta \rangle$ が各点 Kan 拡張で, F が忠実充満とする．このとき $\eta\colon E \Longrightarrow F^\dagger E \circ F$ は同型である．

証明. 各点 Kan 拡張により $F^\dagger E \circ F(c) = F^\dagger E(F(c)) = \mathrm{colim}(F{\downarrow}(Fc) \to C \xrightarrow{E} U)$ である．コンマ圏 $F{\downarrow}(Fc)$ の対象は $g\colon Fc' \longrightarrow Fc$ であるが，今 F が忠実充満関手だから g は $c' \longrightarrow c$ と対応する．よって $F{\downarrow}(Fc) = \mathrm{id}_C{\downarrow}c$ が分かる．コンマ圏 $\mathrm{id}_C{\downarrow}c$ は終対象 $\mathrm{id}_c\colon c \longrightarrow c$ を持つから，$\mathrm{colim}(F{\downarrow}(Fc) \to C \xrightarrow{E} U) = Ec$ となる．よって同型 $E \cong F^\dagger E \circ F$ が成り立つ． □

逆に

定理 22. 米田埋込 $y\colon C \longrightarrow \widehat{C}$ に対して $\eta\colon y \Longrightarrow F^\dagger y \circ F$ が同型ならば，F は忠実充満である．

$$\begin{tikzcd} D \arrow[dr, "F^\dagger y"] & \\ C \arrow[u, "F"] \arrow[r, "y"'] \arrow[ur, phantom, "\eta\Uparrow"] & \widehat{C} \end{tikzcd}$$

証明. $F^\dagger y(d) \cong \mathrm{Hom}_D(F-, d)$ だから，$y(c) \cong F^\dagger y \circ F(c) \cong \mathrm{Hom}_D(F-, Fc)$ である．故に $\mathrm{Hom}_C(c, c) \cong \mathrm{Hom}_D(Fc, Fc)$. □

定理 23. $F\colon C \longrightarrow D$ を関手とすれば $F^\dagger, F^\ddagger\colon \widehat{C} \longrightarrow \widehat{D}$ が得られる．このとき次は同値である．

(1) F が忠実充満
(2) $F^\dagger$ が忠実充満
(3) $F^\ddagger$ が忠実充満

証明. ($1 \Longrightarrow 2$) 随伴 $F^\dagger \dashv F^{-1}$ の unit を η とすれば「$F^\dagger$ が忠実充満 $\Longleftrightarrow$ η が同型」であった．仮定 1 により F が忠実充満だから η が同型となり (定理 21)，$F^\dagger$ も忠実充満である．

($2 \Longrightarrow 1$) 定理 20 により $F^\dagger \circ y \cong y \circ F$ である．仮定 2 より $F^\dagger$ が忠実充満で，y も忠実充満だから $F^\dagger \circ y \cong y \circ F$ も忠実充満である．よって F も忠実充満と分かる．

($2 \Longleftrightarrow 3$) 一般に $F \dashv G \dashv H$ のとき「F が忠実充満 $\Longleftrightarrow$ H が忠実充満」であった．よって $F^\dagger \dashv F^{-1} \dashv F^\ddagger$ より分かる． □

定義. (1) $S \subset \mathrm{Ob}(C)$ が generating class $\Longleftrightarrow$ C の任意の射 $f \neq g\colon a \longrightarrow b$ に対して，ある $s \in S$ と $k\colon s \longrightarrow a$ が存在して $f \circ k \neq g \circ k$ となる．

(2) 関手 $F\colon C \longrightarrow D$ が稠密 (dense)
$\Longleftrightarrow$ $\langle \mathrm{id}_D, \mathrm{id}_F \rangle$ が F に沿った F の各点 Kan 拡張となる．

$$\begin{tikzcd} D \arrow[dr, "\mathrm{id}_D"] & \\ C \arrow[u, "F"] \arrow[r, "F"'] \arrow[ur, phantom, "\mathrm{id}_F\Uparrow"] & D \end{tikzcd}$$

定理 24. $F\colon C \longrightarrow D$ を関手とするとき
$\{Fc \mid c \in C\} \subset D$ が generating class $\Longleftrightarrow$ $F^\dagger y\colon D \longrightarrow \widehat{C}$ が忠実.

証明. $F^\dagger y\colon D \longrightarrow \widehat{C}$ が忠実でない
$\iff$ ある D の射 $f \neq g\colon a \longrightarrow b$ に対して $F^\dagger y(f) = F^\dagger y(g)$ となる
$\iff$ ある D の射 $f \neq g\colon a \longrightarrow b$ に対して $\mathrm{Hom}_D(F-, f) = \mathrm{Hom}_D(F-, g)$ となる
$\iff$ ある D の射 $f \neq g\colon a \longrightarrow b$ に対して，任意の $c \in C$ について $\mathrm{Hom}_D(Fc, f) = \mathrm{Hom}_D(Fc, g)$ となる
$\iff$ ある D の射 $f \neq g\colon a \longrightarrow b$ に対して，任意の $c \in C$，$k\colon Fc \longrightarrow a$ に対して $f \circ k = g \circ k$ となる
$\iff \{Fc \mid c \in C\} \subset D$ が generating class でない □

定理 25. 関手 $F\colon C \longrightarrow D$ に対して次の条件は同値.

(1) F が稠密
(2) 任意の $d \in D$ に対して $d \cong \mathrm{colim}(F{\downarrow}d \to C \xrightarrow{F} D)$ となる
(3) $F^\dagger y\colon D \longrightarrow \widehat{C}$ が忠実充満

証明. (1 $\iff$ 2) 明らか.
(2 $\implies$ 3) $d, d' \in D$ に対して

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_D(F^\dagger y(d), F^\dagger y(d')) &\cong \mathrm{Hom}_{\widehat{C}}(\mathrm{Hom}_D(F-, d), \mathrm{Hom}_D(F-, d'))\\ &\cong \mathrm{Hom}_{\widehat{C}^{F\downarrow d}}(F{\downarrow}d \to C \xrightarrow{F} \widehat{C}, \Delta d')\\ &\cong \mathrm{Hom}_D(\mathrm{colim}(F{\downarrow}d \to C \xrightarrow{F} \widehat{C}), d')\\ &\cong \mathrm{Hom}_D(d, d')\end{aligned}$$

(3 $\implies$ 2) $F^\dagger y$ が忠実充満だから $d, d' \in D$ に対して

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_D(d, d') &\cong \mathrm{Hom}_{\widehat{C}}(F^\dagger y(d), F^\dagger y(d'))\\ &\cong \mathrm{Hom}_{\widehat{C}}(\mathrm{Hom}_D(F-, d), \mathrm{Hom}_D(F-, d'))\\ &\cong \mathrm{Hom}_{\widehat{C}^{F\downarrow d}}(F{\downarrow}d \to C \xrightarrow{F} \widehat{C}, \Delta d')\end{aligned}$$

となる．故に $\mathrm{colim}(F{\downarrow}d \to C \xrightarrow{F} \widehat{C}) \cong d$ である． □

定義. (1) 関手 $F\colon C \longrightarrow D$ が conservative $\iff$ C の射 f について「Ff が同型ならば f が同型」が成り立つ.
(2) 関手 $F\colon C \longrightarrow D$ が strongly generating $\iff$ $F^\dagger y$ が conservative

命題 26. 忠実充満 $\implies$ conservative $\implies$ 忠実.

証明. 容易にわかる. □

系 27. 稠密 $\Longrightarrow$ strongly generating $\Longrightarrow$ $\{Fc \mid c \in C\}$ が generating class $\square$

4　普遍随伴

定理 28. C を小圏，U を余完備な圏とすると，関手 $F\colon C \longrightarrow U$ から二つの関手 $y^\dagger F$, $F^\dagger y$ が得られる．このとき随伴 $y^\dagger F \dashv F^\dagger y$ が成り立つ．

$$
\begin{tikzcd}
\widehat{C} \arrow[dr, shift left=1.5, "y^\dagger F"] \arrow[dr, phantom, "\perp"] & \\
C \arrow[u, "y"] \arrow[r, "F"'] & U \arrow[ul, shift left=1.5, "F^\dagger y"]
\end{tikzcd}
$$

※ この随伴を，twitter 等で一部の人が普遍随伴と呼んでいる．

証明. $P \in \widehat{C}$, $u \in U$ に対して

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_U(y^\dagger F(P), u) &\cong \mathrm{Hom}_{\widehat{C}}(\mathrm{Hom}_C(y-, P), \mathrm{Hom}_U(F-, u)) \\
&\cong \mathrm{Hom}_{\widehat{C}}(P, \mathrm{Hom}_U(F-, u)) \\
&\cong \mathrm{Hom}_{\widehat{C}}(P, F^\dagger y(u)).
\end{aligned}
$$

$\square$

逆に次が成り立つ．

定理 29. 任意の随伴 $L \dashv R\colon \widehat{C} \longrightarrow U$ はこのようにして得られる．

証明. $F := L \circ y\colon C \longrightarrow U$ とする．随伴 $y^\dagger F \dashv F^\dagger y$ が得られる．一方，左随伴関手 L は Kan 拡張と交換する (定理 11) から $y^\dagger F = y^\dagger(L \circ y) \cong L \circ (y^\dagger y) \cong L \circ \mathrm{id} = L$ である．よって随伴の一意性から $R \cong F^\dagger y$ である． $\square$

例 30. $C = \mathbf{1}$ とすれば $\widehat{\mathbf{1}} = \mathbf{Set}$ だから，随伴 $L \dashv R\colon \mathbf{Set} \longrightarrow \mathbf{Set}$ に対して $F := L \circ y$ とすれば

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{Set} \arrow[dr, shift left=1.5, "L"] \arrow[dr, phantom, "\perp"] & \\
\mathbf{1} \arrow[u, "y"] \arrow[r, "F"'] & \mathbf{Set} \arrow[ul, shift left=1.5, "R"]
\end{tikzcd}
$$

$L \cong y^\dagger F$, $R \cong F^\dagger y$ である．$X := F(*) \in \mathbf{Set}$ と置けば，$Y \in \mathbf{Set}$ に対して

$$R(Y) \cong F^\dagger y(Y) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(F-, Y) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(X, Y)$$

だから $R \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(X, -)$ である．一方 $L(Y) \cong y^\dagger F(Y) \cong \mathrm{colim}(y{\downarrow}Y \to \mathbf{1} \xrightarrow{F} \mathbf{Set})$ で $y{\downarrow}Y \cong Y$ となるから

$$L(Y) \cong \coprod_{a \in Y} X \cong Y \times X$$

により $L \cong - \times X$ である．故に，任意の随伴 $\mathbf{Set} \longrightarrow \mathbf{Set}$ は $- \times X \dashv \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(X, -)$ の形をしている． □

例 31. 小圏 I に対して随伴 $\Delta \dashv \lim\colon \mathbf{Set} \longrightarrow \mathbf{Set}^I$ が成り立つ．よって $F := \Delta \circ y$ と置けば，$T \in \mathbf{Set}^I$ に対して $\lim T \cong F^\dagger y(T) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}^I}(F(*), T)$ である．

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Set} \arrow[dr, shift left, "\Delta"] \arrow[dr, phantom, "\perp"] & \\
\mathbf{1} \arrow[u, "y"] \arrow[r, "F"'] & \mathbf{Set}^I \arrow[ul, shift left, "\lim"]
\end{tikzcd}$$

$F(*) = \Delta(y(*)) \cong \Delta 1$ だから $\lim T \cong \mathrm{Hom}(\Delta 1, T)$ が分かる． □

例 32. 圏 Δ を以下のように定める．

- $\mathrm{Ob}(\Delta) := \{[n] \mid n \in \mathbb{N}\}$，ここで $[n] := \{0, 1, \cdots, n\}$
- 射 $[m] \longrightarrow [n]$ は，$[m]$ の自然な順序を保つ写像とする．

このとき圏 C に対して，関手 $\Delta^{\mathrm{op}} \longrightarrow C$ を C の単体的対象 (simplicial object) と呼ぶ．特に $C = \mathbf{Set}$ の場合，つまり関手 $\Delta^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Set}$ を単体的集合という．$\widehat{\Delta}$ が単体的集合のなす圏である．

$n \in \mathbb{N}$ に対して $\Delta^n \in \mathbf{Top}$ を $\Delta^n := \{(x_0, \cdots, x_n) \in [0,1]^{n+1} \mid x_0 + \cdots + x_n = 1\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ で定義すれば，関手 $F\colon \Delta \longrightarrow \mathbf{Top}$ が $F([n]) := \Delta^n$ により自然に定まる．このとき随伴 $y^\dagger F \dashv F^\dagger y$ が得られる．

$$\begin{tikzcd}
\widehat{\Delta} \arrow[dr, shift left, "y^\dagger F"] \arrow[dr, phantom, "\perp"] & \\
\Delta \arrow[u, "y"] \arrow[r, "F"'] & \mathbf{Top} \arrow[ul, shift left, "F^\dagger y"]
\end{tikzcd}$$

$|-| := y^\dagger F\colon \widehat{\Delta} \longrightarrow \mathbf{Top}$ を幾何学的実現，$\mathrm{Sing} := F^\dagger y\colon \mathbf{Top} \longrightarrow \widehat{\Delta}$ を singular functor という． $\square$

例 33. 順序集合 $[n] = \{0, 1, \cdots, n\}$ を圏とみなして包含関手 $F\colon \Delta \longrightarrow \mathbf{Cat}$ を考えれば，随伴 $y^\dagger F \dashv F^\dagger y$ が得られる．

$$\begin{tikzcd}
\widehat{\Delta} \arrow[dr, shift left, "y^\dagger F"] \arrow[dr, phantom, "\perp"] & \\
\Delta \arrow[u, "y"] \arrow[r, "F"'] & \mathbf{Cat} \arrow[ul, shift left, "F^\dagger y"]
\end{tikzcd}$$

$N := F^\dagger y\colon \mathbf{Cat} \longrightarrow \widehat{\Delta}$ を nerve functor という． $\square$

定義． 対象 $a \in C$ が small projective $\iff \mathrm{Hom}_C(a, -)$ が余連続．

定理 34. 圏 C が，ある小圏 A を使って $C \cong \widehat{A}$ と書ける
$\iff$ C が余完備で，小さい充満部分圏 $A \subset C$ が存在して，包含関手 $F\colon A \longrightarrow C$ が strongly generating で，任意の $a \in A$ が small projective.

証明. ($\Longrightarrow$) $C \cong \widehat{A}$ のとき，C は余完備で，$y\colon A \longrightarrow C$ は充満部分圏である．また $y^\dagger y \cong \mathrm{id}$ は明らかに余連続かつ conservative である．

($\Longleftarrow$) 仮定の充満部分圏 $F\colon A \longrightarrow C$ を取る．C が余完備だから，定理 28 により随伴 $y^\dagger F \dashv F^\dagger y\colon \widehat{A} \longrightarrow C$ を得る．

$$\begin{tikzcd}
\widehat{A} \arrow[dr, shift left, "y^\dagger F"] \arrow[dr, phantom, "\perp"] & \\
A \arrow[u, "y"] \arrow[r, "F"'] & C \arrow[ul, shift left, "F^\dagger y"]
\end{tikzcd}$$

$F^\dagger y$ が本質的全射かつ忠実充満であることを示せばよい．その為にまず $F^\dagger y$ が余連続であることを示す．

$\because$) $c \in C$ に対して $F^\dagger y(c) \cong \mathrm{Hom}_C(F-, c)$ である．よって

$$\mathrm{Hom}_C(F-, \operatorname*{colim}_j c_j) \cong \operatorname*{colim}_j \mathrm{Hom}_C(F-, c_j)$$

を示せばよい．$\widehat{A}$ の余極限は各点ごとに計算すればよいから，$a \in A$ に対して

$\mathrm{Hom}_C(a, \mathrm{colim}_j\, c_j) \cong \mathrm{colim}_j \mathrm{Hom}_C(a, c_j)$ を示せばよい．ところがいま $a \in A$ は small projective なのでこれは成り立つ．

本質的全射であることを示すため，$P \in \widehat{A}$ を取る．系 17 により $P \cong \mathrm{colim}_j\, y(a_j)$ と書ける．$c := \mathrm{colim}_j\, i(a_j) \in C$ と置けば，$F^\dagger y \cong \mathrm{Hom}_C(F-, \square)$ が余連続だから

$$F^\dagger y(c) \cong \operatorname*{colim}_j \mathrm{Hom}_C(F-, F(a_j)) \cong \operatorname*{colim}_j \mathrm{Hom}_A(-, a_j) = \operatorname*{colim}_j y(a_j) \cong P$$

となり，$F^\dagger y$ は本質的全射である．

忠実充満であることを示す．その為には F が稠密，即ち $c \in C$ に対して $\mathrm{colim}(F{\downarrow}c \to A \xrightarrow{F} C) \cong c$ を示せばよい．今 $F^\dagger y$ が conservative だから $F^\dagger y(\mathrm{colim}(F{\downarrow}c \to A \xrightarrow{F} C)) \cong F^\dagger y(c)$ を示せばよい．それは $F^\dagger y$ が余連続だから

$$\begin{aligned} F^\dagger y(\mathrm{colim}(F{\downarrow}c \to A \xrightarrow{F} C)) &\cong \mathrm{colim}(F{\downarrow}c \to A \xrightarrow{F} C \xrightarrow{F^\dagger y} \widehat{A}) \\ &\cong \mathrm{colim}(F{\downarrow}c \to A \xrightarrow{y} \widehat{A}) \\ &\cong F^\dagger y(c) \end{aligned}$$

である． □

参考文献

[1] Saunders Mac Lane, Categories for the Working Mathematician, Springer, 2nd ed. 1978 版 (1998)

[2] ft_math さんによる圏論祭, 2012 年 12 月 8 日, `http://alg-d.com/math/ft_math/`

[3] ft_math さんによる圏論祭, 2013 年 12 月 7 日・8 日, `http://alg-d.com/math/ft_math/`