

Kan 拡張

alg-d

http://alg-d.com/math/kan_extension/

2018年9月22日

目次

1	定義	1
2	各点 Kan 拡張	3
3	米田埋込と Kan 拡張	15
4	普遍随伴	25

1 定義

定義. C, D, U を圏, $F: C \rightarrow D$, $E: C \rightarrow U$ を関手とする. F に沿った E の左 Kan 拡張とは組 $\langle F^{\dagger}E, \eta \rangle$ であって, 以下の条件を満たすものである.

(1) $F^{\dagger}E$ は関手 $D \rightarrow U$ で, η は自然変換 $E \Rightarrow F^{\dagger}E \circ F$ である.

$$\begin{array}{ccc} D & & \\ \uparrow F & \searrow F^{\dagger}E & \\ C & \xrightarrow{E} & U \end{array}$$

$\eta \Uparrow$

(2) 組 $\langle S, \theta \rangle$ が同じ条件を満たす (即ち $S: D \rightarrow U$ は関手で $\theta: E \Rightarrow S \circ F$ は自然変換) ならば, 自然変換 $\tau: F^{\dagger}E \Rightarrow S$ が一意に存在して $\theta = \tau_F \circ \eta$ となる. 即ち次

の等式が成り立つ.

$$\begin{array}{ccc}
 D & \xrightarrow{S} & U \\
 \uparrow F & \nearrow F^\dagger E & \\
 C & \xrightarrow{E} & U
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \eta \Uparrow \\
 \tau \dashrightarrow
 \end{array}
 =
 \begin{array}{ccc}
 D & \xrightarrow{S} & U \\
 \uparrow F & \Uparrow \theta & \\
 C & \xrightarrow{E} & U
 \end{array}$$

自然変換 η を左 Kan 拡張 $\langle F^\dagger E, \eta \rangle$ の unit と呼ぶ. また, F に沿った E の右 Kan 拡張 $\langle F^\dagger E, \varepsilon \rangle$ が自然変換の向きを逆にして得られる.

$$\begin{array}{ccc}
 D & \xrightarrow{S} & U \\
 \uparrow F & \nearrow F^\dagger E & \\
 C & \xrightarrow{E} & U
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \varepsilon \Downarrow \\
 \tau \dashrightarrow
 \end{array}
 =
 \begin{array}{ccc}
 D & \xrightarrow{S} & U \\
 \uparrow F & \Downarrow \theta & \\
 C & \xrightarrow{E} & U
 \end{array}$$

左 Kan 拡張 $F^\dagger E$ を $\text{Lan}_F E$, 右 Kan 拡張 $F^\dagger E$ を $\text{Ran}_F E$ と書くこともある^{*1}.

※ 関手の向きを逆にしたものは Kan リフトという.

関手 $F: C \rightarrow D$ に対して, 関手 $F^{-1}: U^D \rightarrow U^C$ が $F^{-1}(S) := S \circ F$ により定まるのであった. (第1章「自然変換・関手圏」の PDF を参照.) この記号を使うと, 左 Kan 拡張 $\langle F^\dagger E, \eta \rangle$ とは $E \in U^C$ から F^{-1} への普遍射 $\eta: E \Rightarrow F^{-1}(F^\dagger E)$ のことである.

$$\begin{array}{ccc}
 E & \xrightarrow{\eta} & F^\dagger E \circ F \\
 \searrow \theta & & \downarrow \tau_F \\
 & & S \circ F
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 F^\dagger E \\
 \downarrow \tau \\
 S
 \end{array}$$

故に普遍射の性質 (第1章「極限」の PDF を参照) から次の命題が分かる.

命題 1. $F: C \rightarrow D, E: C \rightarrow U$ に対して関手 $\text{Hom}_{U^C}(E, F^{-1}(-)): U^D \rightarrow \mathbf{Set}$ が得られる. このとき

$$\text{Hom}_{U^C}(E, F^{-1}(-)) \text{ が表現可能関手 } \iff F^\dagger E \text{ が存在する}$$

が成り立つ. またこのとき, $\text{Hom}_{U^C}(E, F^{-1}(-)) \cong \text{Hom}_{U^D}(F^\dagger E, -)$ が成り立つ. これから得られる同型 $\text{Hom}_{U^C}(E, F^{-1}(F^\dagger E)) \cong \text{Hom}_{U^D}(F^\dagger E, F^\dagger E)$ で右辺の $\text{id}_{F^\dagger E}$ に対応する左辺の $\eta: E \Rightarrow F^{-1}(F^\dagger E)$ が, 左 Kan 拡張 $F^\dagger E$ の unit である. \square

^{*1} というか, 大抵の本・論文では Lan や Ran が使われている.

命題 2. 各 $E \in U^C$ に対して, F に沿った左 Kan 拡張 $F^\dagger E \in U^D$ が存在するとする. このとき F^\dagger は関手 $F^{-1}: U^D \rightarrow U^C$ の左随伴関手を定める. 随伴 $F^\dagger \dashv F^{-1}$ の unit を $\eta: \text{id}_{U^C} \Rightarrow F^{-1} \circ F^\dagger$ とするとき, $E \in U^C$ に対して η_E が $F^\dagger E$ の unit となる. 同様に右 Kan 拡張 $F^\ddagger: U^C \rightarrow U^D$ は F^{-1} の右随伴関手である. 即ち $F^\dagger \dashv F^{-1} \dashv F^\ddagger$ となる. \square

例 3. 関手 $E: J \rightarrow U$ に対して余極限 $\text{colim } E$ とは E から対角関手 $\Delta: U \rightarrow U^J$ への普遍射 $E \Rightarrow \Delta(\text{colim } E)$ であった. 一方 $\mathbf{1} = \{*\}$ を一点圏として $F: J \rightarrow \mathbf{1}$ を唯一の関手とすれば, Δ とは $F^{-1}: U^{\mathbf{1}} = U \rightarrow U^J$ のことである. F に沿った E の左 Kan 拡張は普遍射 $E \Rightarrow \Delta(F^\dagger E)$ であるから, 普遍射の一意性から $F^\dagger E \cong \text{colim } E$ が分かる.

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbf{1} & & \\
 \uparrow F & \searrow F^\dagger E \cong \text{colim } E & \\
 J & \xrightarrow{E} & U
 \end{array}$$

即ち, 余極限は左 Kan 拡張である. 同様にして, 極限は右 Kan 拡張である. \square

2 各点 Kan 拡張

余極限 (極限) が左 Kan 拡張 (右 Kan 拡張) であることを使うと, 「各点 Kan 拡張」という方法で Kan 拡張を計算することができる. C, D, U を圏, $F: C \rightarrow D$, $E: C \rightarrow U$ を関手として, 左 Kan 拡張 $F^\dagger E: D \rightarrow U$ が存在するとする.

$$\begin{array}{ccc}
 D & & \\
 \uparrow F & \searrow F^\dagger E & \\
 C & \xrightarrow{E} & U
 \end{array}$$

$d \in D$ に対して $F^\dagger E(d)$ を計算したい. $d: \mathbf{1} \rightarrow D$ を $d(*) = d$ なる関手とみなしてコマ圏 $F \downarrow d$ を考えれば次の図式を得る.

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathbf{1} & \xrightarrow{d} & D & & \\
 P_1 \uparrow & \swarrow & \uparrow F & \searrow F^\dagger E & \\
 F \downarrow d & \xrightarrow{P_0} & C & \xrightarrow{E} & U
 \end{array}$$

自然変換を合成すれば次の図式を得る.

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbf{1} & & \\
 P_1 \uparrow & \searrow^{F^\dagger E(d)} & \\
 F \downarrow d & \xrightarrow{E \circ P_0} & U
 \end{array}$$

P_1 に沿った左 Kan 拡張は余極限になるから, もしこれが左 Kan 拡張であれば (実は一般にはそうなるとは限らない), $F^\dagger E(d) \cong \text{colim}(E \circ P_0)$ となり, 左 Kan 拡張が余極限に帰着できる.

以上を踏まえて C, D, U を圏, $F: C \rightarrow D$, $E: C \rightarrow U$ を関手とする.

$$\begin{array}{ccc}
 D & & \\
 \uparrow F & & \\
 C & \xrightarrow{E} & U
 \end{array}$$

$d \in D$ に対してコマ圏 $F \downarrow d$ を考えれば次の図式を得る.

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathbf{1} & \xrightarrow{d} & D & & \\
 P_1 \uparrow & \nearrow & \uparrow F & & \\
 F \downarrow d & \xrightarrow{P_0} & C & \xrightarrow{E} & U
 \end{array}$$

今, 左 Kan 拡張 $P_1^\dagger(F \downarrow d \xrightarrow{P_0} C \xrightarrow{E} U)$, 即ち余極限 $\text{colim}(F \downarrow d \xrightarrow{P_0} C \xrightarrow{E} U)$ が存在すると仮定しよう. これを使って $T(d) := \text{colim}(F \downarrow d \xrightarrow{P_0} C \xrightarrow{E} U)$ と定義する.

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbf{1} & & \\
 P_1 \uparrow & \searrow^{T(d)} & \\
 F \downarrow d & \xrightarrow{P_0} C \xrightarrow{E} & U
 \end{array}$$

次に射 $h: d \rightarrow d'$ に対して $T(h)$ を定める. $h: d \rightarrow d'$ は自然変換

$$\mathbf{1} \begin{array}{c} \xrightarrow{d'} \\ \xrightarrow{h \uparrow} \\ \xrightarrow{d} \end{array} D$$

と同一視できることに注意する. コンマ圏 $F \downarrow d, F \downarrow d'$ を考える.

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbf{1} & \xrightarrow{d} & D \\
 P_1 \uparrow & \swarrow \theta & \uparrow F \\
 F \downarrow d & \xrightarrow{P_0} & C
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 \mathbf{1} & \xrightarrow{d'} & D \\
 P'_1 \uparrow & \swarrow \theta' & \uparrow F \\
 F \downarrow d' & \xrightarrow{P'_0} & C
 \end{array}$$

左の図式と h を組み合わせて, 次の図式が得られる.

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbf{1} & \xrightarrow{d'} & D \\
 P_1 \uparrow & \xrightarrow{h} & \uparrow F \\
 F \downarrow d & \xrightarrow{P_0} & C
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{ccc}
 \mathbf{1} & \xrightarrow{d'} & D \\
 P_1 \uparrow & \swarrow h_{P_1} \circ \theta & \uparrow F \\
 F \downarrow d & \xrightarrow{P_0} & C
 \end{array}$$

コンマ圏 $F \downarrow d'$ の普遍性 (「コンマ圏」の PDF を参照) により関手 $H: F \downarrow d \rightarrow F \downarrow d'$ が存在し次の等号が成り立つ.

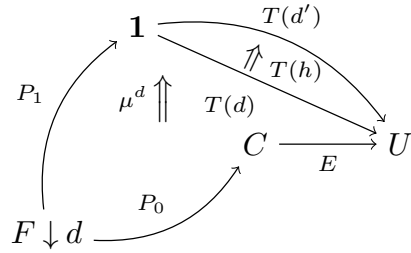
$$\begin{array}{ccc}
 & \mathbf{1} & \xrightarrow{d'} & D \\
 & P'_1 \uparrow & \swarrow \theta' & \uparrow F \\
 P_1 \curvearrowright & & & \\
 & F \downarrow d' & \xrightarrow{P'_0} & C \xrightarrow{E} U \\
 & \nearrow H & \swarrow & \\
 F \downarrow d & & & \\
 & P_0 \curvearrowleft & &
 \end{array}
 =
 \begin{array}{ccc}
 & \mathbf{1} & \xrightarrow{d'} & D \\
 & P_1 \uparrow & \swarrow h_{P_1} \circ \theta & \uparrow F \\
 & & & \\
 & F \downarrow d & \xrightarrow{P_0} & C \xrightarrow{E} U
 \end{array}$$

今, 余極限 $T(d) = \operatorname{colim}(F \downarrow d \xrightarrow{P_0} C \xrightarrow{E} U)$, $T(d') = \operatorname{colim}(F \downarrow d' \xrightarrow{P'_0} C \xrightarrow{E} U)$ が存在するのであった.

$$\begin{array}{ccc}
 & \mathbf{1} & \xrightarrow{T(d')} & U \\
 & P'_1 \uparrow & \swarrow \mu^{d'} & \uparrow \\
 P_1 \curvearrowright & & & \\
 & F \downarrow d' & \xrightarrow{P'_0} & C \xrightarrow{E} U \\
 & \nearrow H & \swarrow & \\
 F \downarrow d & & & \\
 & P_0 \curvearrowleft & &
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{ccc}
 & \mathbf{1} & \xrightarrow{T(d)} & U \\
 & P_1 \uparrow & \swarrow \mu^d & \uparrow \\
 & & & \\
 & F \downarrow d & \xrightarrow{P_0} & C \xrightarrow{E} U
 \end{array}$$

故に左 Kan 拡張 $\langle T(d), \mu^d \rangle$ の普遍性により射 $T(h): T(d) \rightarrow T(d')$ が存在することが分

かる。



このとき T は関手 $T: D \rightarrow U$ となり, T が F に沿った E の左 Kan 拡張となることが分かる. このことは後で証明することにして認めてしまえば, 次の定理が得られる.

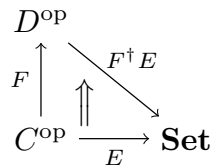
定理 4. C, D, U を圏, $F: C \rightarrow D$, $E: C \rightarrow U$ を関手とする. 各 $d \in D$ に対して余極限 $\text{colim}(F \downarrow d \xrightarrow{P_0} C \xrightarrow{E} U)$ が存在するならば, F に沿った E の左 Kan 拡張 $F^\dagger E$ が存在し, $F^\dagger E(d) \cong \text{colim}(F \downarrow d \xrightarrow{P_0} C \xrightarrow{E} U)$ となる.

C が小圏ならば $F \downarrow d$ も小圏となる. 故に次の系が得られる.

系 5. C, D, U を圏, $F: C \rightarrow D$ を関手とする. U が余完備で, C が小圏ならば, 任意の関手 $E: C \rightarrow U$ に対して左 Kan 拡張 $F^\dagger E$ が存在する. 故にこの場合 F^{-1} は左随伴を持ち $F^\dagger \dashv F^{-1}: U^C \rightarrow U^D$ となる. \square

Set は余完備であったから次の系を得る.

系 6. C, D を小圏, $F: C \rightarrow D$ を関手とする. 任意の関手 $E: C^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$ に対して左 Kan 拡張 $F^\dagger E: D^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$ が存在する.



故に随伴 $F^\dagger \dashv F^{-1}: \widehat{C} \rightarrow \widehat{D}$ が成り立つ*2. \square

右 Kan 拡張に関しても, 同様にして次の定理が得られる.

定理 7. C, D, U を圏として, $F: C \rightarrow D$, $E: C \rightarrow U$ を関手とする. 各 $d \in D$ に対して極限 $\text{lim}(d \downarrow F \rightarrow C \xrightarrow{E} U)$ が存在するならば, F に沿った E の右 Kan 拡張 $F^\ddagger E$ が

*2 正確には $(F^{\text{op}})^\dagger \dashv (F^{\text{op}})^{-1}$ であるが, 単に $F^\dagger \dashv F^{-1}$ と書いている.

存在し, $F^\dagger E(d) \cong \lim(d \downarrow F \rightarrow C \xrightarrow{E} U)$ となる.

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathbf{1} & \xrightarrow{d} & D & & \\
 \uparrow & \searrow F & \uparrow & \searrow F^\dagger E & \\
 d \downarrow F & \longrightarrow & C & \xrightarrow{E} & U
 \end{array}$$

故に U が完備で C が小圏ならば $F^\dagger E$ は存在し, 特に $F^{-1} \dashv F^\dagger: \widehat{C} \rightarrow \widehat{D}$ である. \square

例 8. X, Y を集合, $f: X \rightarrow Y$ を写像とし, 逆像を考える写像 $f^{-1}: \mathcal{P}(Y) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ を考える. これは $(\mathcal{P}(X), \mathcal{P}(Y))$ を包含関係による順序で圏とみなしたとき 関手である.

圏 $\mathbf{2} = \{0 \rightarrow 1\}$ を考えれば圏同型 $\mathcal{P}(X) = \mathbf{2}^X$ が成り立つが, このとき今考えている関手 f^{-1} は $\mathbf{2}^Y \ni A \mapsto A \circ f \in \mathbf{2}^X$ で与えられる.

$$\begin{array}{ccc}
 Y & & \\
 f \uparrow & \searrow A & \\
 X & \xrightarrow{f^{-1}(A)} & \mathbf{2}
 \end{array}$$

つまりこの f^{-1} は, 写像 f を (離散圏 X, Y の間の) 関手 $f: X \rightarrow Y$ とみなしたときに得られる関手 $f^{-1}: \mathbf{2}^Y \rightarrow \mathbf{2}^X$ と一致している.

$\mathbf{2}$ は余完備だから, 系 5 より関手 $f^{-1}: \mathcal{P}(Y) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ の左随伴関手が存在し, それは左 Kan 拡張 f^\dagger である. これを各点左 Kan 拡張で計算してみよう.

$A: X \rightarrow \mathbf{2}$ に対して $f^\dagger A$ を求める為, $d \in Y$ を取りコマ圏 $f \downarrow d$ を考える.

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathbf{1} & \xrightarrow{d} & Y & & \\
 \uparrow & \searrow & \uparrow f & & \\
 f \downarrow d & \longrightarrow & X & \xrightarrow{A} & \mathbf{2}
 \end{array}$$

コマ圏の定義から $f \downarrow d = \{x \in X \mid f(x) = d\} = f^{-1}(d)$ は離散圏である. 故に

$$f^\dagger A(d) = \operatorname{colim}(f \downarrow d \rightarrow X \xrightarrow{A} \mathbf{2}) = \coprod_{x \in f^{-1}(d)} A(x)$$

となるから

$$f^\dagger A(d) = \begin{cases} 1 & (\text{ある } x \in f^{-1}(d) \text{ が存在して } A(x) = 1) \\ 0 & (\text{そうでないとき}) \end{cases}$$

である。即ち $A \in \mathcal{P}(X)$ に対して $f^\dagger A = f(A)$ となる。従って $f^{-1}: \mathcal{P}(Y) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ の左随伴関手は $f: \mathcal{P}(X) \ni A \mapsto f(A) \in \mathcal{P}(Y)$ である。

更に $\mathbf{2}$ は完備でもあるから、 f^{-1} の右随伴関手 (= 右 Kan 拡張) も存在する。それを各点右 Kan 拡張により同様に計算してみると

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{1} & \xrightarrow{d} & Y \\ \uparrow & \searrow & \uparrow f \\ d \downarrow f & \longrightarrow & X \xrightarrow[A]{} \mathbf{2} \end{array}$$

$$f^\ddagger A(d) = \lim(d \downarrow f \rightarrow X \xrightarrow[A]{} \mathbf{2}) = \prod_{x \in f^{-1}(d)} A(x)$$

となるから

$$f^\ddagger A(d) = \begin{cases} 0 & (\text{ある } x \in f^{-1}(d) \text{ が存在して } A(x) = 0) \\ 1 & (\text{そうでないとき}) \end{cases}$$

であり、 $f^\ddagger A = Y \setminus f(X \setminus A) =: f_!(A)$ となることが分かる*³。

以上により、 $f^{-1}: \mathcal{P}(Y) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ は左随伴、右随伴両方を持つ。

$$\begin{array}{ccc} & \xrightarrow{f} & \\ & \perp & \\ \mathcal{P}(X) & \xleftarrow{f^{-1}} & \mathcal{P}(Y) \\ & \perp & \\ & \xrightarrow{f_!} & \end{array}$$

従って f^{-1} は余極限、極限両方と交換する。特に次の等式が成り立つ。

$$f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B), \quad f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B).$$

一方 f は左随伴を持たない。それは f と極限が交換しない (例えば $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ とは限らない) ことから分かる。□

例 9. 位相空間 X に対して、 X の開集合全体がなす順序集合 \mathcal{O}_X を圏とみなす。 X 上の (集合の) 前層とは関手 $P: \mathcal{O}_X^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$ のことであった。よって $\widehat{\mathcal{O}_X} := \mathbf{Set}^{\mathcal{O}_X^{\text{op}}}$ が X 上の前層がなす圏である。

X, Y を位相空間、 $f: X \rightarrow Y$ を連続写像とする。このとき、 X 上の前層 P に対して Y 上の前層 f_*P が $f_*P(U) := P(f^{-1}(U))$ により定まり、関手 $f_*: \widehat{\mathcal{O}_X} \rightarrow \widehat{\mathcal{O}_Y}$ を順像と

*³ この $f_!(A)$ を small image と呼ぶ、らしい。

いうのであった。また関手 f_* は左随伴関手 f^* を持ち、これを逆像というのであった。さて、 F を関手 $\mathcal{O}_Y^{\text{op}} \ni U \mapsto f^{-1}(U) \in \mathcal{O}_X^{\text{op}}$ とすれば、定義から $f_* = F^{-1}: \widehat{\mathcal{O}_X} \rightarrow \widehat{\mathcal{O}_Y}$ である。

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_X^{\text{op}} & & \\ \uparrow F & \searrow P & \\ \mathcal{O}_Y^{\text{op}} & \xrightarrow{f_*(P)} & \mathbf{Set} \end{array}$$

故に左随伴の一意性から $f^* \cong F^\dagger$ が分かる。そこで前層 $P \in \widehat{\mathcal{O}_Y}$ の逆像 $F^\dagger P \cong f^*(P)$ を各点左 Kan 拡張で計算してみる。

$U \in \mathcal{O}_X$ を取りコマ圏 $F \downarrow U$ を考える。

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{1} & \xrightarrow{U} & \mathcal{O}_X^{\text{op}} \\ \uparrow & \swarrow & \uparrow F \\ F \downarrow U & \longrightarrow & \mathcal{O}_Y^{\text{op}} \xrightarrow{P} \mathbf{Set} \end{array}$$

$F^\dagger P(U) \cong \text{colim}(F \downarrow U \rightarrow \mathcal{O}_Y^{\text{op}} \xrightarrow{P} \mathbf{Set}) \cong \text{colim}_{\langle V, h \rangle \in F \downarrow U} P(V)$ となる。コマ圏の定義から

$$\begin{aligned} \langle V, h \rangle \in F \downarrow U &\iff h: F(V) \rightarrow U \text{ in } \mathcal{O}_X^{\text{op}} \\ &\iff F(V) \supset U \\ &\iff f^{-1}(V) \supset U \\ &\iff V \supset f(U) \end{aligned}$$

となるので $F^\dagger P(U) \cong \text{colim}_{V \supset f(U)} P(V)$ となり、普段見る逆像の定義が現れる。 \square

例 10. 各点左 Kan 拡張で書けない左 Kan 拡張は存在する。 $C := \mathbf{1} = \{*\}$, $D := \mathbf{2} = \{0 \rightarrow 1\}$, $U = \{a, b\}$ とする。 $F: \mathbf{1} \rightarrow \mathbf{2}$ を $F(*) := 1$, $E: \mathbf{1} \rightarrow U$ を $E(*) := a$ で定める。

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{2} & & \\ \uparrow 1 & & \\ \mathbf{1} & \xrightarrow{a} & \{a, b\} \end{array}$$

関手 $\mathbf{2} \rightarrow U$ は Δa と Δb の 2 つしか存在しない。また自然変換 $a \Rightarrow \Delta b \circ 1$ は存在せず、 $a \Rightarrow \Delta a \circ 1$ は唯一つ存在する。よって $1^\dagger a = \Delta a$ である。一方、 $0 \in \mathbf{2}$ に対して各点左

Kan 拡張を考えると

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbf{1} & \xrightarrow{0} & \mathbf{2} \\
 \uparrow & \swarrow & \uparrow 1 \\
 \mathbf{1} \downarrow 0 & \longrightarrow & \mathbf{1} \xrightarrow{a} \{a, b\}
 \end{array}$$

$\mathbf{1} \downarrow 0 = \mathbf{0}$ だから, $\text{colim}(\mathbf{1} \downarrow 0 \rightarrow \mathbf{1} \xrightarrow{a} U)$ は始対象となるが, $\{a, b\}$ は明らかに始対象を持たない. □

さて, 残っていた証明を終わらせ, 定理 4 の証明を完成させよう.

証明. まず T が関手となることは普遍性から容易に分かる. T が E の F に沿った左 Kan 拡張になっていることを示すため, unit となる自然変換 $\eta: E \Rightarrow TF$ を定義する.

$$\begin{array}{ccc}
 D & & \\
 F \uparrow & \searrow T & \\
 C & \xrightarrow{E} & U \\
 & \eta \Uparrow &
 \end{array}$$

$c \in C$ とすると $Fc \in D$ である. TFc は左 Kan 拡張

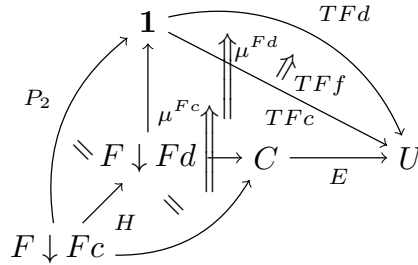
$$\begin{array}{ccc}
 \mathbf{1} & & \\
 P_2 \uparrow & \searrow TFc & \\
 F \downarrow Fc & \xrightarrow{P_1} C \xrightarrow{E} & U \\
 & \mu^{Fc} \Uparrow &
 \end{array}$$

で定義されるのであった. $\langle c, \text{id}_{Fc} \rangle \in F \downarrow Fc$ だから, $\mu_{\langle c, \text{id}_{Fc} \rangle}^{Fc}: Ec \rightarrow TFc$ となる. これを用いて $\eta_c: Ec \rightarrow TFc$ を $\eta_c := \mu_{\langle c, \text{id}_{Fc} \rangle}^{Fc}$ で定める. この η は自然変換である.

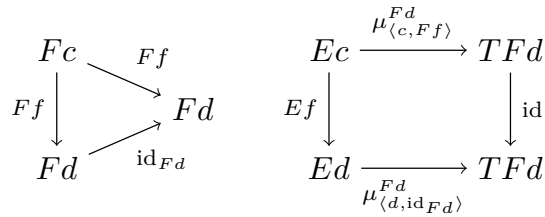
∴) $f: c \rightarrow d$ に対して

$$\begin{array}{ccc}
 Ec & \xrightarrow{\mu_{\langle c, \text{id}_{Fc} \rangle}^{Fc}} & TFc \\
 Ef \downarrow & & \downarrow TFf \\
 Ed & \xrightarrow{\mu_{\langle d, \text{id}_{Fd} \rangle}^{Fd}} & TFd
 \end{array}$$

が可換であることを示せばよい.

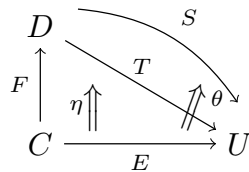


TFf の定義から $TFf_{P_2} \circ \mu^{Fc} = \mu_H^{Fd}$ である. 故に $\langle c, \text{id}_{Fc} \rangle \in F \downarrow Fc$ に対して $TFf \circ \mu_{\langle c, \text{id}_{Fc} \rangle}^{Fc} = \mu_{\langle c, Ff \rangle}^{Fd}$ となる. ここで μ^{Fd} が自然変換だから

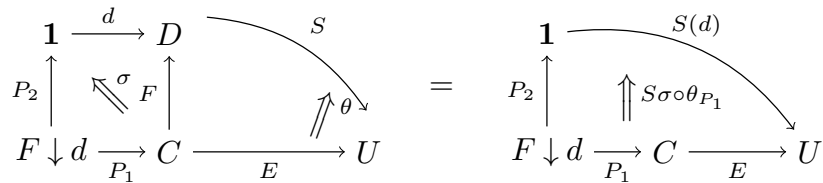


が可換である. 故に $TFf \circ \mu_{\langle c, \text{id}_{Fc} \rangle}^{Fc} = \mu_{\langle d, \text{id}_{Fd} \rangle}^{Fd} \circ Ef$ となり示したい可換性が示せた.

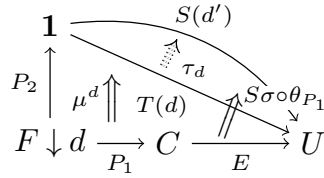
普遍性を示すため, $S: D \rightarrow U$, $\theta: E \Rightarrow SF$ とする.



$d \in D$ を取りコマ圏を考えて, θ と合成すると次の図式を得る.



余極限 Td の普遍性により $\tau_d: Td \rightarrow Sd$ が一意に存在し可換となる.

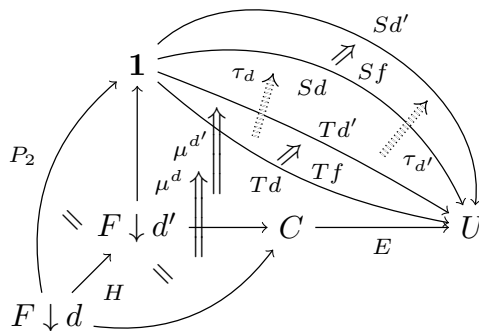


この τ_d が自然変換 $\tau: T \Rightarrow S$ を定める.

$\therefore f: d \rightarrow d'$ に対して

$$\begin{array}{ccc} Td & \xrightarrow{\tau_d} & Sd \\ Tf \downarrow & & \downarrow Sf \\ Td' & \xrightarrow{\tau_{d'}} & Sd' \end{array}$$

が可換であることを示せばよい. これらの射は次の図式のようにになっている.



よって $Sf_{P_2} \circ (\tau_d)_{P_2} \circ \mu^d = (\tau_{d'})_{P_2} \circ Tf_{P_2} \circ \mu^d$ が示せれば, 左 Kan 拡張 $\langle Td, \mu^d \rangle$ の普遍性から $Sf_{P_2} \circ (\tau_d)_{P_2} = (\tau_{d'})_{P_2} \circ Tf_{P_2}$ が分かる. その為には, 任意の $\langle c, k \rangle \in F \downarrow d$ に対して $Sf \circ \tau_d \circ \mu^d_{\langle c, k \rangle} = \tau_{d'} \circ Tf \circ \mu^d_{\langle c, k \rangle}$ を示せばよい.

まず Tf の定義から $Tf_{P_2} \circ \mu^d = \mu^d_H$ である. 故に $Tf \circ \mu^d_{\langle c, k \rangle} = \mu^d_{\langle c, f \circ k \rangle}$ が成り立つ. 次に τ_d の定義から $(\tau_d)_{P_2} \circ \mu^d = S\sigma \circ \theta_{P_1}$ だから, $\tau_d \circ \mu^d_{\langle c, k \rangle} = S\sigma \circ \theta_c$ となる.

よって

$$\begin{aligned}
 Sf \circ \tau_d \circ \mu_{\langle c, k \rangle}^d &= Sf \circ Sk \circ \theta_c \\
 \tau_{d'} \circ Tf \circ \mu_{\langle c, k \rangle}^d &= \tau_{d'} \circ \mu_{\langle c, f \circ k \rangle}^{d'} \\
 &= S(f \circ k) \circ \theta_c \\
 &= Sf \circ Sk \circ \theta_c
 \end{aligned}$$

となり証明が終わった。

このとき $c \in C$ に対して $\tau_{Fc} \circ \eta_c = \tau_{Fc} \circ \mu_{\langle c, \text{id}_{Fc} \rangle}^{Fc} = \theta_c$ となるから $\tau_F \circ \eta = \theta$ である。左 Kan 拡張 Td の普遍性により，このような τ は一意だから， T は F に沿った E の左 Kan 拡張である。 \square

定義. 定理 4 の形で得られる左 Kan 拡張を各点左 Kan 拡張という。

定義. C, D, U, V を圏， $F: C \rightarrow D$ ， $E: C \rightarrow U$ ， $K: U \rightarrow V$ を関手として左 Kan 拡張 $\langle F^\dagger E, \eta \rangle$ が存在するとする。

$$\begin{array}{ccccc}
 D & & & & \\
 \uparrow F & \searrow F^\dagger E & & & \\
 C & \xrightarrow{E} & U & \xrightarrow{K} & V \\
 & & \uparrow \eta & &
 \end{array}$$

このとき K が左 Kan 拡張 $\langle F^\dagger E, \eta \rangle$ と交換するとは， K を合成して得られる次の図式も左 Kan 拡張となることを言う。

$$\begin{array}{ccccc}
 D & & & & \\
 \uparrow F & \searrow K \circ (F^\dagger E) & & & \\
 C & \xrightarrow{E} & U & \xrightarrow{K} & V \\
 & & \uparrow K\eta & &
 \end{array}$$

(即ち， $\langle K \circ (F^\dagger E), K\eta \rangle$ が F に沿った KE の左 Kan 拡張になる。)

定理 11. $F: C \rightarrow D$ ， $E: C \rightarrow U$ で各点左 Kan 拡張 $F^\dagger E$ が存在し，関手 $K: U \rightarrow V$ は余極限と交換するとする。このとき K は $F^\dagger E$ と交換する。

証明. $F^\dagger E$ が各点左 Kan 拡張だから

$$K \circ F^\dagger E(d) = K(\text{colim}(E \circ P_1)) = \text{colim}(K \circ E \circ P_1) = F^\dagger(K \circ E)(d).$$

$$\begin{array}{ccccc}
\mathbf{1} & \xrightarrow{d} & D & & \\
\uparrow & & \uparrow F & \searrow F^\dagger(K \circ E) & \\
F \downarrow d & \xrightarrow{P_1} & C & \xrightarrow{E} & U \xrightarrow{K} V \\
& & & & \nearrow F^\dagger E
\end{array}$$

$F^\dagger E, F^\dagger(KE)$ の unit をそれぞれ $\eta: E \Rightarrow F^\dagger E \circ F$, $\eta': KE \Rightarrow F^\dagger(KE) \circ F$ とする.

$$\begin{array}{ccc}
\mathbf{1} & \xrightarrow{F^\dagger E(d)} & U \\
P_2 \uparrow & \mu^d \Uparrow & \\
F \downarrow d & \xrightarrow{P_1} & C \xrightarrow{E} U
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc}
\mathbf{1} & \xrightarrow{F^\dagger(KE)(d)} & V \\
P_2 \uparrow & \mu'^d \Uparrow & \\
F \downarrow d & \xrightarrow{P_1} & C \xrightarrow{E} U \xrightarrow{K} V
\end{array}$$

とすれば, $\eta_c = \mu_{\langle c, \text{id}_{F_c} \rangle}^{F_c}$, $\eta'_c = \mu'_{\langle c, \text{id}_{F_c} \rangle}^{F_c}$ である. K が余極限と交換するから $K\mu_{\langle c, \text{id}_{F_c} \rangle}^{F_c} = \mu_{\langle c, \text{id}_{F_c} \rangle}^{F_c}$ となり, $K\eta_c = \eta'_c$ である. \square

定理 12. 左随伴関手は左 Kan 拡張と交換する.

証明. $F: C \rightarrow D$, $E: C \rightarrow U$ を関手, $L \dashv R: U \rightarrow V$ を随伴関手として, 左 Kan 拡張 $\langle F^\dagger E, \eta \rangle$ が存在するとする.

$$\begin{array}{ccc}
D & & \\
\uparrow F & \searrow F^\dagger E & \\
C & \xrightarrow{E} & U \xrightarrow{L} V \\
& & \nwarrow R
\end{array}$$

$L \dashv R: U^C \rightarrow V^C$, $L \dashv R: U^D \rightarrow V^D$ となるのであった. このとき $S \in V^D$ に対して自然に

$$\begin{aligned}
\text{Hom}_{V^C}(LE, F^{-1}(S)) &= \text{Hom}_{V^C}(LE, SF) \\
&\cong \text{Hom}_{U^C}(E, RSF) \\
&= \text{Hom}_{U^C}(E, F^{-1}(RS)) \\
&\cong \text{Hom}_{U^D}(F^\dagger E, RS) \\
&\cong \text{Hom}_{V^D}(L \circ F^\dagger E, S)
\end{aligned}$$

となるから $\text{Hom}(LE, F^{-1}(-))$ は表現可能で $F^\dagger(LE) \cong L \circ F^\dagger E$ となる. $F^\dagger(LE)$ の unit は自然同型 $\text{Hom}(LE, F^{-1}(L \circ F^\dagger E)) \cong \text{Hom}(L \circ F^\dagger E, L \circ F^\dagger E)$ で id に対応する自然変換 $\eta': LE \Rightarrow F^\dagger(LE) \circ F$ であった. 一方, この同型で id に対応するのは, 随伴

$L \dashv R$ の unit を α とすれば

$$\begin{array}{ccc}
 \text{id} & \in \text{Hom}(L \circ F^\dagger E, L \circ F^\dagger E) & \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \alpha_{F^\dagger E} & \in \text{Hom}(F^\dagger E, R \circ L \circ F^\dagger E) & \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \alpha_{F^\dagger E \circ F} \circ \eta & \in \text{Hom}(E, R \circ L \circ F^\dagger E \circ F) & \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 L\eta & \in \text{Hom}(LE, L \circ F^\dagger E \circ F) &
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
 & D & & & \\
 & \nearrow F^\dagger E & & & \\
 C & \xrightarrow{E} & U & \xrightarrow{L} & V & \xrightarrow{R} & U \\
 & \uparrow \eta & & & \uparrow \alpha & & \\
 & & & & \text{id} & &
 \end{array}$$

となるから $\eta' = L\eta$ である. □

3 米田埋込と Kan 拡張

補題 13. C, D, U を圏, $F: C \rightarrow D$, $E: C \rightarrow U$ を関手とする. $d \in D$, $u \in U$ として $K := (F \downarrow d \rightarrow C \xrightarrow{E} U)$ とするとき, $u \in U$ について自然な同型

$$\text{Hom}_{U^{F \downarrow d}}(K, \Delta u) \cong \text{Hom}_{\widehat{C}}(\text{Hom}_D(F(-), d), \text{Hom}_U(E(-), u))$$

が成り立つ.

証明. まず互いに逆な写像

$$\text{Hom}_{U^{F \downarrow d}}(K, \Delta u) \xrightleftharpoons[\psi_u]{\varphi_u} \text{Hom}_{\widehat{C}}(\text{Hom}_D(F-, d), \text{Hom}_U(E-, u))$$

を定義しよう. $\alpha: K \Rightarrow \Delta u$ に対して写像

$$\varphi_u(\alpha)_c: \text{Hom}_D(Fc, d) \rightarrow \text{Hom}_U(Ec, u)$$

を $\varphi_u(\alpha)_c(f) := \alpha_{\langle c, f \rangle}$ で定義する. この $\varphi_u(\alpha)$ は自然変換である.

∴) $g: c \rightarrow c'$ を C の射とする。次の図式が可換であることを示せばよい。

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_D(Fc, d) & \xrightarrow{\varphi_u(\alpha)_c} & \mathrm{Hom}_U(Ec, u) \\ \uparrow -\circ Fg & & \uparrow -\circ Eg \\ \mathrm{Hom}_D(Fc', d) & \xrightarrow{\varphi_u(\alpha)_{c'}} & \mathrm{Hom}_U(Ec', u) \end{array}$$

$f' \in \mathrm{Hom}_D(Fc', d)$ の行き先を調べると次のようになる。

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_D(Fc, d) & \xrightarrow{\varphi_u(\alpha)_c} & \mathrm{Hom}_U(Ec, u) & & f' \circ Fg & \xrightarrow{\varphi_u(\alpha)_c} & \alpha_{\langle c, f' \circ Fg \rangle} \\ \uparrow -\circ Fg & & \uparrow -\circ Eg & & \uparrow -\circ Fg & & \alpha_{\langle c', f' \rangle} \circ Eg \\ \mathrm{Hom}_D(Fc', d) & \xrightarrow{\varphi_u(\alpha)_{c'}} & \mathrm{Hom}_U(Ec', u) & & f' & \xrightarrow{\varphi_u(\alpha)_{c'}} & \alpha_{\langle c', f' \rangle} \\ & & & & \downarrow & & \downarrow -\circ Eg \end{array}$$

故に $f := f' \circ Fg$ としたとき、 $\alpha_{\langle c', f' \rangle} \circ Eg = \alpha_{\langle c, f \rangle}$ を示せばよい。

まず $\langle c, f \rangle \in F \downarrow d$, $\langle c', f' \rangle \in F \downarrow d$ であり $g: \langle c, f \rangle \rightarrow \langle c', f' \rangle$ は $F \downarrow d$ の射である。よって、今 α が自然変換だから、次の図式は可換である。

$$\begin{array}{ccc} Ec & \xrightarrow{\alpha_{\langle c, f \rangle}} & u \\ Eg \downarrow & & \downarrow \mathrm{id} \\ Ec' & \xrightarrow{\alpha_{\langle c', f' \rangle}} & u \end{array}$$

即ち $\alpha_{\langle c', f' \rangle} \circ Eg = \alpha_{\langle c, f \rangle}$ である。

故に φ_u は写像 $\varphi_u: \mathrm{Hom}_{U^{F \downarrow d}}(K, \Delta u) \rightarrow \mathrm{Hom}_{\widehat{C}}(\mathrm{Hom}_D(F-, d), \mathrm{Hom}_U(E-, u))$ を与える。これは明らかに $u \in U$ について自然である。

次に $\theta: \mathrm{Hom}_D(F-, d) \Rightarrow \mathrm{Hom}_U(E-, u)$ に対して U の射

$$\psi_u(\theta)_{\langle c, f \rangle}: K \langle c, f \rangle = Ec \rightarrow u$$

を $\psi_u(\theta)_{\langle c, f \rangle} := \theta_c(f)$ で定める。これは自然変換 $\psi_u(\theta): K \Rightarrow \Delta u$ を定める。

∴) $g: \langle c, f \rangle \rightarrow \langle c', f' \rangle$ を $F \downarrow d$ の射とする。即ち $g: c \rightarrow c'$ は C の射で $f' \circ Fg = f$

となる．次の図式が可換であることを示せばよい．

$$\begin{array}{ccc} Ec & \xrightarrow{\theta_c(f)} & u \\ Eg \downarrow & & \downarrow \text{id} \\ Ec' & \xrightarrow{\theta_{c'}(f')} & u \end{array}$$

θ が自然変換だから次が可換である．

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_D(Fc, d) & \xrightarrow{\theta_c} & \text{Hom}_U(Ec, d) & f' \circ Fg = f \xrightarrow{\theta_c} \theta_c(f) \\ \uparrow - \circ Fg & & \uparrow - \circ Eg & \theta_{c'}(f') \circ Eg \\ \text{Hom}_D(Fc', d) & \xrightarrow{\theta_{c'}} & \text{Hom}_U(Ec', d) & \downarrow - \circ Eg \\ & & & f' \xrightarrow{\theta_{c'}} \theta_{c'}(f') \end{array}$$

故に $\theta_{c'}(f') \circ Eg = \theta_c(f)$ である．

このとき $\varphi_u \circ \psi_u = \text{id}$, $\psi_u \circ \varphi_u = \text{id}$ である．

∴) まず $\alpha: K \Rightarrow \Delta u$, $\langle c, f \rangle \in F \downarrow d$ に対して

$$(\psi_u \circ \varphi_u(\alpha))_{\langle c, f \rangle} = \psi_u(\varphi_u(\alpha))_{\langle c, f \rangle} = \varphi_u(\alpha)_c(f) = \alpha_{\langle c, f \rangle}$$

だから $\psi_u \circ \varphi_u = \text{id}$ である．次に $\theta: \text{Hom}_D(F-, d) \Rightarrow \text{Hom}_U(E-, u)$ に対して

$$(\varphi_u \circ \psi_u(\theta))_c(f) = \varphi_u(\psi_u(\theta))_c(f) = \psi_u(\theta)_{\langle c, f \rangle} = \theta_c(f)$$

だから $\psi_u \circ \varphi_u = \text{id}$ である．

故に φ_u は同型である．

後は φ_u が u について自然であることを示せばよい．その為には U の射 $k: u \rightarrow v$ に対して次の図式が可換であることを示せばよい．(ここで σ は次で定義される自然変換である: $c \in C$ に対して $\sigma_c := (k \circ -): \text{Hom}_U(Ec, u) \rightarrow \text{Hom}_U(Ec, v)$.)

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{UF \downarrow d}(K, \Delta u) & \xrightarrow{\varphi_u} & \text{Hom}_{\widehat{C}}(\text{Hom}_D(F-, d), \text{Hom}_U(E-, u)) \\ (\Delta k) \circ - \downarrow & & \downarrow \sigma \circ - \\ \text{Hom}_{UF \downarrow d}(K, \Delta v) & \xrightarrow{\varphi_v} & \text{Hom}_{\widehat{C}}(\text{Hom}_D(F-, d), \text{Hom}_U(E-, v)) \end{array}$$

まず $\alpha \in \text{Hom}_{U^{F \downarrow d}}(K, \Delta u)$ を左回りに写してみると, $\langle c, f \rangle \in F \downarrow d$ に対して

$$\varphi_v((\Delta k) \circ \alpha)_c(f) = ((\Delta k) \circ \alpha)_{\langle c, f \rangle} = k \circ \alpha_{\langle c, f \rangle}$$

である. 一方, 右回りは

$$(\sigma \circ \varphi_u(\alpha))_c(f) = (\sigma_c \circ \varphi_u(\alpha)_c)(f) = \sigma_c(\varphi_u(\alpha)_c(f)) = k \circ \alpha_{\langle c, f \rangle}$$

である. 故に可換である. \square

定理 14. C, D, U を圏, $F: C \rightarrow D$, $E: C \rightarrow U$, $T: D \rightarrow U$ を関手とする. 以下の条件は同値である.

- (1) T は F に沿った E の各点左 Kan 拡張である.
- (2) T は F に沿った E の左 Kan 拡張で, 任意の $u \in U$ に対して $\text{Hom}_U(-, u): U \rightarrow \mathbf{Set}^{\text{op}}$ は左 Kan 拡張 T と交換する.
- (3) $d \in D$, $u \in U$ に対して自然に

$$\text{Hom}_U(Td, u) \cong \text{Hom}_{\widehat{C}}(\text{Hom}_D(F-, d), \text{Hom}_U(E-, u))$$

となる.

証明. (1 \implies 2) $\text{Hom}_U(-, u): U \rightarrow \mathbf{Set}^{\text{op}}$ が余極限と交換するから明らか.

(2 \implies 3) 左 Kan 拡張 $T \cong F^\dagger E$ が存在し, $\text{Hom}_U(-, u)$ がそれと交換するから F に沿った $\text{Hom}_U(E-, u)$ の左 Kan 拡張も存在し, それは $\text{Hom}_U(F^\dagger E-, u)$ である.

$$\begin{array}{ccc} D & & \\ \uparrow F & \searrow^{F^\dagger(\text{Hom}(E-, u))} & \\ C & \xrightarrow{E} U & \xrightarrow{\text{Hom}(-, u)} \mathbf{Set}^{\text{op}} \\ & \nearrow^{F^\dagger E} & \end{array}$$

よって $S: D \rightarrow \mathbf{Set}^{\text{op}}$ に対して自然に

$$\text{Hom}_{(\mathbf{Set}^{\text{op}})^D}(\text{Hom}_U(F^\dagger E-, u), S) \cong \text{Hom}_{(\mathbf{Set}^{\text{op}})^C}(\text{Hom}_U(E-, u), SF)$$

である (これは u についても自然である). opposite を考えれば

$$\text{Hom}_{\widehat{D}}(S, \text{Hom}_U(F^\dagger E-, u)) \cong \text{Hom}_{\widehat{C}}(SF, \text{Hom}_U(E-, u))$$

を得る. 今 $S = \text{Hom}_D(-, d)$ とすれば, 米田の補題と合わせて

$$\text{Hom}_U(F^\dagger E(d), u) \cong \text{Hom}_{\widehat{C}}(\text{Hom}_D(F-, d), \text{Hom}_U(E-, u))$$

を得る.

(3 \implies 1) $d \in D$ とする. 仮定 3 と補題 13 より, $u \in U$ に対して自然に

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_U(Td, u) &\cong \mathrm{Hom}_{\widehat{C}}(\mathrm{Hom}_D(F-, d), \mathrm{Hom}_U(E-, u)) \\ &\cong \mathrm{Hom}_{U_{F \downarrow d}}(F \downarrow d \rightarrow C \xrightarrow{E} U, \Delta u) \end{aligned}$$

だから $\mathrm{colim}(F \downarrow d \rightarrow C \xrightarrow{E} U) \cong Td$ が存在する. 故に各点左 Kan 拡張 $F^\dagger E$ が存在して $F^\dagger E(d) \cong Td$ である. \square

※ 同様に, 各点右 Kan 拡張に対しても

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_U(u, F^\dagger E(d)) &\cong \mathrm{Hom}_U(u, \mathrm{lim}(d \downarrow F \rightarrow C \xrightarrow{E} U)) \\ &\cong \mathrm{Hom}_U(\Delta u, d \downarrow F \rightarrow C \xrightarrow{E} U) \\ &\cong \mathrm{Hom}_{\widehat{C}}(\mathrm{Hom}_D(d, F-), \mathrm{Hom}_U(u, E-)). \end{aligned}$$

が成り立つ.

系 15. C を小圏, D を圏, $F: C \rightarrow D$ を関手とするととき $F^\dagger y(d) \cong \mathrm{Hom}_D(F-, d)$.

$$\begin{array}{ccc} D & & \\ \uparrow F & \searrow F^\dagger y & \\ C & \xrightarrow{y} & \widehat{C} \end{array}$$

証明. \widehat{C} が余完備だから各点左 Kan 拡張 $F^\dagger y$ が存在する. よって任意の $P \in \widehat{C}$ に対して自然に

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\widehat{C}}(F^\dagger y(d), P) &\cong \mathrm{Hom}_{\widehat{C}}(\mathrm{Hom}_D(F-, d), \mathrm{Hom}_{\widehat{C}}(y-, P)) && \text{(定理 14)} \\ &\cong \mathrm{Hom}_{\widehat{C}}(\mathrm{Hom}_D(F-, d), P) && \text{(米田の補題)} \end{aligned}$$

となる. 故に米田の補題により $F^\dagger y(d) \cong \mathrm{Hom}_D(F-, d)$ を得る. \square

系 16. 小圏 C に対して $y^\dagger y \cong \mathrm{id}$ である.

$$\begin{array}{ccc} \widehat{C} & & \\ \uparrow y & \searrow y^\dagger y \cong \mathrm{id} & \\ C & \xrightarrow{y} & \widehat{C} \end{array}$$

証明. 系 15 と米田の補題により, $P \in \widehat{C}$ について自然な同型 $y^\dagger y(P) \cong \text{Hom}(y-, P) \cong P$ が成り立つ. \square

系 17. 任意の前層 $P \in \widehat{C}$ は $y(c)$ の余極限で書ける.

証明. 系 16 により $y^\dagger y(P) \cong P$ であるが, 一方各点左 Kan 拡張

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbf{1} & \xrightarrow{P} & \widehat{C} \\
 \uparrow & \swarrow & \uparrow y \\
 y \downarrow P & \longrightarrow & C \xrightarrow{y} \widehat{C} \\
 & & \uparrow y \\
 & & C
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \nearrow y^\dagger y \cong \text{id} \\
 \searrow
 \end{array}$$

により $P \cong y^\dagger y(P) \cong \text{colim}(y \downarrow P \rightarrow C \xrightarrow{y} \widehat{C}) = \text{colim}_{(c,f) \in y \downarrow P} y(c)$ である. \square

定理 18. 米田埋込 $y: C \rightarrow \widehat{C}$ は極限と交換する.

証明. 関手 $T: I \rightarrow C$ の極限 $\lim T$ が存在するとする. 標準的な射を $p_i: \lim T \rightarrow T_i$ とする. $y(\lim T)$ が関手 $y \circ T: I \rightarrow \widehat{C}$ の極限であることを示せばよい.

$$\begin{array}{ccc}
 T_i & \xleftarrow{p_i} & \lim T \\
 \uparrow & & \\
 T_j & \xleftarrow{p_j} & \lim T
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{ccc}
 y(T_i) & \xleftarrow{y(p_i)} & y(\lim T) \\
 \uparrow & & \\
 y(T_j) & \xleftarrow{y(p_j)} & y(\lim T)
 \end{array}$$

その為に, $P \in \widehat{C}$ と自然変換 $\mu: \Delta P \Rightarrow y \circ T$ を任意に取る. (射 $P \rightarrow y(\lim T)$ が一意に伸びることを示せばよい.) 系 17 によりある $S: K \rightarrow C$ が存在して $P = \text{colim}(y \circ S)$ と書ける. このときの標準的な射を $\alpha_k: y(S_k) \rightarrow P$ とする.

$$\begin{array}{ccc}
 y(T_i) & \xleftarrow{y(p_i)} & y(\lim T) \\
 \uparrow & & \\
 y(T_j) & \xleftarrow{y(p_j)} & y(\lim T)
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{ccc}
 & & P \\
 \swarrow \mu_i & & \swarrow \alpha_k \\
 & & y(S_k) \\
 \nwarrow \mu_j & & \nwarrow \alpha_l \\
 & & y(S_l)
 \end{array}$$

このとき、 $k \in K$ に対して次の左側の可換図式が得られる.

$$\begin{array}{ccc}
 y(T_i) & & T_i \\
 \uparrow & \swarrow \mu_i \circ \alpha_k & \uparrow \\
 y(T_j) & \xleftarrow{\mu_j \circ \alpha_k} & y(S_k) & \xleftarrow{f_{jk}} & T_j & \xleftarrow{f_{ik}} & S_k
 \end{array}$$

y は忠実充満だから、ある $f_{ik}: S_k \rightarrow T_i$ が存在して $y(f_{ik}) = \mu_i \circ \alpha_k$ となる. よって $\lim T$ の普遍性から $g_k: S_k \rightarrow \lim T$ が存在して次が可換となる.

$$\begin{array}{ccccc}
 & T_i & & & \\
 & \uparrow & \swarrow p_i & & \\
 & T_j & \xleftarrow{p_j} & \lim T & \xleftarrow{g_k} & S_k \\
 & & \searrow p_j & & \swarrow f_{jk} \\
 & & & &
 \end{array}$$

故に $y(g_k): y(S_k) \rightarrow y(\lim T)$ が得られる.

$$\begin{array}{ccccccc}
 y(T_i) & & & & & & \\
 \uparrow & \swarrow \mu_i & & & & & \\
 y(T_j) & \xleftarrow{y(p_j)} & y(\lim T) & \xleftarrow{y(g_k)} & P & \xleftarrow{\alpha_k} & y(S_k) \\
 & \searrow \mu_j & & \swarrow y(g_i) & \swarrow \alpha_l & & \\
 & & & & & & y(S_l)
 \end{array}$$

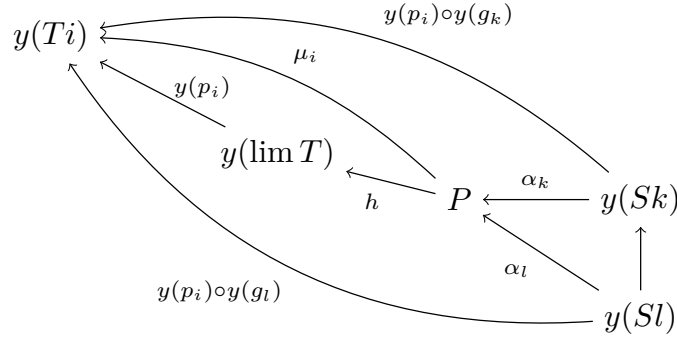
よって $P = \text{colim}(y \circ S)$ の普遍性により $h: P \rightarrow y(\lim T)$ が存在する. このとき $y(p_i) \circ h = \mu_i$ である.

∴ i, k に対して次の図式が得られる.

$$\begin{array}{ccc}
 y(T_i) & \xleftarrow{\mu_i} & P \\
 y(p_i) \uparrow & & \uparrow \alpha_k \\
 y(\lim T) & \xleftarrow{y(g_k)} & y(S_k)
 \end{array}$$

この図式の外側の四角は g_k の取り方により可換である. また右下の三角形は h の取

り方により可換である。よって $\mu_i \circ \alpha_k = y(p_i) \circ h \circ \alpha_k$ が成り立つ。故に次の図式を考えれば



$P = \text{colim}(y \circ S)$ の普遍性により $\mu_i = y(p_i) \circ h$ が分かる。

h の一意性も普遍性により分かるので、 $y(\lim T) \cong \lim(y \circ T)$ である。 □

定理 19. 関手 $F: C \rightarrow D$ に対して $F^\dagger \circ y \cong y \circ F$ である。

$$\begin{array}{ccc} \widehat{C} & \xrightarrow{F^\dagger} & \widehat{D} \\ y \uparrow & & \uparrow y \\ C & \xrightarrow{F} & D \end{array}$$

証明. $c \in C$ とする。 $P \in \widehat{D}$ に関して自然に

$$\begin{aligned} \text{Hom}(y(F(c)), P) &\cong P(F(c)) \cong \text{Hom}(y(c), P \circ F) = \text{Hom}(y(c), F^{-1}P) \\ &\cong \text{Hom}(F^\dagger(y(c)), P) \end{aligned}$$

であるから米田の補題により $y(F(c)) \cong F^\dagger(y(c))$ である。同型の与え方から分かるようにこれは c に関して自然なので $F^\dagger \circ y \cong y \circ F$ である。 □

定理 20. $\langle F^\dagger E, \eta \rangle$ が各点左 Kan 拡張で、 F が忠実充満とする。このとき $\eta: E \Rightarrow F^\dagger E \circ F$ は同型である。

証明. 各点左 Kan 拡張により $F^\dagger E \circ F(c) = F^\dagger E(F(c)) = \text{colim}(F \downarrow (Fc) \rightarrow C \xrightarrow{E} U)$ である。コマ圏 $F \downarrow (Fc)$ の対象は $g: Fc' \rightarrow Fc$ であるが、今 F が忠実充満関手だから g は $c' \rightarrow c$ と対応する。よって $F \downarrow (Fc) = \text{id}_C \downarrow c$ が分かる。コマ圏 $\text{id}_C \downarrow c$ は終対象 $\text{id}_c: c \rightarrow c$ を持つから、 $\text{colim}(F \downarrow (Fc) \rightarrow C \xrightarrow{E} U) = Ec$ となる。よって同型 $E \cong F^\dagger E \circ F$ が成り立つ。 □

逆に

定理 21. $\langle F^\dagger y, \eta \rangle$ を左 Kan 拡張とする. η が同型ならば F は忠実充満である.

$$\begin{array}{ccc} & D & \\ & \uparrow F & \searrow F^\dagger y \\ C & \xrightarrow{y} & \widehat{C} \\ & \uparrow \eta & \\ & C & \end{array}$$

証明. $F^\dagger y(d) \cong \text{Hom}_D(F-, d)$ だから, $y(c) \cong F^\dagger y \circ F(c) \cong \text{Hom}_D(F-, Fc)$ である. 故に $\text{Hom}_C(c, c) \cong \text{Hom}_D(Fc, Fc)$. \square

定理 22. $F: C \rightarrow D$ を関手とすれば $F^\dagger, F^\ddagger: \widehat{C} \rightarrow \widehat{D}$ が得られる (系 6). このとき次は同値である.

- (1) F が忠実充満
- (2) F^\dagger が忠実充満
- (3) F^\ddagger が忠実充満

証明. (1 \implies 2) 随伴 $F^\dagger \dashv F^{-1}$ の unit を η とすれば「 F^\dagger が忠実充満 $\iff \eta$ が同型」であった. 仮定 1 により F が忠実充満だから η が同型となり (定理 20), F^\dagger も忠実充満である.

(2 \implies 1) 定理 19 により $F^\dagger \circ y \cong y \circ F$ である. 仮定 2 より F^\dagger が忠実充満で, y も忠実充満だから $F^\dagger \circ y \cong y \circ F$ も忠実充満である. よって F も忠実充満と分かる.

(2 \iff 3) 一般に $F \dashv G \dashv H$ のとき「 F が忠実充満 $\iff H$ が忠実充満」であった. よって $F^\dagger \dashv F^{-1} \dashv F^\ddagger$ より分かる. \square

定義. $F: C \rightarrow D$ を関手とする.

- (1) F が strongly generating $\iff F^\dagger y$ が conservative ^{*4}
- (2) F が稠密 (dense) $\iff \langle \text{id}_D, \text{id}_F \rangle$ が F に沿った F の各点左 Kan 拡張となる.

$$\begin{array}{ccc} & D & \\ & \uparrow F & \searrow \text{id}_D \\ C & \xrightarrow{F} & D \\ & \uparrow \text{id}_F & \\ & C & \end{array}$$

^{*4} 関手 G が conservative とは, Gf が同型射ならば f が同型射になることをいう. 詳細は「自然変換・圏同値」の PDF を参照.

定理 23. 関手 $F: C \rightarrow D$ に対して次の条件は同値.

- (1) F が稠密である.
- (2) 任意の $d \in D$ に対して $\text{colim}(F \downarrow d \rightarrow C \xrightarrow{F} D) \cong d$ となる.
- (3) ある $\eta: F \Rightarrow F$ が存在して, $\langle \text{id}_D, \eta \rangle$ が F に沿った F の各点左 Kan 拡張となる.
- (4) $F^\dagger y: D \rightarrow \widehat{C}$ が忠実充満である.

証明. (1 \implies 2) F が稠密, 即ち $\langle \text{id}_D, \text{id}_F \rangle$ が F に沿った F の各点左 Kan 拡張となるから $\text{colim}(F \downarrow d \rightarrow C \xrightarrow{F} D) \cong d$ である.

(2 \implies 3) $\text{colim}(F \downarrow d \rightarrow C \xrightarrow{F} D) \cong d$ だから $F^\dagger F$ が存在して $F^\dagger F \cong \text{id}_D$ となる.

(3 \implies 4) $\langle \text{id}_D, \eta \rangle$ を F に沿った F の各点左 Kan 拡張とする. $d \in D$ に対して $F^\dagger y(d) \cong \text{Hom}_D(F-, d) = (F^{-1} \circ y)(d)$ だから $F^\dagger y = F^{-1} \circ y$ である.

$$D \xrightarrow{y} \widehat{D} \xrightarrow{F^{-1}} \widehat{C}$$

y が忠実充満なので, $F^\dagger y$ が忠実充満であることを示すには (y により $D \subset \widehat{D}$ と見なして) $F^{-1}|_D: D \rightarrow \widehat{C}$ が忠実充満であることを示せばよい.

定理 14 より, 各点左 Kan 拡張 $\langle \text{id}_D, \eta \rangle$ は $y(d)$ と交換するから

$$\begin{array}{ccc} D & & D \\ \uparrow F & \searrow \text{id} & \uparrow F \\ C & \xrightarrow{F} D & C \\ & \searrow y(d) & \uparrow y(d)\eta \\ & \text{Set}^{\text{op}} & \text{Set}^{\text{op}} \end{array} \quad = \quad \begin{array}{ccc} D & & D \\ \uparrow F & \searrow y(d) & \uparrow F \\ C & \xrightarrow{F^{-1}(y(d))} D & C \\ & \searrow y(d)\eta & \uparrow y(d) \\ & \text{Set}^{\text{op}} & \text{Set}^{\text{op}} \end{array}$$

$\langle y(d), y(d)\eta \rangle$ が F に沿った $y(d) \circ F = F^{-1}(y(d))$ の左 Kan 拡張となる. 従って命題 1 により同型

$$\text{Hom}_{(\text{Set}^{\text{op}})^C}(F^{-1}(y(d)), F^{-1}-) \cong \text{Hom}_{(\text{Set}^{\text{op}})^D}(y(d), -)$$

が得られる. よって

$$\text{Hom}_{(\text{Set}^{\text{op}})^C}(F^{-1}(y(d)), F^{-1}(y(d))) \cong \text{Hom}_{(\text{Set}^{\text{op}})^D}(y(d), y(d))$$

である. 普遍射の性質により, この同型は $\theta_F \leftarrow \theta$ で与えられることが分かる. 従って $F^{-1}|_D: D \rightarrow \widehat{C}$ は忠実充満である.

(4 \implies 2) $F^\dagger y$ が忠実充満だから $d, d' \in D$ に対して

$$\begin{aligned} \text{Hom}_D(d, d') &\cong \text{Hom}_{\widehat{C}}(F^\dagger y(d), F^\dagger y(d')) \\ &\cong \text{Hom}_{\widehat{C}}(\text{Hom}_D(F-, d), \text{Hom}_D(F-, d')) \\ &\cong \text{Hom}_{\widehat{C}_{F \downarrow d}}(F \downarrow d \rightarrow C \xrightarrow{F} \widehat{C}, \Delta d') \end{aligned}$$

となる。故に $\text{colim}(F \downarrow d \rightarrow C \xrightarrow{F} \widehat{C}) \cong d$ である。 \square

命題 24. 稠密関手は strongly generating である。

証明. 忠実充満関手は conservative であるから、定理 23 の条件 4 と strongly generating の定義より明らか。 \square

4 普遍随伴

定理 25. C を小圏、 U を余完備な圏とすると、関手 $F: C \rightarrow U$ から二つの関手 $y^\dagger F$ 、 $F^\dagger y$ が得られる。このとき随伴 $y^\dagger F \dashv F^\dagger y$ が成り立つ。

$$\begin{array}{ccc}
 \widehat{C} & & \\
 \swarrow y^\dagger F & & \\
 C & \xrightarrow{F} & U \\
 \uparrow y & \nearrow F^\dagger y & \\
 & &
 \end{array}$$

証明. $P \in \widehat{C}$ 、 $u \in U$ に対して

$$\begin{aligned}
 \text{Hom}_U(y^\dagger F(P), u) &\cong \text{Hom}_{\widehat{C}}(\text{Hom}_C(y-, P), \text{Hom}_U(F-, u)) \\
 &\cong \text{Hom}_{\widehat{C}}(P, \text{Hom}_U(F-, u)) \\
 &\cong \text{Hom}_{\widehat{C}}(P, F^\dagger y(u)).
 \end{aligned}$$

\square

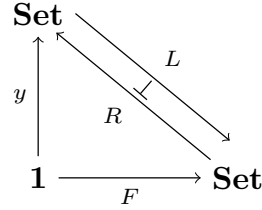
逆に次が成り立つ。

定理 26. 任意の随伴 $L \dashv R: \widehat{C} \rightarrow U$ はこのようにして得られる。

証明. $F := L \circ y: C \rightarrow U$ とする。随伴 $y^\dagger F \dashv F^\dagger y$ が得られる。一方、左随伴関手 L は左 Kan 拡張と交換する (定理 12) から $y^\dagger F = y^\dagger(L \circ y) \cong L \circ (y^\dagger y) \cong L \circ \text{id} = L$ である。よって随伴の一意性から $R \cong F^\dagger y$ である。 \square

※ この随伴 $y^\dagger F \dashv F^\dagger y$ を、twitter 等で一部の人が普遍随伴と呼んでいる。一般に広く使われている名称は無いようだが、例えば nlab では nerve and realization というページがある。

例 27. $C = \mathbf{1}$ とすれば $\widehat{\mathbf{1}} = \mathbf{Set}$ だから, 随伴 $L \dashv R: \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Set}$ に対して $F := L \circ y$ とすれば



$L \cong y^\dagger F$, $R \cong F^\dagger y$ である. $x := F(*) \in \mathbf{Set}$ と置けば, $a \in \mathbf{Set}$ に対して

$$R(a) \cong F^\dagger y(a) \cong \text{Hom}_{\mathbf{Set}}(F-, a) \cong \text{Hom}_{\mathbf{Set}}(x, a)$$

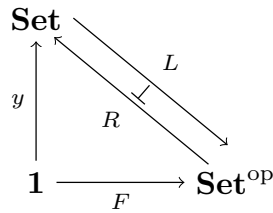
だから $R \cong \text{Hom}_{\mathbf{Set}}(x, -)$ である. 一方 $L(a) \cong y^\dagger F(a) \cong \text{colim}(y \downarrow a \rightarrow \mathbf{1} \xrightarrow{F} \mathbf{Set})$ で $y \downarrow a \cong a$ となるから

$$L(a) \cong \coprod_{b \in a} x \cong a \times x$$

により $L \cong - \times x$ である. 故に, 任意の随伴 $\mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Set}$ は $- \times x \dashv \text{Hom}_{\mathbf{Set}}(x, -)$ の形をしている.

また $F: \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Set}$ を圏同値とすると, これは右随伴となるから, ある $x \in \mathbf{Set}$ を使って $F \cong \text{Hom}_{\mathbf{Set}}(x, -)$ と書ける. これが余極限と交換する為には $x = 1$ でなければならぬから $F \cong \text{id}_{\mathbf{Set}}$ である. 即ち圏同値 $\mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Set}$ は自明なものしかない. \square

例 28. $L \dashv R: \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Set}^{\text{op}}$ を随伴とする. $F := L \circ y: \mathbf{1} \rightarrow \mathbf{Set}^{\text{op}}$ と置けば, $L \cong y^\dagger F$, $R \cong F^\dagger y$ である.

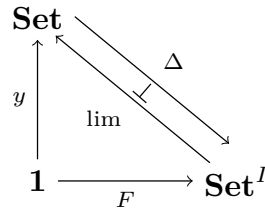


よって, $x := F(*)$ とすれば $R \cong \text{Hom}_{\mathbf{Set}^{\text{op}}}(x, -) \cong \text{Hom}_{\mathbf{Set}}(-, x)$ である. また任意の $a, b \in \mathbf{Set}$ に対して

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathbf{Set}}(a, \text{Hom}_{\mathbf{Set}}(b, x)) &\cong \text{Hom}_{\mathbf{Set}}(a \times b, x) \\ &\cong \text{Hom}_{\mathbf{Set}}(b, \text{Hom}_{\mathbf{Set}}(a, x)) \\ &\cong \text{Hom}_{\mathbf{Set}^{\text{op}}}(\text{Hom}_{\mathbf{Set}}(a, x), b) \end{aligned}$$

だから $\text{Hom}_{\mathbf{Set}}(-, x) \dashv \text{Hom}_{\mathbf{Set}}(-, x)$ である。従って $L \cong \text{Hom}_{\mathbf{Set}}(-, x) = R$ となることが分かる*5。 \square

例 29. 小圏 I に対して随伴 $\Delta \dashv \lim: \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Set}^I$ が成り立つ。よって $F := \Delta \circ y$ と置けば、 $T \in \mathbf{Set}^I$ に対して $\lim T \cong F^\dagger y(T) \cong \text{Hom}_{\mathbf{Set}^I}(F(*), T)$ である。



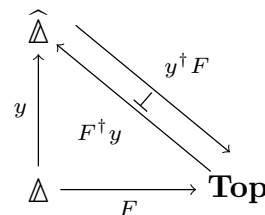
$F(*) = \Delta(y(*)) \cong \Delta 1$ だから $\lim T \cong \text{Hom}(\Delta 1, T)$ が分かる。 \square

例 30. 圏 Δ を以下のように定める。

- $\text{Ob}(\Delta) := \{[n] \mid n \in \mathbb{N}\}$, ここで $[n] := \{0, 1, \dots, n\}$
- 射 $[m] \rightarrow [n]$ は, $[m]$ の自然な順序を保つ写像とする。

このとき圏 C に対して, 関手 $\Delta^{\text{op}} \rightarrow C$ を C の単体的対象 (simplicial object) と呼ぶ。特に $C = \mathbf{Set}$ の場合, つまり関手 $\Delta^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$ を単体的集合という。 $\widehat{\Delta}$ が単体的集合のなす圏である。

$n \in \mathbb{N}$ に対して $\Delta^n \in \mathbf{Top}$ を $\Delta^n := \{(x_0, \dots, x_n) \in [0, 1]^{n+1} \mid x_0 + \dots + x_n = 1\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ で定義すれば, 関手 $F: \Delta \rightarrow \mathbf{Top}$ が $F([n]) := \Delta^n$ により自然に定まる。このとき随伴 $y^\dagger F \dashv F^\dagger y$ が得られる。

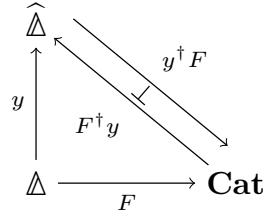


$|-| := y^\dagger F: \widehat{\Delta} \rightarrow \mathbf{Top}$ を幾何学的実現, $\text{Sing} := F^\dagger y: \mathbf{Top} \rightarrow \widehat{\Delta}$ を singular functor という。 \square

例 31. 順序集合 $[n] = \{0, 1, \dots, n\}$ を圏とみなして包含関手 $F: \Delta \rightarrow \mathbf{Cat}$ を考えれば,

*5 正確に書けば $L \cong R^{\text{op}}$ である。

随伴 $y^\dagger F \dashv F^\dagger y$ が得られる.



$N := F^\dagger y: \mathbf{Cat} \rightarrow \widehat{\Delta}$ を nerve functor という. □

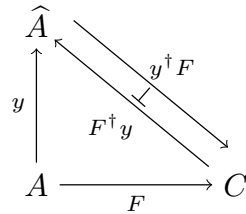
定義. 対象 $a \in C$ が small projective $\iff \text{Hom}_C(a, -)$ が余連続.

定理 32. 圏 C が, ある小圏 A を使って $C \cong \widehat{A}$ と書ける

$\iff C$ が余完備で, 小さい充満部分圏 $A \subset C$ が存在して, 包含関手 $F: A \rightarrow C$ が strongly generating で, 任意の $a \in A$ が small projective.

証明. (\implies) $C \cong \widehat{A}$ のとき, C は余完備で, 米田埋込 $y: A \rightarrow C$ により $A \subset C$ は充満部分圏と見なせる. また $y^\dagger y \cong \text{id}$ は明らかに余連続かつ conservative である.

(\impliedby) 仮定の充満部分圏と包含関手 $F: A \rightarrow C$ を取る. C が余完備だから, 定理 25 により普遍随伴 $y^\dagger F \dashv F^\dagger y: \widehat{A} \rightarrow C$ を得る.



$F^\dagger y$ が本質的全射かつ忠実充満であることを示せばよい. その為にまず $F^\dagger y$ が余連続であることを示す.

$\therefore c \in C$ に対して $F^\dagger y(c) \cong \text{Hom}_C(F-, c)$ である. よって

$$\text{Hom}_C(F-, \text{colim}_j c_j) \cong \text{colim}_j \text{Hom}_C(F-, c_j)$$

を示せばよい. \widehat{A} の余極限は各点ごとに計算すればよいから, $a \in A$ に対して $\text{Hom}_C(a, \text{colim}_j c_j) \cong \text{colim}_j \text{Hom}_C(a, c_j)$ を示せばよい. ところがいま $a \in A$ は small projective なのでこれは成り立つ.

本質的全射であることを示すため, $P \in \widehat{A}$ を取る. 系 17 により $P \cong \text{colim}_j y(a_j)$ と

書ける. $c := \operatorname{colim}_j F(a_j) \in C$ と置けば, $F^\dagger y \cong \operatorname{Hom}_C(F-, \square)$ が余連続だから

$$F^\dagger y(c) \cong \operatorname{colim}_j \operatorname{Hom}_C(F-, F(a_j)) \cong \operatorname{colim}_j \operatorname{Hom}_A(-, a_j) = \operatorname{colim}_j y(a_j) \cong P$$

となり, $F^\dagger y$ は本質的全射である.

$F^\dagger y$ が忠実充満であることを示す. その為には F が稠密であること, 即ち $c \in C$ に対して $\operatorname{colim}(F \downarrow c \rightarrow A \xrightarrow{F} C) \cong c$ を示せばよい. $G := (F \downarrow c \rightarrow A \xrightarrow{F} C)$ とする. まず C が余完備なので G の余極限が存在するから, それを $\mu: G \Rightarrow \Delta(\operatorname{colim} G)$ とする. $\langle a, f \rangle \in F \downarrow c$ に対して $\theta_{\langle a, f \rangle} := f: Fa \rightarrow c$ と定義すればこれは自然変換 $\theta: G \Rightarrow \Delta c$ を定める. $\operatorname{colim} G$ の普遍性から $h: \operatorname{colim} G \rightarrow c$ が一意に存在して $h \circ \mu_{\langle a, f \rangle} = \theta_{\langle a, f \rangle}$ となる.

$$\begin{array}{ccc} G\langle a, f \rangle & \xrightarrow{\theta_{\langle a, f \rangle}} & c \\ \downarrow & \searrow \mu_{\langle a, f \rangle} & \nearrow h \\ & \operatorname{colim} G & \dashrightarrow c \\ \downarrow & \nearrow \mu_{\langle b, g \rangle} & \nearrow \\ G\langle b, f \rangle & \xrightarrow{\theta_{\langle b, g \rangle}} & c \end{array}$$

今 $F^\dagger y$ が余連続だから $(F^\dagger y)\mu: F^\dagger y \circ G \Rightarrow \Delta(F^\dagger y(\operatorname{colim} G))$ も余極限である.

$$\begin{array}{ccc} F^\dagger y(G\langle a, f \rangle) & \xrightarrow{F^\dagger y(\theta_{\langle a, f \rangle})} & F^\dagger y(c) \\ \downarrow & \searrow F^\dagger y(\mu_{\langle a, f \rangle}) & \nearrow F^\dagger y(h) \\ & F^\dagger y(\operatorname{colim} G) & \dashrightarrow F^\dagger y(c) \\ \downarrow & \nearrow F^\dagger y(\mu_{\langle b, g \rangle}) & \nearrow \\ F^\dagger y(G\langle b, f \rangle) & \xrightarrow{F^\dagger y(\theta_{\langle b, g \rangle})} & F^\dagger y(c) \end{array}$$

ところで定理 20 より

$$\begin{aligned} F^\dagger y \circ G &= (F \downarrow c \rightarrow A \xrightarrow{F} C \xrightarrow{F^\dagger y} \widehat{A}) \\ &\cong (F \downarrow c \rightarrow A \xrightarrow{y} \widehat{A}) \end{aligned}$$

だから, 各点 Kan 拡張により $\operatorname{colim}(F^\dagger y \circ G) = \operatorname{colim}(F \downarrow c \rightarrow A \xrightarrow{y} \widehat{A}) \cong F^\dagger y(c)$ となる. 故に余極限 $F^\dagger y(\operatorname{colim} G)$ の普遍性から, $F^\dagger y(h)$ は同型射となる. 今 F が strongly generating だったから $F^\dagger y$ は conservative であり, よって h は同型射である. 即ち $\operatorname{colim} G \cong c$ である. \square

定理 33. 小圏 C 上の前層 P に対して圏同値 $\widehat{y \downarrow P} \cong \widehat{C}/P$ が成り立つ. (特に $a \in C$ に対して $P := y(a)$ の場合を考えると, $y \downarrow y(a) = C/a$ だから $\widehat{C}/a \cong \widehat{C}/y(a)$ となる.)

証明. $y \downarrow P$ は充満部分圏 $y \downarrow P \subset \widehat{C}/P$ とみなせる. 米田埋込 $y \downarrow P \rightarrow \widehat{y \downarrow P}$ をここでは区別の為 z と書くことにし, 包含関手を $F: y \downarrow P \rightarrow \widehat{C}/P$ とすると, 定理 25 により普遍随伴 $z^\dagger F \dashv F^\dagger z: \widehat{y \downarrow P} \rightarrow \widehat{C}/P$ を得る.

$$\begin{array}{ccc}
 \widehat{y \downarrow P} & & \\
 \uparrow z & \swarrow z^\dagger F & \\
 y \downarrow P & \xrightarrow{F} & \widehat{C}/P
 \end{array}$$

この随伴が圏同値 $\widehat{y \downarrow P} \cong \widehat{C}/P$ を与えることを示す. 定理 32 (の証明) によれば

- (1) \widehat{C}/P が余完備.
- (2) 包含関手 $F: y \downarrow P \rightarrow \widehat{C}/P$ が strongly generating.
- (3) 任意の $\langle a, x \rangle \in y \downarrow P$ が small projective.

を示せばよい.

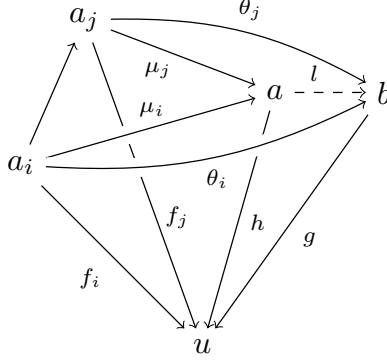
(1) \widehat{C} が余完備だから, 余完備な圏 U と対象 $u \in U$ に対して U/u が余完備であることを示せばよい. その為に J を小圏として $T: J \rightarrow U$ を関手とする. $i \in J$ に対して $Ti = \langle a_i, f_i \rangle \in U/u$ と書くことにする. 射影関手を $P: U/u \rightarrow U$ とすると U が余完備だから $PT: J \rightarrow U$ の余極限 $\langle a, \mu \rangle$ が存在する. 余極限の普遍性から, 次の点線の射 h が存在し可換となる.

$$\begin{array}{ccccc}
 a_j & & & f_j & \\
 & \searrow & & \nearrow & \\
 & & a & \xrightarrow{h} & u \\
 & \nearrow & & \searrow & \\
 a_i & & & f_i & \\
 \uparrow & & & & \\
 & & & &
 \end{array}$$

よって μ_i は U/u の射 $\mu_i: \langle a_i, f_i \rangle \rightarrow \langle a, h \rangle$ を与える.

$\text{colim } T = \langle a, h \rangle$ となることを示そう. その為に $\theta: T \Rightarrow \Delta \langle b, g \rangle$ を自然変換とすると

次の実線の可換図式が得られる.



$\text{colim } PT = \langle a, \mu \rangle$ の普遍性により, 点線の射 l が存在して $l \circ \mu_i = \theta_i$ となる. このとき $\text{colim } PT$ の普遍性により $g \circ l = h$ である. 故に l は U/u の射 $l: \langle a, h \rangle \rightarrow \langle b, g \rangle$ を与える. 再び $\text{colim } PT$ の普遍性から, このような l は明らかに一意である. 従って $\text{colim } T = \langle a, h \rangle$ となることが分かった.

(2) まず \widehat{C}/P の対象 $\tau: Q \Rightarrow P$ に対して $F^\dagger z(\tau) = \text{Hom}_{\widehat{C}/P}(-, \tau) \in \widehat{y \downarrow P}$ は次で与えられる.

- $\langle a, u \rangle \in y \downarrow P$ に対して $\text{Hom}_{\widehat{C}/P}(\langle a, u \rangle, \tau) = \{s \in Qa \mid \tau_a(s) = u\}$ である.
- $y \downarrow P$ の射 $f: \langle a, u \rangle \rightarrow \langle b, v \rangle$ に対して

$$\text{Hom}_{\widehat{C}/P}(f, \tau): \{s \in Qb \mid \tau_b(s) = v\} \longrightarrow \{t \in Qa \mid \tau_a(t) = u\}$$

$$\begin{array}{ccc} \Downarrow & & \Downarrow \\ s \mapsto & \longrightarrow & Qf(s) \end{array}$$

次に $\alpha: \langle Q, \tau \rangle \rightarrow \langle R, \rho \rangle$ を \widehat{C}/P の射とすると $F^\dagger z(\alpha)$ は自然変換であり, その $\langle a, u \rangle$ 成分は

$$F^\dagger z(\alpha)_{\langle a, u \rangle}: \{s \in Qa \mid \tau_a(s) = u\} \longrightarrow \{t \in Ra \mid \rho_a(t) = u\}$$

$$\begin{array}{ccc} \Downarrow & & \Downarrow \\ s \mapsto & \longrightarrow & \alpha_a(s) \end{array}$$

で与えられる.

$F^\dagger z$ が conservative であることを示す為, $F^\dagger z(\alpha)$ が自然同型であるとする. つまり各 $\langle a, u \rangle \in y \downarrow P$ に対して $F^\dagger z(\alpha)_{\langle a, u \rangle}$ は全単射である. このとき $a \in C$ に対して $\alpha_a: Qa \rightarrow Ra$ が全単射であることを示せばよい.

単射であることを示すため $s, t \in Qa$ が $\alpha_a(s) = \alpha_a(t)$ を満たすとする. このとき

$$\tau_a(s) = \rho_a \circ \alpha_a(s) = \rho_a \circ \alpha_a(t) = \tau_a(t)$$

である。よって $u := \tau_a(s)$ とすると $s, t \in \text{dom}(F^\dagger z(\alpha)_{\langle a, u \rangle})$ であり

$$F^\dagger z(\alpha)_{\langle a, u \rangle}(s) = \alpha_a(s) = \alpha_a(t) = F^\dagger z(\alpha)_{\langle a, u \rangle}(t)$$

だから $F^\dagger z(\alpha)_{\langle a, u \rangle}$ の単射性により $s = t$ が分かる。

全射であることを示すため $t \in Ra$ とする。 $u := \rho_a(t)$ とすれば $t \in \text{cod}(F^\dagger z(\alpha)_{\langle a, u \rangle})$ である。故に $s \in \text{dom}(F^\dagger z(\alpha)_{\langle a, u \rangle})$ が存在して $F^\dagger z(\alpha)_{\langle a, u \rangle}(s) = t$ とできる。このとき明らかに $\alpha_a(s) = t$ である。

(3) $\langle a, u \rangle \in y \downarrow P$ に対して $\text{Hom}_{\widehat{C}/P}(\langle a, u \rangle, -)$ が余連続であることを示す。

J を小圏として $T: J \rightarrow \widehat{C}/P$ を関手とする。 $i \in J$ に対して $T(i) = \langle Q^i, \tau^i \rangle$ と書き、 $\text{colim } T = \langle \langle R, \rho \rangle, \mu \rangle$ と書くことにする。このとき図式

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\widehat{C}/P}(\langle a, u \rangle, T(i)) & \xrightarrow{\text{Hom}_{\widehat{C}/P}(\langle a, u \rangle, \mu^i)} & \text{Hom}_{\widehat{C}/P}(\langle a, u \rangle, \rho) \\ \downarrow & \nearrow & \\ \text{Hom}_{\widehat{C}/P}(\langle a, u \rangle, T(j)) & \xrightarrow{\text{Hom}_{\widehat{C}/P}(\langle a, u \rangle, \mu^j)} & \end{array}$$

が $\text{colim } \text{Hom}_{\widehat{C}/P}(\langle a, u \rangle, T-)$ を与えることを示せばよい。上記で計算した通り、この図式は

$$\begin{array}{ccc} \{s \in Q^i a \mid \tau_a^i(s) = u\} & \xrightarrow{\mu^i} & \{s \in Ra \mid \rho_a(s) = u\} \\ \downarrow & \nearrow & \\ \{s \in Q^j a \mid \tau_a^j(s) = u\} & \xrightarrow{\mu^j} & \end{array} \quad (*)$$

である。ここで (1) で示した通り $R = \text{colim}_i Q^i$ であり、 ρ はその普遍性により得られる射である。次の (i)(ii) の場合に (*) が余極限を与えることを示せばよい。

(i) J が離散圏の場合、図式 (*) は次のようになる。

$$\begin{array}{ccc} \{s \in Q^i a \mid \tau_a^i(s) = u\} & \xrightarrow{\mu^i} & \left\{s \in \prod_{i \in J} Q^i a \mid \rho_a(s) = u\right\} \\ \xrightarrow{\mu^j} & & \\ \{s \in Q^j a \mid \tau_a^j(s) = u\} & & \end{array}$$

ρ の取り方から明らかに $\left\{s \in \prod_{i \in J} Q^i a \mid \rho_a(s) = u\right\} = \prod_{i \in J} \{s \in Q^i a \mid \tau_a^i(s) = u\}$ だからこの場合は良い。

(ii) $J = (j \leftarrow i \rightarrow k)$ の場合, 図式 (*) は次のようになる.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \{s \in Q^j a \mid \tau_a^j(s) = u\} & & \\
 & \nearrow & & \searrow^{\mu^j} & \\
 \{s \in Q^i a \mid \tau_a^i(s) = u\} & & & & \{s \in Ra \mid \rho_a(s) = u\} \\
 & \searrow & & \nearrow_{\mu^k} & \\
 & & \{s \in Q^k a \mid \tau_a^k(s) = u\} & &
 \end{array}$$

ここで $Ra = (Q_a^j \amalg Q_a^k) / \sim$ であり, ρ の取り方から

$$\{s \in Ra \mid \rho_a(s) = u\} = (\{s \in Q_a^j \mid \tau_a^j(s) = u\} \amalg \{s \in Q_a^k \mid \tau_a^k(s) = u\}) / \sim$$

となるからこの場合も良い. □

参考文献

- [1] Saunders Mac Lane, Categories for the Working Mathematician, Springer, 2nd ed. 1978 版 (1998)
- [2] ft_math さんによる圏論祭, 2012 年 12 月 8 日, http://alg-d.com/math/ft_math/
- [3] ft_math さんによる圏論祭, 2013 年 12 月 7 日・8 日, http://alg-d.com/math/ft_math/