

# フィルター圏

alg-d

[http://alg-d.com/math/kan\\_extension/](http://alg-d.com/math/kan_extension/)

2016年8月22日

定義. フィルター圏 (filtered category) とは, 以下の条件を満たす圏  $C$  のことである.

- (1)  $C$  は空でない.
- (2) 任意の  $c_0, c_1 \in C$  に対して, ある  $c \in C$  と射  $f_0: c_0 \rightarrow c, f_1: c_1 \rightarrow c$  が存在する.

$$\begin{array}{ccc} c_0 & \xrightarrow{f_0} & c \\ & \searrow & \nearrow \\ c_1 & \xrightarrow{f_1} & c \end{array}$$

- (3) 任意の  $c_0, c_1 \in C$  と  $f_0, f_1: c_0 \rightarrow c_1$  に対して, ある  $c \in C$  と  $g: c_1 \rightarrow c$  が存在して  $g \circ f_0 = g \circ f_1$  となる.

$$c_0 \begin{array}{c} \xrightarrow{f_0} \\ \xrightarrow{f_1} \end{array} c_1 \xrightarrow{g} c$$

また,  $C^{\text{op}}$  がフィルター圏となるとき  $C$  を余フィルター圏という.

例 1. 順序集合を圏とみなしたとき,

例 2. 有限余完備な圏はフィルター圏である.  $\square$

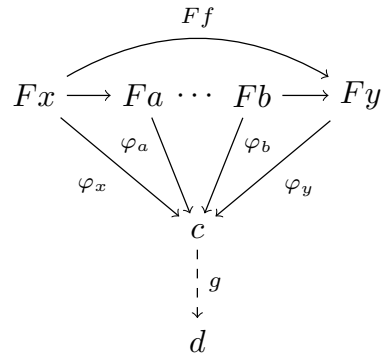
命題 3. 圏  $C$  がフィルター圏

$\iff$  任意の有限圏  $J$  と関手  $F: J \rightarrow C$  に対して, ある対象  $c \in C$  と自然変換  $F \implies \Delta c$  が存在する.

証明. ( $\Leftarrow$ ) 明らか.

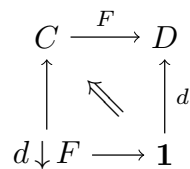
( $\Rightarrow$ ) 任意の有限圏  $J$  と関手  $F: J \rightarrow C$  を取る.  $J$  の恒等射でない射の個数  $n$  に関する帰納法.  $n = 0$  のときは明らか.

$n > 0$  とする．このとき部分圏  $K \subset J$  を  $\text{Ob}(K) = \text{Ob}(J)$  , かつ  $K$  の恒等射でない射の個数が  $n - 1$  となるものが取れる．帰納法の仮定により自然変換  $\varphi: F|_K \implies \Delta c$  が取れる． $K$  に含まれない  $J$  の射を  $f: x \longrightarrow y$  とする．二つの射  $\varphi_y \circ Ff, \varphi_x: Fx \longrightarrow c$  に対して仮定を適用して, 射  $g: c \longrightarrow d$  を  $g \circ \varphi_y \circ Ff = g \circ \varphi_x$  となるように取る．

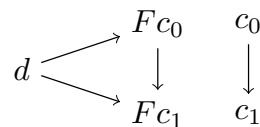


このとき  $j \in J$  に対して  $\psi_j := g \circ \varphi_j$  とすれば  $\psi: F \implies \Delta d$  が自然変換となる．  $\square$

補題 4.  $C, D$  を圏,  $d \in D$  を対象とする． $C$  は有限完備で関手  $F: C \longrightarrow D$  は有限極限と交換するとする．このときコマ圏  $d \downarrow F$  は余フィルター圏である．



証明. 定義により,  $d \downarrow F$  の対象は  $D$  の射  $d \longrightarrow Fc$  で, 射  $(d \rightarrow Fc_0) \longrightarrow (d \rightarrow Fc_1)$  は次を可換にする  $C$  の射  $c_0 \longrightarrow c_1$  である．



(i) まず  $d \downarrow F \neq \mathbf{0}$  を示す． $C$  は有限極限を持つから終対象  $1 \in C$  が存在する． $F$  が有限極限と交換するから  $F(1) \in D$  は終対象．よって  $D$  の射  $d \longrightarrow F(1)$  が存在する．故に  $d \downarrow F \neq \mathbf{0}$  である．

(ii)  $g_0: d \longrightarrow Fc_0, g_1: d \longrightarrow Fc_1$  とする． $C$  は有限極限を持ち  $F$  が有限極限と交換するから  $Fc_0 \times Fc_1 \cong F(c_0 \times c_1)$  は存在し, 直積の普遍性から  $D$  の射  $\langle g_0, g_1 \rangle: d \longrightarrow$

$Fc_0 \times Fc_1 \cong F(c_0 \times c_1)$  が得られて次の図式が可換となる .

$$\begin{array}{ccc}
 & g_0 \curvearrowright & Fc_0 \\
 & \langle g_0, g_1 \rangle \dashrightarrow & \uparrow \\
 d & \dashrightarrow & F(c_0 \times c_1) \\
 & \curvearrowleft g_1 & \downarrow \\
 & & Fc_1
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 & & c_0 \\
 & & \uparrow \\
 & & c_0 \times c_1 \\
 & & \downarrow \\
 & & c_1
 \end{array}$$

よって射  $(d \rightarrow F(c_0 \times c_1)) \rightarrow (d \rightarrow Fc_0)$  と  $(d \rightarrow F(c_0 \times c_1)) \rightarrow (d \rightarrow Fc_1)$  が得られた .

(iii)  $g_0: d \rightarrow Fc_0, g_1: d \rightarrow Fc_1$  として , 二つの射  $p, q: (d \xrightarrow{g_0} Fc_0) \rightarrow (d \xrightarrow{g_1} Fc_1)$  を取る . 即ち次の図式を考える .

$$\begin{array}{ccc}
 & g_0 \nearrow & Fc_0 \\
 & & \downarrow Fp \\
 d & & Fc_1 \\
 & g_1 \searrow & \\
 & & \downarrow Fq \\
 & & c_1
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 & & c_0 \\
 & & \downarrow p \\
 & & c_1 \\
 & & \downarrow q \\
 & & c_1
 \end{array}$$

$C$  は有限極限を持つので , equalizer  $c \xrightarrow{e} c_0 \xrightleftharpoons[p]{p} c_1$  が存在する .  $F$  は有限極限と交換するので  $Fc \xrightarrow{Fe} Fc_0 \xrightleftharpoons[Fq]{Fp} Fc_1$  も equalizer である . 今  $Fp \circ g_0 = g_1 = Fq \circ g_0$  だから , equalizer  $Fe$  の普遍性により次の図式が可換となる射  $d \rightarrow Fc$  が存在する .

$$\begin{array}{ccc}
 & \dashrightarrow & Fc \\
 & & \downarrow Fe \\
 d & \xrightarrow{g_0} & Fc_0 \\
 & \searrow g_1 & \downarrow Fp \\
 & & Fc_1 \\
 & & \downarrow Fq \\
 & & c_1
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 & & c \\
 & & \downarrow e \\
 & & c_0 \\
 & & \downarrow p \\
 & & c_1 \\
 & & \downarrow q \\
 & & c_1
 \end{array}$$

よって

$$(d \rightarrow Fc) \xrightarrow{e} (d \rightarrow Fc_0) \xrightleftharpoons[q]{p} (d \rightarrow Fc_1)$$

は  $d \downarrow F$  の射で  $p \circ e = q \circ e$  である .

以上の (i)(ii)(iii) により  $d \downarrow F$  は余フィルター圏である .

□

定義.  $C$  を小圏とする. 関手  $F: C \rightarrow \mathbf{Set}$  が平坦 (flat) とは,  $y^\dagger F: \widehat{C} \rightarrow \mathbf{Set}$  が有限極限と交換することをいう.

$$\begin{array}{ccc} \widehat{C} & & \\ \uparrow y & \searrow y^\dagger F & \\ C & \xrightarrow{F} & \mathbf{Set} \end{array}$$

定理 5. 関手  $F: C \rightarrow \mathbf{Set}$  について以下は同値.

- (1)  $F$  が平坦
- (2)  $1 \downarrow F$  が余フィルター圏
- (3)  $F$  が表現可能関手のフィルター余極限で書ける

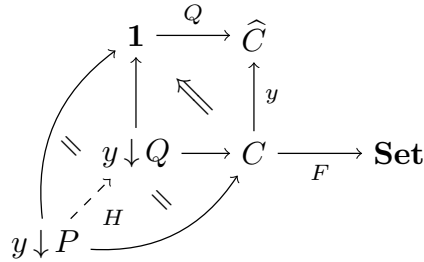
証明. (1  $\implies$  2)  $F: C \rightarrow \mathbf{Set}$  を関手とする. 各点左 Kan 拡張により,  $P \in \widehat{C}$  に対して

$$\begin{aligned} y^\dagger F(P) &\cong \operatorname{colim}(y \downarrow P \rightarrow C \xrightarrow{F} \mathbf{Set}) \\ &\cong \left( \coprod_{(c,u) \in y \downarrow P} Fc \right) / \sim \\ &\cong \left( \coprod_{c \in C} \coprod_{u \in Pc} Fc \right) / \sim \\ &\cong \left( \coprod_{c \in C} Pc \times Fc \right) / \sim \end{aligned}$$

である.  $\langle c, u \rangle, \langle d, v \rangle \in y \downarrow P$  として  $f: \langle c, u \rangle \rightarrow \langle d, v \rangle$  を射とする. つまり  $f$  は  $C$  の射  $f: c \rightarrow d$  で  $Pf(v) = u$  を満たす. このとき  $s \in Fc$  とすると,  $(\coprod_{(c,u) \in y \downarrow P} Fc) / \sim$  において  $[s] = [Ff(s)]$  である.  $(\coprod_{c \in C} Pc \times Fc) / \sim$  で考えれば  $[\langle Pf(v), s \rangle] = [\langle v, Ff(s) \rangle]$  となる. 以下簡単のため  $[\langle -, \square \rangle] = [-, \square]$  と書く.  $P = y(a)$  ( $a \in C$ ) の場合は  $y^\dagger F(y(a)) = (\coprod_{c \in C} \operatorname{Hom}(c, a) \times Fc) / \sim$  だから, 任意の  $u \in y^\dagger F(y(a))$  は  $u = [f, s]$ ,  $f: c \rightarrow a, s \in Fc$  と書ける. このとき  $[f, s] = [\operatorname{id}_a \circ f, s] = [y(f)(\operatorname{id}_a), s] = [\operatorname{id}_a, Ff(s)]$  である. 一方  $y^\dagger F \circ y \cong F$  だったから  $y^\dagger F(y(a)) \cong Fa$  である. この同型は  $Fa \ni u \mapsto [\operatorname{id}_a, u] \in y^\dagger F(y(a))$  で与えられる.

$P, Q \in \widehat{C}$  として  $\theta: P \implies Q$  を自然変換とする. コンマ圏の普遍性により得られる  $H: y \downarrow P \rightarrow y \downarrow Q$  (下の図式参照) は  $\langle c, u \rangle \in y \downarrow P$  に対して  $H\langle c, u \rangle = \langle c, \theta_c(u) \rangle$  で与

えられる .



従って ,  $y^\dagger F(\theta): y^\dagger F(P) \Rightarrow y^\dagger F(Q)$  は  $u \in Pc, s \in Fc$  に対して  $y^\dagger F(\theta)([u, s]) = [\theta_c(u), s]$  で与えられる .

$\Delta 1 \in \widehat{C}$  は終対象で ,  $y^\dagger$  が有限極限と交換するから  $y^\dagger(\Delta 1) \in \text{Set}$  も終対象 , 即ち  $y^\dagger(\Delta 1) \cong 1$  である . よって  $1 \cong (\coprod Fc)/\sim$  だから , ある  $c \in C$  について  $Fc \neq \emptyset$  でなければならない . 故に  $1 \downarrow F \neq 0$  である .

次に  $\langle c_0, u_0 \rangle, \langle c_1, u_1 \rangle \in 1 \downarrow F$  を取る .  $\langle c, u \rangle \in 1 \downarrow F$  と射  $\langle c, u \rangle \rightarrow \langle c_0, u_0 \rangle, \langle c, u \rangle \rightarrow \langle c_1, u_1 \rangle$  が存在することを示す . 今  $y^\dagger F$  が有限極限と交換するから , 直積

$$\begin{array}{ccc} & y(c_0) \times y(c_1) & \\ & \swarrow p_0 \quad \searrow p_1 & \\ y(c_0) & & y(c_1) \end{array}$$

と交換する . 即ち普遍性により得られる次の射  $h$  が同型 (即ち全単射) を与える .

$$\begin{array}{ccccc} & & y^\dagger F(y(c_0) \times y(c_1)) & & \\ & \swarrow y^\dagger F(p_0) & \downarrow h \wr & \searrow y^\dagger F(p_1) & \\ & & y^\dagger F(y(c_0)) \times y^\dagger F(y(c_1)) & & \\ & \swarrow & & \searrow & \\ y^\dagger F(y(c_0)) & & & & y^\dagger F(y(c_1)) \end{array}$$

$y^\dagger F \circ y \cong F$  だから

$$\begin{array}{ccccc} & & y^\dagger F(y(c_0) \times y(c_1)) & & \\ & \swarrow y^\dagger F(p_0) & \downarrow h \wr & \searrow y^\dagger F(p_1) & \\ & & Fc_0 \times Fc_1 & & \\ & \swarrow & & \searrow & \\ Fc_0 & & & & Fc_1 \end{array}$$

としてよい .  $u := h^{-1}(u_0, u_1) \in y^\dagger F(y(c_0) \times y(c_1))$  を取れば  $y^\dagger F(p_i)(u) = u_i$  である .

$y^\dagger F(y(c_0) \times y(c_1)) \cong \left( \prod_{c \in C} \text{Hom}_C(c, c_0) \times \text{Hom}_C(c, c_1) \times Fc \right) / \sim$  だから  $u = [f_0, f_1, s]$

となる  $c \in C$ ,  $f_i: c \rightarrow c_i$ ,  $s \in Fc$  が取れる . このとき

$$u_i = y^\dagger F(p_i)([f_0, f_1, s]) = [f_i, s] = [\text{id}_{c_i} \circ f_i, s] = [\text{id}_{c_i}, Ff_i(s)]$$

だから  $Ff_i(s) = u_i$  となることが分かる . 故に  $f_i: (c, s) \rightarrow (c_i, u_i)$  は  $1 \downarrow F$  の射である .

最後に対象  $\langle c_0, u_0 \rangle, \langle c_1, u_1 \rangle \in 1 \downarrow F$  と射  $f_0, f_1: \langle c_0, u_0 \rangle \rightarrow \langle c_1, u_1 \rangle$  を取る . ある対象  $\langle c, u \rangle \in 1 \downarrow F$  と射  $g: \langle c, u \rangle \rightarrow \langle c_0, u_0 \rangle$  で  $f_0 \circ g = f_1 \circ g$  を満たすものが存在することを示す .  $\widehat{C}$  で equalizer

$$X \xrightarrow{\theta} y(c_0) \begin{array}{c} \xrightarrow{y(f_0)} \\ \xrightarrow{f(f_1)} \end{array} y(c_1)$$

が存在し ,  $y^\dagger F$  がこれと交換するから

$$y^\dagger F(X) \xrightarrow{y^\dagger F(\theta)} Fc_0 \begin{array}{c} \xrightarrow{Ff_0} \\ \xrightarrow{Ff_1} \end{array} Fc_1$$

が equalizer となる . 定義より  $Ff_0(u_0) = Ff_1(u_0)$  だから , ある  $s \in y^\dagger F(X)$  が存在して  $y^\dagger F(\theta)(s) = u_0$  となる . このとき  $s = [v, u]$  ( $c \in C$ ,  $v \in Xc$ ,  $u \in Fc$ ) と書けば  $y^\dagger F(\theta)(s) = [\theta_c(v), u] = [\text{id}_{c_0}, F(\theta_c(v))(u)]$  である . よって  $g := \theta_c(v): c \rightarrow c_0$  と置けば  $Fg(u) = u_0$  となり ,  $g: \langle c, u \rangle \rightarrow \langle c_0, u_0 \rangle$  は射である . また  $\theta$  が equalizer であるから  $f_0 \circ g = f_1 \circ g$  も分かる .

(2  $\implies$  3)  $1 \downarrow F$  が余フィルター圏であるとする  $y \downarrow F = (1 \downarrow F)^{\text{op}}$  はフィルター圏である .

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{1} & \xrightarrow{F} & \mathbf{Set}^C \\ \uparrow & \swarrow & \uparrow \text{id} \\ y \downarrow F & \rightarrow & C^{\text{op}} \xrightarrow{y} \mathbf{Set}^C \end{array}$$

よって  $F \cong \text{colim}(y \downarrow F \rightarrow C^{\text{op}} \xrightarrow{y} \mathbf{Set}^C)$  は表現可能関手のフィルター余極限である .

(3  $\implies$  1) フィルター圏  $I$  と関手  $S: I \rightarrow C^{\text{op}}$  を使って  $F \cong \text{colim}(I \xrightarrow{S} C^{\text{op}} \xrightarrow{y} \widehat{C^{\text{op}}})$  と書けたとする . 即ち

$$F \cong \text{colim}_{i \in I} \text{Hom}_{C^{\text{op}}}(-, Si) = \text{colim}_{i \in I} \text{Hom}_C(Si, -)$$

である .  $y^\dagger \dashv y^{-1}$  だから  $y^\dagger$  は余極限と交換し

$$y^\dagger F = y^\dagger \left( \text{colim}_{j \in J} \text{Hom}_C(Sj, -) \right) = \text{colim}_{j \in J} y^\dagger \left( \text{Hom}_C(Sj, -) \right) = \text{colim}_{j \in J} \text{ev}_{Sj}$$

である． $\text{ev}_{S_j}$  は極限と交換し， $\text{colim}_{j \in J}$  は有限極限と交換するから， $y^\dagger F$  も有限極限と交換する．  $\square$

系 6.  $C$  を小圏とするとき

$\text{colim}: \text{Set}^C \rightarrow \text{Set}$  が有限極限と交換する  $\iff C$  がフィルター圏

証明. 随伴  $\text{colim} \dashv \Delta: \text{Set}^C \rightarrow \text{Set}$  が成り立つから，普遍随伴により  $F := \text{colim} \circ y$  と置けば  $\text{colim} = y^\dagger F$  である．

$$\begin{array}{ccc} \text{Set}^C & & \\ \uparrow y & \searrow \text{colim} & \\ C^{\text{op}} & \xrightarrow{F} & \text{Set} \end{array}$$

よって定理 5 から

$$\begin{aligned} \text{colim}: \text{Set}^C \rightarrow \text{Set} \text{ が有限極限と交換する} &\iff F \text{ が平坦} \\ &\iff 1 \downarrow F \text{ が余フィルター圏} \end{aligned}$$

である．故に  $1 \downarrow F = C^{\text{op}}$  を示せばよい．その為には  $c \in C$  に対して  $\text{Hom}_{\text{Set}}(1, Fc) \cong 1$ ，即ち  $Fc \cong 1$  を示せばよい． $c \in C$  と  $x \in \text{Set}$  に対して

$$\text{Hom}_{\text{Set}}(Fc, x) = \text{Hom}_{\text{Set}}(\text{colim } y(c), x) \cong \text{Hom}_{\text{Set}^C}(y(c), \Delta x) \cong \Delta x(c) = x$$

だから  $Fc \cong 1$  である．  $\square$

$J$  がフィルター圏のとき， $T: J \rightarrow C$  の余極限をフィルター余極限という．この系により， $\text{Set}$  ではフィルター余極限は有限極限と交換することがわかる．

系 7. 平坦関手  $F: C \rightarrow \text{Set}$  は有限極限と交換する．圏  $C$  が有限完備ならば逆も成り立つ．即ち有限極限と交換する関手  $F: C \rightarrow \text{Set}$  は平坦である．

証明.  $F: C \rightarrow \text{Set}$  が平坦ならば  $y$  と  $y^\dagger F$  が有限極限と交換するから  $F \cong y^\dagger F \circ y$  も有限極限と交換する．

$$\begin{array}{ccc} \widehat{C} & & \\ \uparrow y & \searrow y^\dagger F & \\ C & \xrightarrow{F} & \text{Set} \end{array}$$

圏  $C$  が有限完備で  $F: C \rightarrow \text{Set}$  が有限極限と交換するならば，補題 4 により  $1 \downarrow F$  が余フィルター圏だから，定理 5 より  $F$  は平坦である．  $\square$

定理 8.  $C, D$  を小圏として,  $C$  は有限完備とする. このとき

関手  $F: C \rightarrow D$  が有限極限と交換する  $\iff F^\dagger: \widehat{C} \rightarrow \widehat{D}$  が有限極限と交換する

証明. ( $\Leftarrow$ )  $F^\dagger \circ y \cong y \circ F$  である.  $y$  と  $F^\dagger$  が有限極限と交換するから,  $y \circ F \cong F^\dagger \circ y$  も有限極限と交換する.  $y$  は忠実充満だから  $F$  が有限極限と交換することが分かる.

( $\Rightarrow$ )  $\widehat{C}$  の有限極限  $\lim P_i$  に対して  $F^\dagger(\lim P_i) \cong \lim F^\dagger P_i$  を示す. その為には各  $d \in D$  に対して  $F^\dagger(\lim P_i)(d) \cong (\lim F^\dagger P_i)(d)$  を示せばよい.  $(\lim F^\dagger P_i)(d) \cong \lim(F^\dagger P_i(d))$  であるから  $F^\dagger(\lim P_i)(d) \cong \lim(F^\dagger P_i(d))$ , 即ち  $F^\dagger(-)(d): \widehat{C} \rightarrow \mathbf{Set}$  が有限極限と交換することを示せばよい.

$P \in \widehat{C}$  に対して, 各点 Kan 拡張により  $F^\dagger P(d) = \text{colim } P \circ \pi$  である.

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathbf{1} & \xrightarrow{d} & D^{\text{op}} & & \\
 \uparrow & \swarrow & \uparrow & \searrow & \\
 & & F^{\text{op}} \downarrow d & & F^\dagger P \\
 & & C^{\text{op}} & \xrightarrow{P} & \mathbf{Set} \\
 & & \uparrow & & \\
 & & \pi & & 
 \end{array}$$

故に  $F^\dagger(-)(d) = (\widehat{C} \xrightarrow{\pi^{-1}} \mathbf{Set}^{F^{\text{op}} \downarrow d} \xrightarrow{\text{colim}} \mathbf{Set})$  である.  $\pi^\dagger \dashv \pi^{-1}$  だから  $\pi^{-1}$  は右随伴, よって極限と交換する. 故に  $\text{colim}: \mathbf{Set}^{F^{\text{op}} \downarrow d} \rightarrow \mathbf{Set}$  が有限極限と交換することを示せばよい. その為には系 6 より,  $F^{\text{op}} \downarrow d$  がフィルター圏であればよいが,  $F^{\text{op}} \downarrow d = (d \downarrow F)^{\text{op}}$  だから, 補題 4 より明らか.  $\square$

系 6 の有限極限を有限直積に弱めることで, 次の定義を得る.

定義. 小圏  $C$  が sifted  $\iff \text{colim}: \mathbf{Set}^C \rightarrow \mathbf{Set}$  が有限直積と交換する

小圏  $C$  が cosifted  $\iff C^{\text{op}}$  が sifted

定義. 添え字圏が sifted な余極限を sifted colimit という.

定義.  $C$  を小圏とする. 関手  $F: C \rightarrow \mathbf{Set}$  が sifted flat とは,  $y^\dagger F: \widehat{C} \rightarrow \mathbf{Set}$  が有限直積と交換することをいう.

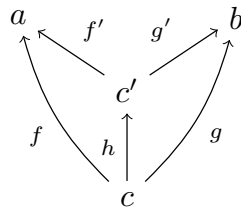
系 6 によりフィルター圏は sifted である. 特に有限余完備な圏は sifted である.

定義. 圏  $C$  の図式  $a \leftarrow c \rightarrow b$  を  $a$  から  $b$  への span という. 双対的に, 図式  $a \rightarrow c \leftarrow b$  を  $a$  から  $b$  への cospan という.

定義.  $C$  を圏,  $a, b \in C$  を対象とする.  $a$  から  $b$  への span がなす圏  $\text{Span}(a, b)$  を以下のように定める.

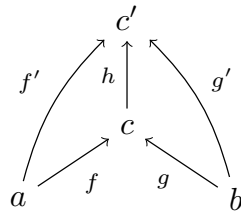


- $\text{Ob}(\text{Span}(a, b)) := \{\langle f, g \rangle \in \text{Mor}(C)^2 \mid c \in C, a \xleftarrow{f} c \xrightarrow{g} b\}$
- $\langle f, g \rangle, \langle f', g' \rangle \in \text{Span}(a, b)$  とする .  $c := \text{dom}(f)$  ,  $c' := \text{dom}(f')$  とする .  $\langle f, g \rangle$  から  $\langle f', g' \rangle$  への射は , 次の図式を可換とする射  $h: c \rightarrow c'$  である .



同様に  $\text{cospan}$  がなす圏  $\text{Cospan}(a, b)$  が以下のように定まる .

- $\text{Ob}(\text{Cospan}(a, b)) := \{\langle f, g \rangle \in \text{Mor}(C)^2 \mid c \in C, a \xrightarrow{f} c \xleftarrow{g} b\}$
- $\langle f, g \rangle, \langle f', g' \rangle \in \text{Cospan}(a, b)$  とする .  $c := \text{cod}(f)$  ,  $c' := \text{cod}(f')$  とする .  $\langle f, g \rangle$  から  $\langle f', g' \rangle$  への射は , 次の図式を可換とする射  $h: c \rightarrow c'$  で定める .

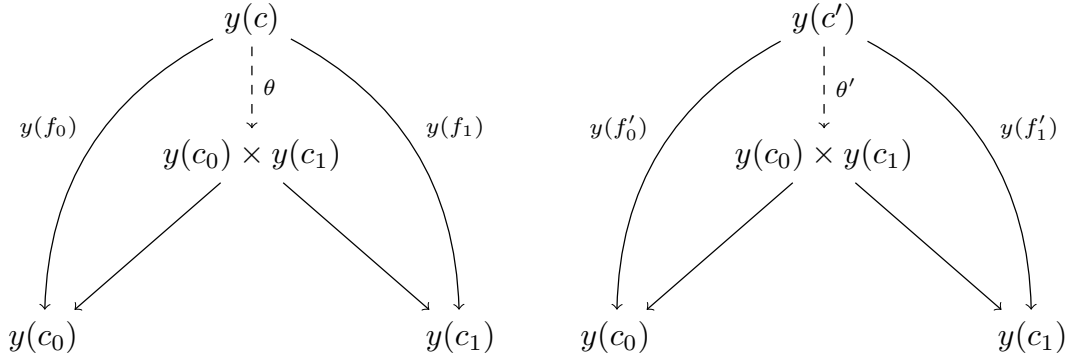


補題 9. 関手  $F: C \rightarrow \text{Set}$  が sifted flat ならば , 任意の  $s, t \in 1 \downarrow F$  に対して ,  $1 \downarrow F$  における span からなる圏  $\text{Span}(s, t)$  は連結である .

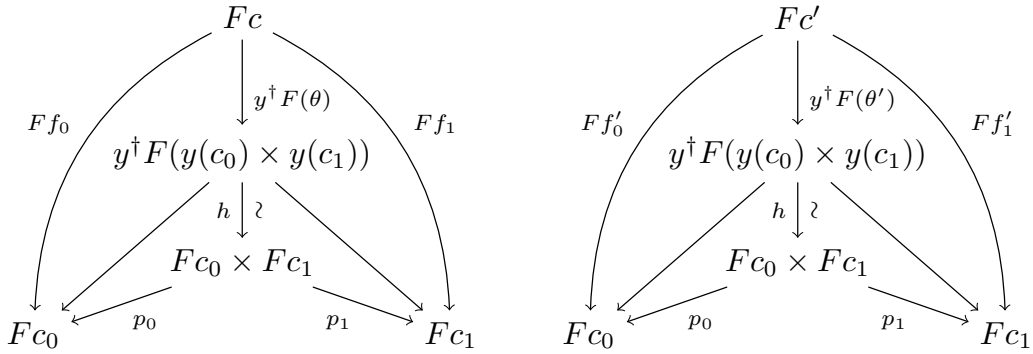
証明. まず定理 5 の  $\implies$  の証明により , ある  $\langle c, s \rangle \in 1 \downarrow F$  と  $f_i: \langle c, s \rangle \rightarrow \langle c_i, u_i \rangle$  が存在することが分かる . 故に  $\text{Span}(\langle c_0, u_0 \rangle, \langle c_1, u_1 \rangle) \neq \mathbf{0}$  である .

次に二つの span  $\langle c_0, u_0 \rangle \xleftarrow{f_0} \langle c, u \rangle \xrightarrow{f_1} \langle c_1, u_1 \rangle$  ,  $\langle c_0, u_0 \rangle \xleftarrow{f'_0} \langle c', u' \rangle \xrightarrow{f'_1} \langle c_1, u_1 \rangle$  を取る . この二つが zigzag で結ばれることを示そう . 直積の普遍性から  $\theta: y(c) \rightarrow$

$y(c_0) \times y(c_1)$  ,  $\theta' : y(c') \rightarrow y(c_0) \times y(c_1)$  が存在する .



定理 5 の  $\implies$  の証明と同様 , 次の図式を得る .

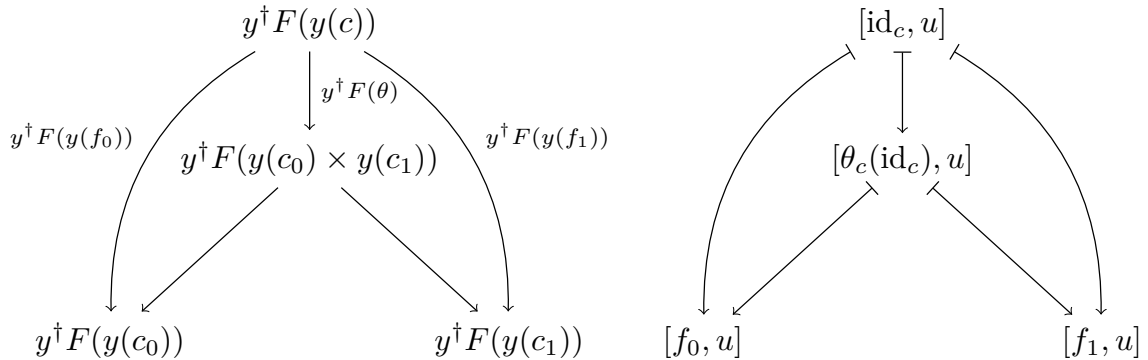


故に

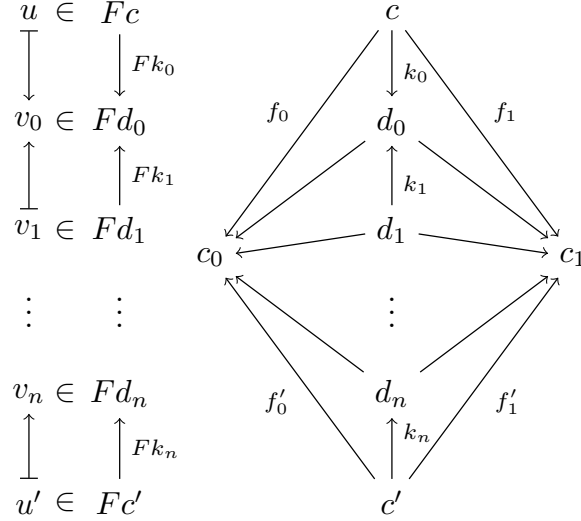
$$u_i = Ff_i(u) = (p_i \circ h \circ y^\dagger F(\theta))(u) = p_i(h(y^\dagger F(\theta)(u)))$$

$$u'_i = Ff'_i(u') = (p_i \circ h \circ y^\dagger F(\theta'))(u') = p_i(h(y^\dagger F(\theta')(u)))$$

を得る . よって集合の直積の定義から ,  $h(y^\dagger F(\theta)(u)) = h(y^\dagger F(\theta')(u'))$  である .  $h$  が同型だから  $y^\dagger F(\theta)(u) = y^\dagger F(\theta')(u')$  を得る . 同型  $Fc \cong y^\dagger F(y(c))$  は  $u \mapsto [\text{id}_c, u]$  で与えられていたから ,



で考えれば  $\theta_c(\text{id}_c) = \langle f_0, f_1 \rangle$  となることが分かる . 同様にして  $\theta_{c'}(\text{id}_{c'}) = \langle f'_0, f'_1 \rangle$  である . また  $[\langle f_0, f_1 \rangle, u] = y^\dagger F(\theta)(u) = y^\dagger F(\theta')(u') = [\langle f'_0, f'_1 \rangle, u']$  が分かる . これが成り立つ為には , 次の右側の可換図式と  $v_0 \in Fd_0, \dots, v_n \in Fd_n$  であって

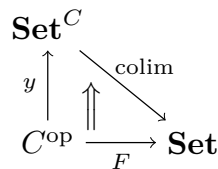


$Fk_0(u) = v_0, Fk_1(v_1) = v_0, Fk_n(u') = v_n$  となるものが存在しなければならない . これは圏  $1 \downarrow F$  における二つの  $\text{span } \langle f_0, f_1 \rangle, \langle f'_0, f'_1 \rangle$  が zigzag で結ばれることを意味する . □

命題 10. 小圏  $C$  に対して以下の条件は同値 .

- (1)  $C$  が sifted
- (2) 任意の  $a, b \in C$  に対して  $\text{Cospan}(a, b)$  が連結
- (3) 対角関手  $\Delta: C \rightarrow C \times C$  が final

証明. (1  $\implies$  2)  $F := \text{colim } \circ y: C^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$  と置く .



$C$  が sifted だから  $F$  は sifted flat である . 一方  $1 \downarrow F = C^{\text{op}}$  であった . よって補題 9 により , 任意の  $a, b \in C$  に対して  $\text{Cospan}(a, b)$  が連結であることが分かる .

(2  $\iff$  3)  $\Delta: C \rightarrow C \times C$  を対角関手とすれば ,  $a, b \in C$  に対して  $\langle a, b \rangle \downarrow \Delta = \text{Cospan}(a, b)$  である . よって「 $\Delta$  が final  $\iff$  任意の  $a, b$  に対して  $\langle a, b \rangle \downarrow \Delta$  が連結」(随

伴関手定理の PDF で証明済) より明らか .

(2  $\implies$  1) 略 □

よって有限余直積を持つ圏は sifted である .

双対を考えれば「小圏  $C$  が cosifted  $\iff$  任意の  $a, b \in C$  に対して  $\text{Span}(a, b)$  が connected」である .

定理 11. 関手  $F: C \longrightarrow \mathbf{Set}$  に対して以下の条件は同値 .

- (1)  $F$  が sifted flat
- (2)  $1 \downarrow F$  が cosifted
- (3)  $F$  は表現可能関手の sifted colimit である . 即ち sifted な圏  $J$  と関手  $K: J \longrightarrow C^{\text{op}}$  が存在して  $F \cong \text{colim}(J \xrightarrow{K} C^{\text{op}} \xrightarrow{y} \mathbf{Set}^C)$  と書ける .

証明. (1  $\implies$  2) 補題 1 より明らか .

(2  $\implies$  3)  $y^\dagger y \cong \text{id}$  だから各点 Kan 拡張により

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbf{1} & \xrightarrow{F} & \mathbf{Set}^C \\
 \uparrow & \swarrow y & \uparrow \text{id} \\
 y \downarrow F & \longrightarrow & C^{\text{op}} \xrightarrow{y} \mathbf{Set}^C
 \end{array}$$

$F \cong y^\dagger y(F) \cong \text{colim}(y \downarrow F \rightarrow C^{\text{op}} \xrightarrow{y} \mathbf{Set}^C)$  であるが条件 2 より  $y \downarrow F = (1 \downarrow F)^{\text{op}}$  は sifted である .

(3  $\implies$  1) sifted な圏  $J$  と関手  $S: J \longrightarrow C^{\text{op}}$  が存在して  $F \cong \text{colim}(J \xrightarrow{S} C^{\text{op}} \xrightarrow{y} \mathbf{Set}^C) = \text{colim}_{j \in J} \text{Hom}_C(Sj, -)$  と書けるとする .  $y^\dagger \dashv y^{-1}$  だから  $y^\dagger$  は余極限と交換し

$$y^\dagger F = y^\dagger \left( \text{colim}_{j \in J} \text{Hom}_C(Sj, -) \right) = \text{colim}_{j \in J} y^\dagger \left( \text{Hom}_C(Sj, -) \right) = \text{colim}_{j \in J} \text{ev}_{Sj}$$

である .  $\text{ev}_{Sj}$  は極限と交換し ,  $\text{colim}_{j \in J}$  は有限直積と交換するから ,  $y^\dagger F$  も有限直積と交換する . □

## 参考文献

- [1] J. Adamek and J. Rosicky, On sifted colimits and generalized varieties, Theory and Applications of Categories, Vol. 8 (2001), No. 3, 33–53, <http://www.tac.mta.ca/tac/volumes/8/n3/8-03abs.html>