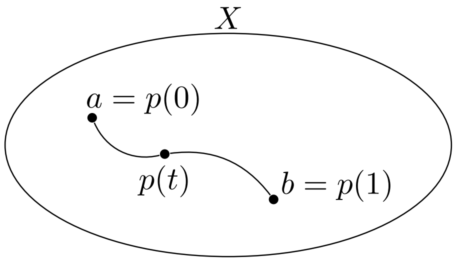
例: 基本亜群

alg-d
http://alg-d.com/math/kan_extension/

2017 年 9 月 23 日

ここでは I で閉区間 $[0,1] \subset \mathbb{R}$ を表すことにする.

定義. X を位相空間として $a, b \in X$ を取る. X における a から b への道 (path) とは, 連続写像 $p\colon I \longrightarrow X$ であって $p(0) = a$, $p(1) = b$ となるものをいう.



例 1. X を位相空間で $a \in X$ とするとき, 写像 $c_a\colon I \longrightarrow X$ を $c_a(t) := a$ により定義すれば c_a は a から a への道である. □

例 2. X を位相空間, $a, b, c \in X$ とする. p を a から b への道, q を b から c への道とするとき, 写像 $q * p\colon I \longrightarrow X$ を

$$q * p(t) := \begin{cases} p(2t) & \left(0 \leq t \leq \dfrac{1}{2}\right) \\ q(2t-1) & \left(\dfrac{1}{2} < t \leq 1\right) \end{cases}$$

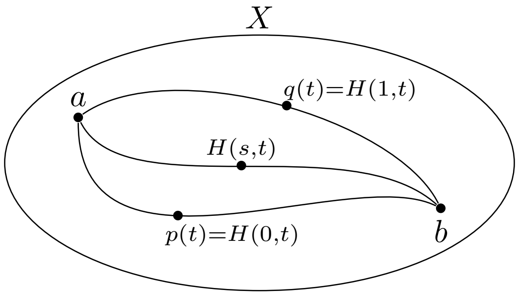
で定義すれば $q * p$ は a から c への道である. □

例 3. p を a から b への道とする. このとき, 写像 $\bar{p}\colon I \longrightarrow X$ を $\bar{p}(t) := p(1-t)$ で定義すれば $\bar{p}$ は b から a への道である. □

定義. X を位相空間で $a,b \in X$ として，p,q を a から b への道とする．p から q へのホモトピー (homotopy) とは，連続写像 $H\colon I^2 \longrightarrow X$ であって

$$H(0,t)=p(t), \quad H(1,t)=q(t), \quad H(s,0)=a, \quad H(s,1)=b$$

を満たすものをいう．



p から q へのホモトピーが存在するとき，p と q はホモトープであるといい，ここでは記号 $p \sim q$ で表す．

a から b への道全体がなす集合を $\mathrm{Path}(a,b)$ と書くと，$\sim$ は $\mathrm{Path}(a,b)$ に同値関係を定めることが分かる．$p \in \mathrm{Path}(a,b)$ の属する同値類を $[p]$ と書くことにする．

定義. 位相空間 X の基本亜群 (fundamental groupoid) とは，以下で定義される圏 $\Pi(X)$ のことをいう．

- $\mathrm{Ob}(\Pi(X)) := X$.
- $a,b \in X$ に対して $\mathrm{Hom}_{\Pi(X)}(a,b) := \mathrm{Path}(a,b)/\sim$.
- $[q] \circ [p] := [q * p]$.
- $a \in X$ に対して $\mathrm{id}_a := [c_a]$.

ここで，亜群とは次のように定義される．

定義. 亜群 (groupoid) とは，任意の射が同型射となる圏のことをいう[*1]．

命題 4. 基本亜群は亜群である．

証明. 射 $[p]$ の逆射が $[\bar{p}]$ で与えられるからである． □

X,Y を位相空間，$F\colon X \longrightarrow Y$ を連続写像とする．このとき $p \in \mathrm{Path}(a,b)$ に対して $F \circ p \in \mathrm{Path}(F(a),F(b))$ である．よって $\Pi(F)$ を

[*1] 二項演算が入った集合のことを亜群と呼ぶ場合もある．

- 対象 $a \in \Pi(X)$ に対して $\Pi(F)(a) := F(a)$.
- 射 $[p]\colon a \longrightarrow b$ に対して $\Pi(F)([p]) := [F \circ p]\colon F(a) \longrightarrow F(b)$.

と定義すると，これは関手 $\Pi(F)\colon \Pi(X) \longrightarrow \Pi(Y)$ を定める.

$\because$) 簡単のため $K := \Pi(F)$ と書く．K が関手の条件を満たすことを示す.
　まず $\mathrm{id}_a = [c_a]$ だから

$$K(\mathrm{id}_a) = K([c_a]) = [F \circ c_a] = [c_{F(a)}] = \mathrm{id}_{F(a)}$$

となり $K(\mathrm{id}_a) = \mathrm{id}_{F(a)}$ はよい.
　次に $[p]\colon a \longrightarrow b$，$[q]\colon b \longrightarrow c$ とするとき

$$\begin{aligned} K([q] \circ [p]) = K([q * p]) = [F \circ (q * p)] &= [(F \circ q) * (F \circ p)] \\ = [F \circ q] \circ [F \circ p] &= K([q]) \circ K([p]) \end{aligned}$$

だから $K([q] \circ [p]) = K([q]) \circ K([p])$ も成り立つ.

　以上のように定義した $\Pi(X), \Pi(F)$ について次の定理を得る.

定理 5. この Π は関手 $\Pi\colon \mathbf{Top} \longrightarrow \mathbf{Cat}$ を定める.

証明. $\Pi(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{\Pi(X)}$ は明らかだから，連続写像 $F\colon X \longrightarrow Y$，$G\colon Y \longrightarrow Z$ に対して $\Pi(G \circ F) = \Pi(G) \circ \Pi(F)$ を示す．それは $a, b \in X$ として射 $[p]\colon a \longrightarrow b$ に対して

$$\Pi(G) \circ \Pi(F)([p]) = \Pi(G)([F \circ p]) = [G \circ (F \circ p)] = [(G \circ F) \circ p] = \Pi(G \circ F)([p])$$

より分かる. □

定義. X を位相空間，A を集合とするとき $X \cap A \subset \mathrm{Ob}(\Pi(X))$ が定める $\Pi(X)$ の充満部分圏を $\pi_1(X, A)$ で表す．特に $a \in X$ に対して $\pi_1(X, \{a\})$ を単に $\pi_1(X, a)$ と書き，a を基点とする X の基本群という.

　一般に圏 C の対象 $a \in C$ に対して，a から定まる充満部分圏 $\{a\} \subset C$ を考えると，$\{a\}$ は対象が 1 つだからモノイドである．特に C が亜群であれば，明らかに $\{a\}$ は群である．故に次の命題が成り立つ.

命題 6. 基本群は群である. □

命題 7. C を圏，$a, b \in C$ を対象として充満部分圏 $\{a\}, \{b\} \subset C$ を考える．$f\colon a \longrightarrow b$ を同型射とすると写像 $F\colon \mathrm{Hom}_C(a, a) \longrightarrow \mathrm{Hom}_C(b, b)$ が $F(g) := f \circ g \circ f^{-1}$ で与えら

れるが，この F は同型関手 $F\colon \{a\} \longrightarrow \{b\}$ (即ちモノイドの同型) を与える．

証明. $Fa := b$ と定義する．まず明らかに $F(\mathrm{id}_a) = \mathrm{id}_b$ であり，また $g, h\colon a \longrightarrow a$ に対して

$$F(h \circ g) = f \circ (h \circ g) \circ f^{-1} = (f \circ h \circ f^{-1}) \circ (f \circ g \circ f^{-1}) = F(h) \circ F(g)$$

である．ゆえに F は関手を定める．この F は明らかに同型関手である． □

この命題を基本群の場合に適用することで，次の命題と系を得る．

命題 8. X を位相空間，$a, b \in X$ として a から b への道が存在するとする．このとき $\pi_1(X, a) \cong \pi_1(X, b)$ である． □

系 9. X が弧状連結空間ならば任意の $a, b \in X$ に対して $\pi_1(X, a) \cong \pi_1(X, b)$. □

ここでは証明しないが次の定理が知られている．

定理 10. X を位相空間，$U, V \subset X$ を開集合として $X = U \cup V$ であるとする．集合 A が $U, V, U \cap V$ の各弧状連結成分と共通部分を持つとき，次の図式は groupoid の圏における pushout である．

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(U \cap V, A) \arrow[r] \arrow[d] & \pi_1(V, A) \arrow[d] \\
\pi_1(U, A) \arrow[r] & \pi_1(X, A)
\end{tikzcd}$$

この定理で $A := \{a\}$ $(a \in X)$ とすることで，いわゆる Seifert-van Kampen の定理を得る．

系 11 (Seifert-van Kampen の定理)**.** X を位相空間，$U, V \subset X$ を弧状連結開集合として $X = U \cup V$ であるとする．$U \cap V$ が弧状連結で $a \in U \cap V$ のとき，次の図式は **Grp** における pushout である．

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(U \cap V, a) \arrow[r] \arrow[d] & \pi_1(V, a) \arrow[d] \\
\pi_1(U, a) \arrow[r] & \pi_1(X, a)
\end{tikzcd}$$

□

参考文献

[1] クゼ・コスニオフスキ, トポロジー入門, 東京大学出版会, 1983 年