

例: 基本亜群

alg-d

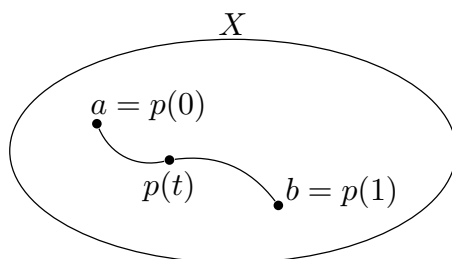
http://alg-d.com/math/kan_extension/

2021年11月6日

既に「圏論とは何か」のPDFで例として「基本群」を取り上げた。ここでは基本群の概要を説明するが、そのためにそれをより一般化した「基本亜群」を取り上げる。

以下、この節では I で閉区間 $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ を表すことにする。

定義. X を位相空間として $a, b \in X$ を取る. X における a から b への道 (path) とは, 連続写像 $p: I \rightarrow X$ であって $p(0) = a$, $p(1) = b$ となるものをいう.



例 1. X を位相空間で $a \in X$ とするとき, 写像 $c_a: I \rightarrow X$ を $c_a(t) := a$ により定義すれば c_a は a から a への道である. \square

例 2. X を位相空間, $a, b, c \in X$ とする. p を a から b への道, q を b から c への道とすると, 写像 $q * p: I \rightarrow X$ を

$$q * p(t) := \begin{cases} p(2t) & \left(0 \leq t \leq \frac{1}{2}\right) \\ q(2t - 1) & \left(\frac{1}{2} < t \leq 1\right) \end{cases}$$

で定義すれば $q * p$ は a から c への道である. \square

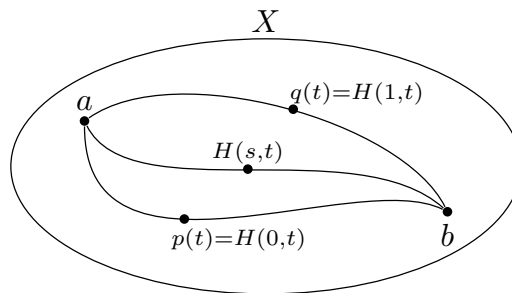
例 3. p を a から b への道とする. このとき, 写像 $\bar{p}: I \rightarrow X$ を $\bar{p}(t) := p(1 - t)$ で定義

すれば \bar{p} は b から a への道である。 □

定義. X を位相空間で $a, b \in X$ として, p, q を a から b への道とする. p から q へのホモトピー (homotopy) とは, 連続写像 $H: I^2 \rightarrow X$ であって

$$H(0, t) = p(t), \quad H(1, t) = q(t), \quad H(s, 0) = a, \quad H(s, 1) = b$$

を満たすものをいう.



p から q へのホモトピーが存在するとき, p と q はホモトープであるといい, ここでは記号 $p \sim q$ で表す.

a から b への道全体がなす集合を $\text{Path}(a, b)$ と書くと, \sim は $\text{Path}(a, b)$ に同値関係を定めることが分かる. $p \in \text{Path}(a, b)$ の属する同値類を $[p]$ と書くことにする.

定義. 位相空間 X の基本亜群 (fundamental groupoid) とは, 以下で定義される圏 $\Pi(X)$ のことをいう.

- $\text{Ob}(\Pi(X)) := X$.
- $a, b \in X$ に対して $\text{Hom}_{\Pi(X)}(a, b) := \text{Path}(a, b) / \sim$.
- $[q] \circ [p] := [q * p]$.
- $a \in X$ に対して $\text{id}_a := [c_a]$.

ここで, 亜群とは次のように定義される.

定義. 亜群 (groupoid) とは, 任意の射が同型射となる圏のことをいう^{*1}.

命題 4. 基本亜群は亜群である.

証明. 射 $[p]$ の逆射が $[\bar{p}]$ で与えられるからである。 □

^{*1} 二項演算が入った集合のことを亜群と呼ぶ場合もある.

X, Y を位相空間, $F: X \rightarrow Y$ を連続写像とする. このとき $p \in \text{Path}(a, b)$ に対して $F \circ p \in \text{Path}(F(a), F(b))$ である. よって $\Pi(F)$ を

- 対象 $a \in \Pi(X)$ に対して $\Pi(F)(a) := F(a)$.
- 射 $[p]: a \rightarrow b$ に対して $\Pi(F)([p]) := [F \circ p]: F(a) \rightarrow F(b)$.

と定義すると, これは関手 $\Pi(F): \Pi(X) \rightarrow \Pi(Y)$ を定める.

∴) 簡単のため $K := \Pi(F)$ と書く. K が関手の条件を満たすことを示す.

まず $\text{id}_a = [c_a]$ だから

$$K(\text{id}_a) = K([c_a]) = [F \circ c_a] = [c_{F(a)}] = \text{id}_{F(a)} = \text{id}_{K(a)}$$

となり $K(\text{id}_a) = \text{id}_{K(a)}$ はよい.

次に $[p]: a \rightarrow b$, $[q]: b \rightarrow c$ とするとき

$$\begin{aligned} K([q] \circ [p]) &= K([q * p]) = [F \circ (q * p)] = [(F \circ q) * (F \circ p)] \\ &= [F \circ q] \circ [F \circ p] = K([q]) \circ K([p]) \end{aligned}$$

だから $K([q] \circ [p]) = K([q]) \circ K([p])$ も成り立つ.

以上のように定義した $\Pi(X), \Pi(F)$ について次の定理を得る.

定理 5. この Π は関手 $\Pi: \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{CAT}$ を定める.

証明. まず $\Pi(\text{id}_X) = \text{id}_{\Pi(X)}$ は明らかである. よって連続写像 $F: X \rightarrow Y$, $G: Y \rightarrow Z$ に対して $\Pi(G \circ F) = \Pi(G) \circ \Pi(F)$ を示す. それは $a, b \in X$ として射 $[p]: a \rightarrow b$ に対して

$$\Pi(G) \circ \Pi(F)([p]) = \Pi(G)([F \circ p]) = [G \circ (F \circ p)] = [(G \circ F) \circ p] = \Pi(G \circ F)([p])$$

より分かる. □

定義. X を位相空間, A を集合とすると $X \cap A \subset \text{Ob}(\Pi(X))$ が定める $\Pi(X)$ の充満部分圏を $\pi_1(X, A)$ で表す. 特に $a \in X$ に対して $\pi_1(X, \{a\})$ を単に $\pi_1(X, a)$ と書き, a を基点とする X の基本群という.

一般に圏 C の対象 $a \in C$ に対して, a から定まる充満部分圏 $\{a\} \subset C$ を考えると, この圏 $\{a\}$ は対象が1つだからモノイドである. 特に C が垂群であれば, 明らかに $\{a\}$ は群である. 故に次の命題が成り立つ.

命題 6. 基本群は群である. □

命題 7. C を圏, $a, b \in C$ を対象として充満部分圏 $\{a\}, \{b\} \subset C$ を考える. $f: a \rightarrow b$ を同型射とすると写像 $F: \text{Hom}_C(a, a) \rightarrow \text{Hom}_C(b, b)$ が $F(g) := f \circ g \circ f^{-1}$ で与えられるが, この F は同型関手 $F: \{a\} \rightarrow \{b\}$ (即ちモノイドの同型) を与える.

証明. $Fa := b$ と定義する. まず明らかに $F(\text{id}_a) = \text{id}_b$ であり, また $g, h: a \rightarrow a$ に対して

$$F(h \circ g) = f \circ (h \circ g) \circ f^{-1} = (f \circ h \circ f^{-1}) \circ (f \circ g \circ f^{-1}) = F(h) \circ F(g)$$

である. ゆえに F は関手を定める. この F は明らかに同型関手である. □

この命題を基本群の場合に適用することで, 次の命題と系を得る.

命題 8. X を位相空間, $a, b \in X$ として a から b への道が存在するとする. このとき $\pi_1(X, a) \cong \pi_1(X, b)$ である. □

系 9. X が弧状連結空間ならば任意の $a, b \in X$ に対して $\pi_1(X, a) \cong \pi_1(X, b)$. □

ここでは証明しないが次の定理が知られている.

定理 10. X を位相空間, $U, V \subset X$ を開集合として $X = U \cup V$ であるとする. 集合 A が $U, V, U \cap V$ の各弧状連結成分と共通部分を持つとき, 次の図式は groupoid の圏における pushout である.

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(U \cap V, A) & \longrightarrow & \pi_1(V, A) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \pi_1(U, A) & \longrightarrow & \pi_1(X, A) \end{array}$$

この定理で $A := \{a\}$ ($a \in X$) とすることで, いわゆる Seifert-van Kampen の定理を得る.

系 11 (Seifert-van Kampen の定理). X を位相空間, $U, V \subset X$ を弧状連結開集合として $X = U \cup V$ であるとする. $U \cap V$ が弧状連結で $a \in U \cap V$ のとき, 次の図式は \mathbf{Grp} における pushout である.

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(U \cap V, a) & \longrightarrow & \pi_1(V, a) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \pi_1(U, a) & \longrightarrow & \pi_1(X, a) \end{array}$$

□

参考文献

- [1] クゼ・コスニオフスキ, トポロジー入門, 東京大学出版会, 1983 年