

フィルター圏

alg-d

http://alg-d.com/math/kan_extension/

2018年8月29日

定義. 圏 C がフィルター圏 (filtered category)

\iff 任意の有限圏 J と関手 $F: J \rightarrow C$ に対して, ある対象 $c \in C$ と自然変換 $F \Rightarrow \Delta c$ が存在する.

定義. 圏 C が余フィルター圏 (cofiltered category) $\iff C^{\text{op}}$ がフィルター圏となる.

命題 1. 圏 C がフィルター圏 \iff 以下の条件を満たす.

- (1) C は空でない.
- (2) 任意の $c_0, c_1 \in C$ に対して, ある $c \in C$ と射 $f_0: c_0 \rightarrow c$, $f_1: c_1 \rightarrow c$ が存在する.

$$\begin{array}{ccc} c_0 & \overset{f_0}{\dashrightarrow} & c \\ & \searrow & \nearrow \\ c_1 & \underset{f_1}{\dashrightarrow} & c \end{array}$$

- (3) 任意の $c_0, c_1 \in C$ と $f_0, f_1: c_0 \rightarrow c_1$ に対して, ある $c \in C$ と $g: c_1 \rightarrow c$ が存在して $g \circ f_0 = g \circ f_1$ となる.

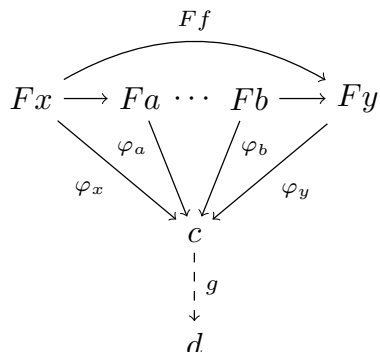
$$c_0 \begin{array}{c} \xrightarrow{f_0} \\ \xrightarrow{f_1} \end{array} c_1 \xrightarrow{g} c$$

証明. (\Leftarrow) 明らか.

(\Rightarrow) 任意の有限圏 J と関手 $F: J \rightarrow C$ を取る. J の恒等射でない射の個数 n に関する帰納法. $n = 0$ のときは明らか.

$n > 0$ とする. このとき部分圏 $K \subset J$ を $\text{Ob}(K) = \text{Ob}(J)$, かつ K の恒等射でない射の個数が $n - 1$ となるものが取れる. 帰納法の仮定により自然変換 $\varphi: F|_K \Rightarrow \Delta c$ が取れる. K に含まれない J の射を $f: x \rightarrow y$ とする. 二つの射 $\varphi_y \circ Ff, \varphi_x: Fx \rightarrow c$ に対

して仮定を適用して、射 $g: c \rightarrow d$ を $g \circ \varphi_y \circ Ff = g \circ \varphi_x$ となるように取る.



このとき $j \in J$ に対して $\psi_j := g \circ \varphi_j$ とすれば $\psi: F \Rightarrow \Delta d$ が自然変換となる. □

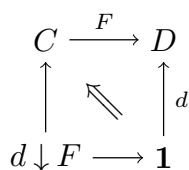
例 2. 有限余完備な圏はフィルター圏である.

証明. 有限圏 J と関手 F に対して、自然変換 $F \Rightarrow \Delta(\text{colim } F)$ が存在する. □

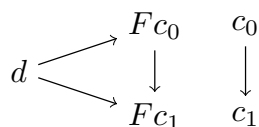
例 3. 終対象を持つ圏は明らかにフィルター圏である. □

例 4. 順序集合 X を圏とみなしたとき、これがフィルター圏となるのは、命題 1 より X が空でない有向集合となるときである. □

補題 5. C, D を圏、 $d \in D$ を対象とする. C は有限完備で関手 $F: C \rightarrow D$ は有限極限と交換するとする. このときコマ圏 $d \downarrow F$ は余フィルター圏である.



証明. 定義により、 $d \downarrow F$ の対象は D の射 $d \rightarrow Fc$ で、射 $(d \rightarrow Fc_0) \rightarrow (d \rightarrow Fc_1)$ は次を可換にする C の射 $c_0 \rightarrow c_1$ である.



(i) まず $d \downarrow F \neq \mathbf{0}$ を示す. C が有限完備だから終対象 $1 \in C$ が存在する. F が有限極限と交換するから $F(1) \in D$ は終対象になる. よって D の射 $d \rightarrow F(1)$ が存在する. 従って $d \downarrow F \neq \mathbf{0}$ である.

(ii) $g_0: d \rightarrow Fc_0$, $g_1: d \rightarrow Fc_1$ とする. C が有限完備だから直積 $c_0 \times c_1$ が存在する. F が有限極限と交換するから $F(c_0 \times c_1) \cong Fc_0 \times Fc_1$ である. 直積の普遍性から D の射 $\langle g_0, g_1 \rangle: d \rightarrow Fc_0 \times Fc_1 \cong F(c_0 \times c_1)$ が得られて次の図式が可換となる.

$$\begin{array}{ccc}
 & g_0 \searrow & Fc_0 \\
 d & \overset{\langle g_0, g_1 \rangle}{\dashrightarrow} & F(c_0 \times c_1) \\
 & g_1 \searrow & Fc_1 \\
 & & \uparrow \\
 & & c_0 \times c_1 \\
 & & \downarrow \\
 & & c_1
 \end{array}$$

よって射 $(d \rightarrow F(c_0 \times c_1)) \rightarrow (d \rightarrow Fc_0)$ と $(d \rightarrow F(c_0 \times c_1)) \rightarrow (d \rightarrow Fc_1)$ が得られた.

(iii) $g_0: d \rightarrow Fc_0$, $g_1: d \rightarrow Fc_1$ として, 二つの射 $p, q: (d \xrightarrow{g_0} Fc_0) \rightarrow (d \xrightarrow{g_1} Fc_1)$ を取る. 即ち次の図式を考える.

$$\begin{array}{ccc}
 & g_0 \searrow & Fc_0 \\
 d & & \downarrow Fp \\
 & g_1 \searrow & Fc_1 \\
 & & \downarrow Fq \\
 & & c_1
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{ccc}
 & c_0 & \\
 & \downarrow p & \\
 & c_1 & \\
 & \downarrow q & \\
 & c_1 &
 \end{array}$$

C が有限完備だから equalizer $c \xrightarrow{e} c_0 \xrightleftharpoons[p]{p} c_1$ が存在する. F が有限極限と交換するから $Fc \xrightarrow{Fe} Fc_0 \xrightleftharpoons[Fq]{Fp} Fc_1$ も equalizer である. 今 $Fp \circ g_0 = g_1 = Fq \circ g_0$ だから, equalizer Fe の普遍性により次の図式が可換となる射 $d \rightarrow Fc$ が存在する.

$$\begin{array}{ccc}
 & & Fc \\
 & \dashrightarrow & \downarrow Fe \\
 d & \xrightarrow{g_0} & Fc_0 \\
 & \searrow g_1 & \downarrow Fp \\
 & & Fc_1 \\
 & & \downarrow Fq \\
 & & c_1
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{ccc}
 & c & \\
 & \downarrow e & \\
 & c_0 & \\
 & \downarrow p & \\
 & c_1 & \\
 & \downarrow q & \\
 & c_1 &
 \end{array}$$

よって

$$(d \rightarrow Fc) \xrightarrow{e} (d \rightarrow Fc_0) \xrightleftharpoons[p]{q} (d \rightarrow Fc_1)$$

は $d \downarrow F$ の射で $p \circ e = q \circ e$ である.

以上の (i)(ii)(iii) により $d \downarrow F$ は余フィルター圏である. □

定義. C を小圏とする. 関手 $F: C \rightarrow \mathbf{Set}$ が平坦 (flat) とは, $y^\dagger F: \widehat{C} \rightarrow \mathbf{Set}$ が有限極限と交換することをいう.

$$\begin{array}{ccc} & \widehat{C} & \\ & \uparrow y & \searrow y^\dagger F \\ C & \xrightarrow{F} & \mathbf{Set} \end{array}$$

定義. 添え字圏がフィルター圏となる余極限をフィルター余極限という.

定理 6. 小圏 C と関手 $F: C \rightarrow \mathbf{Set}$ について以下は同値.

- (1) F が平坦
- (2) $1 \downarrow F$ が余フィルター圏
- (3) F が表現可能関手のフィルター余極限で書ける

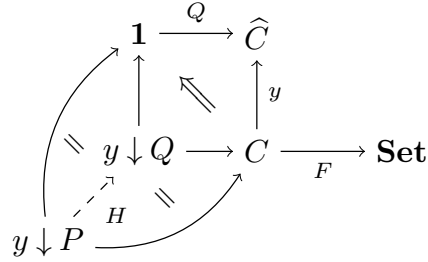
証明. (1 \implies 2) $F: C \rightarrow \mathbf{Set}$ を関手とする. 各点左 Kan 拡張により, $P \in \widehat{C}$ に対して

$$\begin{aligned} y^\dagger F(P) &\cong \operatorname{colim}(y \downarrow P \rightarrow C \xrightarrow{F} \mathbf{Set}) \\ &\cong \left(\coprod_{(c,u) \in y \downarrow P} Fc \right) / \sim \\ &\cong \left(\coprod_{c \in C} \coprod_{u \in Pc} Fc \right) / \sim \\ &\cong \left(\coprod_{c \in C} Pc \times Fc \right) / \sim \end{aligned}$$

である. $\langle c, u \rangle, \langle d, v \rangle \in y \downarrow P$ として $f: \langle c, u \rangle \rightarrow \langle d, v \rangle$ を射とする. つまり f は C の射 $f: c \rightarrow d$ で $Pf(v) = u$ を満たす. このとき $s \in Fc$ とすると, $\left(\coprod_{(c,u) \in y \downarrow P} Fc \right) / \sim$ において $[s] = [Ff(s)]$ である. $\left(\coprod_{c \in C} Pc \times Fc \right) / \sim$ で考えれば $[\langle Pf(v), s \rangle] = [\langle v, Ff(s) \rangle]$ となる. 以下簡単のため $[\langle -, \square \rangle] = [-, \square]$ と書く. $P = y(a)$ ($a \in C$) の場合は $y^\dagger F(y(a)) = \left(\coprod_{c \in C} \operatorname{Hom}(c, a) \times Fc \right) / \sim$ だから, 任意の $u \in y^\dagger F(y(a))$ は $u = [f, s]$, $f: c \rightarrow a$, $s \in Fc$ と書ける. このとき $[f, s] = [\operatorname{id}_a \circ f, s] = [y(f)(\operatorname{id}_a), s] = [\operatorname{id}_a, Ff(s)]$ である. 一方 $y^\dagger F \circ y \cong F$ だったから $y^\dagger F(y(a)) \cong Fa$ である. この同型は $Fa \ni u \mapsto [\operatorname{id}_a, u] \in y^\dagger F(y(a))$ で与えられる.

$P, Q \in \widehat{C}$ として $\theta: P \Rightarrow Q$ を自然変換とする. コンマ圏の普遍性により得られる $H: y \downarrow P \rightarrow y \downarrow Q$ (下の図式参照) は $\langle c, u \rangle \in y \downarrow P$ に対して $H\langle c, u \rangle = \langle c, \theta_c(u) \rangle$ で与え

られる.



従って, $y^\dagger F(\theta): y^\dagger F(P) \Rightarrow y^\dagger F(Q)$ は $u \in Pc, s \in Fc$ に対して $y^\dagger F(\theta)([u, s]) = [\theta_c(u), s]$ で与えられる.

$\Delta 1 \in \widehat{C}$ は終対象で, y^\dagger が有限極限と交換するから $y^\dagger(\Delta 1)$ も終対象, 即ち $y^\dagger(\Delta 1) \cong \Delta 1$ である. よって $1 \cong (\coprod Fc)/\sim$ だから, ある $c \in C$ について $Fc \neq \emptyset$ でなければならない. 故に $1 \downarrow F \neq \mathbf{0}$ である.

次に $\langle c_0, u_0 \rangle, \langle c_1, u_1 \rangle \in 1 \downarrow F$ を取る. $\langle c, u \rangle \in 1 \downarrow F$ と射 $\langle c, u \rangle \rightarrow \langle c_0, u_0 \rangle, \langle c, u \rangle \rightarrow \langle c_1, u_1 \rangle$ が存在することを示す. 今 $y^\dagger F$ が有限極限と交換するから, 直積

$$\begin{array}{ccc} & y(c_0) \times y(c_1) & \\ & \swarrow p_0 \quad \searrow p_1 & \\ y(c_0) & & y(c_1) \end{array}$$

と交換する. 即ち普遍性により得られる次の射 h が同型 (即ち全単射) を与える.

$$\begin{array}{ccccc} & & y^\dagger F(y(c_0) \times y(c_1)) & & \\ & \swarrow y^\dagger F(p_0) & \downarrow h \wr & \searrow y^\dagger F(p_1) & \\ & & y^\dagger F(y(c_0)) \times y^\dagger F(y(c_1)) & & \\ & \swarrow & & \searrow & \\ y^\dagger F(y(c_0)) & & & & y^\dagger F(y(c_1)) \end{array}$$

$y^\dagger F \circ y \cong F$ だから

$$\begin{array}{ccccc} & & y^\dagger F(y(c_0) \times y(c_1)) & & \\ & \swarrow y^\dagger F(p_0) & \downarrow h \wr & \searrow y^\dagger F(p_1) & \\ & & Fc_0 \times Fc_1 & & \\ & \swarrow & & \searrow & \\ Fc_0 & & & & Fc_1 \end{array}$$

としてよい. $u := h^{-1}(u_0, u_1) \in y^\dagger F(y(c_0) \times y(c_1))$ を取れば $y^\dagger F(p_i)(u) = u_i$ である.

$y^\dagger F(y(c_0) \times y(c_1)) \cong \left(\prod_{c \in C} \text{Hom}_C(c, c_0) \times \text{Hom}_C(c, c_1) \times Fc \right) / \sim$ だから, $u = [f_0, f_1, s]$ となる $c \in C$, $f_i: c \rightarrow c_i$, $s \in Fc$ が取れる. このとき

$$u_i = y^\dagger F(p_i)([f_0, f_1, s]) = [f_i, s] = [\text{id}_{c_i} \circ f_i, s] = [\text{id}_{c_i}, Ff_i(s)]$$

だから $Ff_i(s) = u_i$ となることが分かる. 故に $f_i: (c, s) \rightarrow (c_i, u_i)$ は $1 \downarrow F$ の射である.

最後に対象 $\langle c_0, u_0 \rangle, \langle c_1, u_1 \rangle \in 1 \downarrow F$ と射 $f_0, f_1: \langle c_0, u_0 \rangle \rightarrow \langle c_1, u_1 \rangle$ を取る. ある対象 $\langle c, u \rangle \in 1 \downarrow F$ と射 $g: \langle c, u \rangle \rightarrow \langle c_0, u_0 \rangle$ で $f_0 \circ g = f_1 \circ g$ を満たすものが存在することを示す. \widehat{C} で equalizer

$$X \xrightarrow{\theta} y(c_0) \begin{array}{c} \xrightarrow{y(f_0)} \\ \xrightarrow{y(f_1)} \end{array} y(c_1)$$

が存在し, $y^\dagger F$ がこれと交換するから

$$y^\dagger F(X) \xrightarrow{y^\dagger F(\theta)} Fc_0 \begin{array}{c} \xrightarrow{Ff_0} \\ \xrightarrow{Ff_1} \end{array} Fc_1$$

が equalizer となる. 定義より $Ff_0(u_0) = Ff_1(u_0)$ だから, ある $s \in y^\dagger F(X)$ が存在して $y^\dagger F(\theta)(s) = u_0$ となる. このとき $s = [v, u]$ ($c \in C$, $v \in Xc$, $u \in Fc$) と書けば $y^\dagger F(\theta)(s) = [\theta_c(v), u] = [\text{id}_{c_0}, F(\theta_c(v))](u)$ である. よって $g := \theta_c(v): c \rightarrow c_0$ と置けば $Fg(u) = u_0$ となり, $g: \langle c, u \rangle \rightarrow \langle c_0, u_0 \rangle$ は射である. また θ が equalizer であるから $f_0 \circ g = f_1 \circ g$ も分かる.

(2 \implies 3) $y \downarrow F = (1 \downarrow F)^{\text{op}}$ だから (「コンマ圏」の PDF を参照), $1 \downarrow F$ が余フィルター圏であるとする $y \downarrow F$ はフィルター圏である.

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{1} & \xrightarrow{F} & \mathbf{Set}^C \\ \uparrow & \swarrow y & \uparrow \text{id} \\ y \downarrow F & \rightarrow & C^{\text{op}} \xrightarrow{y} \mathbf{Set}^C \end{array}$$

よって $F \cong \text{colim}(y \downarrow F \rightarrow C^{\text{op}} \xrightarrow{y} \mathbf{Set}^C)$ は表現可能関手のフィルター余極限である.

(3 \implies 1) フィルター圏 J と関手 $S: J \rightarrow C^{\text{op}}$ を使って $F \cong \text{colim}(J \xrightarrow{S} C^{\text{op}} \xrightarrow{y} \mathbf{Set}^C)$ と書けたとする. 即ち

$$F \cong \text{colim}_{j \in J} \text{Hom}_{C^{\text{op}}}(-, Sj) = \text{colim}_{j \in J} \text{Hom}_C(Sj, -)$$

である. $y^\dagger \dashv y^{-1}$ だから y^\dagger は余極限と交換し

$$y^\dagger F = y^\dagger \left(\text{colim}_{j \in J} \text{Hom}_C(Sj, -) \right) = \text{colim}_{j \in J} y^\dagger \left(\text{Hom}_C(Sj, -) \right) = \text{colim}_{j \in J} \text{ev}_{Sj}$$

である. ev_{S_j} は極限と交換し, $\text{colim}_{j \in J}$ は有限極限と交換するから, $y^\dagger F$ も有限極限と交換する. \square

系 7. C を小圏とするとき

$\text{colim}: \mathbf{Set}^C \rightarrow \mathbf{Set}$ が有限極限と交換する $\iff C$ がフィルター圏

証明. 随伴 $\text{colim} \dashv \Delta: \mathbf{Set}^C \rightarrow \mathbf{Set}$ が成り立つから, 普遍随伴により $F := \text{colim} \circ y$ と置けば $\text{colim} = y^\dagger F$ である.

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbf{Set}^C & & \\
 \uparrow y & \searrow \text{colim} & \\
 C^{\text{op}} & \xrightarrow{F} & \mathbf{Set}
 \end{array}$$

よって定理 6 から

$$\begin{aligned}
 \text{colim}: \mathbf{Set}^C \rightarrow \mathbf{Set} \text{ が有限極限と交換する} &\iff F \text{ が平坦} \\
 &\iff 1 \downarrow F \text{ が余フィルター圏}
 \end{aligned}$$

である. 故に $1 \downarrow F = C^{\text{op}}$ を示せばよい. その為には $c \in C$ に対して $\text{Hom}_{\mathbf{Set}}(1, Fc) \cong 1$, 即ち $Fc \cong 1$ を示せばよい. $c \in C$ と $x \in \mathbf{Set}$ に対して

$$\text{Hom}_{\mathbf{Set}}(Fc, x) = \text{Hom}_{\mathbf{Set}}(\text{colim } y(c), x) \cong \text{Hom}_{\mathbf{Set}^C}(y(c), \Delta x) \cong \Delta x(c) = x$$

だから $Fc \cong 1$ である. \square

この系により, \mathbf{Set} ではフィルター余極限は有限極限と交換することがわかる.

系 8. 平坦関手 $F: C \rightarrow \mathbf{Set}$ は有限極限と交換する. 圏 C が有限完備ならば逆も成り立つ. 即ち有限極限と交換する関手 $F: C \rightarrow \mathbf{Set}$ は平坦である.

証明. $F: C \rightarrow \mathbf{Set}$ が平坦ならば y と $y^\dagger F$ が有限極限と交換するから $F \cong y^\dagger F \circ y$ も有限極限と交換する.

$$\begin{array}{ccc}
 \widehat{C} & & \\
 \uparrow y & \searrow y^\dagger F & \\
 C & \xrightarrow{F} & \mathbf{Set}
 \end{array}$$

圏 C が有限完備で $F: C \rightarrow \mathbf{Set}$ が有限極限と交換するならば, 補題 5 により $1 \downarrow F$ が余フィルター圏だから, 定理 6 より F は平坦である. \square

例 9. $a \in C$ に対して $F := \text{Hom}_C(a, -): C \rightarrow \mathbf{Set}$ は平坦関手である.

証明. 定理 6 より $1 \downarrow F$ が余フィルター圏であることを示せばよいが, $1 \downarrow F$ は始対象 $\langle a, \text{id}_a \rangle$ を持つから余フィルター圏である. \square

定理 10. C, D を小圏として, C は有限完備とする. このとき
関手 $F: C \rightarrow D$ が有限極限と交換する $\iff F^\dagger: \widehat{C} \rightarrow \widehat{D}$ が有限極限と交換する

証明. (\Leftarrow) $F^\dagger \circ y \cong y \circ F$ である. y と F^\dagger が有限極限と交換するから, $y \circ F \cong F^\dagger \circ y$ も有限極限と交換する. y は忠実充満だから F が有限極限と交換することが分かる.

(\Rightarrow) \widehat{C} の有限極限 $\lim P_i$ に対して $F^\dagger(\lim P_i) \cong \lim F^\dagger P_i$ を示す. その為には各 $d \in D$ に対して $F^\dagger(\lim P_i)(d) \cong (\lim F^\dagger P_i)(d)$ を示せばよい. $(\lim F^\dagger P_i)(d) \cong \lim(F^\dagger P_i(d))$ であるから $F^\dagger(\lim P_i)(d) \cong \lim(F^\dagger P_i(d))$, 即ち $F^\dagger(-)(d): \widehat{C} \rightarrow \mathbf{Set}$ が有限極限と交換することを示せばよい.

$P \in \widehat{C}$ に対して, 各点 Kan 拡張により $F^\dagger P(d) = \text{colim } P \circ P_0$ である.

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathbf{1} & \xrightarrow{d} & D^{\text{op}} & & \\
 \uparrow & \swarrow & \uparrow & \searrow & \\
 F^{\text{op}} \downarrow d & \xrightarrow{P_0} & C^{\text{op}} & \xrightarrow{P} & \mathbf{Set} \\
 & & \uparrow & \nearrow & \\
 & & F^{\text{op}} & & F^\dagger P
 \end{array}$$

故に $F^\dagger(-)(d) = (\widehat{C} \xrightarrow{P_0^{-1}} \mathbf{Set}^{F^{\text{op}} \downarrow d} \xrightarrow{\text{colim}} \mathbf{Set})$ である. $P_0^\dagger \dashv P_0^{-1}$ だから P_0^{-1} は右随伴, よって極限と交換する. 故に $\text{colim}: \mathbf{Set}^{F^{\text{op}} \downarrow d} \rightarrow \mathbf{Set}$ が有限極限と交換することを示せばよい. その為には系 7 より, $F^{\text{op}} \downarrow d$ がフィルター圏であればよいが, $F^{\text{op}} \downarrow d = (d \downarrow F)^{\text{op}}$ だから, 補題 5 より明らか. \square

系 7 の有限極限を有限直積に弱めることで, 次の定義を得る.

定義. 小圏 C が sifted $\iff \text{colim}: \mathbf{Set}^C \rightarrow \mathbf{Set}$ が有限直積と交換する
小圏 C が cosifted $\iff C^{\text{op}}$ が sifted

定義. 添え字圏が sifted な余極限を sifted colimit という.

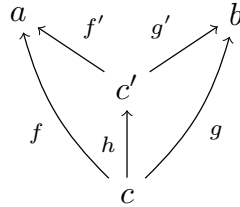
定義. C を小圏とする. 関手 $F: C \rightarrow \mathbf{Set}$ が sifted flat とは, $y^\dagger F: \widehat{C} \rightarrow \mathbf{Set}$ が有限直積と交換することをいう.

系 7 によりフィルター圏は sifted である. 特に有限余完備な圏は sifted である.

定義. 圏 C の図式 $a \leftarrow c \rightarrow b$ を a から b への span という. 双対的に, 図式 $a \rightarrow c \leftarrow b$ を a から b への cospan という.

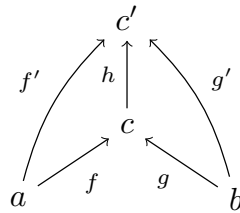
定義. C を圏, $a, b \in C$ を対象とする. a から b への span がなす圏 $\text{Span}(a, b)$ を以下のように定める.

- $\text{Ob}(\text{Span}(a, b)) := \{\langle f, g \rangle \in \text{Mor}(C)^2 \mid c \in C, a \xleftarrow{f} c \xrightarrow{g} b\}$
- $\langle f, g \rangle, \langle f', g' \rangle \in \text{Span}(a, b)$ とする. $c := \text{dom}(f)$, $c' := \text{dom}(f')$ とする. $\langle f, g \rangle$ から $\langle f', g' \rangle$ への射は, 次の図式を可換とする射 $h: c \rightarrow c'$ である.



同様にして cospan がなす圏 $\text{Cospan}(a, b)$ が以下のように定まる.

- $\text{Ob}(\text{Cospan}(a, b)) := \{\langle f, g \rangle \in \text{Mor}(C)^2 \mid c \in C, a \xrightarrow{f} c \xleftarrow{g} b\}$
- $\langle f, g \rangle, \langle f', g' \rangle \in \text{Cospan}(a, b)$ とする. $c := \text{cod}(f)$, $c' := \text{cod}(f')$ とする. $\langle f, g \rangle$ から $\langle f', g' \rangle$ への射は, 次の図式を可換とする射 $h: c \rightarrow c'$ で定める.

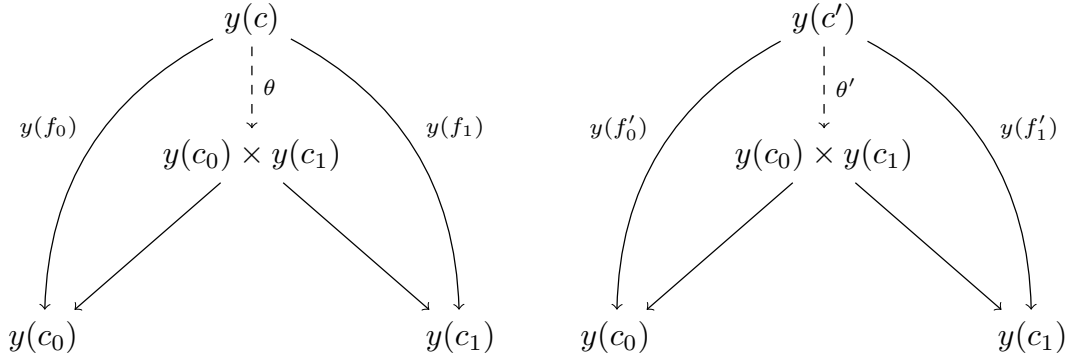


補題 11. 関手 $F: C \rightarrow \mathbf{Set}$ が sifted flat ならば, 任意の $s, t \in 1 \downarrow F$ に対して, $1 \downarrow F$ における span からなる圏 $\text{Span}(s, t)$ は連結である.

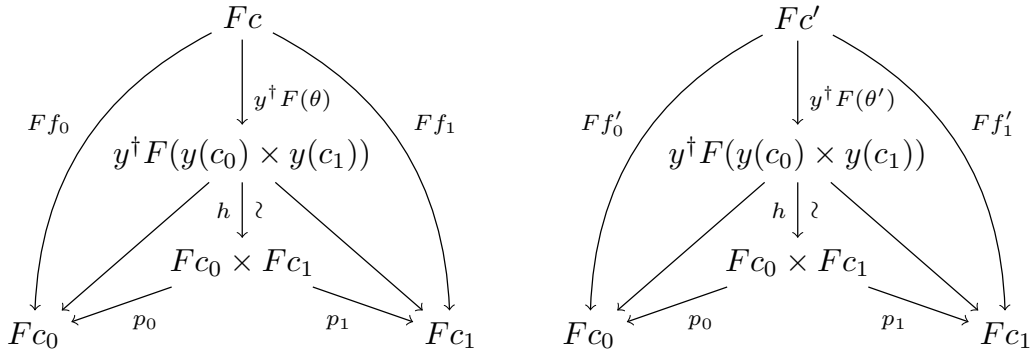
証明. まず定理 6 の \implies の証明により, ある $\langle c, s \rangle \in 1 \downarrow F$ と $f_i: \langle c, s \rangle \rightarrow \langle c_i, u_i \rangle$ が存在することが分かる. 故に $\text{Span}(\langle c_0, u_0 \rangle, \langle c_1, u_1 \rangle) \neq \mathbf{0}$ である.

次に二つの span $\langle c_0, u_0 \rangle \xleftarrow{f_0} \langle c, u \rangle \xrightarrow{f_1} \langle c_1, u_1 \rangle$, $\langle c_0, u_0 \rangle \xleftarrow{f'_0} \langle c', u' \rangle \xrightarrow{f'_1} \langle c_1, u_1 \rangle$ を取る. この二つが zigzag で結ばれることを示そう. 直積の普遍性から $\theta: y(c) \rightarrow$

$y(c_0) \times y(c_1)$, $\theta': y(c') \rightarrow y(c_0) \times y(c_1)$ が存在する.



定理 6 の \implies の証明と同様, 次の図式を得る.

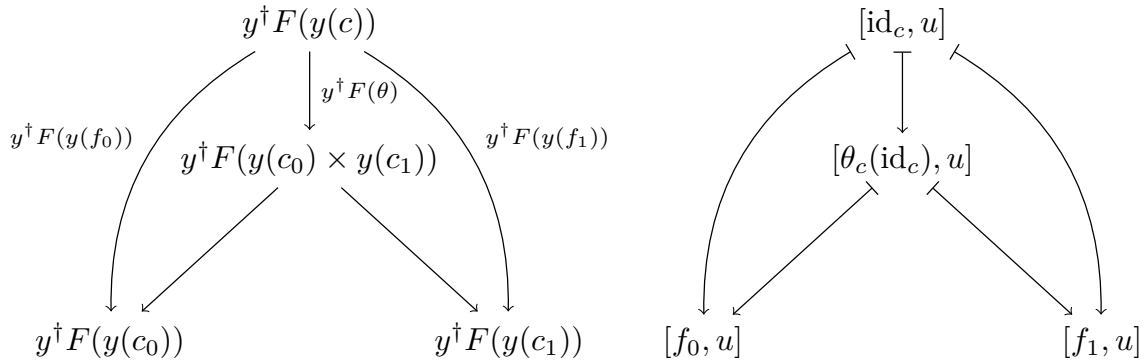


故に

$$u_i = Ff_i(u) = (p_i \circ h \circ y^\dagger F(\theta))(u) = p_i(h(y^\dagger F(\theta)(u)))$$

$$u'_i = Ff'_i(u') = (p_i \circ h \circ y^\dagger F(\theta'))(u') = p_i(h(y^\dagger F(\theta')(u)))$$

を得る. よって集合の直積の定義から, $h(y^\dagger F(\theta)(u)) = h(y^\dagger F(\theta')(u'))$ である. h が同型だから $y^\dagger F(\theta)(u) = y^\dagger F(\theta')(u')$ を得る. 同型 $Fc \cong y^\dagger F(y(c))$ は $u \mapsto [\text{id}_c, u]$ で与えられていたから,



で考えれば $\theta_c(\text{id}_c) = \langle f_0, f_1 \rangle$ となることが分かる. 同様に $\theta_{c'}(\text{id}_{c'}) = \langle f'_0, f'_1 \rangle$ である. また $[\langle f_0, f_1 \rangle, u] = y^\dagger F(\theta)(u) = y^\dagger F(\theta')(u') = [\langle f'_0, f'_1 \rangle, u']$ が分かる. これが成り立つためには, 次の右側の可換図式と $v_0 \in Fd_0, \dots, v_n \in Fd_n$ であって

$$\begin{array}{ccc}
 u \in Fc & & c \\
 \downarrow & \searrow f_0 & \downarrow k_0 \\
 v_0 \in Fd_0 & & d_0 \\
 \uparrow & \nearrow f_1 & \uparrow k_1 \\
 v_1 \in Fd_1 & & d_1 \\
 \vdots & & \vdots \\
 v_n \in Fd_n & & d_n \\
 \uparrow & \nearrow f'_0 & \uparrow k_n \\
 u' \in Fc' & & c'
 \end{array}$$

$Fk_0(u) = v_0, Fk_1(v_1) = v_0, Fk_n(u') = v_n$ となるものが存在しなければならない. これは圏 $1 \downarrow F$ における二つの $\text{span} \langle f_0, f_1 \rangle, \langle f'_0, f'_1 \rangle$ が zigzag で結ばれることを意味する. \square

命題 12. 小圏 C に対して以下の条件は同値.

- (1) C が sifted
- (2) 任意の $a, b \in C$ に対して $\text{Cospan}(a, b)$ が連結
- (3) 対角関手 $\Delta: C \rightarrow C \times C$ が final

証明. (1 \implies 2) $F := \text{colim} \circ y: C^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$ と置く.

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbf{Set}^C & & \\
 \uparrow y & \searrow \text{colim} & \\
 C^{\text{op}} & \xrightarrow{F} & \mathbf{Set}
 \end{array}$$

C が sifted だから F は sifted flat である. 一方 $1 \downarrow F = C^{\text{op}}$ であった. よって補題 11 により, 任意の $a, b \in C$ に対して $\text{Cospan}(a, b)$ が連結であることが分かる.

(2 \iff 3) $\Delta: C \rightarrow C \times C$ を対角関手とすれば, $a, b \in C$ に対して $\langle a, b \rangle \downarrow \Delta = \text{Cospan}(a, b)$ である. よって「 Δ が final \iff 任意の a, b に対して $\langle a, b \rangle \downarrow \Delta$ が連結」(随

伴関手定理の PDF で証明済) より明らか.

(2 \implies 1) 略 □

よって有限余直積を持つ圏は sifted である.

双対を考えれば「小圏 C が cosifted \iff 任意の $a, b \in C$ に対して $\text{Span}(a, b)$ が connected」である.

定理 13. 関手 $F: C \rightarrow \mathbf{Set}$ に対して以下の条件は同値.

- (1) F が sifted flat
- (2) $1 \downarrow F$ が cosifted
- (3) F は表現可能関手の sifted colimit である. 即ち sifted な圏 J と関手 $K: J \rightarrow C^{\text{op}}$ が存在して $F \cong \text{colim}(J \xrightarrow{K} C^{\text{op}} \xrightarrow{y} \mathbf{Set}^C)$ と書ける.

証明. (1 \implies 2) 補題 1 より明らか.

(2 \implies 3) $y^\dagger y \cong \text{id}$ だから各点 Kan 拡張により

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbf{1} & \xrightarrow{F} & \mathbf{Set}^C \\
 \uparrow & \swarrow & \searrow \text{id} \\
 y \downarrow F & \rightarrow & C^{\text{op}} \xrightarrow{y} \mathbf{Set}^C
 \end{array}$$

$F \cong y^\dagger y(F) \cong \text{colim}(y \downarrow F \rightarrow C^{\text{op}} \xrightarrow{y} \mathbf{Set}^C)$ であるが条件 2 より $y \downarrow F = (1 \downarrow F)^{\text{op}}$ は sifted である.

(3 \implies 1) sifted な J と $S: J \rightarrow C^{\text{op}}$ が存在して $F \cong \text{colim}(J \xrightarrow{S} C^{\text{op}} \xrightarrow{y} \mathbf{Set}^C) = \text{colim}_{j \in J} \text{Hom}_C(Sj, -)$ と書けるとする. $y^\dagger \dashv y^{-1}$ だから y^\dagger は余極限と交換し

$$y^\dagger F = y^\dagger \left(\text{colim}_{j \in J} \text{Hom}_C(Sj, -) \right) = \text{colim}_{j \in J} y^\dagger \left(\text{Hom}_C(Sj, -) \right) = \text{colim}_{j \in J} \text{ev}_{Sj}$$

である. ev_{Sj} は極限と交換し, $\text{colim}_{j \in J}$ は有限直積と交換するから, $y^\dagger F$ も有限直積と交換する. □

参考文献

- [1] J. Adamek and J. Rosicky, On sifted colimits and generalized varieties, Theory and Applications of Categories, Vol. 8 (2001), No. 3, 33–53, <http://www.tac.mta.ca/tac/volumes/8/n3/8-03abs.html>