フィルター圏

alg-d
http://alg-d.com/math/kan_extension/

2018 年 8 月 29 日

定義. 圏 C がフィルター圏 (filtered category)
$\iff$ 任意の有限圏 J と関手 $F\colon J \to C$ に対して，ある対象 $c \in C$ と自然変換 $F \Rightarrow \Delta c$ が存在する.

定義. 圏 C が余フィルター圏 (cofiltered category) $\iff$ C^{op} がフィルター圏となる.

命題 1. 圏 C がフィルター圏 $\iff$ 以下の条件を満たす.

(1) C は空でない.

(2) 任意の $c_0, c_1 \in C$ に対して，ある $c \in C$ と射 $f_0\colon c_0 \to c$，$f_1\colon c_1 \to c$ が存在する.

$$\begin{tikzcd} c_0 \arrow[dr, dashed, "f_0"] & \\ & c \\ c_1 \arrow[ur, dashed, "f_1"'] & \end{tikzcd}$$

(3) 任意の $c_0, c_1 \in C$ と $f_0, f_1\colon c_0 \to c_1$ に対して，ある $c \in C$ と $g\colon c_1 \to c$ が存在して $g \circ f_0 = g \circ f_1$ となる.

$$\begin{tikzcd} c_0 \arrow[r, shift left, "f_0"] \arrow[r, shift right, "f_1"'] & c_1 \arrow[r, dashed, "g"] & c \end{tikzcd}$$

証明. ($\Longleftarrow$) 明らか.

($\Longrightarrow$) 任意の有限圏 J と関手 $F\colon J \to C$ を取る．J の恒等射でない射の個数 n に関する帰納法．$n = 0$ のときは明らか.

$n > 0$ とする．このとき部分圏 $K \subset J$ を $\mathrm{Ob}(K) = \mathrm{Ob}(J)$，かつ K の恒等射でない射の個数が $n-1$ となるものが取れる．帰納法の仮定により自然変換 $\varphi\colon F|_K \Longrightarrow \Delta c$ が取れる．K に含まれない J の射を $f\colon x \to y$ とする．二つの射 $\varphi_y \circ Ff, \varphi_x\colon Fx \to c$ に対

して仮定を適用して，射 $g\colon c \to d$ を $g \circ \varphi_y \circ Ff = g \circ \varphi_x$ となるように取る．

$$\begin{tikzcd} Fx \arrow[r] \arrow[rrr, bend left, "Ff"] \arrow[drr, "\varphi_x"'] & Fa \cdots \arrow[dr, "\varphi_a"] & Fb \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_b"'] & Fy \arrow[dl, "\varphi_y"] \\ & & c \arrow[d, dashed, "g"] & \\ & & d & \end{tikzcd}$$

このとき $j \in J$ に対して $\psi_j := g \circ \varphi_j$ とすれば $\psi\colon F \Rightarrow \Delta d$ が自然変換となる． □

例 2. 有限余完備な圏はフィルター圏である．

証明. 有限圏 J と関手 F に対して，自然変換 $F \Rightarrow \Delta(\operatorname{colim} F)$ が存在する． □

例 3. 終対象を持つ圏は明らかにフィルター圏である． □

例 4. 順序集合 X を圏とみなしたとき，これがフィルター圏となるのは，命題 1 より X が空でない有向集合となるときである． □

補題 5. C, D を圏，$d \in D$ を対象とする．C は有限完備で関手 $F\colon C \to D$ は有限極限と交換するとする．このときコンマ圏 $d{\downarrow}F$ は余フィルター圏である．

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "F"] & D \\ d{\downarrow}F \arrow[u] \arrow[r] \arrow[ur, phantom, "\Nwarrow"] & \mathbf{1} \arrow[u, "d"'] \end{tikzcd}$$

証明. 定義により，$d{\downarrow}F$ の対象は D の射 $d \to Fc$ で，射 $(d \to Fc_0) \to (d \to Fc_1)$ は次を可換にする C の射 $c_0 \to c_1$ である．

$$\begin{tikzcd} & Fc_0 \arrow[d] & c_0 \arrow[d] \\ d \arrow[ur] \arrow[r] & Fc_1 & c_1 \end{tikzcd}$$

(i) まず $d{\downarrow}F \neq \mathbf{0}$ を示す．C が有限完備だから終対象 $1 \in C$ が存在する．F が有限極限と交換するから $F(1) \in D$ は終対象になる．よって D の射 $d \to F(1)$ が存在する．従って $d{\downarrow}F \neq \mathbf{0}$ である．

(ii) $g_0\colon d \to Fc_0$, $g_1\colon d \to Fc_1$ とする．C が有限完備だから直積 $c_0 \times c_1$ が存在する．F が有限極限と交換するから $F(c_0 \times c_1) \cong Fc_0 \times Fc_1$ である．直積の普遍性から D の射 $\langle g_0, g_1\rangle\colon d \to Fc_0 \times Fc_1 \cong F(c_0 \times c_1)$ が得られて次の図式が可換となる．

$$\begin{tikzcd} & Fc_0 & c_0 \\ d \arrow[ur, bend left, "g_0"] \arrow[dr, bend right, "g_1"'] \arrow[r, dashed, "\langle g_0,g_1\rangle"] & F(c_0 \times c_1) \arrow[u] \arrow[d] & c_0 \times c_1 \arrow[u] \arrow[d] \\ & Fc_1 & c_1 \end{tikzcd}$$

よって射 $(d \to F(c_0 \times c_1)) \to (d \to Fc_0)$ と $(d \to F(c_0 \times c_1)) \to (d \to Fc_1)$ が得られた．

(iii) $g_0\colon d \to Fc_0$, $g_1\colon d \to Fc_1$ として，二つの射 $p, q\colon (d \xrightarrow{g_0} Fc_0) \to (d \xrightarrow{g_1} Fc_1)$ を取る．即ち次の図式を考える．

$$\begin{tikzcd} & Fc_0 \arrow[d, shift right, "Fp"'] \arrow[d, shift left, "Fq"] & c_0 \arrow[d, shift right, "p"'] \arrow[d, shift left, "q"] \\ d \arrow[ur, "g_0"] \arrow[dr, "g_1"'] & Fc_1 & c_1 \end{tikzcd}$$

C が有限完備だから equalizer $c \xrightarrow{e} c_0 \overset{p}{\underset{q}{\rightrightarrows}} c_1$ が存在する．F が有限極限と交換するから $Fc \xrightarrow{Fe} Fc_0 \overset{Fp}{\underset{Fq}{\rightrightarrows}} Fc_1$ も equalizer である．今 $Fp \circ g_0 = g_1 = Fq \circ g_0$ だから，equalizer Fe の普遍性により次の図式が可換となる射 $d \to Fc$ が存在する．

$$\begin{tikzcd} & Fc \arrow[d, "Fe"] & c \arrow[d, "e"] \\ d \arrow[ur, dashed] \arrow[r, "g_0"] \arrow[dr, "g_1"'] & Fc_0 \arrow[d, shift right, "Fp"'] \arrow[d, shift left, "Fq"] & c_0 \arrow[d, shift right, "p"'] \arrow[d, shift left, "q"] \\ & Fc_1 & c_1 \end{tikzcd}$$

よって

$$(d \to Fc) \xrightarrow{e} (d \to Fc_0) \overset{p}{\underset{q}{\rightrightarrows}} (d \to Fc_1)$$

は $d{\downarrow}F$ の射で $p \circ e = q \circ e$ である．

以上の (i)(ii)(iii) により $d{\downarrow}F$ は余フィルター圏である． $\square$

定義. C を小圏とする．関手 $F\colon C\to\mathbf{Set}$ が平坦 (flat) とは，$y^\dagger F\colon\widehat{C}\to\mathbf{Set}$ が有限極限と交換することをいう．

$$\begin{tikzcd}
\widehat{C} \arrow[dr, "y^\dagger F"] & \\
C \arrow[u, "y"] \arrow[r, "F"'] \arrow[ur, phantom, "\Uparrow"] & \mathbf{Set}
\end{tikzcd}$$

定義. 添え字圏がフィルター圏となる余極限をフィルター余極限という．

定理 6. 小圏 C と関手 $F\colon C\to\mathbf{Set}$ について以下は同値.

(1) F が平坦

(2) $1\downarrow F$ が余フィルター圏

(3) F が表現可能関手のフィルター余極限で書ける

証明. ($1\implies 2$) $F\colon C\to\mathbf{Set}$ を関手とする．各点左 Kan 拡張により，$P\in\widehat{C}$ に対して

$$\begin{aligned}
y^\dagger F(P) &\cong \operatorname{colim}(y\downarrow P\to C\xrightarrow{F}\mathbf{Set})\\
&\cong\Big(\coprod_{(c,u)\in y\downarrow P}Fc\Big)/{\sim}\\
&\cong\Big(\coprod_{c\in C}\coprod_{u\in Pc}Fc\Big)/{\sim}\\
&\cong\Big(\coprod_{c\in C}Pc\times Fc\Big)/{\sim}
\end{aligned}$$

である．$\langle c,u\rangle,\langle d,v\rangle\in y\downarrow P$ として $f\colon\langle c,u\rangle\to\langle d,v\rangle$ を射とする．つまり f は C の射 $f\colon c\to d$ で $Pf(v)=u$ を満たす．このとき $s\in Fc$ とすると，$\Big(\coprod_{\langle c,u\rangle\in y\downarrow P}Fc\Big)/{\sim}$ において $[s]=[Ff(s)]$ である．$\Big(\coprod_{c\in C}Pc\times Fc\Big)/{\sim}$ で考えれば $[\langle Pf(v),s\rangle]=[\langle v,Ff(s)\rangle]$ となる．以下簡単のため $[\langle -,\square\rangle]=[-,\square]$ と書く．$P=y(a)$ $(a\in C)$ の場合は $y^\dagger F(y(a))=\Big(\coprod_{c\in C}\operatorname{Hom}(c,a)\times Fc\Big)/{\sim}$ だから，任意の $u\in y^\dagger F(y(a))$ は $u=[f,s]$, $f\colon c\to a$，$s\in Fc$ と書ける．このとき $[f,s]=[\mathrm{id}_a\circ f,s]=[y(f)(\mathrm{id}_a),s]=[\mathrm{id}_a,Ff(s)]$ である．一方 $y^\dagger F\circ y\cong F$ だったから $y^\dagger F(y(a))\cong Fa$ である．この同型は $Fa\ni u\mapsto[\mathrm{id}_a,u]\in y^\dagger F(y(a))$ で与えられる．

$P,Q\in\widehat{C}$ として $\theta\colon P\Rightarrow Q$ を自然変換とする．コンマ圏の普遍性により得られる $H\colon y\downarrow P\to y\downarrow Q$ (下の図式参照) は $\langle c,u\rangle\in y\downarrow P$ に対して $H\langle c,u\rangle=\langle c,\theta_c(u)\rangle$ で与え

られる．

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathbf{1} \arrow[r, "Q"] & \widehat{C} & \\
 & y\downarrow Q \arrow[u] \arrow[r] \arrow[ur, phantom, "\Leftarrow"] & C \arrow[u, "y"'] \arrow[r, "F"'] & \mathbf{Set} \\
y\downarrow P \arrow[uur, bend left] \arrow[u, phantom, "="] \arrow[ur, dashed, "H"'] \arrow[urr, bend right] \arrow[urr, phantom, "="] & & &
\end{tikzcd}
$$

従って，$y^\dagger F(\theta)\colon y^\dagger F(P) \Rightarrow y^\dagger F(Q)$ は $u \in Pc$，$s \in Fc$ に対して $y^\dagger F(\theta)([u,s]) = [\theta_c(u), s]$ で与えられる．

$\Delta 1 \in \widehat{C}$ は終対象で, $y^\dagger$ が有限極限と交換するから $y^\dagger(\Delta 1)$ も終対象, 即ち $y^\dagger(\Delta 1) \cong \Delta 1$ である．よって $1 \cong (\coprod Fc)/{\sim}$ だから，ある $c \in C$ について $Fc \neq \emptyset$ でなければならない．故に $1\downarrow F \neq \mathbf{0}$ である．

次に $\langle c_0, u_0\rangle, \langle c_1, u_1\rangle \in 1\downarrow F$ を取る．$\langle c, u\rangle \in 1\downarrow F$ と射 $\langle c, u\rangle \to \langle c_0, u_0\rangle$，$\langle c, u\rangle \to \langle c_1, u_1\rangle$ が存在することを示す．今 $y^\dagger F$ が有限極限と交換するから，直積

$$
\begin{tikzcd}
 & y(c_0) \times y(c_1) \arrow[dl, "p_0"] \arrow[dr, "p_1"'] & \\
y(c_0) & & y(c_1)
\end{tikzcd}
$$

と交換する．即ち普遍性により得られる次の射 h が同型 (即ち全単射) を与える．

$$
\begin{tikzcd}
 & y^\dagger F(y(c_0) \times y(c_1)) \arrow[ddl, bend right, "y^\dagger F(p_0)"'] \arrow[ddr, bend left, "y^\dagger F(p_1)"] \arrow[d, dashed, "h"', "\wr"] & \\
 & y^\dagger F(y(c_0)) \times y^\dagger F(y(c_1)) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
y^\dagger F(y(c_0)) & & y^\dagger F(y(c_1))
\end{tikzcd}
$$

$y^\dagger F \circ y \cong F$ だから

$$
\begin{tikzcd}
 & y^\dagger F(y(c_0) \times y(c_1)) \arrow[ddl, bend right, "y^\dagger F(p_0)"'] \arrow[ddr, bend left, "y^\dagger F(p_1)"] \arrow[d, "h"', "\wr"] & \\
 & Fc_0 \times Fc_1 \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
Fc_0 & & Fc_1
\end{tikzcd}
$$

としてよい．$u := h^{-1}(u_0, u_1) \in y^\dagger F(y(c_0) \times y(c_1))$ を取れば $y^\dagger F(p_i)(u) = u_i$ である．

$y^\dagger F(y(c_0)\times y(c_1)) \cong \Bigl(\coprod_{c\in C} \mathrm{Hom}_C(c,c_0)\times\mathrm{Hom}_C(c,c_1)\times Fc\Bigr)/{\sim}$ だから, $u=[f_0,f_1,s]$ となる $c\in C$, $f_i\colon c\to c_i$, $s\in Fc$ が取れる．このとき

$$u_i = y^\dagger F(p_i)([f_0,f_1,s]) = [f_i,s] = [\mathrm{id}_{c_i}\circ f_i, s] = [\mathrm{id}_{c_i}, Ff_i(s)]$$

だから $Ff_i(s)=u_i$ となることが分かる．故に $f_i\colon (c,s)\to(c_i,u_i)$ は $1\downarrow F$ の射である．

最後に対象 $\langle c_0,u_0\rangle,\langle c_1,u_1\rangle \in 1\downarrow F$ と射 $f_0,f_1\colon \langle c_0,u_0\rangle\to\langle c_1,u_1\rangle$ を取る．ある対象 $\langle c,u\rangle\in 1\downarrow F$ と射 $g\colon\langle c,u\rangle\to\langle c_0,u_0\rangle$ で $f_0\circ g = f_1\circ g$ を満たすものが存在することを示す．$\widehat{C}$ で equalizer

$$X \xrightarrow{\theta} y(c_0) \overset{y(f_0)}{\underset{y(f_1)}{\rightrightarrows}} y(c_1)$$

が存在し，$y^\dagger F$ がこれと交換するから

$$y^\dagger F(X) \xrightarrow{y^\dagger F(\theta)} Fc_0 \overset{Ff_0}{\underset{Ff_1}{\rightrightarrows}} Fc_1$$

が equalizer となる．定義より $Ff_0(u_0)=Ff_1(u_0)$ だから，ある $s\in y^\dagger F(X)$ が存在して $y^\dagger F(\theta)(s)=u_0$ となる．このとき $s=[v,u]$ ($c\in C$, $v\in Xc$, $u\in Fc$) と書けば $y^\dagger F(\theta)(s) = [\theta_c(v),u] = [\mathrm{id}_{c_0}, F(\theta_c(v))(u)]$ である．よって $g:=\theta_c(v)\colon c\to c_0$ と置けば $Fg(u)=u_0$ となり，$g\colon\langle c,u\rangle\to\langle c_0,u_0\rangle$ は射である．また θ が equalizer であるから $f_0\circ g = f_1\circ g$ も分かる．

($2\Longrightarrow 3$) $y\downarrow F = (1\downarrow F)^{\mathrm{op}}$ だから (「コンマ圏」の PDF を参照)，$1\downarrow F$ が余フィルター圏であるとすると $y\downarrow F$ はフィルター圏である．

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{1} \arrow[r, "F"] & \mathbf{Set}^C \arrow[dr, "\mathrm{id}"] & \\
y\downarrow F \arrow[u] \arrow[r] \arrow[ur, phantom, "\Nwarrow"] & C^{\mathrm{op}} \arrow[u, "y"] \arrow[r, "y"'] \arrow[ur, phantom, "\Uparrow"] & \mathbf{Set}^C
\end{tikzcd}$$

よって $F\cong \mathrm{colim}(y\downarrow F\to C^{\mathrm{op}} \xrightarrow{y} \mathbf{Set}^C)$ は表現可能関手のフィルター余極限である．

($3\Longrightarrow 1$) フィルター圏 J と関手 $S\colon J\to C^{\mathrm{op}}$ を使って $F\cong\mathrm{colim}(J\xrightarrow{S} C^{\mathrm{op}}\xrightarrow{y}\mathbf{Set}^C)$ と書けたとする．即ち

$$F\cong \operatorname*{colim}_{j\in J}\mathrm{Hom}_{C^{\mathrm{op}}}(-,Sj) = \operatorname*{colim}_{j\in J}\mathrm{Hom}_C(Sj,-)$$

である．$y^\dagger\dashv y^{-1}$ だから $y^\dagger$ は余極限と交換し

$$y^\dagger F = y^\dagger\bigl(\operatorname*{colim}_{j\in J}\mathrm{Hom}_C(Sj,-)\bigr) = \operatorname*{colim}_{j\in J} y^\dagger\bigl(\mathrm{Hom}_C(Sj,-)\bigr) = \operatorname*{colim}_{j\in J}\mathrm{ev}_{Sj}$$

である．ev_{Sj} は極限と交換し，$\mathrm{colim}_{j\in J}$ は有限極限と交換するから，$y^\dagger F$ も有限極限と交換する． $\square$

系 7. C を小圏とするとき
$\mathrm{colim}\colon \mathbf{Set}^C \to \mathbf{Set}$ が有限極限と交換する $\iff$ C がフィルター圏

証明. 随伴 $\mathrm{colim} \dashv \Delta\colon \mathbf{Set}^C \to \mathbf{Set}$ が成り立つから，普遍随伴により $F := \mathrm{colim} \circ y$ と置けば $\mathrm{colim} = y^\dagger F$ である．

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Set}^C \arrow[dr, "\mathrm{colim}"] & \\
C^{\mathrm{op}} \arrow[u, "y"] \arrow[r, "F"'] \arrow[ur, phantom, "\Uparrow"] & \mathbf{Set}
\end{tikzcd}$$

よって定理 6 から

$$\begin{aligned}
\mathrm{colim}\colon \mathbf{Set}^C \to \mathbf{Set} \text{ が有限極限と交換する} &\iff F \text{ が平坦} \\
&\iff 1 \downarrow F \text{ が余フィルター圏}
\end{aligned}$$

である．故に $1 \downarrow F = C^{\mathrm{op}}$ を示せばよい．その為には $c \in C$ に対して $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(1, Fc) \cong 1$，即ち $Fc \cong 1$ を示せばよい．$c \in C$ と $x \in \mathbf{Set}$ に対して

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(Fc, x) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(\mathrm{colim}\, y(c), x) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}^C}(y(c), \Delta x) \cong \Delta x(c) = x$$

だから $Fc \cong 1$ である． $\square$

この系により，$\mathbf{Set}$ ではフィルター余極限は有限極限と交換することがわかる．

系 8. 平坦関手 $F\colon C \to \mathbf{Set}$ は有限極限と交換する．圏 C が有限完備ならば逆も成り立つ．即ち有限極限と交換する関手 $F\colon C \to \mathbf{Set}$ は平坦である．

証明. $F\colon C \to \mathbf{Set}$ が平坦ならば y と $y^\dagger F$ が有限極限と交換するから $F \cong y^\dagger F \circ y$ も有限極限と交換する．

$$\begin{tikzcd}
\widehat{C} \arrow[dr, "y^\dagger F"] & \\
C \arrow[u, "y"] \arrow[r, "F"'] \arrow[ur, phantom, "\Uparrow"] & \mathbf{Set}
\end{tikzcd}$$

圏 C が有限完備で $F\colon C \to \mathbf{Set}$ が有限極限と交換するならば，補題 5 により $1 \downarrow F$ が余フィルター圏だから，定理 6 より F は平坦である． $\square$

例 9. $a \in C$ に対して $F := \mathrm{Hom}_C(a, -)\colon C \to \mathbf{Set}$ は平坦関手である．

証明. 定理 6 より $1 \downarrow F$ が余フィルター圏であることを示せばよいが，$1 \downarrow F$ は始対象 $\langle a, \mathrm{id}_a \rangle$ を持つから余フィルター圏である． □

定理 10. C, D を小圏として，C は有限完備とする．このとき
関手 $F\colon C \to D$ が有限極限と交換する $\Longleftrightarrow$ $F^\dagger\colon \widehat{C} \to \widehat{D}$ が有限極限と交換する

証明. ($\Longleftarrow$) $F^\dagger \circ y \cong y \circ F$ である．y と $F^\dagger$ が有限極限と交換するから，$y \circ F \cong F^\dagger \circ y$ も有限極限と交換する．y は忠実充満だから F が有限極限と交換することが分かる．

($\Longrightarrow$) $\widehat{C}$ の有限極限 $\lim P_i$ に対して $F^\dagger(\lim P_i) \cong \lim F^\dagger P_i$ を示す．その為には各 $d \in D$ に対して $F^\dagger(\lim P_i)(d) \cong (\lim F^\dagger P_i)(d)$ を示せばよい．$(\lim F^\dagger P_i)(d) \cong \lim(F^\dagger P_i(d))$ であるから $F^\dagger(\lim P_i)(d) \cong \lim(F^\dagger P_i(d))$，即ち $F^\dagger(-)(d)\colon \widehat{C} \to \mathbf{Set}$ が有限極限と交換することを示せばよい．

$P \in \widehat{C}$ に対して，各点 Kan 拡張により $F^\dagger P(d) = \operatorname{colim} P \circ P_0$ である．

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{1} \arrow[r, "d"] & D^{\mathrm{op}} \arrow[dr, "F^\dagger P"] & \\
F^{\mathrm{op}} \downarrow d \arrow[u] \arrow[r, "P_0"'] \arrow[ur, phantom, "\Nwarrow"] & C^{\mathrm{op}} \arrow[u, "F^{\mathrm{op}}"] \arrow[r, "P"'] \arrow[ur, phantom, "\Uparrow"] & \mathbf{Set}
\end{tikzcd}$$

故に $F^\dagger(-)(d) = (\widehat{C} \xrightarrow{P_0^{-1}} \mathbf{Set}^{F^{\mathrm{op}}\downarrow d} \xrightarrow{\mathrm{colim}} \mathbf{Set})$ である．$P_0^\dagger \dashv P_0^{-1}$ だから P_0^{-1} は右随伴，よって極限と交換する．故に $\mathrm{colim}\colon \mathbf{Set}^{F^{\mathrm{op}}\downarrow d} \to \mathbf{Set}$ が有限極限と交換することを示せばよい．その為には系 7 より，$F^{\mathrm{op}} \downarrow d$ がフィルター圏であればよいが，$F^{\mathrm{op}} \downarrow d = (d \downarrow F)^{\mathrm{op}}$ だから，補題 5 より明らか． □

系 7 の有限極限を有限直積に弱めることで，次の定義を得る．

定義. 小圏 C が sifted $\Longleftrightarrow$ $\mathrm{colim}\colon \mathbf{Set}^C \to \mathbf{Set}$ が有限直積と交換する
小圏 C が cosifted $\Longleftrightarrow$ C^{op} が sifted

定義. 添え字圏が sifted な余極限を sifted colimit という．

定義. C を小圏とする．関手 $F\colon C \to \mathbf{Set}$ が sifted flat とは，$y^\dagger F\colon \widehat{C} \to \mathbf{Set}$ が有限直積と交換することをいう．

系 7 によりフィルター圏は sifted である．特に有限余完備な圏は sifted である．

定義. 圏 C の図式 $a \leftarrow c \rightarrow b$ を a から b への span という．双対的に，図式 $a \rightarrow c \leftarrow b$ を a から b への cospan という．

定義. C を圏，$a, b \in C$ を対象とする．a から b への span がなす圏 $\mathrm{Span}(a, b)$ を以下のように定める．

- $\mathrm{Ob}(\mathrm{Span}(a, b)) := \{\langle f, g\rangle \in \mathrm{Mor}(C)^2 \mid c \in C,\ a \xleftarrow{f} c \xrightarrow{g} b\}$
- $\langle f, g\rangle, \langle f', g'\rangle \in \mathrm{Span}(a, b)$ とする．$c := \mathrm{dom}(f)$，$c' := \mathrm{dom}(f')$ とする．$\langle f, g\rangle$ から $\langle f', g'\rangle$ への射は，次の図式を可換とする射 $h\colon c \rightarrow c'$ である．

$$\begin{tikzcd}
a & & b \\
& c' \arrow[ul, "f'"'] \arrow[ur, "g'"] & \\
& c \arrow[u, "h"] \arrow[uul, bend left, "f"] \arrow[uur, bend right, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

同様にして cospan がなす圏 $\mathrm{Cospan}(a, b)$ が以下のように定まる．

- $\mathrm{Ob}(\mathrm{Cospan}(a, b)) := \{\langle f, g\rangle \in \mathrm{Mor}(C)^2 \mid c \in C,\ a \xrightarrow{f} c \xleftarrow{g} b\}$
- $\langle f, g\rangle, \langle f', g'\rangle \in \mathrm{Cospan}(a, b)$ とする．$c := \mathrm{cod}(f)$，$c' := \mathrm{cod}(f')$ とする．$\langle f, g\rangle$ から $\langle f', g'\rangle$ への射は，次の図式を可換とする射 $h\colon c \rightarrow c'$ で定める．

$$\begin{tikzcd}
& c' & \\
& c \arrow[u, "h"] & \\
a \arrow[ur, "f"'] \arrow[uur, bend left, "f'"] & & b \arrow[ul, "g"] \arrow[uul, bend right, "g'"']
\end{tikzcd}$$

補題 11. 関手 $F\colon C \rightarrow \mathbf{Set}$ が sifted flat ならば，任意の $s, t \in 1{\downarrow}F$ に対して，$1{\downarrow}F$ における span からなる圏 $\mathrm{Span}(s, t)$ は連結である．

証明. まず定理 6 の $\Longrightarrow$ の証明により，ある $\langle c, s\rangle \in 1{\downarrow}F$ と $f_i\colon \langle c, s\rangle \rightarrow \langle c_i, u_i\rangle$ が存在することが分かる．故に $\mathrm{Span}(\langle c_0, u_0\rangle, \langle c_1, u_1\rangle) \neq \mathbf{0}$ である．

次に二つの span $\langle c_0, u_0\rangle \xleftarrow{f_0} \langle c, u\rangle \xrightarrow{f_1} \langle c_1, u_1\rangle$，$\langle c_0, u_0\rangle \xleftarrow{f_0'} \langle c', u'\rangle \xrightarrow{f_1'} \langle c_1, u_1\rangle$ を取る．この二つが zigzag で結ばれることを示そう．直積の普遍性から $\theta\colon y(c) \rightarrow$

$y(c_0)\times y(c_1)$，$\theta'\colon y(c')\to y(c_0)\times y(c_1)$ が存在する．

$$
\begin{tikzcd}
& y(c) \arrow[d, dashed, "\theta"] \arrow[ddl, bend right, "y(f_0)"'] \arrow[ddr, bend left, "y(f_1)"] & \\
& y(c_0)\times y(c_1) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
y(c_0) & & y(c_1)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& y(c') \arrow[d, dashed, "\theta'"] \arrow[ddl, bend right, "y(f_0')"'] \arrow[ddr, bend left, "y(f_1')"] & \\
& y(c_0)\times y(c_1) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
y(c_0) & & y(c_1)
\end{tikzcd}
$$

定理 6 の $\Longrightarrow$ の証明と同様，次の図式を得る．

$$
\begin{tikzcd}
& Fc \arrow[d, "y^\dagger F(\theta)"] \arrow[dddl, bend right, "Ff_0"'] \arrow[dddr, bend left, "Ff_1"] & \\
& y^\dagger F(y(c_0)\times y(c_1)) \arrow[d, "h"', "\wr"] \arrow[ddl] \arrow[ddr] & \\
& Fc_0\times Fc_1 \arrow[dl, "p_0"] \arrow[dr, "p_1"'] & \\
Fc_0 & & Fc_1
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& Fc' \arrow[d, "y^\dagger F(\theta')"] \arrow[dddl, bend right, "Ff_0'"'] \arrow[dddr, bend left, "Ff_1'"] & \\
& y^\dagger F(y(c_0)\times y(c_1)) \arrow[d, "h"', "\wr"] \arrow[ddl] \arrow[ddr] & \\
& Fc_0\times Fc_1 \arrow[dl, "p_0"] \arrow[dr, "p_1"'] & \\
Fc_0 & & Fc_1
\end{tikzcd}
$$

故に

$$
\begin{aligned}
u_i &= Ff_i(u) = \big(p_i\circ h\circ y^\dagger F(\theta)\big)(u) = p_i(h(y^\dagger F(\theta)(u))) \\
u_i' &= Ff_i'(u') = \big(p_i\circ h\circ y^\dagger F(\theta')\big)(u') = p_i(h(y^\dagger F(\theta')(u)))
\end{aligned}
$$

を得る．よって集合の直積の定義から，$h(y^\dagger F(\theta)(u)) = h(y^\dagger F(\theta')(u'))$ である．h が同型だから $y^\dagger F(\theta)(u) = y^\dagger F(\theta')(u')$ を得る．同型 $Fc\cong y^\dagger F(y(c))$ は $u\longmapsto [\mathrm{id}_c, u]$ で与えられていたから，

$$
\begin{tikzcd}
& y^\dagger F(y(c)) \arrow[d, "y^\dagger F(\theta)"] \arrow[ddl, bend right, "y^\dagger F(y(f_0))"'] \arrow[ddr, bend left, "y^\dagger F(y(f_1))"] & \\
& y^\dagger F(y(c_0)\times y(c_1)) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
y^\dagger F(y(c_0)) & & y^\dagger F(y(c_1))
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& {[\mathrm{id}_c, u]} \arrow[d, mapsto] \arrow[ddl, bend right, mapsto] \arrow[ddr, bend left, mapsto] & \\
& {[\theta_c(\mathrm{id}_c), u]} \arrow[dl, mapsto] \arrow[dr, mapsto] & \\
{[f_0, u]} & & {[f_1, u]}
\end{tikzcd}
$$

で考えれば $\theta_c(\mathrm{id}_c) = \langle f_0, f_1 \rangle$ となることが分かる．同様にして $\theta'_{c'}(\mathrm{id}_{c'}) = \langle f'_0, f'_1 \rangle$ である．また $[\langle f_0, f_1 \rangle, u] = y^\dagger F(\theta)(u) = y^\dagger F(\theta')(u') = [\langle f'_0, f'_1 \rangle, u']$ が分かる．これが成り立つ為には，次の右側の可換図式と $v_0 \in Fd_0, \cdots, v_n \in Fd_n$ であって

$$\begin{tikzcd}
u \arrow[d, mapsto] & \in & Fc \arrow[d, "Fk_0"] \\
v_0 & \in & Fd_0 \\
v_1 \arrow[u, mapsto] & \in & Fd_1 \arrow[u, "Fk_1"'] \\
\vdots & & \vdots \\
v_n & \in & Fd_n \\
u' \arrow[u, mapsto] & \in & Fc' \arrow[u, "Fk_n"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& c \arrow[d, "k_0"] \arrow[ddl, "f_0"'] \arrow[ddr, "f_1"] & \\
& d_0 \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
c_0 & d_1 \arrow[u, "k_1"'] \arrow[l] \arrow[r] & c_1 \\
& \vdots & \\
& d_n \arrow[ul] \arrow[ur] & \\
& c' \arrow[u, "k_n"'] \arrow[uuul, "f'_0"] \arrow[uuur, "f'_1"'] &
\end{tikzcd}$$

$Fk_0(u) = v_0$, $Fk_1(v_1) = v_0$, $Fk_n(u') = v_n$ となるものが存在しなければならない．これは圏 $1 \downarrow F$ における二つの span $\langle f_0, f_1 \rangle$, $\langle f'_0, f'_1 \rangle$ が zigzag で結ばれることを意味する． $\square$

命題 12. 小圏 C に対して以下の条件は同値.

(1) C が sifted

(2) 任意の $a, b \in C$ に対して $\mathrm{Cospan}(a, b)$ が連結

(3) 対角関手 $\Delta\colon C \to C \times C$ が final

証明. ($1 \implies 2$) $F := \mathrm{colim} \circ y\colon C^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ と置く．

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Set}^C \arrow[dr, "\mathrm{colim}"] & \\
C^{\mathrm{op}} \arrow[u, "y"] \arrow[r, "F"'] \arrow[ur, phantom, "\Uparrow"] & \mathbf{Set}
\end{tikzcd}$$

C が sifted だから F は sifted flat である．一方 $1 \downarrow F = C^{\mathrm{op}}$ であった．よって補題 11 により，任意の $a, b \in C$ に対して $\mathrm{Cospan}(a, b)$ が連結であることが分かる．

($2 \iff 3$) $\Delta\colon C \to C \times C$ を対角関手とすれば，$a, b \in C$ に対して $\langle a, b \rangle \downarrow \Delta = \mathrm{Cospan}(a, b)$ である．よって「Δ が final $\iff$ 任意の a, b に対して $\langle a, b \rangle \downarrow \Delta$ が連結」(随

伴関手定理の PDF で証明済) より明らか.

(2 $\Longrightarrow$ 1) 略 $\square$

よって有限余直積を持つ圏は sifted である.

双対を考えれば「小圏 C が cosifted $\Longleftrightarrow$ 任意の $a, b \in C$ に対して $\mathrm{Span}(a, b)$ が connected」である.

定理 13. 関手 $F\colon C \to \mathbf{Set}$ に対して以下の条件は同値.

(1) F が sifted flat

(2) $1 \downarrow F$ が cosifted

(3) F は表現可能関手の sifted colimit である．即ち sifted な圏 J と関手 $K\colon J \to C^{\mathrm{op}}$ が存在して $F \cong \mathrm{colim}(J \xrightarrow{K} C^{\mathrm{op}} \xrightarrow{y} \mathbf{Set}^C)$ と書ける.

証明. (1 $\Longrightarrow$ 2) 補題 1 より明らか.

(2 $\Longrightarrow$ 3) $y^\dagger y \cong \mathrm{id}$ だから各点 Kan 拡張により

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{1} \arrow[r, "F"] & \mathbf{Set}^C \arrow[dr, "\mathrm{id}"] & \\
y \downarrow F \arrow[u] \arrow[r] \arrow[ur, phantom, "\Nwarrow"] & C^{\mathrm{op}} \arrow[u, "y"'] \arrow[r, "y"'] \arrow[ur, phantom, "\Uparrow"] & \mathbf{Set}^C
\end{tikzcd}$$

$F \cong y^\dagger y(F) \cong \mathrm{colim}(y \downarrow F \to C^{\mathrm{op}} \xrightarrow{y} \mathbf{Set}^C)$ であるが条件 2 より $y \downarrow F = (1 \downarrow F)^{\mathrm{op}}$ は sifted である.

(3 $\Longrightarrow$ 1) sifted な J と $S\colon J \to C^{\mathrm{op}}$ が存在して $F \cong \mathrm{colim}(J \xrightarrow{S} C^{\mathrm{op}} \xrightarrow{y} \mathbf{Set}^C) = \operatorname*{colim}_{j \in J} \mathrm{Hom}_C(Sj, -)$ と書けるとする．$y^\dagger \dashv y^{-1}$ だから $y^\dagger$ は余極限と交換し

$$y^\dagger F = y^\dagger\bigl(\operatorname*{colim}_{j \in J} \mathrm{Hom}_C(Sj, -)\bigr) = \operatorname*{colim}_{j \in J} y^\dagger\bigl(\mathrm{Hom}_C(Sj, -)\bigr) = \operatorname*{colim}_{j \in J} \mathrm{ev}_{Sj}$$

である．ev_{Sj} は極限と交換し，$\mathrm{colim}_{j \in J}$ は有限直積と交換するから，$y^\dagger F$ も有限直積と交換する. $\square$

参考文献

[1] J. Adamek and J. Rosicky, On sifted colimits and generalized varieties, Theory and Applications of Categories, Vol. 8 (2001), No. 3, 33–53, http://www.tac.mta.ca/tac/volumes/8/n3/8-03abs.html