フィルター圏

alg-d
http://alg-d.com/math/kan_extension/

2019 年 3 月 15 日

定義. 圏 C がフィルター圏 (filtered category)
$\Longleftrightarrow$ 任意の有限圏 J と関手 $F\colon J \to C$ に対して，ある対象 $c \in C$ と自然変換 $F \Rightarrow \Delta c$ が存在する．

定義. 圏 C が余フィルター圏 (cofiltered category) $\Longleftrightarrow$ C^{op} がフィルター圏となる．

命題 1. 圏 C がフィルター圏 $\Longleftrightarrow$ 以下の条件[*1]を満たす．

(1) C は空でない．

(2) 任意の $c_0, c_1 \in C$ に対して，ある $c \in C$ と射 $f_0\colon c_0 \to c$，$f_1\colon c_1 \to c$ が存在する．

$$\begin{tikzcd} c_0 \arrow[dr, dashed, "f_0"] & \\ & c \\ c_1 \arrow[ur, dashed, "f_1"'] & \end{tikzcd}$$

(3) 任意の $c_0, c_1 \in C$ と $f_0, f_1\colon c_0 \to c_1$ に対して，ある $c \in C$ と $g\colon c_1 \to c$ が存在して $g \circ f_0 = g \circ f_1$ となる．

$$\begin{tikzcd} c_0 \arrow[r, shift left, "f_0"] \arrow[r, shift right, "f_1"'] & c_1 \arrow[r, dashed, "g"] & c \end{tikzcd}$$

証明. ($\Longrightarrow$) 明らか．

($\Longleftarrow$) J を有限圏，$F\colon J \to C$ を関手とする．J の恒等射でない射の個数 n に関する帰納法．$n = 0$ のときは条件 2 を繰り返し使えばよい．

$n > 0$ とする．このとき部分圏 $K \subset J$ を $\mathrm{Ob}(K) = \mathrm{Ob}(J)$，かつ K の恒等射でない射の個数が $n-1$ となるものが取れる．帰納法の仮定により自然変換 $\varphi\colon F|_K \Rightarrow \Delta c$ が取れ

[*1] この条件をフィルター圏の定義にしている文献もある．

る．K に含まれない J の射を $f\colon u \to v$ とする．二つの射 $\varphi_v \circ Ff$, $\varphi_u\colon Fu \to c$ に対して条件 3 を適用することで，射 $g\colon c \to d$ を $g \circ \varphi_v \circ Ff = g \circ \varphi_u$ となるように取れる．

$$
\begin{tikzcd}
Fu \arrow[r] \arrow[rrrr, bend left, "Ff"] \arrow[drr, "\varphi_u"'] & Fa \arrow[dr, "\varphi_a"] & \cdots & Fb \arrow[r] \arrow[dl, "\varphi_b"'] & Fv \arrow[dll, "\varphi_v"] \\
 & & c \arrow[d, dashed, "g"] & & \\
 & & d & &
\end{tikzcd}
$$

このとき $j \in J$ に対して $\psi_j := g \circ \varphi_j$ とすれば $\psi\colon F \Rightarrow \Delta d$ が自然変換となる． □

例 2. 有限余完備な圏はフィルター圏である．

証明. 有限圏 J と関手 F に対して，自然変換 $F \Rightarrow \Delta(\operatorname{colim} F)$ が存在する． □

例 3. 終対象を持つ圏は明らかにフィルター圏である． □

例 4. 順序集合 X を圏とみなしたとき，これがフィルター圏となるのは，命題 1 より X が空でない有向集合となるときである． □

定義. 添え字圏がフィルター圏となる余極限をフィルター余極限 (filtered colimit) という．

Set において，フィルター余極限は有限極限と交換するという重要な性質がある．即ち

命題 5. I がフィルター圏のとき，関手 $\operatorname{colim}\colon \mathbf{Set}^I \to \mathbf{Set}$ は有限極限と交換する．故に，J が有限な圏で $T\colon I \times J \to \mathbf{Set}$ が関手のとき同型

$$\operatorname*{colim}_{i \in I} \lim_{j \in J} T(i,j) \cong \lim_{j \in J} \operatorname*{colim}_{i \in I} T(i,j).$$

が成り立つ．

証明. $\operatorname{colim}\colon \mathbf{Set}^I \to \mathbf{Set}$ が終対象と pullback と交換することを示せばよい．

まず終対象について示す．$\operatorname{colim}(\Delta 1) \cong \left(\coprod_{i \in I} 1\right)/\sim$ である．I がフィルター圏だから $\operatorname{colim}(\Delta 1) \cong 1$ となり，colim が終対象と交換することが分かった．

次に pullback について示す．次の図式を $\mathbf{Set}^I$ の pullback とする．

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\pi_1"] \arrow[d, "\pi_0"'] & P_1 \arrow[d] \\ P_0 \arrow[r] & Q \end{tikzcd}$$

$\mathbf{Set}^I$ の極限は各点ごとに計算すればよいから，$i \in I$ に対して $Xi \cong P_0 i \times_{Qi} P_1 i$ である．故に

$$\operatorname{colim} X \cong \Big(\coprod_{i \in I} P_0 i \times_{Qi} P_1 i\Big)/\sim$$
$$\operatorname{colim} P_k \cong \Big(\coprod_{i \in I} P_k i\Big)/\sim$$

で，$\operatorname{colim}(\pi_k)$ は $\operatorname{colim}(\pi_k)([\langle u_0, u_1\rangle]) = [u_k]$ で与えられる．pullback の普遍性から点線の射 h が得られる．

$$\begin{tikzcd} \operatorname{colim} X \arrow[dr, dashed, "h"] \arrow[drr, bend left, "\operatorname{colim}(\pi_1)"] \arrow[ddr, bend right, "\operatorname{colim}(\pi_0)"'] & & \\ & \operatorname{colim} P_0 \times_{\operatorname{colim} Q} \operatorname{colim} P_1 \arrow[r, "p_1"'] \arrow[d, "p_0"] & \operatorname{colim} P_1 \arrow[d] \\ & \operatorname{colim} P_0 \arrow[r] & \operatorname{colim} Q \end{tikzcd}$$

この h が全単射であることが容易にわかる．よって colim は pullback と交換する．　□

補題 6. $F\colon C \to D$ を関手とする．$a \in C$ を対象として $E := \operatorname{Hom}_C(a, -)$ とする．このとき $F^\dagger E = \operatorname{Hom}_D(Fa, -)$ である．従って $F = y$ のとき $y^\dagger E = \mathrm{ev}_a$ である．

証明. 米田の補題により $\operatorname{Hom}_{\mathbf{Set}^C}(E, \operatorname{Hom}_D(Fa, F-)) \cong \operatorname{Hom}_D(Fa, Fa)$ である．この同型で右辺の id_{Fa} に対応する自然変換を $\eta\colon E \Rightarrow \operatorname{Hom}_D(Fa, F-)$ とする．

$$\begin{tikzcd} D \arrow[dr, "\operatorname{Hom}_D(Fa,-)"] & \\ C \arrow[u, "F"] \arrow[r, "E"'] \arrow[ur, phantom, "\eta\Uparrow"] & \mathbf{Set} \end{tikzcd}$$

このとき $\langle \operatorname{Hom}_D(Fa, -), \eta\rangle$ が F に沿った E の左 Kan 拡張であることを示す．

そのために任意の関手 $S\colon D \to \mathbf{Set}$ と自然変換 $\theta\colon E \Rightarrow SF$ を取る．米田の補題から得られる次の同型で θ に対応する τ を取る．

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}^C}(E, SF) & \xrightarrow{\cong} & SFa & \xrightarrow{\cong} & \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}^D}(\mathrm{Hom}_D(Fa, -), S) \\
\Cup & & & & \Cup \\
\theta & & \longmapsto & & \tau
\end{array}$$

米田の補題の証明より，$\theta_a(\mathrm{id}_a) = \tau_{Fa}(\mathrm{id}_{Fa})$ である．このとき等式

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[rd] \arrow[rd, bend left, "S"] \arrow[rd, phantom, bend left=20, "\Uparrow\tau"] & \\
C \arrow[u, "F"] \arrow[r, "E"'] \arrow[ru, phantom, "\eta\Uparrow"] & U
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
D \arrow[rd, bend left, "S"] & \\
C \arrow[u, "F"] \arrow[r, "E"'] \arrow[ru, phantom, "\theta\Uparrow"] & U
\end{tikzcd}$$

が成り立つ．

∵) 米田の補題より次の図式は可換である．

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}^C}(E, \mathrm{Hom}_D(Fa, F-)) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "\tau_F \circ -"'] & \mathrm{Hom}_D(Fa, Fa) \arrow[d, "\tau_{Fa}"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}^C}(E, SF) \arrow[r, "\cong"] & SFa
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\eta \arrow[r, mapsto, "\cong"] \arrow[d, mapsto, "\tau_F \circ -"'] & \mathrm{id}_{Fa} \arrow[dd, mapsto, "\tau_{Fa}"] \\
\tau_F \circ \eta & \\
\theta \arrow[r, mapsto, "\cong"] & \tau_{Fa}(\mathrm{id}_{Fa})
\end{tikzcd}$$

故に $\tau_F \circ \eta = \theta$ となる．

後はこの τ の一意性を示せばよい．そのために τ' が $\tau'_F \circ \eta = \theta$ を満たしたとすると，再び米田の補題により次の図式は可換である．

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}^C}(E, \mathrm{Hom}_D(Fa, F-)) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "\tau'_F \circ -"'] & \mathrm{Hom}_D(Fa, Fa) \arrow[d, "\tau'_{Fa}"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}^C}(E, SF) \arrow[r, "\cong"] & SFa
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\eta \arrow[r, mapsto, "\cong"] \arrow[d, mapsto, "\tau'_F \circ -"'] & \mathrm{id}_{Fa} \arrow[d, mapsto, "\tau'_{Fa}"] \\
\tau'_F \circ \eta \arrow[d, equal] & \tau_{Fa}(\mathrm{id}_{Fa}) \\
\theta \arrow[r, mapsto, "\cong"] & \theta_a(\mathrm{id}_a)
\end{tikzcd}$$

故に $\tau'_{Fa}(\mathrm{id}_{Fa}) = \theta_a(\mathrm{id}_a) = \tau_{Fa}(\mathrm{id}_{Fa})$ が分かり，米田の補題から $\tau' = \tau$ が分かる． □

補題 7. C, D を圏，$d \in D$ を対象とする．C は有限完備で関手 $F\colon C \to D$ は有限極限と

交換するとする．このときコンマ圏 $d\downarrow F$ は余フィルター圏である．

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "F"] & D \\ d\downarrow F \arrow[u] \arrow[r] \arrow[ur, phantom, "\Nwarrow"] & \mathbf{1} \arrow[u, "d"'] \end{tikzcd}$$

証明．定義により，$d\downarrow F$ の対象は D の射 $d \to Fc$ で，射 $(d \to Fc_0) \to (d \to Fc_1)$ は次を可換にする C の射 $c_0 \to c_1$ である．

$$\begin{tikzcd} & Fc_0 \arrow[d] & c_0 \arrow[d] \\ d \arrow[ur] \arrow[dr] & & \\ & Fc_1 & c_1 \end{tikzcd}$$

命題 1 の 3 条件の双対を示せばよい．

(i) まず $d\downarrow F \neq \mathbf{0}$ を示す．C が有限完備だから終対象 $1 \in C$ が存在する．F が有限極限と交換するから $F(1) \in D$ は終対象になる．よって D の射 $d \to F(1)$ が存在する．従って $d\downarrow F \neq \mathbf{0}$ である．

(ii) $g_0 \colon d \to Fc_0$，$g_1 \colon d \to Fc_1$ とする．C が有限完備だから直積 $c_0 \times c_1$ が存在する．F が有限極限と交換するから $F(c_0 \times c_1) \cong Fc_0 \times Fc_1$ である．直積の普遍性から次の点線の射が存在して可換となる．

$$\begin{tikzcd} & Fc_0 & c_0 \\ d \arrow[ur, bend left, "g_0"] \arrow[dr, bend right, "g_1"'] \arrow[r, dashed] & F(c_0 \times c_1) \arrow[u] \arrow[d] & c_0 \times c_1 \arrow[u] \arrow[d] \\ & Fc_1 & c_1 \end{tikzcd}$$

よって射 $(d \to F(c_0 \times c_1)) \to (d \to Fc_0)$ と $(d \to F(c_0 \times c_1)) \to (d \to Fc_1)$ が得られた．

(iii) $g_0 \colon d \to Fc_0$，$g_1 \colon d \to Fc_1$ として，二つの射 $p, q \colon (d \xrightarrow{g_0} Fc_0) \to (d \xrightarrow{g_1} Fc_1)$ を取る．即ち次の図式 (三角形は可換) を考える．

$$\begin{tikzcd} & Fc_0 \arrow[d, shift right, "Fp"'] \arrow[d, shift left, "Fq"] & c_0 \arrow[d, shift right, "p"'] \arrow[d, shift left, "q"] \\ d \arrow[ur, "g_0"] \arrow[dr, "g_1"'] & & \\ & Fc_1 & c_1 \end{tikzcd}$$

C が有限完備だから equalizer $c \xrightarrow{e} c_0 \overset{p}{\underset{q}{\rightrightarrows}} c_1$ が存在する．F が有限極限と交換するから $Fc \xrightarrow{Fe} Fc_0 \overset{Fp}{\underset{Fq}{\rightrightarrows}} Fc_1$ も equalizer である．今 $Fp \circ g_0 = g_1 = Fq \circ g_0$ だから，equalizer Fe の普遍性により次の点線の射が存在して，三角形が可換となる．

$$
\begin{tikzcd}
 & Fc \arrow[d, "Fe"] & c \arrow[d, "e"] \\
d \arrow[ur, dashed] \arrow[r, "g_0"] \arrow[dr, "g_1"'] & Fc_0 \arrow[d, shift right, "Fp"'] \arrow[d, shift left, "Fq"] & c_0 \arrow[d, shift right, "p"'] \arrow[d, shift left, "q"] \\
 & Fc_1 & c_1
\end{tikzcd}
$$

よって

$$(d \to Fc) \xrightarrow{e} (d \to Fc_0) \overset{p}{\underset{q}{\rightrightarrows}} (d \to Fc_1)$$

は $d \downarrow F$ の射で $p \circ e = q \circ e$ である．

以上の (i)(ii)(iii) により $d \downarrow F$ は余フィルター圏である． □

定義. C を小圏とする．関手 $F\colon C \to \mathbf{Set}$ が平坦 (flat) とは，$y^\dagger F\colon \widehat{C} \to \mathbf{Set}$ が有限極限と交換することをいう．

$$
\begin{tikzcd}
\widehat{C} \arrow[dr, "y^\dagger F"] & \\
C \arrow[u, "y"] \arrow[r, "F"'] \arrow[ur, phantom, "\Uparrow"] & \mathbf{Set}
\end{tikzcd}
$$

定理 8. 小圏 C と関手 $F\colon C \to \mathbf{Set}$ について以下は同値.

(1) F が平坦

(2) $1 \downarrow F$ が余フィルター圏

(3) F が表現可能関手のフィルター余極限で書ける

証明．($1 \Longrightarrow 2$) $F\colon C \to \mathbf{Set}$ を関手とする．各点左 Kan 拡張により，$P \in \widehat{C}$ に対して

$$\begin{aligned} y^\dagger F(P) &\cong \operatorname{colim}(y\downarrow P \to C \xrightarrow{F} \mathbf{Set}) \\ &\cong \Big(\coprod_{\langle c,u\rangle \in y\downarrow P} Fc\Big)/{\sim} \\ &\cong \Big(\coprod_{c\in C}\coprod_{u\in Pc} Fc\Big)/{\sim} \\ &\cong \Big(\coprod_{c\in C} Pc \times Fc\Big)/{\sim} \end{aligned}$$

である．$\langle c,u\rangle, \langle d,v\rangle \in y\downarrow P$ として $f\colon \langle c,u\rangle \to \langle d,v\rangle$ を射とする．つまり f は C の射 $f\colon c \to d$ で $Pf(v) = u$ を満たす．このとき $s \in Fc$ とすると，$\Big(\coprod_{\langle c,u\rangle\in y\downarrow P} Fc\Big)/{\sim}$ において $[s] = [Ff(s)]$ である．$\Big(\coprod_{c\in C} Pc \times Fc\Big)/{\sim}$ で考えれば $[\langle Pf(v), s\rangle] = [\langle v, Ff(s)\rangle]$ となる．以下簡単のため $[\langle -, \square\rangle] = [-, \square]$ と書く．

まず $P = y(a)$ ($a \in C$) の場合を考えると，$y^\dagger F(y(a)) = \Big(\coprod_{c\in C} \mathrm{Hom}(c,a) \times Fc\Big)/{\sim}$ だから，任意の $u \in y^\dagger F(y(a))$ は $u = [f,s]$，$f\colon c \to a$，$s \in Fc$ と書ける．このとき $[f,s] = [\mathrm{id}_a \circ f, s] = [Pf(\mathrm{id}_a), s] = [\mathrm{id}_a, Ff(s)]$ である．一方 $y^\dagger F \circ y \cong F$ だったから $y^\dagger F(y(a)) \cong Fa$ である．この同型は $Fa \ni u \mapsto [\mathrm{id}_a, u] \in y^\dagger F(y(a))$ で与えられる．

$P, Q \in \widehat{C}$ として $\theta\colon P \Rightarrow Q$ を自然変換とする．コンマ圏の普遍性により得られる $H\colon y\downarrow P \to y\downarrow Q$ (下の図式参照) は $\langle c,u\rangle \in y\downarrow P$ に対して $H\langle c,u\rangle = \langle c, \theta_c(u)\rangle$ で与えられる．

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbf{1} \arrow[r, "Q"] & \widehat{C} \\
 & y\downarrow Q \arrow[u] \arrow[r] \arrow[ur, phantom, "\Nwarrow"] & C \arrow[u, "y"'] \arrow[r, "F"'] & \mathbf{Set} \\
y\downarrow P \arrow[uur, bend left] \arrow[ur, dashed, "H"'] \arrow[urr, bend right] & & &
\end{tikzcd}$$

故に $y^\dagger F(\theta)\colon y^\dagger F(P) \to y^\dagger F(Q)$ は $u \in Pc$，$s \in Fc$ に対して $y^\dagger F(\theta)([u,s]) = [\theta_c(u), s]$ で与えられる．

$\Delta 1 \in \widehat{C}$ は終対象で，$y^\dagger F$ が有限極限と交換するから $y^\dagger F(\Delta 1)$ も終対象である．従って $y^\dagger F(\Delta 1) \cong 1$ となる．よって $1 \cong (\coprod Fc)/{\sim}$ だから，ある $c \in C$ について $Fc \neq \emptyset$ でなければならない．故に $1\downarrow F \neq \mathbf{0}$ である．

次に $\langle c_0, u_0\rangle, \langle c_1, u_1\rangle \in 1\downarrow F$ を取る．$\langle c,u\rangle \in 1\downarrow F$ と射 $\langle c,u\rangle \to \langle c_0,u_0\rangle$，$\langle c,u\rangle \to$

$\langle c_1, u_1\rangle$ が存在することを示す．今 $y^\dagger F$ が有限極限と交換するから，直積

$$\begin{tikzcd} & y(c_0)\times y(c_1) \arrow[dl, "p_0"'] \arrow[dr, "p_1"] & \\ y(c_0) & & y(c_1) \end{tikzcd}$$

と交換する．即ち普遍性により得られる次の射 h が同型 (即ち全単射) を与える．

$$\begin{tikzcd} & y^\dagger F(y(c_0)\times y(c_1)) \arrow[d, dashed, "h"', "\wr"] \arrow[ddl, bend right, "y^\dagger F(p_0)"'] \arrow[ddr, bend left, "y^\dagger F(p_1)"] & \\ & y^\dagger F(y(c_0))\times y^\dagger F(y(c_1)) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ y^\dagger F(y(c_0)) & & y^\dagger F(y(c_1)) \end{tikzcd}$$

$y^\dagger F\circ y\cong F$ だから

$$\begin{tikzcd} & y^\dagger F(y(c_0)\times y(c_1)) \arrow[d, "h"', "\wr"] \arrow[ddl, bend right, "y^\dagger F(p_0)"'] \arrow[ddr, bend left, "y^\dagger F(p_1)"] & \\ & Fc_0\times Fc_1 \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ Fc_0 & & Fc_1 \end{tikzcd}$$

としてよい．$u := h^{-1}(\langle u_0, u_1\rangle)\in y^\dagger F(y(c_0)\times y(c_1))$ を取れば $y^\dagger F(p_i)(u) = u_i$ である．

$$y^\dagger F(y(c_0)\times y(c_1))\cong\Big(\coprod_{c\in C}\mathrm{Hom}_C(c, c_0)\times\mathrm{Hom}_C(c, c_1)\times Fc\Big)/{\sim}$$

だから，$u = [f_0, f_1, s]$ となる $c\in C$，$f_i\colon c\to c_i$，$s\in Fc$ が取れる．このとき

$$u_i = y^\dagger F(p_i)([f_0, f_1, s]) = [f_i, s] = [\mathrm{id}_{c_i}\circ f_i, s] = [\mathrm{id}_{c_i}, Ff_i(s)]$$

だから $Ff_i(s) = u_i$ となることが分かる．故に $f_i\colon\langle c, s\rangle\to\langle c_i, u_i\rangle$ は $1\downarrow F$ の射である．

最後に対象 $\langle c_0, u_0\rangle, \langle c_1, u_1\rangle\in 1\downarrow F$ と射 $f_0, f_1\colon\langle c_0, u_0\rangle\to\langle c_1, u_1\rangle$ を取る．ある対象 $\langle c, u\rangle\in 1\downarrow F$ と射 $g\colon\langle c, u\rangle\to\langle c_0, u_0\rangle$ で $f_0\circ g = f_1\circ g$ を満たすものが存在することを示す．$\widehat{C}$ で equalizer

$$X\xrightarrow{\theta} y(c_0)\underset{y(f_1)}{\overset{y(f_0)}{\rightrightarrows}} y(c_1)$$

が存在し，$y^\dagger F$ がこれと交換するから

$$y^\dagger F(X)\xrightarrow{y^\dagger F(\theta)} Fc_0\underset{Ff_1}{\overset{Ff_0}{\rightrightarrows}} Fc_1$$

が equalizer となる．定義より $Ff_0(u_0) = Ff_1(u_0)$ だから，ある $s \in y^\dagger F(X)$ が存在して $y^\dagger F(\theta)(s) = u_0$ となる．このとき $s = [v, u]$ $(c \in C,\ v \in Xc,\ u \in Fc)$ と書けば

$$y^\dagger F(\theta)(s) = [\theta_c(v), u] = [\mathrm{id}_{c_0}, F(\theta_c(v))(u)]$$

である．よって $g := \theta_c(v) \colon c \to c_0$ と置けば $Fg(u) = u_0$ となり，$g \colon \langle c, u\rangle \to \langle c_0, u_0\rangle$ は射である．また θ が equalizer であるから $f_0 \circ g = f_1 \circ g$ も分かる．

$(2 \Longrightarrow 3)$ ここでは区別のため，米田埋込 $C^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}^C$ を z と書く．$z \downarrow F = (1 \downarrow F)^{\mathrm{op}}$ だから (「コンマ圏」の PDF を参照)，$1 \downarrow F$ が余フィルター圏であるとすると $z \downarrow F$ はフィルター圏である．

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{1} \arrow[r, "F"] & \mathbf{Set}^C \arrow[dr, "\mathrm{id}"] & \\
z \downarrow F \arrow[u] \arrow[r] \arrow[ur, phantom, "\Nwarrow"] & C^{\mathrm{op}} \arrow[u, "z"] \arrow[r, "z"'] \arrow[ur, phantom, "\Uparrow"] & \mathbf{Set}^C
\end{tikzcd}$$

よって $F \cong \mathrm{colim}(z \downarrow F \to C^{\mathrm{op}} \xrightarrow{z} \mathbf{Set}^C)$ は表現可能関手のフィルター余極限である．

$(3 \Longrightarrow 1)$ フィルター圏 J と関手 $S \colon J \to C^{\mathrm{op}}$ を使って $F \cong \mathrm{colim}(J \xrightarrow{S} C^{\mathrm{op}} \xrightarrow{z} \mathbf{Set}^C)$ と書けたとする．即ち

$$F \cong \operatorname*{colim}_{j \in J} \mathrm{Hom}_{C^{\mathrm{op}}}(-, Sj) = \operatorname*{colim}_{j \in J} \mathrm{Hom}_C(Sj, -)$$

である．$y^\dagger \dashv y^{-1}$ だから $y^\dagger$ は余極限と交換するので，補題 6 を使うと

$$y^\dagger F = y^\dagger\bigl(\operatorname*{colim}_{j \in J} \mathrm{Hom}_C(Sj, -)\bigr) = \operatorname*{colim}_{j \in J} y^\dagger\bigl(\mathrm{Hom}_C(Sj, -)\bigr) = \operatorname*{colim}_{j \in J} \mathrm{ev}_{Sj}$$

となる．ev_{Sj} は極限と交換し，$\mathrm{colim}_{j \in J}$ は有限極限と交換する (命題 5) から，$y^\dagger F$ も有限極限と交換する． □

系 **9.** C を小圏とするとき
$\mathrm{colim} \colon \mathbf{Set}^C \to \mathbf{Set}$ が有限極限と交換する $\Longleftrightarrow$ C がフィルター圏

証明. 随伴 $\mathrm{colim} \dashv \Delta \colon \mathbf{Set}^C \to \mathbf{Set}$ が成り立つから，普遍随伴により $F := \mathrm{colim} \circ y$ と置けば $\mathrm{colim} = y^\dagger F$ である．

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Set}^C \arrow[dr, "\mathrm{colim}"] & \\
C^{\mathrm{op}} \arrow[u, "y"] \arrow[r, "F"'] \arrow[ur, phantom, "\Uparrow"] & \mathbf{Set}
\end{tikzcd}$$

よって定理 8 から

$$\begin{aligned}\mathrm{colim}\colon \mathbf{Set}^C \to \mathbf{Set} \text{ が有限極限と交換する} &\iff F \text{ が平坦}\\ &\iff 1\downarrow F \text{ が余フィルター圏}\end{aligned}$$

である．故に $1\downarrow F = C^{\mathrm{op}}$ を示せばよい．その為には $c \in C$ に対して $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(1, Fc) \cong 1$，即ち $Fc \cong 1$ を示せばよい．$c \in C$ と $x \in \mathbf{Set}$ に対して

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(Fc, x) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(\mathrm{colim}\, y(c), x) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}^C}(y(c), \Delta x) \cong \Delta x(c) = x$$

だから $Fc \cong 1$ である． □

系 10. 平坦関手 $F\colon C \to \mathbf{Set}$ は有限極限と交換する．圏 C が有限完備ならば逆も成り立つ．即ち有限極限と交換する関手 $F\colon C \to \mathbf{Set}$ は平坦である．

証明. $F\colon C \to \mathbf{Set}$ が平坦ならば y と $y^\dagger F$ が有限極限と交換するから $F \cong y^\dagger F \circ y$ も有限極限と交換する．

$$\begin{tikzcd} \widehat{C} \arrow[dr, "y^\dagger F"] & \\ C \arrow[u, "y"] \arrow[r, "F"'] \arrow[ur, phantom, "\Uparrow"] & \mathbf{Set} \end{tikzcd}$$

圏 C が有限完備で $F\colon C \to \mathbf{Set}$ が有限極限と交換するならば，補題 7 により $1\downarrow F$ が余フィルター圏だから，定理 8 より F は平坦である． □

例 11. $a \in C$ に対して $F := \mathrm{Hom}_C(a, -)\colon C \to \mathbf{Set}$ は平坦関手である．

証明. 定理 8 より $1\downarrow F$ が余フィルター圏であることを示せばよいが，$1\downarrow F$ は始対象 $\langle a, \mathrm{id}_a\rangle$ を持つから余フィルター圏である． □

定理 12. C, D を小圏として，C は有限完備とする．このとき
関手 $F\colon C \to D$ が有限極限と交換する $\iff$ $F^\dagger\colon \widehat{C} \to \widehat{D}$ が有限極限と交換する

証明. ($\Longleftarrow$) $F^\dagger \circ y \cong y \circ F$ である．y と $F^\dagger$ が有限極限と交換するから，$y \circ F \cong F^\dagger \circ y$ も有限極限と交換する．y は忠実充満だから F が有限極限と交換することが分かる．

($\Longrightarrow$) $\widehat{C}$ の有限極限 $\lim P_i$ に対して $F^\dagger(\lim P_i) \cong \lim F^\dagger P_i$ を示す．その為には各 $d \in D$ に対して $F^\dagger(\lim P_i)(d) \cong (\lim F^\dagger P_i)(d)$ を示せばよい．$(\lim F^\dagger P_i)(d) \cong \lim(F^\dagger P_i(d))$ であるから $F^\dagger(\lim P_i)(d) \cong \lim(F^\dagger P_i(d))$，即ち $F^\dagger(-)(d)\colon \widehat{C} \to \mathbf{Set}$ が有限極限と交換することを示せばよい．

$P \in \widehat{C}$ に対して，各点 Kan 拡張により $F^\dagger P(d) = \operatorname{colim} P \circ P_0$ である．

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{1} \arrow[r, "d"] & D^{\mathrm{op}} \arrow[dr, "F^\dagger P"] & \\
F^{\mathrm{op}} \downarrow d \arrow[u] \arrow[r, "P_0"'] \arrow[ur, phantom, "\Nwarrow"] & C^{\mathrm{op}} \arrow[u, "F^{\mathrm{op}}"] \arrow[r, "P"'] \arrow[ur, phantom, "\Uparrow"] & \mathbf{Set}
\end{tikzcd}
$$

故に $F^\dagger(-)(d) = (\widehat{C} \xrightarrow{P_0^{-1}} \mathbf{Set}^{F^{\mathrm{op}}\downarrow d} \xrightarrow{\operatorname{colim}} \mathbf{Set})$ である．$P_0^\dagger \dashv P_0^{-1}$ だから P_0^{-1} は右随伴，よって極限と交換する．故に $\operatorname{colim}\colon \mathbf{Set}^{F^{\mathrm{op}}\downarrow d} \to \mathbf{Set}$ が有限極限と交換することを示せばよい．その為には系 9 より，$F^{\mathrm{op}} \downarrow d$ がフィルター圏であればよいが，$F^{\mathrm{op}} \downarrow d = (d \downarrow F)^{\mathrm{op}}$ だから，補題 7 より明らか． $\square$

例 13. **Set** でない場合, 有限極限とフィルター余極限が交換できない場合がある．圏 I を順序集合 $\mathbb{N}$ を圏とみなしたものとして，$J := (\ 0 \rightrightarrows 1\ )$ とする．関手 $T\colon I \times J \to \mathbf{Top}$ を定義する．即ち，**Top** の図式

$$
\begin{tikzcd}
T(0,1) \arrow[r, "k_0"] & T(1,1) \arrow[r, "k_1"] & T(2,1) \arrow[r, "k_2"] & \cdots \\
T(0,0) \arrow[r, "h_0"'] \arrow[u, shift left, "f_0"] \arrow[u, shift right, "g_0"'] & T(1,0) \arrow[r, "h_1"'] \arrow[u, shift left, "f_1"] \arrow[u, shift right, "g_1"'] & T(2,0) \arrow[r, "h_2"'] \arrow[u, shift left, "f_2"] \arrow[u, shift right, "g_2"'] & \cdots
\end{tikzcd}
$$

を定義する．まず $T(i,0) := [0, 1/(i+1)]$ として $T(i,1) := (T(i,0) \amalg T(i,0))/\sim$ と置く．ここで $\sim$ は同値関係であって，2 つの 0 を同一視し，2 つの $1/(i+1)$ を同一視するものである．(よって $T(i,1)$ は位相的には円周になる．) そして標準的に得られる二つの単射を $f_i, g_i\colon T(i,0) \to T(i+1,1)$ とする．次に関数 $h_i\colon T(i,0) \to T(i+1,0)$ を

$$
h_i(x) := \begin{cases} x & \left(0 \le x \le \dfrac{1}{i+2}\right) \\ \dfrac{1}{i+2} & \left(\dfrac{1}{i+2} < x \le \dfrac{1}{i+1}\right) \end{cases}
$$

で定義し，$h_i \amalg h_i$ から得られる射を $k_i\colon T(i,1) \to T(i+1,1)$ とする．

さて，$X := \{a, b\}$ の位相を $\{\emptyset, \{b\}, X\}$ とすると $\operatorname{colim}_i T(i,0) \cong X$，$\operatorname{colim}_i T(i,1) \cong X$ であり，よって $\lim_j \operatorname{colim}_i T(i,j) \cong X$ が分かる．一方，$\lim_j T(i,j)$ は 2 点からなる離散位相空間なので $\operatorname{colim}_i \lim_j T(i,j)$ も 2 点からなる離散位相空間である．故に

$$
\operatorname*{colim}_i \lim_j T(i,j) \not\cong \lim_j \operatorname*{colim}_i T(i,j)
$$

である． $\square$

系 9 の有限極限を有限直積に弱めることで，次の定義を得る．

定義. 小圏 C が sifted $\iff$ $\mathrm{colim}\colon \mathbf{Set}^{C} \to \mathbf{Set}$ が有限直積と交換する
小圏 C が cosifted $\iff$ C^{op} が sifted

定義. 添え字圏が sifted な余極限を sifted colimit という．

定義. C を小圏とする．関手 $F\colon C \to \mathbf{Set}$ が sifted flat とは，$y^{\dagger}F\colon \widehat{C} \to \mathbf{Set}$ が有限直積と交換することをいう．

系 9 によりフィルター圏は sifted である．特に有限余完備な圏は sifted である．

定義. 圏 C の図式 $a \leftarrow c \to b$ を a から b への span という．双対的に，図式 $a \to c \leftarrow b$ を a から b への cospan という．

定義. C を圏，$a, b \in C$ を対象とする．a から b への span がなす圏 $\mathrm{Span}(a,b)$ を以下のように定める．

- $\mathrm{Ob}(\mathrm{Span}(a,b)) := \{\langle f, g\rangle \in \mathrm{Mor}(C)^2 \mid c \in C,\ a \xleftarrow{f} c \xrightarrow{g} b\}$
- $\langle f, g\rangle, \langle f', g'\rangle \in \mathrm{Span}(a,b)$ とする．$c := \mathrm{dom}(f)$，$c' := \mathrm{dom}(f')$ とする．$\langle f, g\rangle$ から $\langle f', g'\rangle$ への射は，次の図式を可換とする射 $h\colon c \to c'$ である．

$$
\begin{tikzcd}
a & & b \\
& c' \arrow[ul, "f'"'] \arrow[ur, "g'"] & \\
& c \arrow[u, "h"] \arrow[uul, bend left, "f"] \arrow[uur, bend right, "g"'] &
\end{tikzcd}
$$

同様にして cospan がなす圏 $\mathrm{Cospan}(a,b)$ が以下のように定まる．

- $\mathrm{Ob}(\mathrm{Cospan}(a,b)) := \{\langle f, g\rangle \in \mathrm{Mor}(C)^2 \mid c \in C,\ a \xrightarrow{f} c \xleftarrow{g} b\}$
- $\langle f, g\rangle, \langle f', g'\rangle \in \mathrm{Cospan}(a,b)$ とする．$c := \mathrm{cod}(f)$，$c' := \mathrm{cod}(f')$ とする．$\langle f, g\rangle$ から $\langle f', g'\rangle$ への射は，次の図式を可換とする射 $h\colon c \to c'$ で定める．

$$
\begin{tikzcd}
& c' & \\
& c \arrow[u, "h"] & \\
a \arrow[ur, "f"'] \arrow[uur, bend left, "f'"] & & b \arrow[ul, "g"] \arrow[uul, bend right, "g'"']
\end{tikzcd}
$$

補題 14. 関手 $F\colon C \to \mathbf{Set}$ が sifted flat ならば，任意の $s, t \in 1{\downarrow}F$ に対して，$1{\downarrow}F$ における span からなる圏 $\mathrm{Span}(s,t)$ は連結である．

証明. まず定理 8 の $\Longrightarrow$ の証明により，ある $\langle c, s\rangle \in 1{\downarrow}F$ と $f_i\colon \langle c, s\rangle \to \langle c_i, u_i\rangle$ が存在することが分かる．故に $\mathrm{Span}(\langle c_0, u_0\rangle, \langle c_1, u_1\rangle) \neq \mathbf{0}$ である．

次に二つの span $\langle c_0, u_0\rangle \xleftarrow{f_0} \langle c, u\rangle \xrightarrow{f_1} \langle c_1, u_1\rangle$，$\langle c_0, u_0\rangle \xleftarrow{f'_0} \langle c', u'\rangle \xrightarrow{f'_1} \langle c_1, u_1\rangle$ を取る．この二つが zigzag で結ばれることを示そう．直積の普遍性から $\theta\colon y(c) \to y(c_0)\times y(c_1)$，$\theta'\colon y(c') \to y(c_0)\times y(c_1)$ が存在する．

$$\begin{tikzcd}
 & y(c) \arrow[d, dashed, "\theta"] \arrow[ddl, bend right, "y(f_0)"'] \arrow[ddr, bend left, "y(f_1)"] & \\
 & y(c_0)\times y(c_1) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
y(c_0) & & y(c_1)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & y(c') \arrow[d, dashed, "\theta'"] \arrow[ddl, bend right, "y(f'_0)"'] \arrow[ddr, bend left, "y(f'_1)"] & \\
 & y(c_0)\times y(c_1) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
y(c_0) & & y(c_1)
\end{tikzcd}$$

定理 8 の $\Longrightarrow$ の証明と同様，次の図式を得る．

$$\begin{tikzcd}
 & Fc \arrow[d, "y^\dagger F(\theta)"] \arrow[dddl, bend right, "Ff_0"'] \arrow[dddr, bend left, "Ff_1"] & \\
 & y^\dagger F(y(c_0)\times y(c_1)) \arrow[d, "h"', "\wr"] \arrow[ddl] \arrow[ddr] & \\
 & Fc_0 \times Fc_1 \arrow[dl, "p_0"] \arrow[dr, "p_1"'] & \\
Fc_0 & & Fc_1
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & Fc' \arrow[d, "y^\dagger F(\theta')"] \arrow[dddl, bend right, "Ff'_0"'] \arrow[dddr, bend left, "Ff'_1"] & \\
 & y^\dagger F(y(c_0)\times y(c_1)) \arrow[d, "h"', "\wr"] \arrow[ddl] \arrow[ddr] & \\
 & Fc_0 \times Fc_1 \arrow[dl, "p_0"] \arrow[dr, "p_1"'] & \\
Fc_0 & & Fc_1
\end{tikzcd}$$

故に

$$\begin{aligned}
u_i &= Ff_i(u) = \bigl(p_i \circ h \circ y^\dagger F(\theta)\bigr)(u) = p_i(h(y^\dagger F(\theta)(u))) \\
u'_i &= Ff'_i(u') = \bigl(p_i \circ h \circ y^\dagger F(\theta')\bigr)(u') = p_i(h(y^\dagger F(\theta')(u)))
\end{aligned}$$

を得る．よって集合の直積の定義から，$h(y^\dagger F(\theta)(u)) = h(y^\dagger F(\theta')(u'))$ である．h が同型だから $y^\dagger F(\theta)(u) = y^\dagger F(\theta')(u')$ を得る．同型 $Fc \cong y^\dagger F(y(c))$ は $u \longmapsto [\mathrm{id}_c, u]$ で与

えられていたから，

$$
\begin{tikzcd}
& y^\dagger F(y(c)) \arrow[d, "y^\dagger F(\theta)"] \arrow[ddl, bend right, "y^\dagger F(y(f_0))"'] \arrow[ddr, bend left, "y^\dagger F(y(f_1))"] & \\
& y^\dagger F(y(c_0)\times y(c_1)) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
y^\dagger F(y(c_0)) & & y^\dagger F(y(c_1))
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& {[\mathrm{id}_c, u]} \arrow[d, mapsto] \arrow[ddl, mapsto, bend right] \arrow[ddr, mapsto, bend left] & \\
& {[\theta_c(\mathrm{id}_c), u]} \arrow[dl, mapsto] \arrow[dr, mapsto] & \\
{[f_0, u]} & & {[f_1, u]}
\end{tikzcd}
$$

で考えれば $\theta_c(\mathrm{id}_c) = \langle f_0, f_1\rangle$ となることが分かる．同様にして $\theta'_{c'}(\mathrm{id}_{c'}) = \langle f'_0, f'_1\rangle$ である．また $[\langle f_0, f_1\rangle, u] = y^\dagger F(\theta)(u) = y^\dagger F(\theta')(u') = [\langle f'_0, f'_1\rangle, u']$ が分かる．これが成り立つ為には，次の右側の可換図式と $v_0 \in Fd_0, \cdots, v_n \in Fd_n$ であって

$$
\begin{tikzcd}[row sep=small]
u \arrow[d, mapsto] & \in & Fc \arrow[d, "Fk_0"] \\
v_0 & \in & Fd_0 \\
v_1 \arrow[u, mapsto] & \in & Fd_1 \arrow[u, "Fk_1"'] \\
\vdots & & \vdots \\
v_n & \in & Fd_n \\
u' \arrow[u, mapsto] & \in & Fc' \arrow[u, "Fk_n"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}[row sep=small]
& c \arrow[d, "k_0"] \arrow[ddl, "f_0"'] \arrow[ddr, "f_1"] & \\
& d_0 \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
c_0 & d_1 \arrow[u, "k_1"'] \arrow[l] \arrow[r] & c_1 \\
& \vdots & \\
& d_n \arrow[ul] \arrow[ur] & \\
& c' \arrow[u, "k_n"'] \arrow[uuul, "f'_0"] \arrow[uuur, "f'_1"'] &
\end{tikzcd}
$$

$Fk_0(u) = v_0$, $Fk_1(v_1) = v_0$, $Fk_n(u') = v_n$ となるものが存在しなければならない．これは圏 $1 \downarrow F$ における二つの span $\langle f_0, f_1\rangle$，$\langle f'_0, f'_1\rangle$ が zigzag で結ばれることを意味する． $\square$

命題 15. 小圏 C に対して以下の条件は同値.

(1) C が sifted
(2) 任意の $a, b \in C$ に対して $\mathrm{Cospan}(a, b)$ が連結
(3) 対角関手 $\Delta\colon C \to C \times C$ が final

証明. ($1 \Longrightarrow 2$) $F := \operatorname{colim} \circ y \colon C^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ と置く.

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Set}^C \arrow[dr, "\mathrm{colim}"] & \\
C^{\mathrm{op}} \arrow[u, "y"] \arrow[r, "F"'] \arrow[ur, phantom, "\Uparrow"] & \mathbf{Set}
\end{tikzcd}$$

C が sifted だから F は sifted flat である．一方 $1 \downarrow F = C^{\mathrm{op}}$ であった．よって補題 14 により，任意の $a, b \in C$ に対して $\mathrm{Cospan}(a, b)$ が連結であることが分かる.

($2 \Longleftrightarrow 3$) $\Delta \colon C \to C \times C$ を対角関手とすれば，$a, b \in C$ に対して $\langle a, b \rangle \downarrow \Delta = \mathrm{Cospan}(a, b)$ である．よって「Δ が final $\Longleftrightarrow$ 任意の a, b に対して $\langle a, b \rangle \downarrow \Delta$ が連結」(随伴関手定理の PDF で証明済) より明らか.

($2 \Longrightarrow 1$) 略 $\square$

よって有限余直積を持つ圏は sifted である.

双対を考えれば「小圏 C が cosifted $\Longleftrightarrow$ 任意の $a, b \in C$ に対して $\mathrm{Span}(a, b)$ が connected」である.

定理 16. 関手 $F \colon C \to \mathbf{Set}$ に対して以下の条件は同値.

(1) F が sifted flat
(2) $1 \downarrow F$ が cosifted
(3) F は表現可能関手の sifted colimit である．即ち sifted な圏 J と関手 $K \colon J \to C^{\mathrm{op}}$ が存在して $F \cong \operatorname{colim}(J \xrightarrow{K} C^{\mathrm{op}} \xrightarrow{y} \mathbf{Set}^C)$ と書ける.

証明. ($1 \Longrightarrow 2$) 補題 1 より明らか.

($2 \Longrightarrow 3$) $y^{\dagger} y \cong \mathrm{id}$ だから各点 Kan 拡張により

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{1} \arrow[r, "F"] & \mathbf{Set}^C \arrow[dr, "\mathrm{id}"] & \\
y \downarrow F \arrow[u] \arrow[r] \arrow[ur, phantom, "\Leftarrow\!\!\!\!\nwarrow"] & C^{\mathrm{op}} \arrow[u, "y"] \arrow[r, "y"'] \arrow[ur, phantom, "\Uparrow"] & \mathbf{Set}^C
\end{tikzcd}$$

$F \cong y^{\dagger} y(F) \cong \operatorname{colim}(y \downarrow F \to C^{\mathrm{op}} \xrightarrow{y} \mathbf{Set}^C)$ であるが条件 2 より $y \downarrow F = (1 \downarrow F)^{\mathrm{op}}$ は sifted である.

($3 \Longrightarrow 1$) sifted な J と $S \colon J \to C^{\mathrm{op}}$ が存在して $F \cong \operatorname{colim}(J \xrightarrow{S} C^{\mathrm{op}} \xrightarrow{y} \mathbf{Set}^C) =$

$\operatorname*{colim}_{j \in J} \mathrm{Hom}_C(Sj, -)$ と書けるとする．$y^\dagger \dashv y^{-1}$ だから $y^\dagger$ は余極限と交換し

$$y^\dagger F = y^\dagger\big(\operatorname*{colim}_{j \in J} \mathrm{Hom}_C(Sj, -)\big) = \operatorname*{colim}_{j \in J} y^\dagger\big(\mathrm{Hom}_C(Sj, -)\big) = \operatorname*{colim}_{j \in J} \mathrm{ev}_{Sj}$$

である．ev_{Sj} は極限と交換し，$\mathrm{colim}_{j \in J}$ は有限直積と交換するから，$y^\dagger F$ も有限直積と交換する． □

参考文献

[1] J. Adamek and J. Rosicky, On sifted colimits and generalized varieties, Theory and Applications of Categories, Vol. 8 (2001), No. 3, 33–53, `http://www.tac.mta.ca/tac/volumes/8/n3/8-03abs.html`